УДК 517. 95

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

Т. К. Юлдашев, Г. А. Дыйканов

Баткенский государственный университет, Кызыл-Кия, Кыргызстан

Поступила в редакцию 3.06.2010 г.

Аннотация. В данной работе изучается разрешимость смешанной задачи для одного типа нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего суперпозицию параболического и гиперболического операторов. С помощью метода разделения переменных получается счетная система нелинейных интегральных уравнений. Используется метод последовательных приближений. Доказывается сходимость полученных рядов.

Ключевые слова: Смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка, нелинейные отклонения по времени, суперпозиция параболического и гиперболического операторов, метод разделения переменных, метод последовательных приближений, сходимость рядов Фурье.

Abstract. In this paper we study the solvability of mixed value problem for a nonlinear integro-differential equation, consisting superposition of parabolic and hyperbolic operators. By the method of separation variables we obtain the countable system of nonlinear integral equation. We use the method of successive approximations. It will be proved the convergence of obtained Fourier series.

Key words: Mixed value problem, nonlinear partial integro-differential equation of the fourth order, deviation by time, method of partition (separation) variables, superposition of parabolic and hyperbolic operators, method of successive approximations, convergence Fourier series.

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=$$
$$=f\left(t,x,u(t,x),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{m}K_j(t,s)\times\right. \qquad (1)$$
$$\left.\times u\left(\sigma_j(s,x,u(s,x)),x\right)ds\right)$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),$$
$$u_t(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x), \qquad (2)$$
$$u_{tt}(t,x)_{|t=0}=\varphi_3(x)$$

и граничными

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=$$
$$=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0 \qquad (3)$$

условиями, где $f(t,x,u,\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $0<K_j(t,s)\in C(D_T^2)$, $j=\overline{1,m}$, $\varphi_i(x)\in C^1\left(D_l\right)$, $\varphi_i(x)_{|x=0}=\varphi_i(x)_{|x=l}=\varphi_i''(x)_{|x=0}=\varphi_i''(x)_{|x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv\left[0,T\right]$, $D_l\equiv\left[0,l\right]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$, $\sigma_j(t,x,u(t,x))\in C\left(D_T\times R\right)$, $0\le\sigma_j(t,x,u)\le t$.

Отметим, что в работах [1,2] изучены краевые задачи для однородных и линейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков.

В данной работе в отличие от других работ (напр. см. [3, 4]) отказывается от аналитичности правой части уравнения (1).

Решение задачи (1) — (3) ищем в виде ряда Фурье:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x), \qquad (4)$$
$$(t,x)\in D,$$

где $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\ldots$

Заметим, что функции $b_n(x)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$b_n(0)=b_n(l)=b_n''(0)=b_n''(l)=0.$$

Кочүрмө анык
Окуу канцеляриясы ф.и.а.
Мурзаева А.И.

Следовательно, функция, определенная с помощью ряда (4), формально удовлетворяет условиям (3).

В множестве $\left\{\vec{a}(t) = \left(a_n(t)\right) \middle| a_n(t) \in C\left[0;T\right], n = 1, 2, ...\right\}$ определим операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр покоординатно. Тогда данное множество становится линейным векторным пространством. Берем те элементы этого векторного пространства, которые удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} \left|a_n(t)\right|^p < \infty.$$

Это множество обозначим через $B_p(T)$ и снабдим его нормой

$$\left\|\vec{a}(t)\right\|_{B_p(T)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} \left|a_n(t)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $B_p(T)$ будет пространством типа Банаха.

Для каждого $\vec{a}(t) \in B_p(T)$ определим оператор Q следующим образом:

$$Q\vec{a}(t) = u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x).$$

Обозначим через $E_p(D)$ множество значений этого оператора Q. Очевидно, что $Q : B_p(T) \to E_p(D)$.

Обозначим через $W_{k,p}\left(D\right)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x)$ при фиксированном значении $t \in D_T$ принадлежат области определения оператора $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, имеют k-тые производные по t, принадлежащие $L_p\left(D_l\right)$, и обращаются в нуль при $t \geq T - \delta$ ($0 < \delta$ — зависит от $\Phi(t,x)$) и

$$L_{p,q}(D) = \left\{u(t,x) : \left[\int_0^T \left(\int_0^l \left|u(t,x)\right|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} dt\right]^{\frac{1}{q}} < \infty\right\}.$$

Когда $q = 1$ или $p = 1$, множество $L_{p,q}(D)$ пишется соответственно $L_p\left(D_l\right)$ или $L_q\left(D_T\right)$.

Ясно, что пространство $W_{k,p}\left(D\right)$ — всюду плотно в $L_{p,q}(D)$. Для функций из этого пространства справедливо соотношение

$$\lim_{t \to T} \int_0^l \Phi(t,x) dx = \lim_{t \to T} \int_0^l \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} dx = \lim_{t \to T} \int_0^l \frac{\partial^2 \Phi(t,x)}{\partial t^2} dx = 0 \quad \text{при } k = 3.$$

Кроме того, через $Lip\left\{F_{|u,v,...}\right\}$ обозначим класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \ldots$ с коэффициентом F.

Определение. Если функция $u(t,x) \in E_p(D)$, удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_0^l \left\{u(t,x)\left[-\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right) + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi\right] - f\Phi\right\} dx dt =$$
$$= -\int_0^l \varphi_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right]_{t=0} dx + \int_0^l \varphi_2 \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right]_{t=0} dx - \int_0^l \varphi_3 \left[\Phi\right]_{t=0} dx$$

для любого $\Phi(t,x) \in W_{k,p}\left(D\right)$, то функция $u(t,x)$ называется решением смешанной задачи (1)—(3).

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. Функции $f(t,x,u,\vartheta)$ и $\sigma_j(t,x,u)$ непрерывны по совокупности своих аргументов;
2. $\left\|\vec{\psi}(t)\right\|_{B_p(T)} < \infty$.

Тогда коэффициенты Фурье формального решения смешанной задачи (1) — (3) по собственным функциям $b_n(x)$ оператора $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ удовлетворяет следующей ССНИУ:

$$a_n(t) = \psi_n(t) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \int_0^l f\left(s, x, Q\vec{a}(s), \int_0^s \sum_{j=1}^m K_j\left(s,\theta\right) \times Q\vec{a}\left(\sigma_j\left(\theta, x, Q\vec{a}(\theta)\right)\right) d\theta\right) \times b_n(x) G_n(t,s) dx ds, \ t \in D_T, \tag{5}$$

где

Хочурмо анан
Окмы катчо фи в А. Шурк- Мурзалиева А.

$$\psi_n(t) = \frac{\lambda_n^2\varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} +$$
$$+ \frac{\lambda_n^4\varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \cos\lambda_n t +$$
$$+ \frac{\lambda_n^2\varphi_{1n} + (1+\lambda_n^2)\varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^3 + \lambda_n^5} \sin\lambda_n t,$$
$$G_n(t,s) =$$
$$= \mu_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \lambda_n \sin\lambda_n(t-s) - \cos\lambda_n(t-s)\right],$$
$$\mu_n = \left[\lambda_n(1+\lambda_n^2)\right]^{-1},$$
$$a_n(t) = \int_0^l u(t,x) b_n(x) dx.$$

Доказательство. Пусть в определении решения смешанной задачи $\Phi = \Phi_m(t,x) = g(t)b_m(x) \in W_{k,p}\left(D\right)$, где $0 \neq g(t) \in C^3\left(D_T\right)$.

Тогда имеем

$$\int_0^t\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)\cdot b_n(x)\times\right.$$

ледовательных приближений. При этом итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = \psi_n(t), t\in D_T, \\ a_n^{k+1}(t) = \psi_n(t) + \dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\int_0^t\int_0^l f_k b_n(x) G_n(t,s) dx ds, \\ k = 0,1,2,3,\ldots, \\ t\in D_T. \end{cases} \quad (11)$$

В силу условий теоремы для первой разности $a_n^1(t) - a^0(t)$ из (11) получим

$$\left\|\vec{a}^1(t) - \vec{a}^0(t)\right\|_{B_p(T)} \leq$$
$$\leq M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t\in D_T}\int_0^t\int_0^l \left|f_0\right|\cdot\left|b_n(x)\right|\cdot\left|G_n(t,s)\right| dx ds \leq$$
$$\leq M_1 M_2 M_3 \int_0^T \left\|f_0\right\|_{L_p(D)} \left\{\int_0^l 1^q dx\right\}^{\frac{1}{q}} dt \leq \quad (12)$$
$$\leq M_1 M_2 M_3 l^{\frac{1}{q}} \Delta,$$

где

$$M_1 = \left\|\frac{1}{\lambda}\right\|_{l_q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^q}\right)^{\frac{1}{q}},$$
$$M_2 = \left\|\vec{b}(x)\right\|_{B_p(D)},$$
$$M_3 = \left\|\vec{G}(t,s)\right\|_{B_p(T)},$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ет обобщенные производные третьего порядка по t в смысле Соболева на интервале D_T. Поскольку $g(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (7) получим

$$a_n'''(t) + \lambda_n^2 a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n'(t) + \lambda_n^4 a_n(t) =$$
$$= \int_0^l f\left(t, x, Q\vec{a}(t), \int_0^t\sum_{j=1}^m K_j\left(t,s\right)\times\right. \quad (8)$$
$$\left.\times Q\vec{a}\left(\sigma_j\left(s,x,Q\vec{a}(s)\right)\right)ds\right) b_n(x) dx.$$

Решая систему (8) методом вариации произвольных постоянных, получим

$$a_n(t) = C_{1n} e^{-\lambda_n^2 t} + C_{2n}\cos\lambda_n t + C_{3n}\sin\lambda_n t +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s, x, Q\vec{a}(s), \int_0^s\sum_{j=1}^m K_j\left(s,\theta\right)\times\right.$$
$$\left.\times Q\vec{a}\left(\sigma_j\left(\theta, x, Q\vec{a}(\theta)\right)\right)d\theta\right)\times \quad (9)$$
$$\times b_n(x)\cdot G_n(t,s) dx ds,$$
$$t\in D_T,$$

где

$$\left\|\vec{a}^{k+1}(t) - \vec{a}^k(t)\right\|_{B_p(T)} \leq$$
$$\leq \left(M_1 M_3 l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} M_2^{2k+1}\Delta \frac{\left[\int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D)} ds\right]^k}{k!}. \quad (14)$$

Далее, в силу (14) получим

$$\left\|\vec{a}(t) - \vec{a}^{k+1}(t)\right\|_{B_p(T)} \leq$$
$$\leq M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t\int_0^l F(s,x)\left\|\vec{a}(s) - \vec{a}^k(s)\right\|_{B_p(T)} dx ds \leq$$
$$\leq M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t\int_0^l F(s,x)\left\|\vec{a}(s) - \vec{a}^{k+1}(s)\right\|_{B_p(T)} dx ds +$$
$$+ M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t\int_0^l F(s,x)\left\|\vec{a}^{k+1}(s) - \vec{a}^k(s)\right\|_{B_p(T)} dx ds \leq$$
$$\leq \left(M_1 M_3 l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} M_2^{2k+1}\Delta\times \quad (15)$$
$$\times\frac{\left[\int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D)} ds\right]^k}{k!} +$$
$$+ M_1 M_2^2 M_3 l^{\frac{1}{q}} \int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D)}\times$$
$$\times\left\|\vec{a}(s) - \vec{a}^{k+1}(s)\right\|_{B_p(T)} ds.$$

Применяя к (15) неравенство типа Гронуолла – Беллмана, получим (10). Существование

Көчүрмө анык.
Окумуштуу катчысы, ф.и.к. Мурзалиева А.Ш.

3. $\sigma_j(t,x,u) \in Lip\left\{F(t,x)\Big|_u\right\}$, где

$$\int_0^t \left\|F_j(s,x)\right\|_{L_p(D_1)} ds < \infty;$$

4. $\left\|\vec{\psi}(t)\right\|_{B_p(T)} < \infty$.

Тогда ССНИУ (5) имеет единственное решение в пространстве $B_p(T)$. Кроме того, имеет место оценка

$$\left\|\vec{a}^{k+1}(t) - \vec{a}^k(t)\right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le \frac{\delta_1}{k!}\left[\int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D_1)} ds\right]^k \exp\left\{\delta_2 \int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D_1)} ds\right\}, \tag{10}$$

где

$$F(s,x) = F_1(s,x)\cdot\left(1 + \int_0^t \sum_{j=1}^m \left|K_j(s,\theta)\right|\cdot\left(1 + \Delta\cdot F_j(\theta,x)\right)d\theta\right),$$

δ_1 и δ_2 – некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. При этом итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = \psi_n(t),\ t \in D_T, \\ a_n^{k+1}(t) = \psi_n(t) + \dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\int_0^t\int_0^l f_k b_n(x) G_n(t,s)\,dx\,ds, \\ k = 0,1,2,3,\ldots, \\ t \in D_T. \end{cases} \tag{11}$$

В силу условий теоремы для первой разности $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ из (11) получим

$$\left\|\vec{a}^1(t) - \vec{a}^0(t)\right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le M_1 \sum_{n=1}^\infty \max_{t\in D_T}\int_0^t\int_0^l \left|f_0\right|\cdot\left|b_n(x)\right|\cdot\left|G_n(t,s)\right| dx\,ds \le$$

$$\le M_1 M_2 M_3 \int_0^T \left\|f_0\right\|_{L_p(D_1)}\left\{\int_0^l 1^q dx\right\}^{\frac{1}{q}} dt \le \tag{12}$$

$$\le M_1 M_2 M_3 l^{\frac{1}{q}} \Delta,$$

где

$$M_1 = \left\|\frac{1}{\lambda}\right\|_q = \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n^q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$M_2 = \left\|\vec{b}(x)\right\|_{B_p(l)},$$

$$M_3 = \left\|\vec{G}(t,s)\right\|_{B_p(T)},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

С учетом (12) в силу второго и третьего условий теоремы для второй разности $a_n^2(t) - a_n^1(t)$ получим следующую оценку

$$\left\|\vec{a}^2(t) - \vec{a}^1(t)\right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le M_1 M_2 M_3 \int_0^t\int_0^l \left|f_1 - f_0\right| dx\,ds \le$$

$$\le M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t\int_0^l F_0(s,x)\cdot\left(\left\|\vec{a}^1(s) - \vec{a}^0(s)\right\|_{B_p(T)} + \right.$$

$$+\int_0^t \sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)\left\|\vec{a}^1\left(\sigma_j\left(\theta,x,Q\vec{a}^1(\theta)\right)\right) - \right. \tag{13}$$

$$\left.\left. -\vec{a}^0\left(\sigma_j\left(\theta,x,Q\vec{a}^0(\theta)\right)\right)\right\|_{B_p(T)} d\theta\right) dx\,ds \le$$

$$\le \left(M_1 M_3 l^{\frac{1}{q}}\right)^2 M_2^3 \Delta \int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D_1)} ds,$$

$$(t,x) \in D.$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа k, аналогично (13) получим

$$\left\|\vec{a}^{k+1}(t) - \vec{a}^k(t)\right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le \left(M_1 M_3 l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} M_2^{2k+1} \Delta \frac{\left[\int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D_1)} ds\right]^k}{k!}. \tag{14}$$

Далее, в силу (14) получим

$$\left\|\vec{a}(t) - \vec{a}^{k+1}(t)\right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t\int_0^l F(s,x)\left\|\vec{a}(s) - \vec{a}^k(s)\right\|_{B_p(T)} dx\,ds \le$$

$$\le M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t\int_0^l F(s,x)\left\|\vec{a}(s) - \vec{a}^{k+1}(s)\right\|_{B_p(T)} dx\,ds +$$

$$+ M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t\int_0^l F(s,x)\left\|\vec{a}^{k+1}(s) - \vec{a}^k(s)\right\|_{B_p(T)} dx\,ds \le$$

$$\le \left(M_1 M_3 l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} M_2^{2k+1} \Delta \times \tag{15}$$

$$\times \frac{\left[\int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D_1)} ds\right]^k}{k!} +$$

$$+ M_1 M_2^2 M_3 l^{\frac{1}{q}} \int_0^t \left\|F(s,x)\right\|_{L_p(D_1)} \times$$

$$\times \left\|\vec{a}(s) - \vec{a}^{k+1}(s)\right\|_{B_p(T)} ds.$$

Применяя к (15) неравенство типа Гронуолла–Беллмана, получим (10). Существование

Кочурмо анык.
Окм. катчысы, ф.и.к. Мурзалиева А.Ш.

решения ССНИУ (5) следует из оценки (14), так как при $k \to \infty$ последовательность функций $\left\{\vec{a}^k(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $\vec{a}(t) \in B_p(T)$. Покажем единственность этого решения в пространстве $B_p(T)$. Пусть ССНИУ (5) имеет два решения: $\vec{a}(t) \in B_p(T)$ и $\vec{\vartheta}(t) \in B_p(T)$. Тогда для их разности получим оценку

$$\left\|\vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t)\right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le M_1 M_2^2 M_3 l^p \int_0^t \left\|F(s, x)\right\|_{L_p(D)} \times \qquad (16)$$

$$\times \left\|\vec{a}(s) - \vec{\vartheta}(s)\right\|_{B_p(T)} ds.$$

Применяя к (16) неравенство типа Гронуолла Бельмана, получим, что $\left\|\vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t)\right\|_{B_p(T)} \equiv 0$ для всех $t \in \left[0; T\right]$. Отсюда следует единственность решения ССНИУ (5) в пространстве $B_p(T)$.

Подставляя ССНИУ (5) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (1) — (3):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\psi_n(t) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s, x, Q\vec{a}(s), \int_0^s \sum_{j=1}^m K_j \times\right. \qquad (17)$$

$$\left.\times (s, \theta) Q\vec{a}\left(\sigma_j\left(\theta, x, Q\vec{a}(\theta)\right)\right)d\theta\right) \times$$

$$\times b_n(x) G_n(t, s) dx ds\Big] \cdot b_n(x).$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теорем 1 и 2. Тогда ряд (17) будет решением смешанной задачи (1) — (3).

Доказательство. Так как $\vec{a}(t) \in B_p(T)$, то из равенства

$$\lim_{k\to\infty} u^k(t, x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n(t) \cdot b_n(x) = u(t, x)$$

в силу первого условия теоремы 1 следует, что

$$\lim_{k\to\infty} f\left(t, x, u^k(t, x), \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j\left(t, s\right) u^k \times\right.$$

$$\left.\times\left(\sigma_j\left(s, x, u^k(s, x)\right), x\right) ds\right) = \qquad (18)$$

$$= f\left(t, x, u(t, x), \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j\left(t, s\right) u \times\right.$$

$$\left.\times\left(\sigma_j\left(s, x, u(s, x)\right), x\right) ds\right).$$

Строим последовательность функций:

$$P_k = \int_0^T\int_0^l \Big\{u^k(t, x)\left[-\Phi_{ttt} - \Phi_{ttx} - \Phi_{txx} + \Phi_{xxx}\right] -$$

$$-f\left(t, x, u^k(t, x), \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j\left(t, s\right) u^k \times\right.$$

$$\left.\times\left(\sigma_j\left(s, x, u^k(s, x)\right), x\right) ds\right)\Phi(t, x)\Big\} dx dt + \qquad (19)$$

$$+\int_0^l \varphi_1^k\left[\Phi_{tt} + \Phi_{txx} + \Phi_{xx}\right]_{t=0} dx -$$

$$-\int_0^l \varphi_2^k\left[\Phi_t + \Phi_{xx}\right]_{t=0} dx + \int_0^l \varphi_3^k\left[\Phi\right]_{t=0} dx.$$

Покажем, что $\lim_{k\to\infty} P_k = 0$. Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (19) и учитывая условия теоремы и начальные условия

$$a_n(0) = \varphi_{1n},$$

$$a_n{}'(0) = \varphi_{2n},$$

$$a_n{}''(0) = \varphi_{3n},$$

имеем:

$$P_k = \int_0^l \left(\varphi_1(x) - \sum_{n=1}^{k} \varphi_{1n} b_n(x)\right) \times$$

$$\times\left[\Phi_{tt} + \Phi_{txx} + \Phi_{xx}\right]_{t=0} dx -$$

$$-\int_0^l \left(\varphi_2(x) - \sum_{n=1}^{k} \varphi_{2n} b_n(x)\right)\left[\Phi_t + \Phi_{xx}\right]_{t=0} dx +$$

$$+\int_0^l \left(\varphi_3(x) - \sum_{n=1}^{k} \varphi_{3n} b_n(x)\right)\left[\Phi\right]_{t=0} dx + \qquad (20)$$

$$+\int_0^T\int_0^l \Phi(t, x) \sum_{n=1}^{k}\Big\{\int_0^l f\left(t, y, u^k(t, x), \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j\left(t, s\right) \times\right.$$

$$\left.\times u^k\left(\sigma_j\left(s, x, u^k(s, x)\right), x\right) ds\right) \times b_n(y) dy -$$

$$-f\left(t, x, u^k(t, x), \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j\left(t, s\right) u^k \times\right.$$

$$\left.\times\left(\sigma_j\left(s, x, u^k(s, x)\right), x\right) ds\right)\Big\} \cdot b_n(x) dx dt.$$

Очевидно, что первые три интеграла в (20) стремятся к нулю при $k \to \infty$, так как $\varphi_i(x) \in L_p(D_l)$. Сходимость разности двух последних интегралов в (20) при $k \to \infty$ следует из (18). Отсюда получаем, что $\lim_{k\to\infty} P_k = 0$. Это и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т. Д., Логинов Б. В., Малюгина И. А.* Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков // Дифференциальные уравнения мат. физики и их приложения. Ташкент: Фан. — 1989. — С. 24 — 36.

Көчүрмө анык
Окмын катчысы ф.и.к. Муратаева А.А.

2. *Бекиев А. Б.* Краевая задача для уравнения четвертого порядка // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Тезисы докладов. М.: ФВМиК МГУ имени Ломоносова. — 2009. — С. 140 — 141.

3. *Вагабов А. И., Абдурагимов Э. А.* Аналитический метод решения смешанной задачи для квазилинейной параболической системы // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 7. — С. 3 — 12.

4. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: МГУ. — 1991. — 112 с.

Юлдашев Турсун Камалдинович — кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Финансы и кредит» Баткенского государственного университета

Тел. +7 923 372-51-79

E-mail: tursunbay@rambler.ru

Дыйканов Гапар Аскарович — старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Баткенского государственного университета

Тел. 996 550 38-44-17

E-mail: tursunbay@rambler.ru

Yuldashev Tursun Kamaldinovich — candidate of Physics and Mathematics, docent, professor of finance and credit department of Batken state university

Tel. +7 923 372-51-79

E-mail: tursunbay@rambler.ru

Dyikanov Gapar Askarovich — lecturer of higher mathematics department of Batken state university

Tel. 996 550 38-44-17

E-mail: tursunbay@rambler.ru

Көчүрмө оного

Окуу катчысы ф.-и. к. Мурзамева А