МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме «Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)»

(*Промежуточный*)

Ош – 2021

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 514:757
№ госрегистрации
Инв. №

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе
ОшГУ, д.м.н., профессор
Осумбеков Б.З.
_____ 2021 год

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме **«Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)»**

(*Промежуточный*)

Научный руководитель, д.ф.-м.н., профессор Матиева Г.

Ош – 2021

Список исполнителей

№	Ф.И.О.	Ученая степень, ученое звание	Наименование должности	Подписи
1	Матиева Гулбадан	д.ф.-м.н., профессор	г.н.с.	
2	Алымкулов Келдибай	д.ф.-м.н., профессор, член-коор. НАН КР	в.н.с.	
3	Турсунов Дилмурат Абдиллажанович	д.ф.-м.н., профессор	в.н.с.	
4	Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич	д.ф.-м.н., доцент	в.н.с.	
5	Папиева Толкун Маматаевна	к.ф.-м.н.	в.н.с.	
6	Артыкова Жылдыз Абдисаламовна	к.ф.-м.н.	в.н.с.	
7	Курбанбаева Нуржамал Нажимидиновна	к.ф.-м.н.	в.н.с.	
8	Молдояров Уларбек Дүйшөбекович	к.ф.-м.н.	с.н.с.	
9	Сопуев Уланбек Адахимжанович	к.ф.-м.н., доцент	с.н.с.	
10	Беделова Нургуль Салибаевна	к.ф.-м.н.	с.н.с.	
11	Атырова Рахат Сулаймановна	к.т.н.	с.н.с.	
12	Азимов Бектур Абдырахманович	к.ф.-м.н.	н.с.	
13	Аркабаев Нуркасын Кылычбекович	к.ф.-м.н.	н.с.	
14	Абдугулова Гулжан Садырбековна	старш. преп.	м.н.с.	
15	Толобаева Кылымкан Абдырахмановна	старш. преп.	м.н.с.	
16	Шамшиева Гулмира Асилидиновна	старш. преп.	м.н.с.	
17	Сейитказыева Гульнара Имамалиевна	старш. преп.	м.н.с.	
18	Артыкова Нурила Абдисаламовна	старш. преп.	м.н.с.	
19	Мустапакулова Чолпон	преподаватель	м.н.с.	
20	Арап кызы Таттыбүбү	аспирант ОшГУ	м.н.с.	
21	Сарыгулова Нуркыз Акболушовна	преподаватель	м.н.с.	
22	Мурзакматова Зияда	преподаватель	м.н.с.	
23	Умаров Тилек	преподаватель	м.н.с.	
24	Токтосун кызы Мээримгүл	преподаватель	м.н.с.	
25	Каныбек кызы Айгерим	преподаватель	м.н.с.	
26	Акматалиев Жолдош	преподаватель	м.н.с.	
27	Камалов Султан	преподаватель	м.н.с.	
28	Дөөлатбекова Назира	методист	стар. лаборант	

РЕФЕРАТ

Отчета НИН по проекту «Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)»

Общий объем отчета 53 страниц, иллюстрации 5 страниц, таблиц 2 страниц, количество использованных источников 18.

Перечень ключевых слов: фрактал, распределение, пространство, частичное отображение, двойная линия, компьютерное изображение, неподвижная прямая, 3D модель, квазидвойная линия.

Актуальность: Фрактальная геометрия – молодая и развивающая быстрым темпом отрасль математической науки. Она выдвигая новые идеи находится в процессе тесной интеграции с другими науками. Идеи фрактальной геометрии, в настоящее время, широко применяются в физике, медицине, технических науках, психологии и лингвистике.

Развитие фрактальной геометрии тесно связано с новыми разработками в компьютерной технологии, т.к. построение фракталов и получение их 3D моделей невозможно без средств компьютерных технологий.

Объект исследования: Геометрические фракталы, частичное отображения евклидова пространства.

Цели и задачи проекта:

– Построение новых классов плоских и пространственных геометрических фракталов и исследование их приложений;

– Разработать программ для получения компьютерных изображений построенных фракталов и получение их 3D моделей;

– Изучение свойств частичного отображения евклидова пространства порождаемого заданным p-мерным распределением (когда распределение минимальное);

– Определение необходимых и достаточных условий существования двойных и квазидвойных линий частичного отображения f;

– Доказать необходимое и достаточное условия существования неподвижных прямых частичного отображения f;

– Доказать необходимое и достаточное условия того, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5;

– Изучение отображения $f: T_p(x) \to N_{n-p}(x), f(M) = M''$, где $M \in T_p(x)$, $T_p(x)$ – касательная p-мерная плоскость p-мерной поверхности V_p в E_n; $N_{n-p}(x)$ – нормальная плоскость поверхности V_p.

Методы и методология проведения исследования:

В проведении исследования использованы язык программирования JavaScript и L-system, метод внешних форм Картана и метод подвижного репера.

Результаты исследования и их новизна:

– Программа для получения 3D модели геометрического фрактала “Сфера с четырнадцатью башнями” [8];

– Программа для получения 3D модели геометрического фрактала”Планета Мирбек” (заявка подана);

– В области $\Omega \subset E_5$ рассмотрено семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной репер $\Re = (X, \vec{e}_i)\left(i, j, k = \overline{1,5}\right)$ является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Σ_5 Френе. На касательной линии ω^1 сети Σ_5 инвариантным образом определяется точка F_1^5. Когда точка X смещается в области Ω, псевдофокус F_1^5 описывает свою область Ω_1^5. Этим определяется частичное отображение $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$. Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_3\right)$, где $\Delta_3 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5\right)$ – трехмерное распределение.

– В области $\Omega \subset E_6$ рассмотрено семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной репер $\Re = (X, \vec{e}_i)\left(i, j, k = \overline{1,6}\right)$ является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Σ_6 Френе. На касательной линии ω^1 сети Σ_6 инвариантным образом определяется точка $F_1^5 \in (X, \vec{e}_1)$. Когда точка X смещается в области Ω, псевдофокус F_1^5 описывает свою область Ω_1^5. Этим определяется частичное отображение $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ такое,

что $f_1^5(X)=F_1^5$. Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5,\Delta_4\right)$, где $\Delta_4=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_5,\vec{e}_6\right)$ – четырехмерное распределение.

– В области $\Omega\subset E_6$ рассмотрено семейство гладких линий так, что через каждую точку $X\in\Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной репер $\Re=\left(X,\vec{e}_i\right)\left(i,j,k=\overline{1,6}\right)$ является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Σ_6 Френе. На касательной линии ω^1 сети Σ_6 инвариантным образом определяется точка $F_1^5\in\left(X,\vec{e}_1\right)$. Когда точка X смещается в области Ω, псевдофокус F_1^5 описывает свою область Ω_1^5. Этим определяется частичное отображение $f_1^5:\Omega\to\Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X)=F_1^5$. Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5,\tilde{\Delta}_4\right)$, где $\tilde{\Delta}_4=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6\right)$ – четырехмерное распределение.

– Доказаны необходимое и достаточное условия того, что вторая поляра точки X относительно присоединенной поверхности является конусом второго порядка когда все векторы системы $p\left(p-1\right)$ векторов $\left\{\vec{b}_{ii}-\vec{b}_{jj},\vec{b}_{k\ell}\right\}$ $\left(i<j,k<\ell\right)$ компланарны.

– Доказаны необходимое и достаточное условия того, что одномерная нормаль поверхности $V_2\subset E_5$ являлась средней нормалью.

– Доказаны необходимое и достаточное условия того, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5.

Оглавление

Перечень сокращений и обозначений

В настоящем отчете о НИР применяют следующие сокращения и обозначения:

$\Leftrightarrow$ – эквивалентность (равносильность) высказываний;

$\parallel$ – коллинеарность векторов;

$\perp$ – ортогональность векторов;

E_n – n-мерное евклидово пространство;

$\vec{X} = \vec{X}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – радиус-вектор точки $X \in \Omega$;

ω^i – интегральная линия векторного поля $\vec{e}_i$;

d_i – символ дифференцирования вдоль линии ω^i (или по направлению вектора $\vec{e}_i$);

$\wedge$ – внешнее произведение;

$\Delta_2 = \left(X, \vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$ – двумерное распределение;

$\left(X, \vec{e}_i\right)$ – прямая, проходящая через точку $X \in \Omega$ с направляющим вектором $\vec{e}_i$;

$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера (δ_{ij}, δ^{ij} – только в таком смысле);

Запись вида $a_i b^i$ обозначает, что по i производится суммирование;

«Плоскость» – собственное подпространство любой размерности основного пространства E_n;

F_i^j – псевдофокус прямой $\left(X, \vec{e}_i\right)$ $(i \neq j)$;

Δ_p – p-мерное распределение $(p < n)$;

$\vec{M}_p$ – вектор средней кривизны распределения Δ_p в E_n;

Σ_n – сеть Френе в $\Omega \subset E_n$;

$\tilde{\Sigma}_n$ – циклическая сеть Френе;

k_i^j – i-тая кривизна линии ω^j сети Σ_n;

$\Delta_{(ij)}$ –двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_j$

$\Delta_{(ijk)}$ – трехмерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$;

$\vec{k}_{ij}$ – i-тый вектор кривизны линии ω^j сети Σ_n;

$\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$ – вынужденная кривизна линии ω^i вдоль направлении $\vec{e}_j$.

$\left(f_i^j, \Delta_p\right)$ – пара, где f_i^j – частичное отображение, порождаемое псевдофокусом F_i^j, Δ_p – p-мерное распределение.

Термины и определения

В настоящем отчете о НИР применяют следующие термины с соответствующими определениями:

Термины	Определения
Двойная линия частичного отображения f	Линии $\omega^i, f\left(\omega^i\right) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f(X)$ пересекаются, либо параллельны
Двойная линия пары (f, Δ_p)	Линия ℓ называется двойной линией пары (f, Δ_p), если она является двойной линией отображения f и принадлежит распределению Δ_p
Квазидвойная линия отображения g	Линии ω^i, $g\left(\omega^i\right) = \overline{\omega}^i$ в пространстве E_4 называются квазидвойными линиями отображения g, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4
Квазидвойная линия пары (g, Δ_p),	Линия ℓ в пространстве E_4 называется квазидвойной линией пары (g, Δ_p), если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p
p-распределение	Полем Δ_p p-мерных подпространств или p-распределением на многообразии X_n называется соответствие $\Delta_p : x \in X_n \to \Delta_p(x) \subset T_x(X_n),\ p \le n$,

	где $T_x(X_n)$ – касательное пространство многообразия X_n в точке $x \in X_n$, $\Delta_p(x)$ – p-мерное подпространство в $T_x(X_n)$
Псевдофокус касательной	Псевдофокусом касательной $(X, \vec{e}_i)$ к линии ω^i данной сети называется такая точка $F_i^j \in (X, \vec{e}_i)$, смещение которой принадлежит плоскости $(X, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{i-1}, e_{i+1}, \ldots \vec{e}_n)$, когда точка X смещается в направлении линии $\omega^j (i \neq j)$
Сеть $\sum_n$	Говорят, что в области G n-мерного вещественного C^∞ – многообразия M задана сеть $\sum_n$, если в G заданы n семейств линий таких, что через каждую точку $X \in G$ проходит одна и только одна линия каждого семейства, причем векторы, касательные к этим кривым в точке X, образуют базис векторного пространства T_X – касательного пространства к многообразию M в точке X
Фокус прямой	Точка $S \in (X, \vec{e}_1)$, определяемая радиус-вектором $\vec{S} = \vec{X} + \nu \vec{e}_1$, называется фокусом прямой $(X, \vec{e}_1)$, если $d\vec{S} \parallel \vec{e}_1$ при смещении точки X по площадке $(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (т.е. $\omega^1 = 0$).
Фрактал	Фракта́лом называется (лат. Fractus - дроблёный, сломанный, разбитый) геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, то есть составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком.

Введение

Понятие “фрактал” было введено Бенуа Мандельбротом в 1975 году. В своей книге “Фрактальная геометрия природы” он пишет, что математики прошлых лет всегда отказывались от изучения тех форм, которые демонстрирует нам природа, изучая евклидовы геометрические фигуры и изобретая всевозможные теории, которые не обьясняют окружающей нас действительности. Однако, по мнению Мандельброта “… новая геометрия способна описать многие из неправильных и фрагментированных форм в окружающем нас мире и породить вполне законченные теории, определив семейство фигур, которые я называю фракталами”.

Фрактальная геометрия – молодая и развивающая быстрым темпом отрасль математической науки. Она выдвигая новые идеи находится в процессе тесной интеграции с другими науками. Идеи фрактальной геометрии, в настоящее время, широко применяются в физике, медицине, технических науках, психологии и лингвистике.

Развитие фрактальной геометрии тесно связано с новыми разработками в компьютерной технологии, т.к. построение фракталов и получение их 3D моделей невозможно без средств компьютерных технологий.

Данное научное исследование относится к значительным главам современной дифференциальной геометрии – теории отображений гладких многообразий.

Проблемами точечных соответствий пространств одинаковой размерности занимались А.П. Норден, В.В. Рыжков, М.А. Акивис, В.Т. Базылев и их ученики, а также другие геометры.

Основы геометрии плоских многомерных сетей заложены в работах В.Т. Базылева. Работы В.Т. Базылева и его учеников также посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

Теория дифференцируемых отображений евклидова пространства, имеет большой интерес не только для самой геометрии, она имеет широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Значительный интерес представляют дифференцируемые частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданной сетью, так как от выбора сети зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, а также их рациональные решения. В работах Дж. Уизема двумерные и трехмерные сети и ее образы в различных отображениях применяются в решении многих задач теории линейных и нелинейных волн.

При работе над научным проектом придерживались следующих целей и задач:

– Построение новых классов плоских и пространственных геометрических фракталов и исследование их приложений;

– Разработать программ для получения компьютерных изображений построенных фракталов и получение их 3D моделей;

– Изучение свойств частичного отображения евклидова пространства порождаемого заданным p-мерным распределением (когда распределение минимальное);

– Определение необходимых и достаточных условий существования двойных и квазидвойных линий частичного отображения f;

– Доказать необходимое и достаточное условия существования неподвижных прямых частичного отображения f;

– Изучение отображения $f: T_p(x) \to N_{n-p}(x), f(M) = M''$, где $M \in T_p(x)$, $T_p(x)$ – касательная p-мерная плоскость p-мерной поверхности V_p в E_n; $N_{n-p}(x)$ – нормальная плоскость поверхности V_p.

В проведении исследования использованы язык программирования JavaScript и L-system, метод внешних форм Картана и метод подвижного репера.

При исследовании были получены следующие результаты:

– Программа для получения 3D модели геометрического фрактала “Сфера с четырнадцатью башнями” [8];

– Программа для получения 3D модели геометрического фрактала”Планета Мирбек” (заявка подана);

– Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5,\Delta_3\right)$, где $\Delta_3=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_4,\vec{e}_5\right)$ – трехмерное распределение.

– Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5,\Delta_4\right)$, где $\Delta_4=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_5,\vec{e}_6\right)$ – четырехмерное распределение.

– Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5,\tilde{\Delta}_4\right)$, где $\tilde{\Delta}_4=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6\right)$ – четырехмерное распределение.

– Доказаны необходимое и достаточное условия того, что вторая поляра точки X относительно присоединенной поверхности является конусом второго порядка когда все векторы системы $p\left(p-1\right)$ векторов $\left\{\vec{b}_{ii}-\vec{b}_{jj},\vec{b}_{k\ell}\right\}$ $\left(i<j,k<\ell\right)$ компланарны.

– Доказаны необходимое и достаточное условия того, что одномерная нормаль поверхности $V_2\subset E_5$ являлась средней нормалью.

– Доказаны необходимое и достаточное условия того, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5.

§ 1. Построение пространственного геометрического фрактала “Сфера с четырнадцатью башнями” и программа для получения его 3D модели

Рассмотрен геометрический фрактал “Сфера с четырнадцатью башнями” (рис.1), построенный Г. Матиевой [авторское свид].

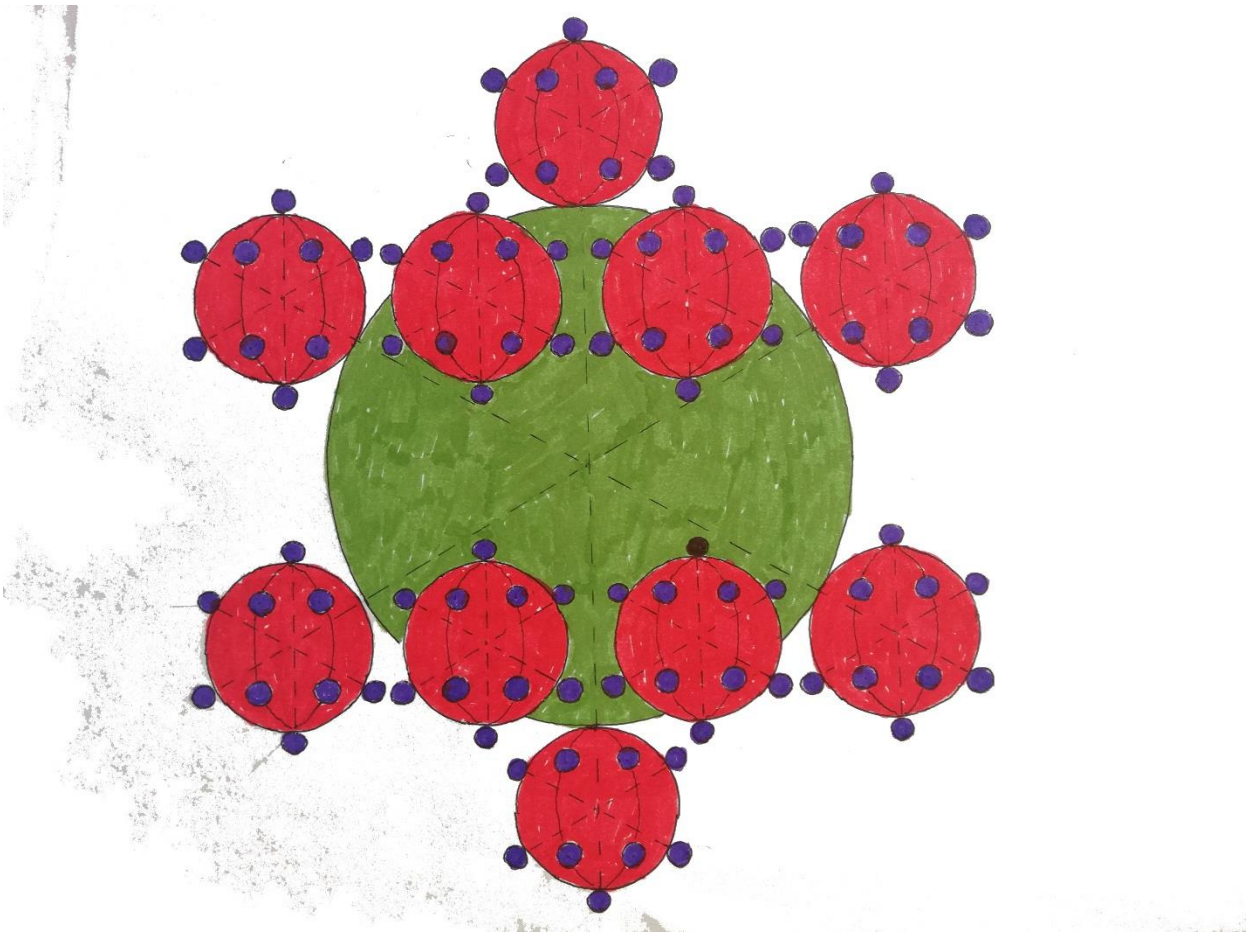

Рис.1.

Для построения 3D моделей геометрических фракталов имеются три варианта программ: полу автоматизированный, автоматизированный и ручной, также можно воспользоваться различными программными обеспечениями. Например, Компас3D, 3ds Max, и другими. Существуют специализированные программы, которые имеют приложенные алгоритмы для реализации основных этапов построения.

Поскольку, основной задачей данного исследования является создание специального скрипта, который даст возможность полностью автоматизировать процесс, рассмотрение математической основы теории фракталов и изучение

методов их построения для реализации практический части производится посредством языка программирования JavaScript и библиотеки WebGL, Tree.js.

Ниже приведен скрипт для построения 3D модели пространственного фрактала “Сфера с четырнадцатью башнями” [4].

В результате получен 3D модель этого фрактала (рис. 5)

```
var slx1=0, sly1=0, sly1=0;  for (var i = 0; i < 6; i++)
{var slr=sr/2; var pis=3*slr;var rXYZ = releaseXYZ( i, slx0, sly0, slz0, pis);
slx1=rXYZ[0]; sly1=rXYZ[1]; slz1=rXYZ[2];  var geometry = new
THREE.SphereGeometry( slr, slr, slr ); var material = new
THREE.MeshStandardMaterial( { color: 0x22cc22 } ); var sphere = new
THREE.Mesh( geometry, material ); sphere.position.set( slx1, sly1, slz1);
sphereArr[1].push(sphere); var slx2=0, sly2=0, sly2=0; for (var j = 0; j < 6; j++) {if(
ifBreak( i, j ) == 0 ) {var slr=sr/4; var pis=3*slr; var rXYZ = releaseXYZ( j, slx1,
sly1, slz1, pis); slx2=rXYZ[0]; sly2=rXYZ[1]; slz2=rXYZ[2]; var geometry = new
THREE.SphereGeometry( slr, 2*slr, 2*slr ); var material = new
THREE.MeshStandardMaterial( { color: 0xe80000 } ); var sphere = new
THREE.Mesh( geometry, material ); sphere.position.set( slx2, sly2, slz2 );
sphereArr[2].push(sphere); var slx3=0, sly3=0, sly3=0; for (var k = 0; k < 6; k++)
{if( ifBreak( j, k ) == 0 ) {var slr=sr/8; var pis=3*slr; var rXYZ = releaseXYZ( k,
slx2, sly2, slz2, pis); slx3=rXYZ[0]; sly3=rXYZ[1]; slz3=rXYZ[2]; var geometry =
new THREE.SphereGeometry( slr, 3*slr, 3*slr ); var material = new
THREE.MeshStandardMaterial( { color: 0xe3bb2e5} ); var sphere = new
THREE.Mesh( geometry, material ); sphere.position.set( slx3, sly3, slz3 );
sphereArr[3].push(sphere); var slx4=0, sly4=0, sly4=0; for (var l = 0; l < 6; l++) {if(
ifBreak( k, l ) == 0 ) {var slr=sr/16; var pis=3*slr; var rXYZ = releaseXYZ( l, slx3,
sly3, slz3, pis); slx4=rXYZ[0]; sly4=rXYZ[1]; slz4=rXYZ[2]; var geometry = new
THREE.SphereGeometry( slr, 4*slr, 4*slr ); var material = new
THREE.MeshStandardMaterial( { color: 0xff9500} ); var sphere = new
THREE.Mesh( geometry, material ); sphere.position.set( slx4, sly4, slz4 );
sphereArr[4].push(sphere); }}}}}}}
```

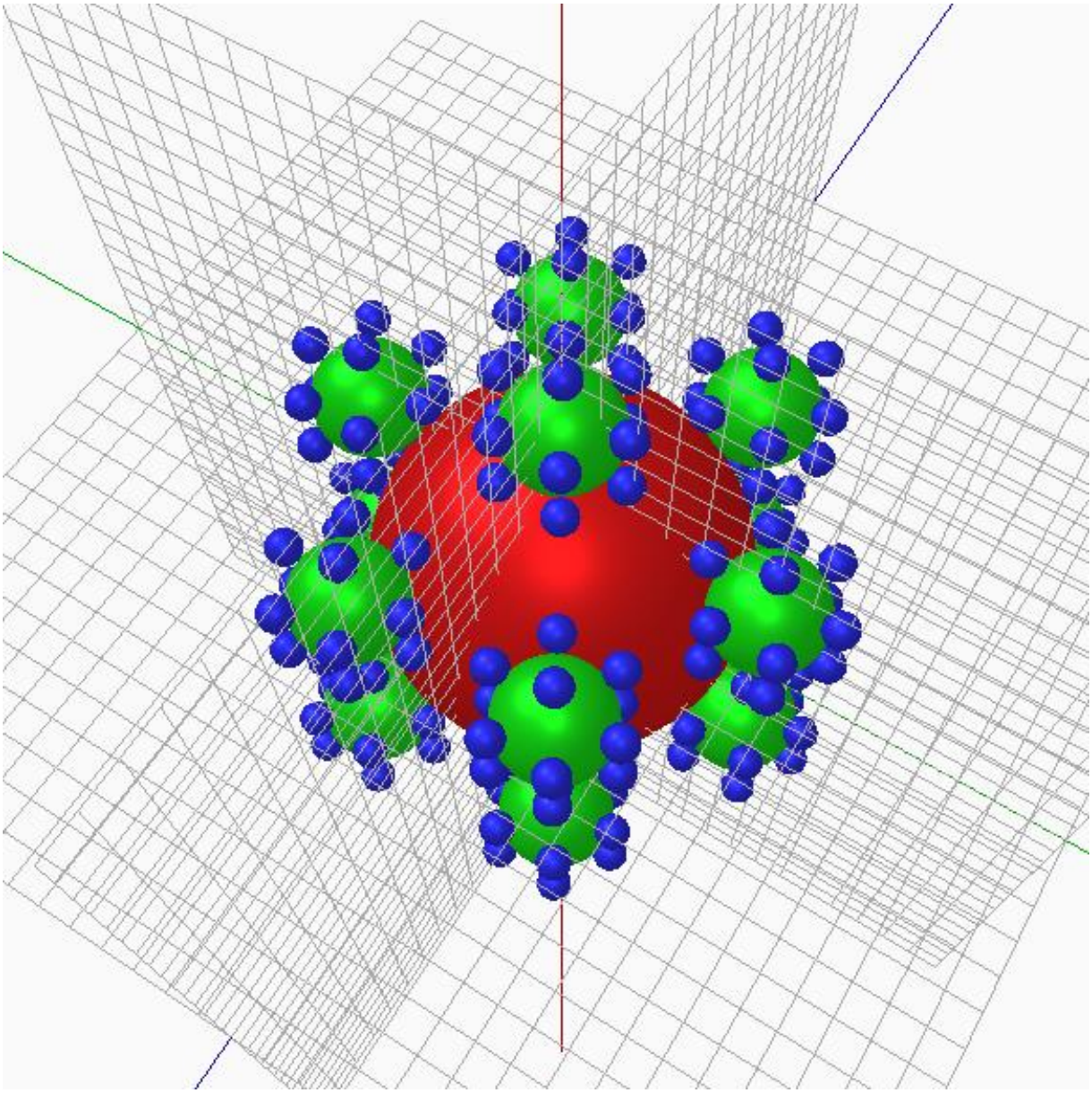

Рис.2.

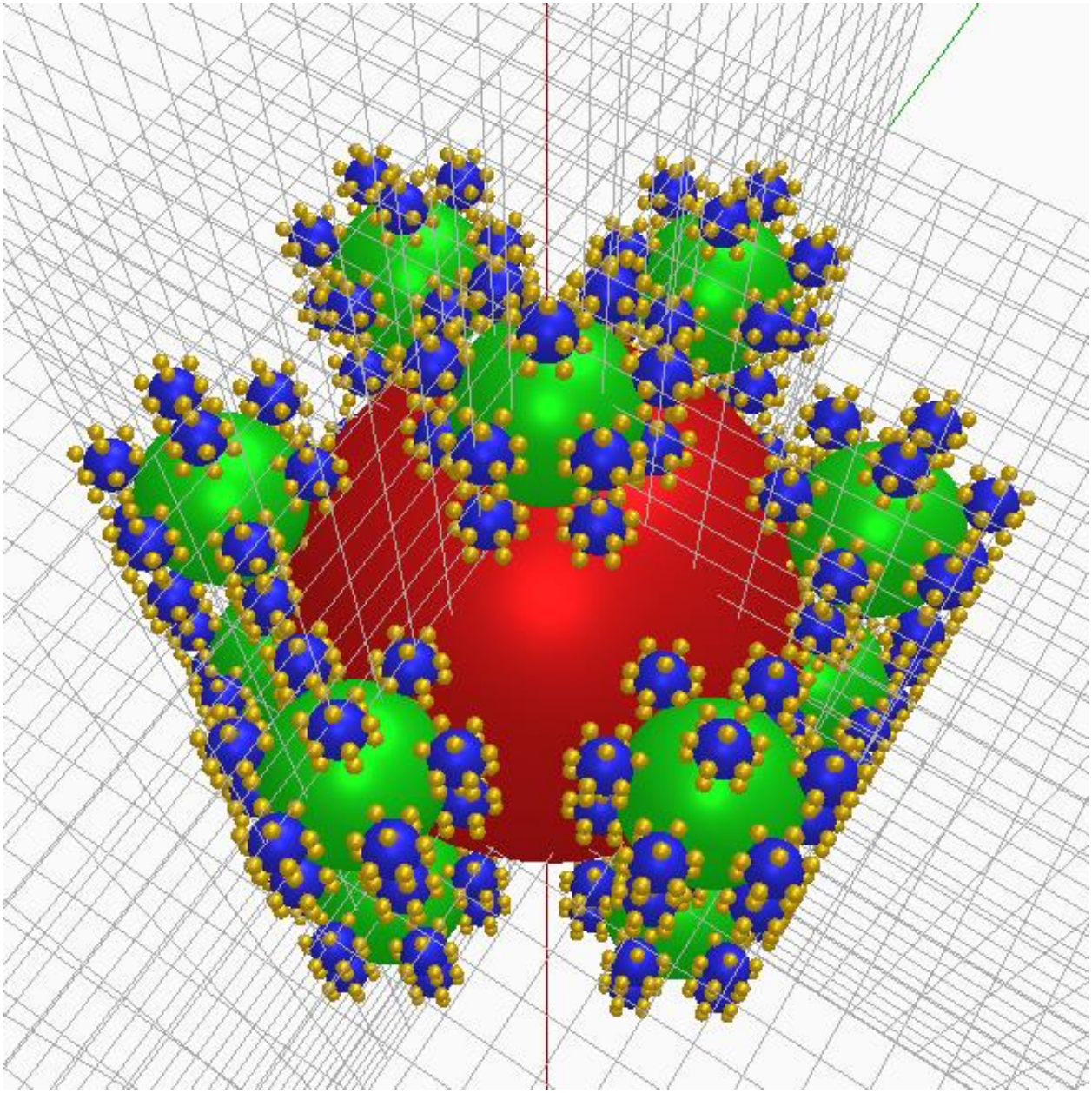

Рис.3.

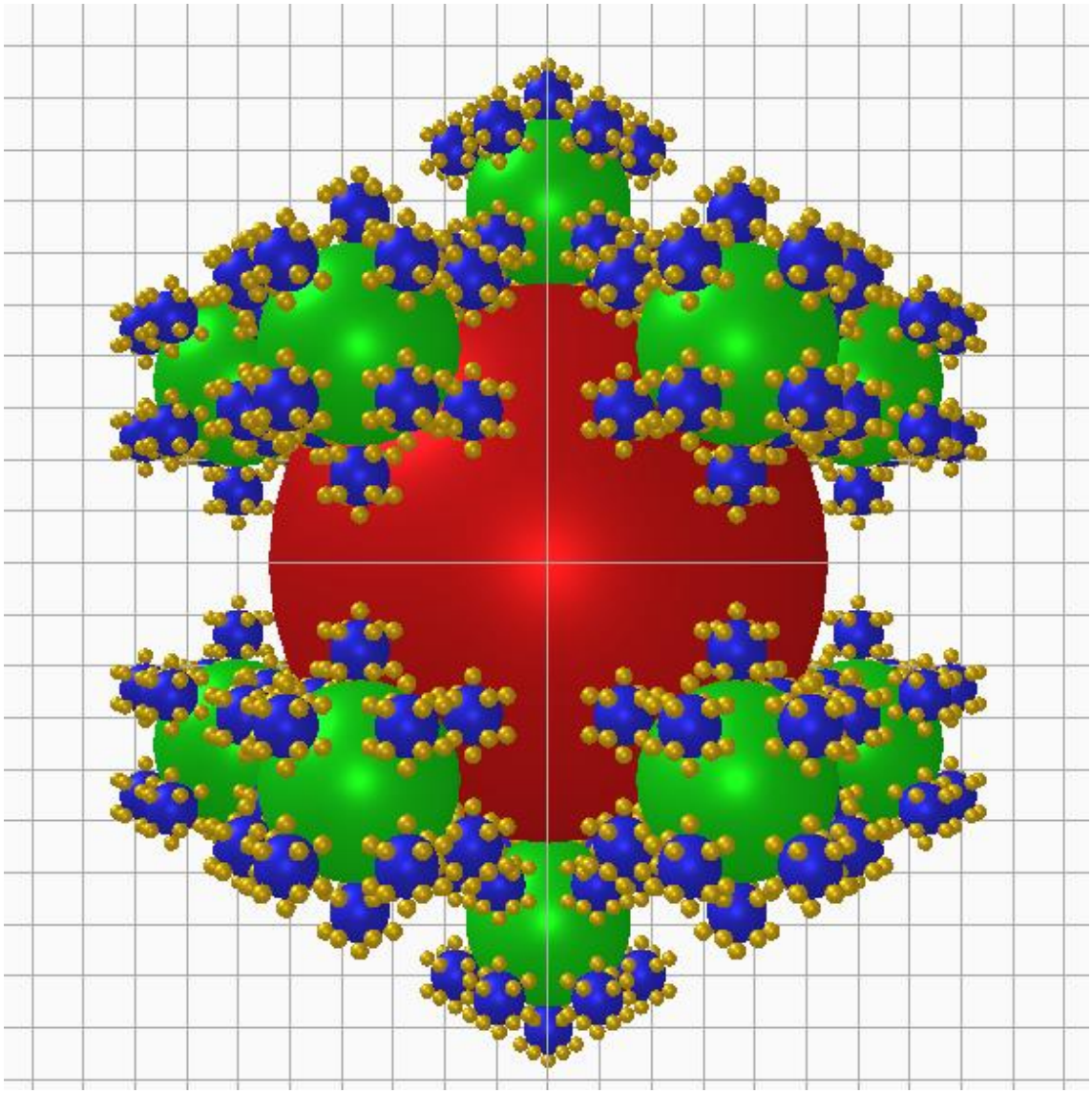

Рис. 4.

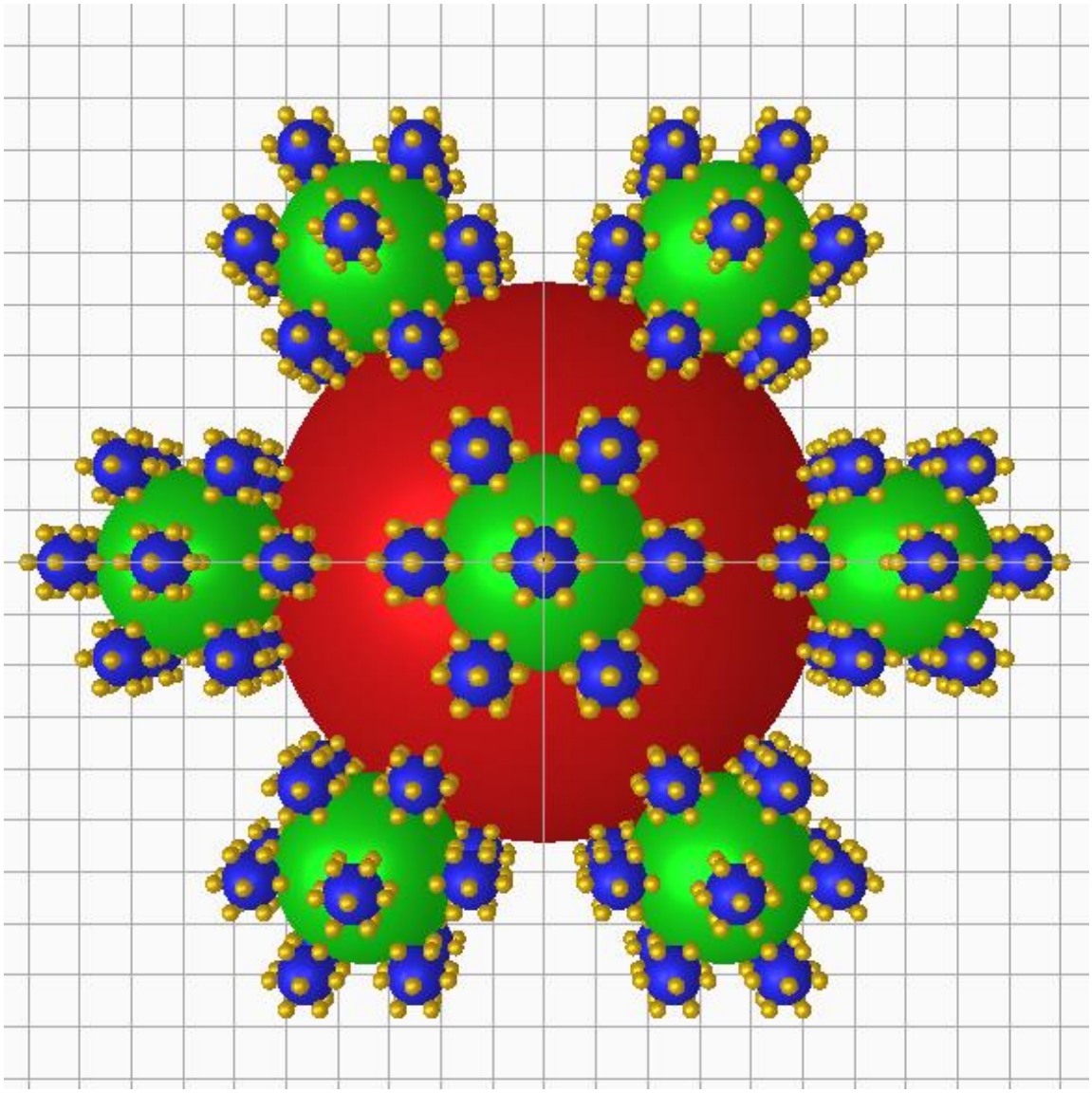

Рис. 5.

§2. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_3\right)$ в евклидовом пространстве E_5

В области Ω евклидова пространства E_5, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4,5\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{2.1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k,\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_5 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_5, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{2.3}$$

В силу последнего равенства формулы (2.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{2.4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (2.3) получим:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (2.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (2.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^{k}=\left(\Lambda_{ijm}^{k}+\Lambda_{il}^{k}\Lambda_{jm}^{l}+\Lambda_{lj}^{k}\Lambda_{im}^{l}\right)\omega^{m}. \qquad (2.5)$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^{k},\Lambda_{ijm}^{k}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1=\Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2=\Lambda_{21}^{1}\vec{e}_1+\Lambda_{21}^{3}\vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3=\Lambda_{31}^{2}\vec{e}_2+\Lambda_{31}^{4}\vec{e}_4,$$
$$d_1\vec{e}_4=\Lambda_{41}^{3}\vec{e}_3+\Lambda_{41}^{5}\vec{e}_5,$$
$$d_1\vec{e}_5=\Lambda_{51}^{4}\vec{e}_4,$$

и $$\Lambda_{11}^{3}=-\Lambda_{11}^{3}=0,\ \Lambda_{11}^{4}=-\Lambda_{41}^{1}=0,\Lambda_{11}^{5}=-\Lambda_{51}^{1}=0, \qquad (2.6)$$

$$\Lambda_{21}^{5}=-\Lambda_{51}^{2}=0,\ \Lambda_{21}^{4}=-\Lambda_{41}^{2}=0,\ \Lambda_{31}^{5}=-\Lambda_{51}^{3}=0. \qquad (2.7)$$

Здесь $k_1^1=\Lambda_{11}^{2}$, $k_2^1=\Lambda_{21}^{3}$, $k_3^1=\Lambda_{31}^{4}$, $k_4^1=\Lambda_{41}^{5}=-\Lambda_{51}^{4}$ - первая, вторая, третья и четвертая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i\neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j}=\vec{X}-\frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\vec{e}_i=\vec{X}+\frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\vec{e}_i. \qquad (2.8)$$

На каждой касательной $\left(X,\vec{e}_i\right)$ существуют по четыре псевдофокуса. На прямой $\left(X,\vec{e}_1\right)$ существуют псевдофокусы F_1^2,F_1^3,F_1^4,F_1^5, на прямой $\left(X,\vec{e}_2\right)$ – F_2^1,F_2^3,F_2^4,F_2^5, на прямой $\left(X,\vec{e}_3\right)$ $-F_3^1,F_3^2,F_3^4,F_3^5$, на прямой $\left(X,\vec{e}_4\right)$ – F_4^1,F_4^2,F_4^3,F_4^5, на прямой $\left(X,\vec{e}_5\right)$ – F_5^1,F_5^2,F_5^3,F_5^4.

Сеть Σ_5 в $\Omega\subset E_5$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\right)$, $\Re_2=\left(X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_1\right)$, $\Re_3=\left(X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$, $\Re_4=\left(X,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$, $\Re_5=\left(X,\vec{e}_5,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5 сети Σ_5 одновременно.

Пусть сеть Σ_5 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_5$. Псевдофокус $F_1^5\in\left(X,\vec{e}_i\right)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^5 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1. \qquad (2.9)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, псевдофокус F_1^5 описывает свою область $\Omega_1^5 \subset E_5$. Определяется частичное отображение $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.

Продифференцируем обычным образом (2.9) и учитываем деривационные формулы:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1\right) = d\vec{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}d\vec{e}_1 = \omega^i\vec{e}_1 - \frac{d\Lambda_{15}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Учитывая равенство (2.3), (2.5)отсюда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^\ell + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Введем обозначение:

$$B_{15m}^5 = \Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^\ell + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^\ell.$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5\omega^m}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

или $$d_1\overrightarrow{F_1^5} = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{152}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B_{153}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{154}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e}_5 + \frac{B_{155}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^5.$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B_{152}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B^5_{153}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B^5_{154}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_5 = \vec{e}_5 + \frac{B^5_{155}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i.$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F^5_1} = \omega^1\vec{b}_1 + \omega^2\vec{b}_2 + \omega^3\vec{b}_3 + \omega^4\vec{b}_4 + \omega^5\vec{b}_5.$$

Так как заданная сеть Σ_5 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B^5_{151}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B^5_{152}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^5_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^5_{153}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^5_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5; \qquad (2.10)$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^5_{154}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda^5_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_5 = \frac{B^5_{155}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2.$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

$$\Delta_{(125)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_5\right),\ \vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^5\vec{e}_5,\quad \vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{b}_1 + \gamma^2\vec{b}_2 + \gamma^5\vec{b}_5$$

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\left(b^1_1\vec{e}_1 + b^2_1\vec{e}_2\right) + \gamma^2\left(b^1_2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b^5_2\vec{e}_5\right) + \gamma^5\left(b^1_5\vec{e}_1 + b^2_5\vec{e}_2\right),$$

$$\vec{\bar{\gamma}} = \left(\gamma^1 b^1_1 + \gamma^2 b^1_2 + \gamma^5 b^1_5\right)\vec{e}_1 + \left(\gamma^1 b^2_1 + \gamma^2 + \gamma^5 b^2_5\right)\vec{e}_2 + \gamma^2 b^5_2\vec{e}_5.$$

Очевидно что $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF^5_1} \in \Delta_{(125)}$, следовательно линия $\gamma \in \Delta_{(125)}$ всегда является квазидвойной линией отображения F^5_1.

Рассмотрим линию β, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(145)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5\right)$. Её направляющий вектор имеет вид $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^4\vec{e}_4 + \beta^5\vec{e}_5$.

Направляющий вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_1^5(\beta)$ имеет вид:

$$\vec{\bar{\beta}} = \beta^1\vec{b}_1 + \beta^4\vec{b}_4 + \beta^5\vec{b}_5.$$

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\beta}} = \beta^1\left(b_1^1\vec{e}_1 + b_1^2\vec{e}_2\right) + \beta^4\left(b_4^1\vec{e}_1 + b_4^2\vec{e}_2 + \vec{e}_4 + b_4^5\vec{e}_5\right) + \beta^5\left(b_5^1\vec{e}_1 + b_5^2\vec{e}_2\right)$$

или

$$\vec{\bar{\beta}} = \left(\beta^1 b_1^1 + \beta^4 b_4^1 + \beta^5 b_5^1\right)\vec{e}_1 + \left(\beta^1 b_1^2 + \beta^4 b_4^2 + \beta^5 b_5^2\right)\vec{e}_2 + \beta^4\vec{e}_4 + \beta^4 b_4^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(145)}$ имеем:

$\beta^1 b_1^2 + \beta^4 b_4^2 + \beta^5 b_5^2 = 0.$

Учитывая формул (2.10) отсюда получим:

$$\beta^1\left[1 + \frac{\beta_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\right] - \beta^4\frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{15}^5} - \beta^5\frac{\Lambda_{15}^2}{\Lambda_{15}^5} = 0,$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{15}^5\right)^2 + \beta_{151}^5\right]\beta^1 - \Lambda_{14}^2\Lambda_{15}^5\beta^4 - \Lambda_{15}^2\Lambda_{15}^5\beta^5 = 0, \qquad (2.11)$$

где $\beta_{151}^5 = d_1\Lambda_{15}^5 = d_1\left(\vec{\Lambda}_{15}\vec{e}_5\right), \vec{\Lambda}_{15} = d_1\vec{e}_5$.

Верно и обратное, т.е. если имеет место (2.11), то линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5.

Таким образом доказана

Теорема 2.1: Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора $\vec{\beta}$ удовлетворяют условию (2.11).

§3. Существование квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_4\right)$ в евклидовом пространстве E_6

В области Ω евклидова пространства E_6, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4,5,6\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{3.1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k,\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{3.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_6 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_5, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3.3}$$

В силу последнего равенства формулы (3.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{3.4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3.3) получим:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (3.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (3.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^{k}=\left(\Lambda_{ijm}^{k}+\Lambda_{il}^{k}\Lambda_{jm}^{l}+\Lambda_{lj}^{k}\Lambda_{im}^{l}\right)\omega^{m}. \qquad (3.5)$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^{k},\Lambda_{ijm}^{k}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1=\Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2=\Lambda_{21}^{1}\vec{e}_1+\Lambda_{21}^{3}\vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3=\Lambda_{31}^{2}\vec{e}_2+\Lambda_{31}^{4}\vec{e}_4,$$
$$d_1\vec{e}_4=\Lambda_{41}^{3}\vec{e}_3+\Lambda_{41}^{5}\vec{e}_5,$$
$$d_1\vec{e}_5=\Lambda_{51}^{4}\vec{e}_4+\Lambda_{51}^{6}\vec{e}_6,$$
$$d_1\vec{e}_6=\Lambda_{61}^{5}\vec{e}_5,$$

и $\quad \Lambda_{11}^{3}=-\Lambda_{11}^{3}=0,\ \Lambda_{11}^{4}=-\Lambda_{41}^{1}=0,\ \Lambda_{11}^{5}=-\Lambda_{51}^{1}=0,\ \Lambda_{11}^{6}=-\Lambda_{61}^{1}=0, \qquad (3.6)$

$$\Lambda_{21}^{5}=-\Lambda_{51}^{2}=0,\ \Lambda_{21}^{4}=-\Lambda_{41}^{2}=0,\ \Lambda_{31}^{5}=-\Lambda_{51}^{3}=0,\ \Lambda_{61}^{4}=-\Lambda_{41}^{6}=0. \qquad (3.7)$$

Здесь $k_1^1=\Lambda_{11}^{2}$, $k_2^1=\Lambda_{21}^{3}$, $k_3^1=\Lambda_{31}^{4}$, $k_4^1=\Lambda_{41}^{5}=-\Lambda_{51}^{4}$, $\Lambda_{51}^{6}=-\Lambda_{61}^{5}=0$ – первая, вторая, третья, четвертая и пятая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i\neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j}=\vec{X}-\frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\vec{e}_i=\vec{X}+\frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\vec{e}_i. \qquad (3.8)$$

На каждой касательной $\left(X,\vec{e}_i\right)$ существуют по пять псевдофокуса. На прямой $\left(X,\vec{e}_1\right)$ существуют псевдофокусы $F_1^2,F_1^3,F_1^4,F_1^5,F_1^6$, на прямой $\left(X,\vec{e}_2\right)$ – $F_2^1,F_2^3,F_2^4,F_2^5,F_2^6$, на прямой $\left(X,\vec{e}_3\right)$ – $F_3^1,F_3^2,F_3^4,F_3^5,F_3^6$, на прямой $\left(X,\vec{e}_4\right)$ – $F_4^1,F_4^2,F_4^3,F_4^5,F_4^6$, на прямой $\left(X,\vec{e}_5\right)$ – $F_5^1,F_5^2,F_5^3,F_5^4,F_5^6$.

Сеть Σ_6 в $\Omega\subset E_6$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6\right)$, $\Re_2=\left(X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1\right)$, $\Re_3=\left(X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$, $\Re_4=\left(X,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$, $\Re_5=\left(X,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right)$, $\Re_6=\left(X,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\right)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5, ω^6 сети Σ_6 одновременно.

Пусть сеть Σ_6 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_6$. Псевдофокус $F_1^5 \in \left(X, \vec{e}_i\right)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^5 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1. \tag{3.9}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_6$, псевдофокус F_1^5 описывает свою область $\Omega_1^5 \subset E_6$. Определяется частичное отображение $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.

Методом внешних форм Картана и подвижного репера продифференцируем обычным образом (3.9) и учитываем деривационные формулы:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1\right) = d\vec{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}d\vec{e}_1 = \omega^i\vec{e}_1 - \frac{d\Lambda_{15}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Учитывая равенство (3.3), (3.5)отсюда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^\ell + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Введем обозначение:

$$B_{15m}^5 = \Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^\ell + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^\ell.$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5\omega^m}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

или $$d_1\overrightarrow{F_1^5} = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{152}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B_{153}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{154}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e}_5 + \frac{B_{155}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^5 + \left[\vec{e}_6 + \frac{B_{156}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{16}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^6.$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B^5_{152}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B^5_{153}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B^5_{154}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_5 = \vec{e}_5 + \frac{B^5_{155}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_6 = \vec{e}_6 + \frac{B^5_{156}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{16}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i.$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^1\vec{b}_1 + \omega^2\vec{b}_2 + \omega^3\vec{b}_3 + \omega^4\vec{b}_4 + \omega^5\vec{b}_5 + \omega^6\vec{b}_6.$$

Так как заданная сеть Σ_6 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B^5_{151}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B^5_{152}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^5_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^5_{153}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{\Lambda^5_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5; \qquad (3.10)$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^5_{154}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda^5_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_5 = \frac{B^5_{155}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^6_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_6;$$

$$\vec{b}_6 = \frac{B^5_{156}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{16}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \left[1 + \frac{\Lambda^6_{16}}{\Lambda^5_{15}}\right]\vec{e}_6.$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую четырёхмерному распределению $\Delta_{(1356)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6\right)$. Её направляющий вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^5\vec{e}_5 + \gamma^6\vec{e}_6$. Направляющий вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $f_1^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ имеет вид: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{b}_1 + \gamma^3\vec{b}_3 + \gamma^5\vec{b}_5 + \gamma^6\vec{b}_6$. учитывая (3.10) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\left(b_1^1\vec{e}_1 + b_2^1\vec{e}_2\right) + \gamma^3\left(b_3^1\vec{e}_3 + b_3^1\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b_3^5\vec{e}_5\right) +$$
$$+\gamma^5\left(b_5^1\vec{e}_1 + b_5^2\vec{e}_2 + b_5^6\vec{e}_6\right) + \gamma^6\left(b_6^1\vec{e}_1 + b_6^2\vec{e}_2 + b_6^6\vec{e}_6\right)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = \left(\gamma^1 b_1^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^5 b_5^1 + \gamma^6 b_6^1\right)\vec{e}_1 + \left(\gamma^1 b_1^2 + \gamma^3 b_3^2 + \gamma^5 b_5^2 + \gamma^6 b_6^2\right)\vec{e}_2 +$$
$$+\gamma^3 b_3^5\vec{e}_5 + \left(\gamma^5 b_5^6 + \gamma^6 b_6^6\right),$$

где b_i^j – j-тая координата вектора $\vec{b}_i$. Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, XF_1^5 \in \Delta_{(1356)}$ имеем:

$$\gamma^1 b_1^2 + \gamma^3 b_3^2 + \gamma^5 b_5^2 + \gamma^6 b_6^2 = 0.$$

Учитывая (3.10) отсюда получим:

$$\Lambda_{11}^2\gamma^1 + \Lambda_{13}^2\gamma^3 + \Lambda_{15}^2\gamma^5 + \Lambda_{16}^2\gamma^6 = 0. \qquad (3.11)$$

Обратно, если имеет место (3.11), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(1356)}$ является квазидвойной линией отображения f_1^5.

Таким образом доказана

Теорема 3.1: Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(1356)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворятся условию (3.11).

Геометрический смысл равенства (3.11) заключается в следующем. Рассмотрим вектор $\vec{\Lambda}$ с координатами: $\left\{\Lambda_{11}^2, \Lambda_{13}^2, \Lambda_{15}^2, \Lambda_{16}^2\right\}$, где $\Lambda_{11}^2 = \vec{e}_2 d_1 \vec{e}_1$; $\Lambda_{13}^2 = \vec{e}_2 d_3 \vec{e}_1$; $\Lambda_{15}^2 = \vec{e}_2 d_5 \vec{e}_1$; $\Lambda_{16}^2 = \vec{e}_2 d_6 \vec{e}_1$.

Равенство (3.11) означает, что векторы $\vec{\Lambda}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую четырёхмерному распределению $\tilde{\Delta}_{(1456)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6\right)$. Её направляющий вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^4\vec{e}_4 + \gamma^5\vec{e}_5 + \gamma^6\vec{e}_6$. Найдем координаты направляющего вектора $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_1^5(\gamma)$: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{b}_1 + \gamma^4\vec{b}_4 + \gamma^5\vec{b}_5 + \gamma^6\vec{b}_6$. учитывая (3.10) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\left(b_1^1\vec{e}_1 + b_1^2\vec{e}_2\right) + \gamma^4\left(b_4^1\vec{e}_1 + b_4^2\vec{e}_2 + \vec{e}_4 + b_4^5\vec{e}_5\right) +$$
$$+\gamma^5\left(b_5^1\vec{e}_1 + b_5^2\vec{e}_2 + b_5^6\vec{e}_6\right) + \gamma^6\left(b_6^1\vec{e}_1 + b_6^2\vec{e}_2 + b_6^6\vec{e}_6\right)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = \left(\gamma^1 b_1^1 + \gamma^4 b_4^1 + \gamma^5 b_5^1 + \gamma^6 b_6^1\right)\vec{e}_1 + \left(\gamma^1 b_1^2 + \gamma^4 b_4^2 + \gamma^5 b_5^2 + \gamma^6 b_6^2\right)\vec{e}_2 +$$
$$+\gamma^4\vec{e}_4 + \gamma^4 b_4^5\vec{e}_5 + \left(\gamma^5 b_5^6 + \gamma^6 b_6^6\right)\vec{e}_6,$$

где $b_i^j - j-$тая координата вектора $\vec{b}_i$. Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, XF_1^5 \in \tilde{\Delta}_{(1456)}$ имеем:

$$\gamma^1 b_1^2 + \gamma^4 b_4^2 + \gamma^5 b_5^2 + \gamma^6 b_6^2 = 0$$

Учитывая (3.10) отсюда получим:

$$\Lambda_{11}^2 \gamma^1 + \Lambda_{14}^2 \gamma^4 + \Lambda_{15}^2 \gamma^5 + \Lambda_{16}^2 \gamma^6 = 0. \qquad (3.12)$$

Обратно, если имеет место (11), то линия γ, принадлежащая распределению $\tilde{\Delta}_4 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6 \right)$ является квазидвойной линией отображения f_1^5 (следовательно и пары $\left(f_1^5, \tilde{\Delta}_4 \right)$).

Таким образом доказана

Теорема 3.2: Линия γ, принадлежащая распределению $\tilde{\Delta}_{(1456)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворятся условию (3.12).

Геометрический смысл равенства (3.11) заключается в следующем. Рассмотрим вектор $\vec{\Lambda} = \lambda^1 \vec{e}_1 + \lambda^4 \vec{e}_4 + \lambda^5 \vec{e}_5 + \lambda^6 \vec{e}_6$ с координатами: $\lambda^1 = \Lambda_{11}^2 = \vec{e}_2 \cdot d_1 \vec{e}_1$; $\lambda^4 = \Lambda_{14}^2 = \vec{e}_2 \cdot d_4 \vec{e}_1$; $\lambda^5 = \Lambda_{15}^2 = \vec{e}_2 \cdot d_5 \vec{e}_1$; $\lambda^6 = \Lambda_{16}^2 = \vec{e}_2 \cdot d_6 \vec{e}_1$, где d_i – символ дифференецирования вдоль направления ω^1.

Равенство (3.12) означает, что векторы $\vec{\Lambda}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

§4. О второй поляре точки X на поверхности $V_p \subset E_{p+3}$ относительно присоединенной поверхности

Рассмотрим гладкую неминимальную p-мерную поверхность V_p в евклидовом пространстве E_{p+3}. Присоединим к поверхности V_p подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\right)$ $\left(i, j, k, \ell = 1, 2, ..., p; \alpha, \beta, \gamma = p+1, p+2, p+3\right)$, где векторы $\vec{e}_i \in T_X\left(V_p\right)$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ – образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_3\left(X\right)$ поверхности V_p $\left(T_X\left(V_p\right)\right.$ – касательная плоскость поверхности V_p в точке $\left.X\right)$. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha,$$
$$d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \tag{4.1}$$

Уравнение поверхности V_p в таком репере имеет вид: $\omega^\alpha = 0$. Диффренецируя его внешним оразом и применяя лемму Картана [1] получим:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j,\ b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha,$$

где b_{ij}^α – второй основной тенрор поверхности V_p.

Имеем:

$$db_{ij}^\alpha - b_{ik}^\alpha \omega_j^k - b_{jk}^\alpha \omega_i^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k. \tag{4.2}$$

Предполагаем, что размерность главной нормали [2] поверхности V_p максимальна.

Уравнение

$$det\left\| \sum_\alpha \gamma^{ik} b_{kj}^\alpha y^\alpha - \delta_j^i \right\| = 0,. \tag{4.3}$$

определяет в $N_3\left(X\right)$ алгебраическую поверхность порядка p, не проходящую через точку $X \in V_p$ (её называют присоединенной поверхностью [2]).

Уравнение второй поляры точки X относительно присоединённой поверхности [3] имеет вид:

$$a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + 2a_{\alpha 0} y^\alpha + p\left(p-1\right) = 0,. \tag{4.4}$$

где $a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(b_{ii}^\alpha b_{jj}^\beta + b_{ii}^\beta b_{jj}^\alpha - 2b_{ij}^\alpha b_{ij}^\beta\right),\ a_{\alpha 0} = -\left(p-1\right)\sum_i b_{ii}^\alpha.$ Доказана

Теорема 4.1. Вторая поляра точки X относительно присоединенной поверхности является конусом второго порядка тогда и только тогда, когда все векторы системы $p\left(p-1\right)$ векторов $\left\{\vec{b}_{ii} - \vec{b}_{jj}, \vec{b}_{k\ell}\right\}$ $\left(i < j, k < \ell\right)$ компланарны.

Рассмотрим поверхность V_2 в евклидовом пространстве E_5. Присоединим к этой поверхности подвижный репер $\Re=\{X,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}(i,j,k=1,2;\ \alpha,\beta,\gamma=3,4,5)$, где орты $\vec{e}_i$ принадлежат касательному пространству $T_2(X)$ к поверхности V_2 в точке $X\in V_2$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис номальной плоскости $N_3(X)$ поверхности V_2.

Деривационные формулы такого репера имеет вид:

$$d\vec{X}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\ d\vec{e}_\alpha=\omega_i^\alpha\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta.$$

Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha=0$ нашей поверхности, получим:

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j, b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$$

Произведем канонизацию репера таким образом: векторы $\vec{e}_i$ направим по касательным к линиям кривизны относительно средней нормали $\vec{e}_5,\vec{e}_3$ - параллельно средней нормали $(X,\vec{M})$ и нормали $(X,\vec{b}_{12})$ соответственно, где $\vec{b}_{12}=b_{12}^\alpha\vec{e}_\alpha$, а вектор $\vec{e}_4$ - ортогонально ко всем предыдущим векторам [1]. Будем пердполагать, что V_2 не минимальна и главная нормаль поверхности V_2 имеет максимальную размерность 3.

В выбранном репере компоненты вторых тензоров поверхности удовлетворяют условиям:

$$b_{12}^3\neq 0, b_{11}^4\neq 0, b_{12}^4=b_{12}^5=0, b_{11}^3+b_{22}^3=b_{11}^4+b_{22}^4=0, b_{11}^5+b_2^5\neq 0.$$

Дифференцируя тождество $\vec{e}_I\vec{e}_J=\delta_{IJ},\left(I,J=\overline{1,5}\right)$, получим

$$\omega_I^J+\omega_J^I=0$$

Уравнение присоединительной поверхности $V_2[1]$ имеет вид:

$$\left[\left(b_{11}^3\right)^2+\left(b_{12}^3\right)^2\right]\left(y^3\right)^2+\left(b_{11}^4\right)^2\left(y^4\right)^2-b_{11}^5b_{22}^5\left(y^5\right)^2+2b_{11}^3b_{11}^4y^3y^4+$$
$$+b_{11}^3\left(b_{11}^5-b_{22}^5\right)y^3y^5+b_{11}^4\left(b_{11}^5-b_{22}^5\right)y^4y^5+\left(b_{11}^5+b_{22}^5\right)y^5-1=0$$

Поверхность V_2 является конусом второго порядка с вершиной

$$O\left(0,\frac{b_{22}^5-b_{11}^5}{b_{11}^4\left(b_{22}^5+b_{11}^5\right)},\frac{2}{b_{22}^5+b_{11}^5}\right).$$

Доказана

Теорема 4.2. Для того, чтобы одномерная нормаль поверхности $V_2\subset E_5$ была средней нормалью, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярная этой нормали двумерная плоскость пересекала присоединительный конус V_2 по эллипсу, центр которого находится в точке X.

§5. Существование квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_{(135)}\right)$ в евклидовом пространстве E_5

В области Ω евклидова пространства E_5, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_{i,}\right)$ $(i, j, k = 1,2,3,4,5)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k \; . \tag{5.1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0 . \tag{5.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_5 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_5, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j . \tag{5.3}$$

В силу последнего равенства формулы (5.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i . \tag{5.4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (5.3) получим:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j .$$

Применяя формул (5.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j .$$

В силу равенства (5.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda^k_{j\ell}\omega^j_i \wedge \omega^\ell = d\Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j_\ell \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j \wedge \omega^j - \Lambda^k_{j\ell}\omega^j_i \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda^k_{ij} - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j - \Lambda^k_{\ell j}\omega^\ell_i\right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda^k_{ij} - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j - \Lambda^k_{\ell j}\omega^\ell_i = \Lambda^k_{ijm}\omega^m$$

или

$$d\Lambda^k_{ij} = \left(\Lambda^k_{ijm} + \Lambda^k_{il}\Lambda^l_{jm} + \Lambda^k_{lj}\Lambda^l_{im}\right)\omega^m . \qquad (5.5)$$

Система величин $\left\{\Lambda^k_{ij}, \Lambda^k_{ijm}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e_1} = \Lambda^2_{11}\vec{e_2},$$

$$d_1\vec{e_2} = \Lambda^1_{21}\vec{e_1} + \Lambda^3_{21}\vec{e_3},$$

$$d_1\vec{e_3} = \Lambda^2_{31}\vec{e_2} + \Lambda^4_{31}\vec{e_4},$$

$$d_1\vec{e_4} = \Lambda^3_{41}\vec{e_3} + \Lambda^5_{41}\vec{e_5},$$

$$d_1\vec{e_5} = \Lambda^4_{51}\vec{e_4},$$

и $$\Lambda^3_{11} = -\Lambda^3_{11} = 0,\ \Lambda^4_{11} = -\Lambda^1_{41} = 0, \Lambda^5_{11} = -\Lambda^1_{51} = 0 \qquad (5.6)$$

$$\Lambda^5_{21} = -\Lambda^2_{51} = 0,\ \Lambda^4_{21} = -\Lambda^2_{41} = 0,\ \Lambda^5_{31} = -\Lambda^3_{51} = 0 . \qquad (5.7)$$

Здесь $k^1_1 = \Lambda^2_{11}$, $k^1_2 = \Lambda^3_{21}$, $k^1_3 = \Lambda^4_{31}$, $k^1_4 = \Lambda^5_{41} = -\Lambda^4_{51}$ - первая, вторая, третья и четвертая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F^j_i $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\vec{e}_i. \qquad (5.8)$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по четыре псевдофокуса. На прямой $(\boldsymbol{X},\vec{\boldsymbol{e}}_1)$ существуют псевдофокусы $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5$, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5$, на прямой $(\boldsymbol{X},\vec{\boldsymbol{e}}_3)$ $-F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5$, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_5^4$, на прямой $(X,\vec{e}_5)$ – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4$.

Сеть Σ_5 в $\Omega \subset E_5$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5)$, $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $\Re_5 = (X,\vec{e}_5,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5 сети Σ_5 одновременно.

Пусть сеть $\boldsymbol{\Sigma_5}$ является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_5$. Псевдофокус $F_1^5 \in (X,\vec{e}_i)$ определяется радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_1^5} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^{5}}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{15}^{5}}\vec{e}_1. \qquad (5.9)$$

Когда точка $\boldsymbol{X}$ смещается в области $\Omega \subset E_5$, псевдофокус $\boldsymbol{F_1^5}$ описывает свою область $\Omega_1^5 \subset E_5$. Определяется частичное отображение $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.

Продифференцируем обычным образом (9) и учитываем деривационные формулы:

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^{5}}\vec{e}_1\right) = d\vec{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{15}^{5}}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^{5}}d\vec{e}_1 = \omega^i\vec{e}_1 - \frac{d\Lambda_{15}^{5}}{\left(\Lambda_{15}^{5}\right)^2}\vec{e}_1 + \frac{1}{\Lambda_{15}^{5}}\omega_1^i\vec{e}_i$$

Учитывая равенство (3),(5)отсюда имеем:

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{15m}^{5} + \Lambda_{1\ell}^{5}\Lambda_{5m}^{\ell} + \Lambda_{\ell 5}^{5}\Lambda_{1m}^{\ell}\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{15}^{5}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^{5}}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Введем обозначение:

$$B_{15m}^{5} = \Lambda_{15m}^{5} + \Lambda_{1\ell}^{5}\Lambda_{5m}^{\ell} + \Lambda_{\ell 5}^{5}\Lambda_{1m}^{\ell}$$

Тогда имеем:

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5 \omega^m}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i \omega^m}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i$$

или $$d_1 \overrightarrow{F_1^5} = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i\right] \omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{152}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i\right] \omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B_{153}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i\right] \omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{154}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i\right] \omega^4 + \left[\vec{e}_5 + \frac{B_{155}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i\right] \omega^5$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B_{152}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i$$

$$\vec{b}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B_{153}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i$$

$$\vec{b}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B_{154}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i$$

$$\vec{b}_5 = \vec{e}_5 + \frac{B_{155}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_i$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^1 \vec{b}_1 + \omega^2 \vec{b}_2 + \omega^3 \vec{b}_3 + \omega^4 \vec{b}_4 + \omega^5 \vec{b}_5$$

Так как заданная сеть Σ_5 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\right] \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_2;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B_{152}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^5}{\Lambda_{15}^5} \vec{e}_5; \qquad (5.10)$$

$$\overrightarrow{b_3} = \frac{B^5_{153}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^5_{15}}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^5_{13}}{\Lambda^5_{15}}\overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{b_4} = \frac{B^5_{154}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^5_{15}}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda^5_{14}}{\Lambda^5_{15}}\overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{b_5} = \frac{B^5_{155}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{15}}{\Lambda^5_{15}}\overrightarrow{e_2}.$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

Линии $\omega^i, g\left(\omega^i\right) = \overline{\omega}^i$ называют двойными линиями отображения g, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $g\left(X\right)$ пересекаются, либо параллельны [7].

Линии $\omega^i, g\left(\omega^i\right) = \overline{\omega^i}$ в E_5 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные к ним взятые в соответствующих точках X, $g\left(X\right)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_5;

Рассмотрим линию γ, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(135)} = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_5}\right)$. Ее направляющий вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^5\vec{e}_5$.

Направляющий вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f^5_1(\gamma)$ имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{b}_1 + \gamma^3\vec{b}_3 + \gamma^5\vec{b}_5$

Учитывая (5.10) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \left(b^1_1\gamma^1 + b^1_3\gamma^3 + b^1_5\gamma^5\right)\overrightarrow{e_1} + \left(b^2_1\gamma^1 + b^2_3\gamma^3 + b^2_5\gamma^5\right)\overrightarrow{e_2} + \gamma^3\overrightarrow{e_2} + \gamma^3 b^5_3\overrightarrow{e_5},$$

где b^j_i – j-тая координата вектора b_i. Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{X^5_1} \in \Delta_{(135)}$ имеем: $b^1_1\gamma^1 + b^1_3\gamma^3 + b^1_5\gamma^5 = 0$. Учитывая формул (5.10) отсюда получим:

$$\left[\left(\Lambda^5_{15}\right)^2 + B^5_{151}\right]\gamma^1 + B^5_{153}\gamma^3 + B^5_{155}\gamma^5 = 0, \quad (5.11)$$

где

$$B^5_{15i} = d_i\Lambda^5_{15} = d_i\left(\overrightarrow{\Lambda_{15}}\overrightarrow{e_5}\right), \quad \overrightarrow{\Lambda_{15}} = d_1\overrightarrow{e_5}.$$

Верно и обратно, т.е. если имеет место (5.11), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ является квазидвойной линией отображения f^5_1.

Таким образом доказана

Теорема 5.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворяют условию (5.11).

Заключение

Для построения 3D моделей геометрических фракталов имеются три варианта программ: полу автоматизированный, автоматизированный и ручной, также можно воспользоваться различными программными обеспечениями. Например, Компас3D, 3ds Max, и другими. Существуют специализированные программы, которые имеют приложенные алгоритмы для реализации основных этапов построения.

Поскольку, основной задачей данного исследования является создание специального скрипта, который даст возможность полностью автоматизировать процесс, рассмотрение математической основы теории фракталов и изучение методов их построения для реализации практический части производится посредством языка программирования JavaScript и библиотеки WebGL, Tree.js.

Разработан скрипт для построения 3D модели пространственного фрактала “Сфера с четырнадцатью башнями”.

Исследованы двойные и квазидвойные линии частичных отображений евклидова пространств $E_5,\ E_6$ и получены результаты:

Оценка полноты решений поставленных задач

По всем пунктам поставленных задач необходимо продолжение исследований.

– Результаты оценки научно-технического уровня выполненной НИР в сравнении с лучшими достижениями в этой области. Графен – двумерная оллотропная модификация углерода, образованная слоем атомов углерода толщиной в один атом. Его кристалическая структура – гексагональная решётка, т.е. простой и плоский геометрический фрактал. (Нобелевская премия 2010-года по физике присуждена выходцам из Росии, работающим в Великобретании К. Новоселову и А. Гейму за создание графена).

Мы надеемся, что созданная нами плоские и пространственные геометрические фракталы в будущем будут иметь широкое применение в различных отраслях наук.

С другой стороны, учеными-химиками (докт.хим. наук, профессор Алтыбаева Д.Т. и др.) получены комплексные соединения и их кристалическими

структурами являются геометрические фракталы. Представляет большой научный интерес “обратное”, т.е. создание комплексного соединения, которе имеет кристаллическую структуру соответствующему заданному “наперёд” геометрическому фракталу.

Получены следующие результаты:

– Программа для получения 3D модели геометрического фрактала “Сфера с четырнадцатью башнями” (авторское свидетельство №3895, 20.03.2021);

– Программа для получения 3D модели геометрического фрактала”Планета Мирбек” (заявка подана);

– Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_3\right)$, где $\Delta_3 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5\right)$ – трехмерное распределение.

– Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пар $\left(f_1^5, \Delta_4\right)$ и $\left(f_1^5, \tilde{\Delta}_4\right)$, где $\Delta_4 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6\right)$ и $\tilde{\Delta}_4 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6\right)$– четырехмерные распределения.

– Доказаны необходимое и достаточное условия того, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.1: Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора $\vec{\beta}$ удовлетворяют условию:

$$\left[\left(\Lambda_{15}^5\right)^2 + \beta_{151}^5\right]\beta^1 - \Lambda_{14}^2\Lambda_{15}^5\beta^4 - \Lambda_{15}^2\Lambda_{15}^5\beta^5 = 0\,.$$

Теорема 3.1: Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(1356)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворят условию

$$\Lambda_{11}^2\gamma^1 + \Lambda_{13}^2\gamma^3 + \Lambda_{15}^2\gamma^5 + \Lambda_{16}^2\gamma^6 = 0.$$

Теорема 3.2: Линия γ, принадлежащая распределению $\tilde{\Delta}_{(1456)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворят условию:

$$\Lambda_{11}^2\gamma^1 + \Lambda_{14}^2\gamma^4 + \Lambda_{15}^2\gamma^5 + \Lambda_{16}^2\gamma^6 = 0.$$

Теорема 4.1. Вторая поляра точки X относительно присоединенной поверхности является конусом второго порядка тогда и только тогда, когда все векторы системы $p(p-1)$ векторов $\left\{\vec{b}_{ii}-\vec{b}_{jj},\vec{b}_{k\ell}\right\}$ $(i<j, k<\ell)$ компланарны.

Теорема 4.2. Для того, чтобы одномерная нормаль поверхности $V_2 \subset E_5$ была средней нормалью, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярная этой нормали двумерная плоскость пересекала присоединительный конус V_2 по эллипсу, центр которого находится в точке X.

Теорема 5.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворяют условию:

$$\left[\left(\Lambda_{15}^5\right)^2+B_{151}^5\right]\gamma^1+B_{153}^5\,\gamma^3+B_{155}^5\,\gamma^5=0.$$

Литература

1. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий [Текст]/ В.Т Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур,1975.вып.6.-С.19-25.

2. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей // Ученые записки. Т.243. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1965. – С. 29-37.

3. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.

4. Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей // Изв. вузов. Математика, 1967. Т.9. – С. 3-11.

5. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространств // В кн: III Межвузовская конференция по проблемам геометрии. Тезисы докладов. – Казань: Казанский университет, 1967. – С. 8.

6. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств // Ученые записки. Т.1., № 374. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. – С. 28-40.

7. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространства // Ученые записки. Т.1. №374. – Москва: МГПИ им. В.И.Ленина, 1970. – С. 41-51.

8. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства // Монография. – Ош, 2003. – С. 212-219.

9. Матиева Г., Папиева Т.М. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.

10. Матиева Г., Папиева Т. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.

11. Матиева Г. Необходимое и достаточное условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении евклидова пространства // Исследования

по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 259-264.

12. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва, Наука, 1967. – С. 481-482.

13. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии / И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк // Москва: ИЛ, 1948. Т.II. – 348 с.

14. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии // М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.

15. Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.

16. Г.Матиева. Авторское права на геометрической фрактал “Сфера с четырнадцатью башнями” (свидетельство №3895, от 12.06.2020).

17. Г.Матиева. Авторское права на геометрической фрактал ““Планета Мирбек”” (свидетельство №3959, от 08.09.2020).

18. А.И. Азевич. Симфония фракталов, журнал «Информатика» №23/2008.

Приложение

Список опубликованных статей

1. Папиева Т.М. и др. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_3\right)$ в евклидовом пространстве E_5 / Вестник ОшГУ, №1 (1) 2021. – Ош, 2021. – С. 98-106.
2. Шамшиева Г.А. и др. Существование квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_4\right)$ в евклидовом пространстве E_6 / Вестник ОшГУ, №1 (1) 2021. – Ош, 2021. – С. 121-129.
3. Абдуллаева Ч.Х. и др. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \tilde{\Delta}_4\right)$ в евклидовом пространстве E_6 / Международный научный журнал «Наука. Образование. Техника» Кыргызско-Узбекского университета им. Б.Сыдыкова, №2 (71)2021. – Ош, 2021. – С. 13-19.
4. Matieva G., Artykova J.A., Mustapakulova Ch.X. About property of the net, which is invariantly connected with the a pair of p-distributions in the space E_n / Theses of international scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”, Bishkek, 2021. – P. 34.
5. Papieva T.M., Shamshieva G.A., Sarygulova N.A. About the second polar of the point X on the surface $V_p \subset E_{p+3}$ relatively the attached surface / Theses of international scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”, Bishkek, 2021. – P. 35.
6. Abdullaeva Ch.X., Seyikazieva G.I., Arap kyzy T. About average normal of surface $V_2 \subset E_5$ / Theses of international scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”, Bishkek, 2021. – P. 38.
7. Matieva G., Moldoyarov U.D., Abdullaeva Ch.X. A new algorithm to obtain 3d model of a spatial geometric fractal / Theses of international scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”, Bishkek, 2021. – P. 43.
8. Авторское свидетельство программы для ЭВМ 3D модель фрактала “Шестилепестковый цветок”, №670 от 20 марта 2021 года.
9. Matieva, G., Abdullayeva, C., Artykova, Z. Existence of quasidouble lines of a pair f_1^5, $\Delta_{(135)}$ in Euclidean space E_5 / Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1988(1), 012082. (Scopus))

   https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57212174398

Приложение 1

Форма представления отчета по выполнению государственных программ на основе целевых проектов и разработок, финансируемых из республиканского бюджета

№	Наименование государственной программы и проекта	Научный руководитель, должность, ученая степень и звание	Наименование государственного заказчика	Наименование ВУЗа, НИИ, реализующих проект	Цели и задачи проекта	Объект исследования и разработки	Методы исследования	примечание
1.	Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)	Доктор физико-математических наук, профессор Матиева Гулбадан	Ошская областная государственная администрация	Ошский государственный университет	1) Построение новых классов плоских и пространственных геометрических фракталов и исследование их приложений; 2) Разработать программ для получения компьютерных изображений построенных фракталов и получение их 3D моделей;	Геометрические фракталы, частичное отображения евклидова пространства	Метод внешних форм Картана и метод подвижного репера; язык программирования JavaScript и L-system	

					3) Изучение свойств частичного отображения евклидова пространства порождаемого заданным p-мерным распределением (когда распределение минимальное); 4) Определение необходимых и достаточных условий существования двойных и квазидвойных линий частичного отображения f; 5) Доказать необходимое и достаточное условия существования неподвижных прямых частичного отображения f;			

					5) Изучение отображения $f: T_p(x) \to N_{n-p}(x), f(M) = M''$, где М$\in T_p(x)$, $T_p(x)$ – касательная p-мерная плоскость p-мерной поверхности V_p в E_n; $N_{n-p}(x)$ – нормальная плоскость поверхности V_p. 6) Доказать необходимое и достаточное условия того, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5;			

Приложение 1.1

Форма представления полугодового (промежуточного) отчета государственных программ на основе целевых проектов и разработок, финансируемых из республиканского бюджета

№	Наименование государственной программы и проекта	Задание по календарному плану (Объем работ, подлежащих выполнению)	Выполненные работы по календарному плану (краткая аннотация о полученных научных результатах)	Этапы НИР	Вид отчета (промежуточный/ заключительный/ полугодовой)	Начало реализации программы и проекта (год)	Срок окончания программы и проекта (год)	Доказательная база (№ приложение): акт выполн. работ; протоколы обсуждения; договора о внедрении; договора о совместной работе с предприятиями; размещение информации о ходе реализации и результатах на сайте НИИ, в СМИ.
2.	Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп	Построение геометрических новых фракталов на плоскости и в пространстве; Разработка программ получения компьютерных изображений и моделей новых фракталов	1) Программа для получения 3D модели геометрического фрактала “Сфера с четырнадцатью башнями”; 2) Программа для получения 3D модели геометрического фрактала ”Планета Мирбек” (заявка подана);	I этап - 01.01.2021-31.12.2021 II этап - 01.01.2022-31.12.2022 III этап - 01.01.2023-31.12.2023	промежуточный	01.01.2021	31.12.2023	Результаты работ обсуждались на региональном научном семинаре “Актуальные проблемы математики и их применения”, 05.06.2021, протокол №4; Результаты научно-исследовательских работ были доложены - на международной научной конференции «Проблемы современной

	чагылтуулардын геометриясы)		3) Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_3\right)$. 4) Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_4\right)$. 5) Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \tilde{\Delta}_4\right)$. 6) Доказаны необходимое и достаточное условия того, что вторая поляра точки X относительно присоединенной поверхности					математики и ее приложения», посвященной 70-летию академика А.А. Борубаева, 15-19 июня 2021 года в г. Бишкек http://math.aknet.kg/conf/111-borubaev70.html - на научном симпозиуме математиков “Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke-28” (SKSM28), в г. Куантан, шт. Пахан, Малайзия, 28-29 июль, 2021. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1988/1/012082 Опубликованы статьи, тезисы

			является конусом второго порядка когда все векторы системы $p(p-1)$ векторов $\{\vec{b}_{ii}-\vec{b}_{jj},\vec{b}_{k\ell}\}$ $(i<j, k<\ell)$ компланарны. 7) Доказаны необходимое и достаточное условия того, что одномерная нормаль поверхности $V_2 \subset E_5$ являлась средней нормалью. 8) Доказаны необходимое и достаточное условия того, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5;					

Приложение 2

Количественная информация о реализации и результатах государственной программы и проекта

№	Наименование государственной программы и проекта	Публикации					Авт свидетельства, патент	Акт внедрения	примечание
		Статьи в SCOPUS, WoS тема статьи, с указанием даты	Статьи в РИНЦ тема статьи, с указанием даты	Статьи в других научных журналах тема статьи, с указанием даты, в т.ч. за рубежом	Тезисы/ в т.ч. за рубежом	монографии			
1.	Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)	10. Matieva, G., Abdullayeva, C., Artykova, Z. Existence of quasidouble lines of a pair f_1^5, $\Delta_{(135)}$ in Euclidean space E_5 / Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1988(1), 012082.	1. Папиева Т.М. и др. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары (f_1^5, Δ_3) в евклидовом пространстве E_5 / Вестник ОшГУ, №1 (1) 2021. – Ош, 2021. – С 98-106. 11. Шамшиева Г.А. и др. Существование квазидвойной линии пары (f_1^5, Δ_4) в евклидовом	-	1.Matieva G., Artykova J.A., Mustapakulova Ch.X. About property of the net, which is invariantly connected with the a pair of p-distributions in the space E_n / Theses of international scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”, Bishkek, 2021. – P. 34. 2.Papieva T.M., Shamshieva G.A.,	-	Авторское свидетельство программы для ЭВМ 3D модель фрактала “Шестилепестковый цветок”, №670 от 20 марта 2021 года.	-	

			пространстве E_6 / Вестник ОшГУ, №1 (1) 2021. – Ош, 2021. – С 121-129. 12. Абдуллаева Ч.Х. и др. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \tilde{\Delta}_4\right)$ в евклидовом пространстве E_6 / Международный научный журнал «Наука. Образовани е. Техника» Кыргызско-Узбекского университета им. Б.Сыдыкова, №2 (71)2021. – Ош, 2021 (Сдана в печать).		Sarygulova N.A. About the second polar of the point X on the surface $V_p \subset E_{p+3}$ relatively the attached surface / Theses of international scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”, Bishkek, 2021. – P. 35. 3.Abdullaeva Ch.X., Seyikazieva G.I., Arap kyzy T. About average normal of surface $V_2 \subset E_5$ / Theses of international scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”, Bishkek, 2021. – P. 38. 4.Matieva G., Moldoyarov U.D., Abdullaeva Ch.X. A new algorithm to				

					obtain 3d model of a spatial geometric fractal / Theses of international scientific conference “Problems of modern mathematics and its applications”, Bishkek, 2021. – P. 43.				