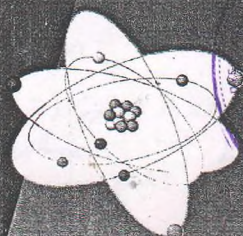




ОШ МАМЛЕКЕТТИК  
УНИВЕРСИТЕТИНИН  
ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК  
ОШСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

2017





Дыйканов Г. А., ага окутуучу  
Баткен мамлекеттик университети

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ  
ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF  
FOURTH ORDER

**Аннотация:** Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и построения решения одной смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с суперпозицией параболического и гиперболического операторов. Использован метод Фурье, основанный на разделении переменных. Получена счетная система интегральных уравнений. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной смешанной задачи и доказана соответствующая теорема.

**Abstract:** This article considers the questions of one-valued solvability and constructing the solution of mixed value problem for a nonlinear differential equation with superposition of parabolic and hyperbolic operators. Is used the Fourier method based on separation of variables. It is obtained the countable system of nonlinear integral equations. The criterion of one-value solvability of the considering problem is installed. Under this criterion is proved the one-valued solvability of the problem.

**Ключевые слова:** Дифференциальное уравнение, смешанная задача, метод Фурье, суперпозиция дифференциальных операторов, однозначная разрешимость.

**Key words:** Differential equation, mixed problem, Fourier method, superposition of differential operators, one-valued solvability.

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных, краевых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач, в силу ее прикладной важности, в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений.

Исследования многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек описываются дифференциальными уравнениями в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., напр. [1-5]).

Метод разделения переменных при исследовании дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных применяется в работах многих авторов, в частности в [6-14].

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость смешанной задачи для следующего дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = f(t, x, u(t, x), u(\delta(t, x), x)) \quad (1)$$

со смешанными условиями

$$\begin{cases} u(t, x)|_{t \in (-\infty, 0]} = \varphi_1(t, x), u(t, x)|_{t \in (T, \infty)} = 0, \\ u_1(t, x)|_{t=0} = \varphi_2(x), u_{11}(t, x)|_{t=0} = \varphi_3(x), \end{cases} \quad (2)$$

$$u(t, x)|_{x=0} = u(t, x)|_{x=l} = u_{xx}(t, x)|_{x=0} = u_{xx}(t, x)|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

Учурова А. А.  
Окунев К. К., ф.и.к. А. Мурзаева А. А.

где  $f(t, x, u, \vartheta) \in C(D \times R^2)$ ,  $\varphi_i(x) \in C^5(D_l)$ ,  $\varphi_i(x)|_{x=0} = \varphi_i(x)|_{x=l} = \varphi_i''(x)|_{x=0} = \varphi_i''(x)|_{x=l} = 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ .  $\varphi_1(0, x) = \varphi_1(x)$ ,  $D \equiv D_T \times D_l$ ,  $D_T \equiv [0, T]$ ,  $D_l \equiv [0, l]$ ,  $0 < l < \infty$ ,  $0 < T < \infty$ ,  $\delta(t, x) \neq t$ .

Решение данной задачи разыскивается в виде ряда Фурье:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x), \quad (t, x) \in D, \quad (4)$$

где  $b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x$ ,  $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

В прямоугольнике  $D$  рассмотрим Соболево пространство  $W_p^k(D)$ . Это - класс функций  $u(t, x)$  из  $L_p(D)$ , обобщенные производные порядка  $k$  суммируем со степенью  $p \geq 1$ .

**Определение.** Если функция  $u(t, x) \in W_2^3(D)$  удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \left\{ u(t, x) \left[ -\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi \right] - f \Phi \right\} dx dt \\ & = - \int_0^l \varphi_1 \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right]_{t=0} dx + \\ & + \int_0^l \varphi_2 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right]_{t=0} dx - \int_0^l \varphi_3 [\Phi]_{t=0} dx \end{aligned}$$

для любого  $\Phi(t, x) \in C^{3,4}(D)$ , то функция  $u(t, x)$  называется обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3).

Покажем, что коэффициенты Фурье решения смешанной задачи (1)-(3) собственным функциям  $b_n(x)$  удовлетворяет следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t) = \psi_n(t) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x))) b_n(x) G_n(t, s) dx ds, \quad t \in D_T,$$

где

$$\begin{aligned} \psi_n(t) = & \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^4 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \cos \lambda_n t + \\ & + \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + (1 + \lambda_n^2) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \sin \lambda_n t, \end{aligned}$$

Жокуршо амак  
Окнои катгоса, ф.и.к.



Мурзахмедов А.И.



$$G_n(t, s) = \mu_n \left[ e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \lambda_n \sin \lambda_n(t-s) - \cos \lambda_n(t-s) \right],$$

$$\mu_n = \left[ \lambda_n (1 + \lambda_n^2) \right]^{-1}.$$

Действительно, согласно определению решения смешанной задачи

(3) имеем

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x) \left[ -\frac{\partial^3}{\partial t^3} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi \right] - f \Phi \right\} dx dt = - \int_0^1 \varphi_1 \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right]_{t=0} dx + \int_0^1 \varphi_2 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right]_{t=0} dx - \int_0^1 \varphi_3 [\Phi]_{t=0} dx. \quad (6)$$

Пусть в (6)  $\Phi = \Phi_m(t, x) = g(t)b_m(x) \in C^{3,4}(D)$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x) \times \right. \\ & \times \left[ -g'''(t)b_m(x) + \lambda_m^2 g''(t)b_m(x) - \lambda_m^2 g'(t)b_m(x) + \lambda_m^4 g(t)b_m(x) \right] - \\ & \left. - f(t, x, Q\bar{a}(t), Q\bar{a}(\delta(t, x)))g(t)b_m(x) \right\} dx dt = \\ & = \int_0^1 \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x) \left[ -g'''(t) + \lambda_m^2 g''(t) - \lambda_m^2 g'(t) + \lambda_m^4 g(t) \right] b_m(x) - \right. \\ & \left. - f(t, x, Q\bar{a}(t), Q\bar{a}(\delta(t, x)))g(t)b_m(x) \right\} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что система функций  $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  образует полную систему

нормированных функций в  $L_2(D_1)$ , из последнего равенства имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[ a_n(t) \cdot \left( -g'''(t) + \lambda_n^2 g''(t) - \lambda_n^2 g'(t) + \lambda_n^4 g(t) \right) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 f(t, x, Q\bar{a}(t), Q\bar{a}(\delta(t, x)))g(t)b_n(x) dx \right] dt = 0. \end{aligned}$$

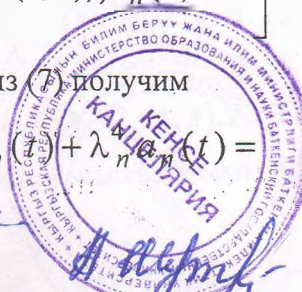
Отсюда, интегрируя по частям и учитывая свойство обобщенного решения, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T g(t) \left[ a_n'''(t) + \lambda_n^2 a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n'(t) + \lambda_n^4 a_n(t) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 f(t, x, Q\bar{a}(t), Q\bar{a}(\delta(t, x)))b_n(x) dx \right] dt = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Поскольку  $g(t) \neq 0$  для всех  $t \in D_T$ , то из (7) получим

$$a_n'''(t) + \lambda_n^2 a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n'(t) + \lambda_n^4 a_n(t) = \int_0^1 f(t, x, Q\bar{a}(t), Q\bar{a}(\delta(t, x)))b_n(x) dx$$

Кочурова Оксана Канчеш, ф.и.к.



Мурзаева А.И.

$$= \int_0^t f(t, x, Q\bar{a}(t), Q\bar{a}(\delta(t, x)))b_n(x) dx. \quad (8)$$

Решая систему (8) методом вариации произвольных постоянных, получим

$$a_n(t) = C_{1n}e^{-\lambda_n^2 t} + C_{2n} \cos \lambda_n t + C_{3n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x)))b_n(x)G_n(t, s) dx ds, \quad t \in D_T, \quad (9)$$

где 
$$G_n(t, s) = \mu_n \left[ e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \lambda_n \sin \lambda_n(t-s) - \cos \lambda_n(t-s) \right],$$

$$\mu_n = \left[ \lambda_n (1 + \lambda_n^2) \right]^{-1}.$$

Для того, чтобы определить коэффициентов  $C_{in}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), используем условия:

$$a_n(0) = \varphi_{1n}, \quad a'_n(0) = \varphi_{2n}, \quad a''_n(0) = \varphi_{3n},$$

где  $\varphi_{in} = \int_0^l \varphi_i(x)b_n(x) dx$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $x \in D_l$ . Тогда из (9) получим ССНИУ (5).

Теперь рассмотрим однозначную разрешимость ССНИУ (5).

**Лемма.** Пусть выполняются следующие условия:

1.  $\max_{t \in D_T} \int_0^l \left\| f(s, x, Q\bar{a}^0(s), Q\bar{a}^0(\delta(s, x))) \right\|_{L_2(D_l)} ds \leq \Delta < \infty;$
2.  $f(t, x, u, \vartheta) \in Lip \{F_1(t, x) |_{u, \vartheta}\}$ , где  $\max_{t \in D_T} \int_0^l \|F_1(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds < \infty;$
3.  $\|\bar{\psi}(t)\|_{B_2(T)} < \infty.$

Тогда ССНИУ (5) имеет единственное решение в пространстве  $B_2(T)$ . Кроме того, имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{a}(t) - \bar{a}^k(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \\ & \leq \frac{\delta_1}{k!} \max_{t \in D_T} \left[ \int_0^l \|F(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds \right]^k \exp \left\{ \delta_2 \max_{t \in D_T} \int_0^l \|F(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

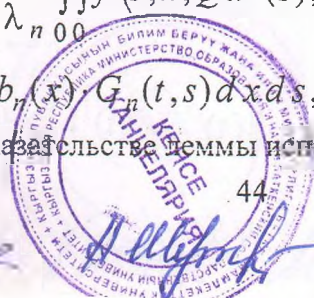
где  $F(s, x) = 2F_1(s, x)$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  - некоторые положительные постоянные.

**Доказательство.** Используем метод последовательных приближений. Итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = \psi_n(t), \quad t \in D_T, \quad a_n^{k+1}(t) = \psi_n(t) + \\ + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}^k(s), Q\bar{a}^k(\delta(s, x))) \times \\ \times b_n(x) G_n(t, s) dx ds, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad t \in D_T. \end{cases}$$

Кроме того, при доказательстве леммы используем обозначение

Кочурово аман  
Окноч камчысов, ф.и.к



Мурзамбаева А.М.



$$\|\bar{a}(t)\|_{B_2(t)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)|^2}.$$

В силу условий леммы для первой разности  $a_n^1(t) - a_n^0(t)$ , используя неравенства Гера и Бесселя, из (11) получим

$$\begin{aligned} & \|\bar{a}^1(t) - \bar{a}^0(t)\|_{B_2(t)} \leq \\ & \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l |f_0 b_n(x) G_n(t,s)| dx ds \right]^2} \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l |f_0| \cdot |b_n(x)| \cdot |G_n(t,s)| dx ds \leq \\ & \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \int_0^l |f_0| \cdot |b_n(x)| \cdot |G_n(t,s)| dx ds \right]^2} \leq \\ & \leq M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^l |f_0| \cdot |b_n(x)| \cdot |G_n(t,s)| dx ds \leq \\ & \leq \max_{t \in D_T} \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |G_n(t,s)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^l |f_0| \cdot |b_n(x)| dx \right]^2} ds \leq \\ & \leq M_1 M_2 \max_{t \in D_T} \int_0^t \|f_0\|_{L_2(D_t)} dt \leq M_1 M_2 \Delta, \end{aligned} \tag{12}$$

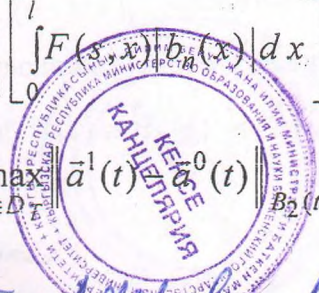
$$f_k = f(s, x, Q\bar{a}^k(s), Q\bar{a}^k(\delta(s, x, Q\bar{a}^k(s))))), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$M_1 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}} = \left\| \frac{1}{\lambda} \right\|_{l_2}, \quad M_2 = \max_{(t,s)} \| \bar{G}(t,s) \|_{B_2(t)}$$

Для второй разности  $a_n^2(t) - a_n^1(t)$  аналогично имеем

$$\begin{aligned} & \|\bar{a}^2(t) - \bar{a}^1(t)\|_{B_2(t)} \leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l |f_1 - f_0| dx ds \leq \\ & \leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l F(s,x) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^1(s) - a_n^0(s)| \cdot |b_n(x)| dx ds \leq \\ & \leq M_1 M_2 \int_0^t \|\bar{a}^1(s) - \bar{a}^0(s)\|_{B_2(s)} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^l F(s,x) |b_n(x)| dx \right]^2} ds \leq \\ & \leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l F^2(s,x) dx ds \max_{t \in D_T} \|\bar{a}^1(t) - \bar{a}^0(t)\|_{B_2(t)} \leq \end{aligned}$$

Жокурия аманжол  
Окюн камчыгай, ф.и.к. Ш.Мурзахмурзаева А.Ш.



$$\leq (M_1 M_2)^2 \Delta \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} ds, \quad (t, x) \in D, \quad (13)$$

где  $F(s, x) = 2F_1(s, x)$ .

С учетом (13) для последующей разности  $a_n^3(t) - a_n^2(t)$  из (11) получим следующую оценку

$$\begin{aligned} & \|\bar{a}^3(t) - \bar{a}^2(t)\|_{B_2(t)} \leq \\ & \leq (M_1 M_2)^3 \Delta \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} \int_0^s \|F(\theta, x)\|_{L_2(D_I)} d\theta ds \leq \\ & \leq \Delta \frac{(M_1 M_2)^3}{2!} \left[ \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} ds \right]^2. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа  $k$ , аналогичным образом получим

$$\|\bar{a}^{k+1}(t) - \bar{a}^k(t)\|_{B_2(t)} \leq \Delta \frac{(M_1 M_2)^{k+1}}{k!} \left[ \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} ds \right]^k. \quad (14)$$

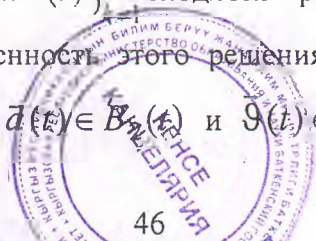
Далее, в силу

(14) получим

$$\begin{aligned} & \|\bar{a}(t) - \bar{a}^{k+1}(t)\|_{B_2(t)} \leq \\ & \leq M_1 M_2 \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} \|\bar{a}(s) - \bar{a}^k(s)\|_{B_2(s)} ds \leq \\ & \leq M_1 M_2 \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} \|\bar{a}(s) - \bar{a}^{k+1}(s)\|_{B_2(s)} ds + \\ & + M_1 M_2 \max_{t \in D_T} \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} \|\bar{a}^{k+1}(s) - \bar{a}^k(s)\|_{B_2(s)} ds \leq \\ & \leq \Delta \frac{(M_1 M_2)^{k+1}}{k!} \max_{t \in D_T} \left[ \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} ds \right]^k + \\ & + M_1 M_2 \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_I)} \|\bar{a}(s) - \bar{a}^{k+1}(s)\|_{B_2(s)} ds. \quad (15) \end{aligned}$$

Применяя к (15) неравенство типа Гронуолла-Бельмана, получим (10). Существование решения ССНИУ (5) следует из оценок (12) и (14), так как при  $k \rightarrow \infty$  последовательность функций  $\{\bar{a}^k(t)\}_1^\infty$  сходится равномерно по  $t$  к функции  $\bar{a}(t) \in B_2(t)$ . Покажем единственность этого решения в пространстве  $B_2(t)$ . Пусть ССНИУ (5) имеет два решения:  $\bar{a}(t) \in B_2(t)$  и  $\bar{a}(t) \in B_2(t)$ . Тогда для их разности получим

*Почерком автора*  
Октябрь каталога, ф. и. к.



*А. Шурба - Мурзаева А. Ш.*



$$\|\bar{a}(t) - \bar{\vartheta}(t)\|_{B_2(t)} \leq M_1 M_2 \int_0^t \|F(s, x)\|_{L_2(D_t)} \|\bar{a}(s) - \bar{\vartheta}(s)\|_{B_2(s)} ds. \quad (16)$$

Применяя к (16) неравенство типа Гронуолла-Бельмана, получим, что  $\|\bar{a}(t) - \bar{\vartheta}(t)\|_{B_2(t)} = 0$  для всех  $t \in [0; T]$ . Отсюда следует единственность решения ССНИУ (5) в пространстве  $B_2(t)$ .

Подставляя ССНИУ (5) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (15):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left[ \psi_n(t) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x))) b_n(x) G_n(t, s) dx ds \right], \quad (17)$$

$$\psi_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^4 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \cos \lambda_n t + \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + (1 + \lambda_n^2) \varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^3 + \lambda_n^5} \sin \lambda_n t,$$

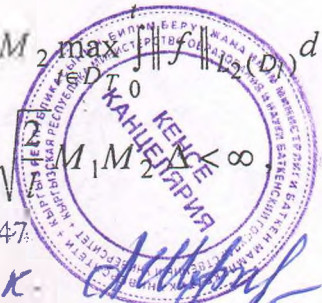
$$G_n(t, s) = \mu_n \left[ e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \lambda_n \sin \lambda_n(t-s) - \cos \lambda_n(t-s) \right],$$

$$\mu_n = [\lambda_n(1 + \lambda_n^2)]^{-1}, \quad b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Покажем сходимость ряда Фурье (17). Для этого используем неравенства Минковского и Гельдера, а затем - неравенство Бесселя. Тогда в силу леммы для (17) получаем

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \|\psi\|_{\ell_2} + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x))) b_n(x) G_n(t, s) dx ds \right|^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \|\psi\|_{\ell_2} + \sqrt{\frac{2}{l}} M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^l |f| \cdot |b_n(x)| \cdot |G_n(t, s)| dx ds \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \|\psi\|_{\ell_2} + \sqrt{\frac{2}{l}} M_1 \max_{t \in D_T} \int_0^t \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |G_n(t, s)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^l |f| \cdot |b_n(x)| dx \right]^2} ds \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \|\psi\|_{\ell_2} + \sqrt{\frac{2}{l}} M_1 M_2 \max_{t \in D_T} \int_0^t \|f\|_{L_2(D_t)} dt \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \|\psi\|_{\ell_2} + \sqrt{\frac{2}{l}} M_1 M_2 \Delta < \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

Кочурово аион  
 Ошму канцлер, ф.у.к. *Алибаев* Мурзамба А.А.





где

$$f \equiv f(s, x, Q\bar{a}(s), Q\bar{a}(\delta(s, x))), M_1 = \left\| \frac{1}{\lambda} \right\|_{t_2}, M_2 = \max_{(t,s)} \left\| \bar{G}(t, s) \right\|_{B_2(t)}.$$

Итак, нами доказана, что справедлива следующая  
**теорема.** Пусть выполняются условия Леммы. Тогда смешанная задача (1)-(3) однозначно разрешима в прямоугольной области  $D$ .

#### Литература:

1. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. – Т. 12. – № 3. – С. 37–42.
2. Турбин М. В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. – № 2. – С. 246–257.
3. Шабров С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 168–179.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир. 1977. – С. 622.
5. Benney D. J., Luke J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // Journ. Math. Phys. – 1964. – vol. 43. – pp. 309–313.
6. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // УМН. – 1960. – Т. 15. – Вып. 2(92). – С. 97–154.
7. Лажетич Н. О существовании классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 5. – С. 682–694.
8. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 8. – С. 1094–1100.
9. Сабитов К. Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89. – Вып. 4. – С. 596–602.
10. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во МГУ. 1991. – С. 112.
11. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. – № 2. – С. 277–295.
12. Юлдашев Т. К. Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // Известия ИМИ УдГУ. 2016. – Вып. 1 (47). – С. 119–128.
13. Юлдашев Т. К. Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска // Вестник ВолГУ. Серия 1: Математика. Физика. 2016. – № 2. – С. 13–26.
14. Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Веннеу-Луке с вырожденным ядром // Изв. вузов. Математика. 2016. – № 9. – С. 59–67.

Юлдашев Т. К.  
 Оксана Александровна, ф.и.н. Юлдашев Т. К. Мурзашиева

