МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

за 2022 год

по теме «Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)»

(*Промежуточный*)

Ош – 2022

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 514:757
№ госрегистрации
Инв. №

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе
ОшГУ, к.ф.-м.н., доцент
Арапбаев Р.Н. ______________
«_ _» ____________ 2022 год

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

за 2022 год

по теме «**Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства**
(Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)»

(***Промежуточный***)

Научный руководитель, д.ф.-м.н., профессор Матиева Г.

Ош – 2022

Список исполнителей

№	Ф.И.О.	Ученая степень, ученое звание	Наименование должности	Подписи
1	Матиева Гулбадан	д.ф.-м.н., профессор, член-коор. НАН КР	г.н.с.	
2	Турсунов Дилмурат Абдиллажанович	д.ф.-м.н., профессор	в.н.с.	
3	Кожобеков Кудайберди Гапарович	д.ф.-м.н.,доцент	в.н.с.	
4	Папиева Толкун Маматаевна	к.ф.-м.н., доцент	в.н.с.	
5	Артыкова Жылдыз Абдисаламовна	к.ф.-м.н., доцент	в.н.с.	
6	Курбанбаева Нуржамал Нажимидиновна	к.ф.-м.н., доцент	в.н.с.	
7	Чамашев Марат Какарович	к.ф.-м.н., доцент	в.н.с.	
8	Азимов Бектур Абдырахманович	к.ф.-м.н.	в.н.с.	
9	Орозов Максатбек Өмүрбекович	к.ф.-м.н.	в.н.с.	
10	Эгемназарова Айчүрөк Жакыповна	ст. преп.	с.н.с.	
11	Сейитказыева Гульнара Имамалиевна	ст. преп.	с.н.с.	
12	Шамшиева Гулмира Асилидиновна	ст.преп	с.н.с	
13	Сарыгулова Нуркыз Акболушовна	преподаватель	с.н.с.	
14	Адилова Гулжан Абдилазизовна	преподаватель	с.н.с.	
15	Мустапакулова Чолпон Абакуловна	преподаватель	с.н.с.	
16	Каныбек кызы Айгерим	преподаватель	с.н.с.	
17	Арапова Токтобүбү Машраповна	преподаватель	м.н.с.	
18	Бекмурза уулу Ыбадылла	преподаватель	м.н.с.	
19	Шермаматов Жолдошбек Жеңишбекович	преподаватель	м.н.с.	
20	Камалов Султанбек Садырбекович	преподаватель	м.н.с.	
21	Доолатбекова Назира	преподаватель	м.н.с.	
22	Равшан уулу Сыймык	преподаватель	м.н.с.	
23	Исраилбекова Зинат Исраилбековна	преподаватель	м.н.с.	
24	Токторова Кулпунай	преподаватель	м.н.с.	
25	Эрмек кызы Мираида	преподаватель	улук лаборант	

РЕФЕРАТ

Отчета НИР по проекту «Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)»

Общий объем отчета 57 страниц, количество использованных источников 18, изданы одна монография, одно учебное пособие, опубликованы 15 научных статей (четыре из которых опубликовано в базе Scopus, 11 в журналах, рецензируемых в РИНЦ), получены 4 авторских свидетельств.

Перечень ключевых слов: фрактал, распределение, пространство, частичное отображение, двойная линия, компьютерное изображение, неподвижная прямая, 3D модель, квазидвойная линия.

Актуальность: Фрактальная геометрия – молодая и развивающая быстрым темпом отрасль математической науки. Она выдвигая новые идеи находится в процессе тесной интеграции с другими науками. Идеи фрактальной геометрии, в настоящее время, широко применяются в физике, медицине, технических науках, психологии и лингвистике.

Развитие фрактальной геометрии тесно связано с новыми разработками в компьютерной технологии, т.к. построение фракталов и получение их 3D моделей невозможно без средств компьютерных технологий.

Огромный интерес представляют гладкие частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданной сетью Френе, так как сеть Френе значительно упрощает не только моделирование явлений и процессов, а также рациональные решения проблем, связанные с ними.

Сети Френе способствуют решению многих проблем теории линейных и нелинейных волн.

Данное научное исследование относится к значительным главам современной дифференциальной геометрии – теории отображений гладких многообразий.

Объект исследования: Геометрические фракталы, частичное отображения евклидова пространства.

Цели и задачи проекта:

– Построение новых классов плоских и пространственных геометрических фракталов и исследование их приложений;

– Разработать программ для получения компьютерных изображений построенных фракталов и получение их 3D моделей;

– Изучение свойств частичного отображения f евклидова пространства порождаемого заданным p-мерным распределением (когда распределение минимальное);

– Определение необходимых и достаточных условий существования двойных и квазидвойных линий частичного отображения f;

– Доказать необходимое и достаточное условия существования неподвижных прямых частичного отображения f;

– Доказать необходимое и достаточное условия того, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(i,j,k)}$, является квазидвойной линией отображения f_j^k;

– Изучение отображения $f: T_p(x) \to N_{n-p}(x), f(M) = M''$, где $M \in T_p(x)$, $T_p(x)$ – касательная -мерная плоскость p-мерной поверхности V_p в E_n; $N_{n-p}(x)$ – нормальная плоскость поверхности V_p.

Методы и методология проведения исследования:

В проведении исследования использованы язык программирования JavaScript и L-system, метод внешних форм Картана и метод подвижного репера.

Результаты исследования и их новизна:

– Построены два плоские геометрические фракталы: “Геометрическая звезда” (авт.свид. № 4741, 24.02.2022), “Шестеро и седьмой” (авт.свид. № 4740, 24.02.2022);

– Программа для получения 3D модели пространственного геометрического фрактала (авт.свид. № 770, 10.03.2022);

– Получено авторское свидетельство на рабочую тетрадь “Көрсөтмөлүү геометрия (Мейкиндик ой жүгүртүүнү өнүктүрүү үчүн көнүгүүлөр [текст]/Г. Матиева, Г.М. Борбоева/ 5-6-класстардын окуучулары үчүн жумушчу дептер. – Ош, 2022. – 54 с.” (№4854, 07.06.2022);

– Издана монография “Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе” (авторы: Матиева Г, Папиева Т.М., Курбанбаева Н.Н.);

– Издано учебное пособие “Геометриянын негиздери” (авторы: Матиева Г, Папиева Т.М., Азимов Б.А.);

– Получены необходимые и достаточные условия того, что линии $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ p,\ q,\ s,\ t,\ \mu,\ \theta$ соответственно принадлежащие распределениям $\Delta_{(123)}$, $\Delta_{(124)}$, $\Delta_{(125)}$,$\Delta_{(234)}$,$\Delta_{(235)}$, $\Delta_{(345)}$, $\Delta_{(145)}$, $\Delta_{(134)}$, $\Delta_{(245)}$, $\Delta_{(135)}$ являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3;

– Доказаны необходимые и достаточные условия того, что линии $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ h,\ p,\ q,\ s,\ t,\ m$ соответственно принадлежащие распределениям $\Delta_{(123)}$, $\Delta_{(124)}$, $\Delta_{(125)}$,$\Delta_{(234)}$,$\Delta_{(235)}$, $\Delta_{(345)}$, $\Delta_{(145)}$, $\Delta_{(134)}$, $\Delta_{(245)}$, $\Delta_{(135)}$ являются квазидвойными линиями частичного отображения f_3^2;

– Получены необходимые и достаточные условия того, что линии $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ s,\ t,\ p,\ q,\ \theta,\ \mu$ соответственно принадлежащие распределениям $\Delta_{(123)}$, $\Delta_{(124)}$, $\Delta_{(125)}$,$\Delta_{(234)}$,$\Delta_{(235)}$, $\Delta_{(345)}$, $\Delta_{(145)}$, $\Delta_{(134)}$, $\Delta_{(245)}$, $\Delta_{(135)}$ являются квазидвойными линиями частичного отображения f_5^4;

– Построено полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными параболического типа;

– Доказано, что полученное разложение действительно является асимптотическим решением поставленной задачи на всем прямоугольнике.

Оглавление

Перечень сокращений и обозначений

В настоящем отчете о НИР применяют следующие сокращения и обозначения:

$\Leftrightarrow$ – эквивалентность (равносильность) высказываний;

$\|$ – коллинеарность векторов;

$\perp$ – ортогональность векторов;

E_n – n-мерное евклидово пространство;

$\vec{X} = \vec{X}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – радиус-вектор точки $X \in \Omega$;

ω^i – интегральная линия векторного поля $\vec{e}_i$;

d_i – символ дифференцирования вдоль линии ω^i (или по направлению вектора $\vec{e}_i$);

$\wedge$ – внешнее произведение;

$\Delta_2 = \left(X, \vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$ – двумерное распределение;

$\left(X, \vec{e}_i\right)$ – прямая, проходящая через точку $X \in \Omega$ с направляющим вектором $\vec{e}_i$;

$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера (δ_{ij}, δ^{ij} – только в таком смысле);

Запись вида $a_i b^i$ обозначает, что по i производится суммирование;

«Плоскость» – собственное подпространство любой размерности основного пространства E_n;

F_i^j – псевдофокус прямой $\left(X, \vec{e}_i\right)$ $(i \neq j)$;

Δ_p – p-мерное распределение $(p < n)$;

$\vec{M}_p$ – вектор средней кривизны распределения Δ_p в E_n;

Σ_n – сеть Френе в $\Omega \subset E_n$;

$\tilde{\Sigma}_n$ – циклическая сеть Френе;

k_i^j – i-тая кривизна линии ω^j сети Σ_n;

$\Delta_{(ij)}$ –двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_j$

$\Delta_{(ijk)}$ – трехмерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$;

$\vec{k}_{ij}$ – i-тый вектор кривизны линии ω^j сети Σ_n;

$\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$ – вынужденная кривизна линии ω^i вдоль направлении $\vec{e}_j$.

$\left(f_i^{\,j}, \Delta_p \right)$ – пара, где $f_i^{\,j}$ – частичное отображение, порождаемое псевдофокусом $F_i^{\,j}$, Δ_p – p-мерное распределение.

Термины и определения

В настоящем отчете о НИР применяют следующие термины с соответствующими определениями:

Термины	Определения
Двойная линия частичного отображения f	Линии $\omega^i, f\left(\omega^i\right)=\overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f(X)$ пересекаются, либо параллельны
Двойная линия пары (f, Δ_p)	Линия ℓ называется двойной линией пары (f, Δ_p), если она является двойной линией отображения f и принадлежит распределению Δ_p
Квазидвойная линия отображения g	Линии ω^i, $g\left(\omega^i\right)=\overline{\omega}^i$ в пространстве E_4 называются квазидвойными линиями отображения g, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4
Квазидвойная линия пары (g, Δ_p),	Линия ℓ в пространстве E_4 называется квазидвойной линией пары (g, Δ_p), если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p
p-распределение	Полем Δ_p p-мерных подпространств или p-распределением на многообразии X_n называется соответствие $$\Delta_p:\ x \in X_n \to \Delta_p(x) \subset T_x(X_n),\ p \le n,$$ где $T_x(X_n)$ – касательное пространство многообразия X_n в точке $x \in X_n$, $\Delta_p(x)$ – p-мерное подпространство в $T_x(X_n)$
Псевдофокус касательной	Псевдофокусом касательной $(X, \vec{e}_i)$ к линии ω^i данной сети называется такая точка $F_i^{\,j} \in (X, \vec{e}_i)$, смещение которой принадлежит плоскости $(X, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{i-1}, e_{i+1}, \ldots \vec{e}_n)$, когда точка X смещается в направлении линии $\omega^j (i \ne j)$
Сеть Σ_n	Говорят, что в области G n-мерного вещественного C^∞ – многообразия M задана сеть Σ_n, если в G заданы n

	семейств линий таких, что через каждую точку $X \in G$ проходит одна и только одна линия каждого семейства, причем векторы, касательные к этим кривым в точке *X*, образуют базис векторного пространства T_X – касательного пространства к многообразию M в точке X
Фокус прямой	Точка $S \in \left(X, \vec{e}_1\right)$, определяемая радиус-вектором $\vec{S} = \vec{X} + v\vec{e}_1$, называется фокусом прямой $\left(X, \vec{e}_1\right)$, если $d\vec{S} \parallel \vec{e}_1$ при смещении точки X по площадке $\left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ (т.е. $\omega^1 = 0$).
Фрактал	Фракта́лом называется (лат. Fractus - дроблёный, сломанный, разбитый) геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, то есть составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком.

Введение

Понятие “фрактал” было введено Бенуа Мандельбротом в 1975 году. В своей книге “Фрактальная геометрия природы” он пишет, что математики прошлых лет всегда отказывались от изучения тех форм, которые демонстрирует нам природа, изучая евклидовы геометрические фигуры и изобретая всевозможные теории, которые не обьясняют окружающей нас действительности. Однако, по мнению Мандельброта “… новая геометрия способна описать многие из неправильных и фрагментированных форм в окружающем нас мире и породить вполне законченные теории, определив семейство фигур, которые я называю фракталами”.

Фрактальная геометрия – молодая и развивающая быстрым темпом отрасль математической науки. Она выдвигая новые идеи находится в процессе тесной интеграции с другими науками. Идеи фрактальной геометрии, в настоящее время, широко применяются в физике, медицине, технических науках, психологии и лингвистике.

Развитие фрактальной геометрии тесно связано с новыми разработками в компьютерной технологии, т.к. построение фракталов и получение их 3D моделей невозможно без средств компьютерных технологий.

Данное научное исследование относится к значительным главам современной дифференциальной геометрии – теории отображений гладких многообразий.

Проблемами точечных соответствий пространств одинаковой размерности занимались А.П. Норден, В.В. Рыжков, М.А. Акивис, В.Т. Базылев и их ученики, а также другие геометры.

Основы геометрии плоских многомерных сетей заложены в работах В.Т. Базылева. Работы В.Т. Базылева и его учеников также посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

Теория дифференцируемых отображений евклидова пространства, имеет большой интерес не только для самой геометрии, она имеет широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Значительный интерес представляют дифференцируемые частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданной сетью, так как от выбора сети зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, а также их рациональные решения. В работах Дж. Уизема двумерные и трехмерные сети и ее образы в различных отображениях применяются в решении многих задач теории линейных и нелинейных волн.

При работе над научным проектом придерживались следующих целей и задач:

– Построение новых классов плоских и пространственных геометрических фракталов и исследование их приложений;

– Разработать программ для получения компьютерных изображений построенных фракталов и получение их 3D моделей;

– Изучение свойств частичного отображения f евклидова пространства порождаемого заданной сетью Френе;

– Определение необходимых и достаточных условий существования двойных и квазидвойных линий частичного отображения f.

В проведении исследования использованы язык программирования JavaScript и L-system, метод внешних форм Картана и метод подвижного репера.

При исследовании были получены следующие результаты:

– Построены два плоские геометрические фракталы: “Геометрическая звезда” (авт.свид. № 4741, 24.02.2022), “Шестеро и седьмой” (авт.свид. № 4740, 24.02.2022);

– Программа для получения 3D модели пространственного геометрического фрактала (авт.свид. № 770, 10.03.2022);

– Получено авторское свидетельство на рабочую тетрадь “Көрсөтмөлүү геометрия (Мейкиндик ой жүгүртүүнү өнүктүрүү үчүн көнүгүүлөр [текст]/Г. Матиева, Г.М. Борбоева/ 5-6-класстардын окуучулары үчүн жумушчу дептер. – Ош, 2022. – 54 с.” (№4854, 07.06.2022);

– Издана монография “Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе” (авторы: Матиева Г, Папиева Т.М., Курбанбаева Н.Н.);

– Издано учебное пособие “Геометриянын негиздери” (авторы: Матиева Г, Папиева Т.М., Азимов Б.А.);

– Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.1. 1) Для того чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие:

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} M^3_{432} & M^3_{433} \\ \Lambda^5_{42} & \Lambda^5_{43} \end{vmatrix}; \quad \alpha^2 = \begin{vmatrix} M^3_{433} & M^3_{431} \\ \Lambda^5_{43} & \Lambda^5_{41} \end{vmatrix}; \quad \alpha^3 = \begin{vmatrix} M^3_{431} & M^3_{432} \\ \Lambda^5_{41} & \Lambda^5_{42} \end{vmatrix}.$$

2) Для того чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие:

$$\beta^1 = \begin{vmatrix} \Lambda^5_{42} & \Lambda^5_{44} \\ \Lambda^3_{42} & 0 \end{vmatrix}; \ \beta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda^5_{44} & \Lambda^5_{41} \\ 0 & \Lambda^3_{41} \end{vmatrix}; \ \beta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda^5_{41} & \Lambda^5_{42} \\ \Lambda^3_{41} & \Lambda^3_{42} \end{vmatrix}.$$

3) Для того чтобы линия γ принадлежащая распеделению $\Delta_{(125)}$ была квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы ее касательный вектор был направляющим вектором прямой который получается при пересечении плоскостей:

$$\begin{cases} \Lambda^3_{41}\gamma^1 + \Lambda^3_{42}\gamma^2 + \Lambda^5_{45}\gamma^5 = 0; \\ M^3_{431}\gamma^1 + M^3_{432}\gamma^2 + M^3_{435}\gamma^5 = 0. \end{cases}$$

4) Для того чтобы линия δ, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие:

$$\Lambda^5_{42}\delta^2 + \Lambda^5_{43}\delta^3 + \Lambda^5_{44}\delta^4 = 0.$$

5) Для того чтобы линия p, принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие:

$$M^3_{432}p^2 + M^3_{433}p^3 + M^3_{435}p^5 = 0.$$

6) Линия q принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

7) Для того чтобы линия s, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие: $\Lambda^3_{41}s^1 + \Lambda^3_{45}s^5 = 0$.

8) Для того чтобы линия t, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие $\Lambda_{41}^5 t^1 + \Lambda_{43}^5 t^3 + \Lambda_{44}^5 t^4 = 0.$

9) Для того чтобы линия μ, принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие $\Lambda_{42}^3 \mu^2 + \Lambda_{45}^3 \mu^5 = 0.$

10) Для того чтобы линия θ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие $M_{431}^3 \theta^1 + M_{433}^3 \theta^3 + M_{435}^3 \theta^5 = 0.$

Теорема 2.1. 1) Для того чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\alpha^1 \Lambda_{31}^4 + \alpha^2 \Lambda_{32}^4 + \alpha^3 \Lambda_{33}^4 = 0$.

2) Для того чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие $\beta^1 C_{321}^2 + \beta^2 C_{322}^2 + \beta^4 C_{324}^2 = 0$;

3) Для того чтобы линия γ принадлежащая распеделению $\Delta_{(125)}$ была квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\gamma^1 C_{321}^2 + \gamma^2 C_{322}^3 + \gamma^5 C_{325}^3 = 0;$$
$$\gamma^1 \Lambda_{31}^4 + \gamma^2 \Lambda_{32}^4 + \gamma^5 \Lambda_{35}^4 = 0.$$

4) Линия δ принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

5) Для того чтобы линия h, принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $h^2 \Lambda_{32}^4 + h^3 \Lambda_{33}^4 + h^5 \Lambda_{35}^4 = 0$.

6) Для того чтобы линия p, принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\Lambda_{34}^2 p^4 + \Lambda_{35}^2 p^5 = 0$.

7) Для того чтобы линия q, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$q^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{34}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ C_{324}^2 & C_{325}^2 \end{vmatrix};\ q^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{35}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ C_{325}^2 & C_{321}^2 \end{vmatrix};\ q^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{34}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ C_{324}^2 & C_{325}^2 \end{vmatrix}.$$

8) Для того чтобы линия s, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\Lambda_{31}^2 s^1 + \Lambda_{34}^2 s^4 = 0$.

9) Для того чтобы линия t, принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $t^2 C_{322}^2\ t^2 - t^4 C_{324}^2 + t^5 C_{325}^2 = 0$.

10) Для того чтобы линия m, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$m^1 = \begin{vmatrix} 0 & \Lambda_{32}^2 \\ \Lambda_{33}^4 & \Lambda_{35}^4 \end{vmatrix};\ m^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{35}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ \Lambda_{35}^4 & \Lambda_{31}^4 \end{vmatrix};\quad m^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{31}^2 & 0 \\ \Lambda_{31}^4 & \Lambda_{33}^4 \end{vmatrix}.$$

Теорема 3.1. 1) Для того чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix};\ \alpha^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^4 & \Lambda_{51}^4 \\ D_{543}^4 & D_{541}^4 \end{vmatrix};\quad \alpha^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{51}^4 & \Lambda_{52}^4 \\ D_{541}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix}.$$

2) Для того чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $D_{541}^4\beta^1 + D_{542}^4\beta^2 + D_{544}^4\beta^4 = 0$.

3) Для того чтобы линия γ принадлежащая распеделению $\Delta_{(125)}$ была квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось усиловие $\Lambda_{51}^4\gamma^1 + \Lambda_{52}^4\gamma^2 = 0$.

4) Для того чтобы линия δ принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4, чтобы координаты ее касательного вектора были в виде:

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{54}^1 \\ D_{543}^4 & D_{544}^4 \end{vmatrix};\ \delta^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{54}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ D_{544}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix};\quad \delta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix}.$$

5) Для того чтобы линия s, принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие:

$$s^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{55}^1 \\ \Lambda_{53}^4 & 0 \end{vmatrix}; \quad s^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{55}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ 0 & \Lambda_{52}^4 \end{vmatrix}; \quad s^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \end{vmatrix}.$$

6) Для того чтобы линия t, принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$s^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{55}^1 \\ \Lambda_{53}^4 & 0 \end{vmatrix}; \quad s^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{55}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ 0 & \Lambda_{52}^4 \end{vmatrix}; \quad s^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \end{vmatrix}.$$

7) Линия p, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4.

8) Для того чтобы линия q, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $D_{541}^4 q^1 + D_{543}^4 q^3 + D_{544}^4 q^4 = 0.$

9) Для того чтобы линия θ, принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\Lambda_{52}^1 \theta^2 + \Lambda_{54}^1 \theta^4 + \Lambda_{55}^1 \theta^5 = 0.$

10) Для того чтобы линия μ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\Lambda_{51}^4 \mu^1 + \Lambda_{53}^4 \mu^3 = 0.$

– Также построено полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными параболического типа.

– Доказано, что полученное разложение действительно является асимптотическим решением поставленной задачи на всем прямоугольнике.

§ 1. Существование квазидвойных линий частичного отображения f_4^3 пространства E_5

Псевдофокус $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_4^3} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3} \vec{e_4} \, . \tag{1.1}$$

Когда точка X смещается в области Ω точка F_4^3 описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_5$. В результате для любого $X \in \Omega$ получается частичное отображение $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f_4^3(X) = F_4^3$.

Дифференцируем равенство (1.1), применяем деривационные формулы и получим следующее:

$$d\overrightarrow{F_4^3} = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\right)\vec{e_4} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3} d\vec{e_4} = \omega^i \vec{e_i} - \frac{d\Lambda_{43}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e_4} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\omega_4^i \vec{e_i} =$$

$$= \omega^i \vec{e_i} + \frac{M_{43m}^3 \omega^m}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{4m}^i \omega^m}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i} \, ,$$

где $M_{43m}^3 \omega^m = d\Lambda_{43m}^3 = \left(\Lambda_{43m}^3 + \Lambda_{4\ell}^3 \Lambda_{3m}^\ell + \Lambda_{\ell 3}^3 \Lambda_{4m}^\ell\right)\omega^m$.

Последнее равенство можно переписать в таком виде:

$$d\overrightarrow{F_4^3} = \left[\vec{e_1} + \frac{M_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{41}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^1 + \left[\vec{e_2} + \frac{M_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{42}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^2$$

$$+ \left[\vec{e_3} + \frac{M_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{43}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^3 + \left[\vec{e_4} + \frac{M_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{44}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^4 +$$

$$+ \left[\vec{e_5} + \frac{M_{435}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{45}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^5$$

Введём следующие обозначения:

$$\overrightarrow{m_1} = \vec{e_1} + \frac{M_{431}^4}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{41}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i} \; ;$$

$$\overrightarrow{m_2} = \vec{e_2} + \frac{M_{432}^4}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{42}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i} \; ;$$

$$\overrightarrow{m_3} = \vec{e_3} + \frac{M_{433}^4}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{43}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i} \; ;$$

$$\overrightarrow{m_4}=\overrightarrow{e_4}+\frac{M^{\;4}_{434}}{\left(\Lambda^{\;3}_{43}\right)^2}\overrightarrow{e_4}-\frac{\Lambda^{\;i}_{44}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{m_5}=\overrightarrow{e_5}+\frac{M^{\;4}_{435}}{\left(\Lambda^{\;3}_{43}\right)^2}\overrightarrow{e_4}-\frac{\Lambda^{\;i}_{45}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_i}\ .$$

Отсюда имеем

$$d\overrightarrow{F^3_4}=\omega^1\overrightarrow{m_1}+\omega^2\overrightarrow{m_2}+\omega^3\overrightarrow{m_3}+\omega^4\overrightarrow{m_4}+\omega^4\overrightarrow{m_4}.$$

Так как $\tilde{\Sigma}_5$ является сетью Френе, то векторы $\overrightarrow{m_i}$ будут иметь следующий вид:

$$\overrightarrow{m_1}=\overrightarrow{e_1}+\frac{M^{\;3}_{431}}{\left(\Lambda^{\;3}_{43}\right)^2}\overrightarrow{e_4}-\frac{\Lambda^{\;3}_{41}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\;5}_{41}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{m_2}=\overrightarrow{e_2}+\frac{M^{\;3}_{432}}{\left(\Lambda^{\;3}_{43}\right)^2}\overrightarrow{e_4}-\frac{\Lambda^{\;3}_{42}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_3}-\frac{\Lambda^{\;5}_{42}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{m_3}=\frac{M^{\;3}_{433}}{\left(\Lambda^{\;3}_{43}\right)^2}\overrightarrow{e_4}-\frac{\Lambda^{\;5}_{43}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_5}; \qquad (1.2)$$

$$\overrightarrow{m_4}=\left[1+\frac{M^{\;3}_{434}}{\left(\Lambda^{\;3}_{43}\right)^2}\right]\overrightarrow{e_4}-\frac{\Lambda^{\;5}_{44}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{m_5}=-\frac{\Lambda^{\;3}_{45}}{\Lambda^{\;3}_{43}}\overrightarrow{e_3}+\frac{M^{\;3}_{435}}{\left(\Lambda^{\;3}_{43}\right)^2}\overrightarrow{e_4}+\overrightarrow{e_5}.$$

В общем случае эти векторы (1.2) линейно независимы. Области Ω^3_4 присоединим подвижной репер $\Re'=\left(F^3_4,\overrightarrow{m_i}\right)$.

Рассмотрим линию α принадлежащую распределению $\Delta_{(123)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\overrightarrow{\alpha}=\alpha^1\overrightarrow{e_1}+\alpha^2\overrightarrow{e_2}+\alpha^3\overrightarrow{e_3}.$$

А касательный вектор линии $\overline{\alpha}=f^3_4(\alpha)$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\overline{\alpha}}=\alpha^1\overrightarrow{m_1}+\alpha^2\overrightarrow{m_2}+\alpha^3\overrightarrow{m_3}=\alpha^1\overrightarrow{e_1}+\alpha^2\overrightarrow{e_2}+\left(\alpha^1m^3_1+\alpha^2m^3_2\right)\overrightarrow{e_3}+\left(\alpha^1m^4_1+\alpha^2m^4_2+\alpha^3m^4_3\right)\overrightarrow{e_4}+$$
$$+\left(\alpha^1m^5_1+\alpha^2m^5_2+\alpha^3m^5_3\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Отсюда учитывая формулы (1.2) имеем следующее:

$$\overrightarrow{\overline{\alpha}}=\left(\alpha^1b^1_1+\alpha^2b^1_2+\alpha^3b^1_3\right)\overrightarrow{e_1}+\left(\alpha^1b^2_1+\alpha^2+\alpha^3b^2_3\right)\overrightarrow{e_2}+\alpha^3\overrightarrow{e_3}+\left(\alpha^2b^5_2+\alpha^3b^5_3\right)\overrightarrow{e_5}$$

Из условия $\vec{\alpha}, \vec{\bar{\alpha}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(123)}$ получим следующее:

$$\begin{cases} \alpha^1 m_1^4 + \alpha^2 m_2^4 + \alpha^3 m_3^4 = 0; \\ \alpha^1 m_1^5 + \alpha^2 m_2^5 + \alpha^3 m_3^5 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формул (1.2) последние равенства напишем в виде:

$$\begin{cases} M_{431}^{\ 3}\alpha^1 + M_{432}^{\ 3}\alpha^2 + M_{433}^{\ 3}\alpha^3 = 0; & (1.3) \\ \Lambda_{41}^{\ 5}\alpha^1 + \Lambda_{42}^{\ 5}\alpha^2 + \Lambda_{43}^{\ 5}\alpha^3 = 0 & (1.4) \end{cases}$$

Отсюда имеем, что вектор $\vec{\alpha}$ является направляющим вектором прямой, которая является пересечением двух плоскостей (в пространстве натянутом на базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$):

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} M_{432}^{\ 3} & M_{433}^{\ 3} \\ \Lambda_{42}^{\ 5} & \Lambda_{43}^{\ 5} \end{vmatrix}; \quad \alpha^2 = \begin{vmatrix} M_{433}^{\ 3} & M_{431}^{\ 3} \\ \Lambda_{43}^{\ 5} & \Lambda_{41}^{\ 5} \end{vmatrix}; \quad \alpha^3 = \begin{vmatrix} M_{431}^{\ 3} & M_{432}^{\ 3} \\ \Lambda_{41}^{\ 5} & \Lambda_{42}^{\ 5} \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

Обратно, если имеет место условие (1.5), то линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Рассмотрим линию β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^2\vec{e}_2 + \beta^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор линии $\bar{\beta} = f_4^3(\beta)$:

$$\vec{\bar{\beta}} = \beta^1\overrightarrow{m_1} + \beta^2\overrightarrow{m_2} + \beta^4\overrightarrow{m_4} = \beta^1\vec{e_1} + \beta^2\vec{e_2} + \left(\beta^1 m_1^3 + \beta^2 m_2^3\right)\vec{e_3} + \left(\beta^1 m_1^4 + \beta^2 m_2^4 + \beta^4 m_4^4\right)\vec{e_4} +$$
$$+\left(\beta^1 m_1^5 + \beta^2 m_2^5 + \beta^4 m_4^5\right)\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(124)}$ имеем:

$$\begin{cases} \beta^1 m_1^5 + \beta^2 m_2^5 + \beta^4 m_4^5 = 0; \\ \beta^1 m_1^3 + \beta^2 m_2^5 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формул (1.2) последние равенства перепишем в виде:

$$\begin{cases} \Lambda_{41}^{\ 5}\beta^1 + \Lambda_{42}^{\ 5}\beta^2 + \Lambda_{44}^{\ 5}\beta^4 = 0; & (1.6) \\ \Lambda_{41}^{\ 3}\beta^1 + \Lambda_{42}^{\ 3}\beta^2 = 0. & (1.7) \end{cases}$$

где

$$\beta^1 = \begin{vmatrix} \Lambda^5_{42} & \Lambda^5_{44} \\ \Lambda^3_{42} & 0 \end{vmatrix}; \ \beta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda^5_{44} & \Lambda^5_{41} \\ 0 & \Lambda^3_{41} \end{vmatrix}; \ \beta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda^5_{41} & \Lambda^5_{42} \\ \Lambda^3_{41} & \Lambda^3_{42} \end{vmatrix} \qquad (1.8)$$

Следовательно, вектор $\vec{\beta}$ является направляющим вектором прямой, которая получается при пересечении двух плоскостей (1.6), (1.7) в пространстве натянутом на базисных векторах $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_4\right)$.

Таким образом, для того, чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f^3_4 необходимо и достаточно выполнения условий (1.8).

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распеделению $\Delta_{(125)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^5\vec{e}_5$. Найдем касательный вектор линии $\overline{\gamma} = f^3_4(\gamma)$:

$$\vec{\overline{\gamma}} = \gamma^1\overrightarrow{m_1} + \gamma^2\overrightarrow{m_2} + \gamma^5\overrightarrow{m_5} = \gamma^1\overrightarrow{e_1} + \gamma^2\overrightarrow{e_2} + \left(\gamma^1 m^3_1 + \gamma^2 m^3_2 + \gamma^5 m^3_5\right)\overrightarrow{e_3} + \\ + \left(\gamma^1 m^4_1 + \gamma^2 m^4_2 + \gamma^5 m^4_5\right)\overrightarrow{e_4} + \left(\gamma^1 m^5_1 + \gamma^2 m^5_2 + \gamma^5\right)\overrightarrow{e_5}.$$

$\vec{\gamma}, \vec{\overline{\gamma}}, \overrightarrow{XF^3_4} \in \Delta_{(125)}$ шартынан төмөндөгү келип чыгат:

$$\begin{cases} \gamma^1 m^3_1 + \gamma^2 m^3_2 + \gamma^5 m^3_5 = 0; \\ \gamma^1 m^4_1 + \gamma^2 m^4_2 + \gamma^5 m^4_5 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формул (1.2) последнее равенство примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Lambda^3_{41}\gamma^1 + \Lambda^3_{42}\gamma^2 + \Lambda^5_{45}\gamma^5 = 0; & (1.9) \\ M^3_{431}\gamma^1 + M^3_{432}\gamma^2 + M^3_{435}\gamma^5 = 0. & (1.10) \end{cases}$$

Отсюда, для того чтобы линия γ принадлежащая распеделению $\Delta_{(125)}$ была квазидвойной линией частичного отображения f^3_4 необходимо и достаточно, чтобы ее касательный вектор был направляющим вектором прямой который получается при пересечении плоскостей (1.9), (1.10) натянутом на базисных векторах $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_5\right)$.

Рассмотрим линию δ принадлежащую распределению $\Delta_{(234)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\delta} = \delta^2\vec{e}_2 + \delta^3\vec{e}_3 + \delta^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор линии $\overline{\delta} = f^3_4(\delta)$:

$$\overline{\overline{\delta}} = \delta^2\overline{m_2} + \delta^3\overline{m_3} + \delta^4\overline{m_4} = \delta^2\,\overline{e_2} + \delta^2\,m_2^3\overline{e_3} + \left(\delta^2 m_2^4 + \delta^3 m_3^4 + \delta^4 m_4^4\right)\overline{e_4} +$$
$$+\left(\delta^4 m_2^5 + \delta^3 m_3^5 + \delta^4 m_4^5\right)\overline{e_5}.$$

Из условия $\overline{\delta}\,,\overline{\overline{\delta}}\,,\overline{XF_1^5} \in \Delta_{(234)}$ имеем:

$$\delta^2 m_2^5 + \delta^3 m_3^5 + \delta^4 m_4^5 = 0.$$

Учитывая формул (1.2), последнее равенство примет вид:

$$\Lambda_{42}^5\delta^2 + \Lambda_{43}^5\delta^3 + \Lambda_{44}^5\delta^4 = 0\,. \tag{1.11}$$

Обратно, если выполняется условие (1.11), то линия δ принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Рассмотрим линию p принадлежащую распределению $\Delta_{(235)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\overline{p} = p^2\overline{e_2} + p^3\overline{e_3} + p^5\overline{e_5}$. Найдем касательный вектор линии $f_4^3(p) = \overline{p}$:

$$\overline{\overline{p}} = p^2\overline{m_2} + p^3\overline{m_3} + p^5\overline{m_5} = p^2\,\overline{e_2} + \left(p^2\,m_2^3 + p^5\,m_5^3\right)\overline{e_3} + \left(p^2 m_2^4 + p^3 m_3^4 + p^5 m_5^4\right)\overline{e_4} +$$
$$+\left(p^3 m_2^5 + p^3 m_3^5 + p^5\right)\overline{e_5}.$$

Из условий $\overline{p}\,,\overline{\overline{p}}\,,\overline{XF_1^5} \in \Delta_{(235)}$ имеем:

$$p^1 m_2^4 + p^3 m_3^4 + p^5 m_5^4 = 0.$$

Учитывая формул (1.2), последнее равенство примет следующий вид:

$$M_{432}^3 p^2 + M_{433}^3 p^3 + M_{435}^3 p^5 = 0. \tag{1.12}$$

Обратно, если выполняется условие (1.12), то линия p принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Теперь рассмотрим линию q принадлежащую распределению $\Delta_{(345)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\overline{q} = q^3\overline{e_3} + q^4\overline{e_4} + q^5\overline{e_5}$. Найдем касательный вектор линии $f_4^3(q) = \overline{q}$:

$$\overline{\overline{q}} = q^3\overline{m_3} + q^4\overline{m_4} + q^5\overline{m_5} = q^5 m_5^3\overline{e_3} + \left(q^3 m_3^4 + q^4 m_4^4 + q^5 m_5^4\right)\overline{e_4} + \left(q^4 m_3^5 + q^4 m_4^5 + q^5\right)\overline{e_5}.$$

Отсюда имеем $\overline{q}\,,\overline{\overline{q}}\,,\overline{XF_4^3} \in \Delta_{(345)}$.

Линия q принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Теперь рассмотрим линию s принадлежащую распределению $\Delta_{(145)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{s} = s^1\vec{e_1} + s^4\vec{e_4} + s^5\vec{e_5}$. Найдем касательный вектор линии $f_4^3(s) = \overline{s}$:

$$\vec{\overline{s}} = s^1\overrightarrow{m_1} + s^4\overrightarrow{m_4} + s^5\overrightarrow{m_5} = s^1\vec{e_1} + \left(s^1 m_1^3 + s^5 m_5^3\right)\vec{e_3} + \left(s^1 m_1^4 + s^4 m_4^4 + s^5 m_5^4\right)\vec{e_4} +$$
$$+\left(s^1 m_1^5 + s^4 m_4^5 + s^5\right)\vec{e_5}.$$

Из условия $\overrightarrow{XF_4^3}, \vec{s}, \vec{\overline{s}} \in \Delta_{(145)}$ имеем:

$$s^1 m_1^3 + + s^5 m_5^3 = 0 .$$

Учитывая формул (1.2), последнее равенство примет следующий вид:

$$\Lambda_{41}^3 s^1 + \Lambda_{45}^3 s^5 = 0 . \qquad (1.13)$$

Обратно, если выполняется условие (1.13), то линия s принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Рассмотрим линию t принадлежащую распределению $\Delta_{(134)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{t} = t^1\vec{e_1} + t^3\vec{e_3} + t^4\vec{e_4}$. Найдем касательный вектор линии $\overline{t} = f_4^3(t)$:

$$\vec{\overline{t}} = t^1\overrightarrow{m_1} + t^3\overrightarrow{m_3} + t^4\overrightarrow{m_4} = t^1\vec{e_1} + t^1 m_1^3\vec{e_3} + \left(t^2 m_1^4 + t^3 m_3^4 + t^4 m_4^4\right)\vec{e_4} + \left(t^1 m_1^5 + t^3 m_3^5 + t^4 m_4^5\right)\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{t}, \vec{\overline{t}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(134)}$ имеем:

$$t^1 m_1^5 + t^3 m_3^5 + t^4 m_4^5 = 0 .$$

Учитывая формул (1.2), последнее равенство примет следующий вид:

$$\Lambda_{41}^5 t^1 + \Lambda_{43}^5 t^3 + \Lambda_{44}^5 t^4 = 0. \qquad (1.14)$$

Отсюда, если выполняется условие (1.14), то линия t принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Рассмотрим линию μ принадлежащую распределению $\Delta_{(245)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\mu} = \mu^2\vec{e_2} + \mu^4\vec{e_4} + \mu^5\vec{e_5}$. Найдем касательный вектор линии

$f_4^3(\mu) = \overline{\mu}$:

$$\vec{\overline{\mu}} = \mu^2\overrightarrow{m_2} + \mu^4\overrightarrow{m_4} + \mu^5\overrightarrow{m_5} = \mu^2\vec{e_2} + \left(\mu^2 m_2^3 + \mu^5 m_5^3\right)\vec{e_3} + \left(\mu^2 m_2^4 + \mu^4 m_4^4 + \mu^5 m_5^4\right)\vec{e_4} +$$
$$+\left(\mu^2 m_2^5 + \mu^4 m_4^5 + \mu^5\right)\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\mu}, \vec{\vec{\mu}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(245)}$ имеем:

$$\mu^2 m_2^3 + \mu^5 m_5^3 = 0 .$$

Учитывая формул (1.2), последнее равенство примет следующий вид:

$$\Lambda^{\,3}_{42}\,\mu^2 + \Lambda^{\,3}_{45}\,\mu^5 = 0. \tag{1.15}$$

Для того чтобы линия μ принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения $f^{\,3}_{4}$ необходимо и достаточно, чтобы координаты μ^2, μ^5 касательного вектора удовлетворяли условие (1.15).

Рассмотрим линию θ принадлежащую распределению $\Delta_{(135)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\theta} = \theta^1 \vec{e_1} + \theta^3 \vec{e_3} + \theta^5 \vec{e_5}$. Найдем касательный вектор линии $f_4^3(\theta) = \overline{\theta}$:

$$\vec{\vec{\theta}} = \theta^1 \overrightarrow{m_2} + \theta^3 \overrightarrow{m_3} + \theta^5 \overrightarrow{m_5} = \theta^1 \vec{e_1} + \left(\theta^1 m_1^3 + \theta^5 m_5^3\right) \vec{e_3} + \left(\theta^1 m_1^4 + \theta^3 m_3^4 + \theta^5 m_5^4\right) \vec{e_4} +$$
$$+ \left(\theta^1 m_1^5 + \theta^3 m_3^5 + \theta^5\right) \vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\theta}, \vec{\vec{\theta}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(135)}$ имеем:

$$\theta^1 m_1^3 + \theta^3 m_3^4 + \theta^5 m_5^4 = 0 .$$

Учитывая формул (1.2), последнее равенство примет следующий вид:

$$M^{\,3}_{431}\theta^1 + M^{\,3}_{433}\theta^3 + M^{\,3}_{435}\theta^5 = 0. \tag{1.16}$$

Отсюда, для того чтобы линия θ принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения $f^{\,3}_{4}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1.16).

Доказана следующая теорема:

Теорема 1.1. 1) Для того чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (1.5);

2) Для того чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (1.8);

3) Для того чтобы линия γ принадлежащая распеделению $\Delta_{(125)}$ была квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы ее

касательный вектор был направляющим вектором прямой который получается при пересечении плоскостей (1.9), (1.10);

4) Для того чтобы линия δ, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (1.11);

5) Для того чтобы линия p, принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (1.12);

6) Линия q принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3;

7) Для того чтобы линия s, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (1.13);

8) Для того чтобы линия t, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (1.14);

9) Для того чтобы линия μ, принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (1.15);

10) Для того чтобы линия θ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (1.16).

§2. Необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии, принадлежащие трехмерному распределению, являлись квазидвойным линиям частичного отображения f_3^2 пространства E_5

Псевдофокус $F_3^2 \in \left(X, \vec{e}_3 \right)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_3^2} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3} \vec{e}_3 . \qquad (2.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$ точка F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_5$. В результате получается частичное отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$.

Дифференцируем равенство (2.1), применяем деривационные формулы и получим следующее:

$$d\overrightarrow{F_3^2} = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\right)\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2} d\vec{e}_3 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i \vec{e}_i$$

или

$$d\overrightarrow{F_3^2} = \omega^m \vec{e}_m + \frac{C_{32m}^2 \omega^m}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{3m}^i \omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \ ,$$

где $d\Lambda_{32}^2 = \left(\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2 \Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2 \Lambda_{3m}^\ell \right)\omega^m = C_{32m}^2 \omega^m$.

Последнее равенство можно переписать в таком виде:

$$d\overrightarrow{F_3^2} = \left[\vec{e}_1 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^2$$

$$+ \left[\vec{e}_3 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^4 +$$

$$+ \left[\vec{e}_5 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{35}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^5 .$$

Введём следующие обозначения:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 + \frac{C_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \ ;$$

$$\overrightarrow{c_2} = \overrightarrow{e_2} + \frac{C^{\,2}_{322}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,i}_{32}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{c_3} = \overrightarrow{e_3} + \frac{C^{\,2}_{323}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,i}_{33}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{c_4} = \overrightarrow{e_4} + \frac{C^{\,2}_{324}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,i}_{34}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{c_5} = \overrightarrow{e_5} + \frac{C^{\,2}_{325}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,i}_{35}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_i}\ .$$

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_5$ является сетью Френе, то векторы $\overrightarrow{c_i}$ будут иметь следующий вид:

$$\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^{\,2}_{31}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_2} + \frac{C^{\,2}_{321}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,4}_{31}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{c_2} = \frac{C^{\,2}_{322}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,4}_{32}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{c_3} = \left[1 + \frac{C^{\,2}_{323}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\right]\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,4}_{33}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_4}; \qquad (2.2)$$

$$\overrightarrow{c_4} = -\frac{\Lambda^{\,2}_{34}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_2} + \frac{C^{\,2}_{324}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{c_5} = -\frac{\Lambda^{\,2}_{35}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_2} + \frac{C^{\,2}_{325}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,4}_{35}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_4} + \overrightarrow{e_5}\ .$$

В общем случае эти векторы (2.2) линейно независимы. Области $\Omega^{\,2}_{3}$ присоединим подвижной репер $\Re' = \left(F^2_3, \overrightarrow{c_i}\right)$.

Рассмотрим α линию принадлежащую распределению $\Delta_{(123)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\overrightarrow{\alpha} = \alpha^1\overrightarrow{e_1} + \alpha^2\overrightarrow{e_2} + \alpha^3\overrightarrow{e_3}\,.$$

А касательный вектор линии $\overline{\alpha} = f^2_3(\alpha)$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\overline{\alpha}} = \alpha^1\overrightarrow{c_1} + \alpha^2\overrightarrow{c_2} + \alpha^3\overrightarrow{c_3} = \alpha^1\overrightarrow{e_1} + \alpha^1 c^2_1\overrightarrow{e_2} + \left(\alpha^1 c^3_1 + \alpha^2 c^3_2 + \alpha^3 c^3_3\right)\overrightarrow{e_3} + \left(\alpha^1 c^4_1 + \alpha^2 c^4_2 + \alpha^3 c^4_3\right)\overrightarrow{e_4}.$$

Из условия $\vec{\alpha}, \vec{\vec{\alpha}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(123)}$ следует:

$\alpha^1 c_1^4 + \alpha^2 c_2^4 + \alpha^3 c_3^4 = 0.$

Отсюда учитывая формулы (2.2) имеем следующее:

$$\alpha^1 \Lambda_{31}^4 + \alpha^2 \Lambda_{32}^4 + \alpha^3 \Lambda_{33}^4 = 0 \tag{2.3}$$

Обратно, если выполняется условие (2.3), то линия α принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Рассмотрим линию β принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\vec{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f_1^5(\beta)$:

$$\vec{\vec{\beta}} = \beta^1 \overrightarrow{e_1} + \beta^1 c_1^{2+} \overrightarrow{e_2} + \left(\beta^1 c_1^3 + \beta^2 c_2^3 + \beta^4 c_4^3\right) \overrightarrow{e_3} + \left(\beta^1 c_1^4 + \beta^2 c_2^4 + \beta^4\right) \overrightarrow{e_4}.$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\vec{\beta}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(124)}$ получим следующее:

$$\beta^1 c_1^3 + \beta^2 c_2^3 + \beta^4 c_4^3 = 0.$$

Учитывая формулы (2.2) получим следующее:

$$\beta^1 C_{321}^2 + \beta^2 C_{322}^2 + \beta^4 C_{324}^2 = 0 \tag{2.4}$$

Обратно, если выполняется условие (2.4), то линия β принадлежащая распределению $\Delta_{(125)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Рассмотрим линию γ принадлежащую распределению $\Delta_{(125)}$. Ее касательный вектор имеет вид $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^5 \vec{e}_5$. $\overline{\gamma} = f_1^5(\gamma)$. Найдем касательный вектор этой линии:

$$\vec{\vec{\gamma}} = \gamma^1 \overrightarrow{c_1} + \gamma^2 \overrightarrow{c_2} + \gamma^5 \overrightarrow{c_3} = \gamma^1 b_1^1 \overrightarrow{e_1} + \left(\gamma^1 c_1^2 + \gamma^5 c_5^2\right) \overrightarrow{e_2} + \left(\gamma^1 c_1^3 + \gamma^2 c_2^3 + \gamma^5 c_5^3\right) \overrightarrow{e_3} +$$
$$+ \left(\gamma^1 c_1^4 + \gamma^2 c_2^4 + \gamma^5 c_5^4\right) \overrightarrow{e_4} + \gamma^5 \overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\vec{\gamma}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(125)}$ имеем

$$\gamma^1 c_1^3 + \gamma^2 c_2^3 + \gamma^5 c_5^3 = 0;$$
$$\gamma^1 c_1^4 + \gamma^2 c_2^4 + \gamma^5 c_5^4 = 0.$$

Учитывая формул (2.2) последнее равенство имеет вид:

$$\gamma^1 C_{321}^2 + \gamma^2 C_{322}^3 + \gamma^5 C_{325}^3 = 0; \tag{2.5}$$

$$\gamma^1\Lambda^4_{31} + \gamma^2\Lambda^4_{32} + \gamma^5\Lambda^4_{35} = 0. \qquad (2.6)$$

Обратно, если выполняются условия (2.4), то линия γ принадлежащая распределению $\Delta_{(125)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f^2_3.

Рассмотрим линию δ принадлежащую распределению $\Delta_{(234)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\delta}= \delta^2\, \vec{e}_2 + \delta^3\, \vec{e}_3 + \delta^4\, \vec{e}_4$. Касательный вектор линии $f^2_3(\delta) = \bar{\delta}$ находится следующим образом:

$$\vec{\bar{\delta}} = \delta^2\vec{c}_2 + \delta^3\vec{c}_3 + \delta^4\vec{c}_4 = \delta^2 c^2_4\vec{e}_2 + (\delta^2 c^3_2 + \delta^3 c^3_3 + \delta^4 c^3_4)\vec{e}_3 + (\delta^2 c^4_2 + \delta^3 c^4_3 + \delta^4)\vec{e}_4.$$

Отсюда имеем, что условие $\vec{\delta}, \vec{\bar{\delta}}, \overrightarrow{XF^2_3} \in \Delta_{(234)}$ всегда выполняется.

Следовательно, линия δ приналежащая распределению $\Delta_{(234)}$ является квазидвойной линией отображения f^2_3 $\left(\text{пар}\left(f^2_3, \Delta_{(234)}\right)\right)$.

Рассмотрим линию h принадлежащую распределению $\Delta_{(235)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{h} = h^2\vec{e}_2 + h^3\vec{e}_3 + h^5\vec{e}_5$. Касательный вектор $\vec{\bar{h}}$ линии $\bar{h} = f^2_3(h)$ находится следующим образом:

$$\vec{\bar{h}} = h^2\vec{c}_2 + h^3\vec{c}_3 + h^5\vec{c}_5 =$$
$$= h^5 c^2_5\vec{e}_2 + (h^2 c^3_2 + h^3 c^3_3 + h^5 c^3_5)\vec{e}_3 + (h^2 c^4_2 + h^3 c^4_3 + h^5 c^4_5)\vec{e}_4 + h^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{h}, \vec{\bar{h}}, \overrightarrow{XF^2_3} \in \Delta_{(235)}$ имеем $h^2 c^4_2 + h^3 c^4_3 + h^5 c^4_5 = 0$.

Учитывая формулы (2.2) имеем:

$$h^2\Lambda^4_{32} + h^3\Lambda^4_{33} + h^5\Lambda^4_{35} = 0. \qquad (2.7)$$

Обратно, если выполняется условие (2.7) то линия δ принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$является квазидвойной линией отображения f^2_3.

Рассмотрим линию p принадлежащую распределению $\Delta_{(345)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{p} = p^1\vec{e}_1 + p^4\vec{e}_4 + p^5\vec{e}_5$. Касательный вектор $\vec{\bar{p}}$ линии $f^2_3(p) = \bar{p}$ находится следующим образом:

$$\vec{\bar{p}} = p^3\vec{c}_3 + p^4\vec{c}_4 + p^5\vec{c}_5$$
$$= (p^4 c^2_4 + p^5 c^2_5)\vec{e}_2 + (p^3 c^3_1 + p^4 c^3_3 + p^5 c^3_5)\vec{e}_3 + (p^4 + p^5 c^4_5)\vec{e}_4 + p^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{p}, \vec{\bar{p}}, \overrightarrow{XF^2_3} \in \Delta_{(345)}$ имеем $p^1 c^2_4 + p^5 c^2_5 = 0$.

Учитывая формулы (2.2) имеем:

$$\Lambda^2_{34}p^4 + \Lambda^2_{35}p^5 = 0 \qquad (2.8)$$

Обратно, если выполняется условие (2.8) то линия p принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ является квазидвойной линией отображения f^2_3.

Рассмотрим линию q принадлежащую распределению $\Delta_{(145)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{q} = q^1\vec{e}_1 + q^4\vec{e}_4 + q^5\vec{e}_5$. Касательный вектор $\vec{\bar{q}}$ линии $f_3^2(q) = \bar{q}$ находится следующим образом:

$$\vec{\bar{q}} = q^1\vec{c}_1 + q^4\vec{c}_3 + q^5\vec{c}_5 = q^1\vec{e}_1 + (q^1c_1^2 + q^4c_4^2 + q^5c_5^2)\vec{e}_2 +$$
$$+(q^1c_1^3 + q^4c_4^3 + q^5c_5^3)\vec{e}_3 + (q^1c_1^4 + q^4 + q^5c_5^4)\vec{e}_4 + q^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{q}, \vec{\bar{q}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(145)}$ имеем следующее

$$\begin{cases} q^1c_1^2 + q^4c_4^2 + q^5c_5^2 = 0; \\ q^1c_1^3 + q^4c_4^3 + q^5c_5^3 = 0 \end{cases}$$

Учитывая формулы (2.2) имеем:

$$q^1\Lambda_{31}^2 + q^4\Lambda_{34}^2 + q^5\Lambda_{35}^1 = 0; \tag{2.9}$$

$$q^1C_{321}^2 + q^4C_{324}^3 + q^5C_{325}^2 = 0; \qquad 2.10)$$

Отсюда, вектор $\vec{q} = q^1\vec{e}_1 + q^4\vec{e}_4 + q^5\vec{e}_5$ является направляющим вектором прямой который получается при пересечении плоскостей (2.9), (2.10) натянутый на базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$:

$$q^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{34}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ C_{324}^2 & C_{325}^2 \end{vmatrix}; \; q^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{35}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ C_{325}^2 & C_{321}^2 \end{vmatrix}; \; q^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{34}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ C_{324}^2 & C_{325}^2 \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

Обратно, для того чтобы линия q, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (2.11).

Рассмотрим линию s принадлежащую распределению $\Delta_{(134)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{s} = s^1\vec{e}_1 + s^3\vec{e}_3 + s^4\vec{e}_4$. Касательный вектор $\vec{\bar{s}}$ линии $f_3^2(s) = \bar{s}$ находится следующим образом:

$$\vec{\bar{s}} = s^2\vec{c}_1 + s^3\vec{c}_3 + s^4\vec{c}_4 = s^1\vec{e}_1 + (s^1c_1^2 + s^4c_4^2)\,\vec{e}_2 + (s^1c_1^3 + s^3c_3^3 + s^4c_3^3)\,\vec{e}_3 +$$
$$+(s^1c_1^4 + s^3c_3^4 + s^4)\,\vec{e}_4.$$

Из условия $\vec{s}, \vec{\bar{s}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(134)}$ имеем $s^1c_1^2 + s^4c_4^2 = 0$.

Учитывая формулы (2.2) имеем:

$$\Lambda_{31}^2 s^1 + \Lambda_{34}^2 s^4 = 0. \tag{2.12}$$

Обратно, если выполняется условие (2.12) то линия s принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ является квазидвойной линией отображения f_3^2.

Рассмотрим линию t принадлежащую распределению $\Delta_{(245)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{t} = t^2\vec{e}_2 + t^4\vec{e}_4 + t^5\vec{e}_5$. Касательный вектор $\vec{\bar{t}}$ линии $f_3^2(t) = \bar{t}$ находится следующим образом:

$$\vec{\bar{t}} = t^2\vec{c}_2 + t^4\vec{c}_4 + t^5\vec{c}_5 = (t^4c_4^2 + t^5c_5^2)\,\vec{e}_2 + (t^2c_2^3 + t^4c_4^3 + t^5c_5^3)\,\vec{e}_3 +$$
$$+(t^2c_2^3 + t^4c_4^3 + t^5c_5^3)\,\vec{e}_3 +(t^2c_2^4 + t^4 + t^5c_5^4)\,\vec{e}_4 + t^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{t}, \vec{\bar{t}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(245)}$ имеем s $t^4c_2^3 + t^5c_4^3 + t^5c_5^3 = 0$.

Учитывая формулы (2.2) имеем:

$$t^2C_{322}^2\, t^2 - t^4C_{324}^2 + t^5C_{325}^2 = 0. \qquad (2.13)$$

Обратно, если выполняется условие (2.13) то линия t принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ является квазидвойной линией отображения f_3^2.

Рассмотрим линию m принадлежащую распределению $\Delta_{(135)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{m} = m^1\vec{e}_1 + m^3\vec{e}_3 + m^5\vec{e}_5$. Касательный вектор $\vec{\bar{m}}$ линии $f_3^2(m) = \bar{m}$ находится следующим образом:

$$\vec{\bar{m}} = m^1\vec{c}_1 + m^3\vec{c}_3 + m^5\vec{c}_5 = m^1\vec{e}_1 + (m^1c_1^2 + m^5c_5^2)\,\vec{e}_2 +$$
$$+ (m^1c_1^3 + m^3c_3^3 + m^5c_5^3)\,\vec{e}_3 +(m^1c_1^4 + m^3c_3^4 + m^5c_5^4)\,\vec{e}_4 + m^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{m}, \vec{\bar{m}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(135)}$ имеем

$$m^3\, c_1^2 + m^5\, c_5^2 = 0;$$
$$m^1c_1^4 + m^3c_3^4 + m^5c_5^4 = 0.$$

Учитывая формулы (2.2) имеем:

$$q^1\Lambda_{31}^2 + q^4\Lambda_{34}^2 + q^5\Lambda_{35}^1 = 0; \qquad (2.14)$$
$$q^1C_{321}^2 + q^4C_{324}^2 + q^5C_{325}^2 = 0; \qquad (2.15)$$

Отсюда, ее касательный вектор $\vec{m}(m^1, m^3, m^5)$ является направляющим вектором прямой который получается при пересечении двух плоскостей натянутом на базисных векторах $(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5)$:

$$m^1 = \begin{vmatrix} 0 & \Lambda_{32}^2 \\ \Lambda_{33}^4 & \Lambda_{35}^4 \end{vmatrix}; \quad m^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{35}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ \Lambda_{35}^4 & \Lambda_{31}^4 \end{vmatrix}; \quad m^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{31}^2 & 0 \\ \Lambda_{31}^4 & \Lambda_{33}^4 \end{vmatrix}; \qquad (2.16)$$

Обратно, для того чтобы линия m принадлежащая распеделению $\Delta_{(135)}$ была квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.16).

Доказана следующая теорема:

Теорема 2.1. 1) Для того чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.3);

2) Для того чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (2.4);

3) Для того чтобы линия γ принадлежащая распеделению $\Delta_{(125)}$ была квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.5), (2.6);

4) Линия δ принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2;

5) Для того чтобы линия h, принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.7);

6) Для того чтобы линия p, принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.8);

7) Для того чтобы линия q, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.11);

8) Для того чтобы линия s, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.12);

9) Для того чтобы линия t, принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.13);

10) Для того чтобы линия m, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.16).

§3. Некоторые свойства частичного отображения f_5^4 пространства E_5

Псевдофокус $F_5^4 \in \left(X, \vec{e}_5\right)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_5^4} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_5 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^5}\vec{e}_5 . \tag{3.1}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$ точка F_5^4 описывает свою область $\Omega_5^4 \subset E_5$. В результате получается частичное отображение $f_5^4 : \Omega \to \Omega_5^4$ такое, что $f_5^4(X) = F_5^4$.

Дифференцируем равенство (3.1), применяем деривационные формулы и получим следующее:

$$d\overrightarrow{F_5^4} = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{54}^4}\right)\vec{e}_5 - \frac{1}{\Lambda_{54}^4}d\vec{e}_5 = \omega^i\vec{e}_i - \frac{d\Lambda_{54}^4}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 + \frac{1}{\Lambda_{54}^4}\omega_5^i\vec{e}_i .$$

Учитывая формул (3), (5) имеем

$$d\overrightarrow{F_5^4} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{54m}^4 + \Lambda_{5\ell}^4\Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4\Lambda_{5m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{5m}^i\omega^m}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i .$$

Отсюда имеем:

$$D_{54m}^4 = \Lambda_{54m}^4 + \Lambda_{5\ell}^4\Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4\Lambda_{5m}^\ell .$$

Введем обозначения и получим

$$d\overrightarrow{F_5^4} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{D_{54m}^4\omega^m}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{5m}^i\omega^m}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i .$$

Последнее равенство можно написать в следующем виде:

$$d\overrightarrow{F_5^4} = \left[\vec{e}_1 + \frac{D_{541}^4}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{D_{542}^4}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$
$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{D_{543}^4}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{D_{544}^4}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{54}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$
$$+\left[\vec{e}_5 + \frac{D_{545}^4}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{55}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^5$$

F_5^4 введем следующие обозначения:

$$\vec{d}_1 = \vec{e}_1 + \frac{D_{541}^4}{\left(\Lambda_{54}^4\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i ;$$

$$\overrightarrow{d_2}=\overrightarrow{e_2}+\frac{D^{\,4}_{\,542}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\overrightarrow{e_5}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,52}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{d_3}=\overrightarrow{e_3}+\frac{D^{\,4}_{\,543}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\overrightarrow{e_5}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,53}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{d_4}=\overrightarrow{e_4}+\frac{D^{\,4}_{\,544}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\overrightarrow{e_5}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,54}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_i}\ ;$$

$$\overrightarrow{d_5}=\overrightarrow{e_5}+\frac{D^{\,4}_{\,545}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\overrightarrow{e_5}-\frac{\Lambda^{\,i}_{\,55}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_i}\ .$$

Последнее равенство имеет вид $d\,\overrightarrow{F^4_5}=\omega^i\overrightarrow{d_i}$. Так как $\tilde{\Sigma}_5$ является циклической сетью Френе, то вектор $\overrightarrow{d_i}$ имеем вид:

$$\overrightarrow{d_1}=\overrightarrow{e_1}-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,51}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_4}+\frac{D^{\,4}_{\,541}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{d_2}=-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,52}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,52}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_4}+\frac{D^{\,4}_{\,542}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{d_3}=-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,53}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_1}-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,53}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_4}+\overrightarrow{e_4}+\frac{D^{\,4}_{\,543}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\overrightarrow{e_5}; \qquad (3.2)$$

$$\overrightarrow{d_4}=-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,54}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_1}+\frac{D^{\,4}_{\,544}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{d_5}=-\frac{\Lambda^{\,4}_{\,55}}{\Lambda^{\,4}_{\,54}}\overrightarrow{e_1}+\left[1+\frac{D^{\,4}_{\,545}}{\left(\Lambda^{\,4}_{\,54}\right)^2}\right]\overrightarrow{e_5}.$$

Рассмотрим линию α принадлежащую распределению $\Delta_{(123)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\overrightarrow{\alpha}=\alpha^1\overrightarrow{e_1}+\alpha^2\overrightarrow{e_2}+\alpha^3\overrightarrow{e_3}\,.$$

А касательный вектор линии $f^4_5(\alpha)=\overline{\alpha}$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}} = \alpha^1\overrightarrow{d_1} + \alpha^2\overrightarrow{d_2} + \alpha^3\overrightarrow{d_3} = \left(\alpha^1 + \alpha^2 d_2^1 + \alpha^3 d_3^1\right)\overrightarrow{e_1} + \alpha^2\overrightarrow{e_2} + \alpha^3\overrightarrow{e_3} + \left(\alpha^1 d_1^4 + \alpha^2 d_2^4 + \alpha^3 d_3^4\right)\overrightarrow{e_4} +$$
$$+\left(\alpha^1 d_1^5 + \alpha^2 d_2^5 + \alpha^3 d_3^5\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(123)}$ следует:

$$\alpha^1 d_1^4 + \alpha^2 d_2^4 + \alpha^3 d_3^4 = 0;$$
$$\alpha^1 d_1^5 + \alpha^2 d_2^5 + \alpha^3 d_3^5 = 0.$$

Отсюда учитывая формулы (3.2) имеем следующее:

$$\begin{cases} \Lambda^4_{51}\alpha^1 + \Lambda^4_{52}\alpha^2 + \Lambda^4_{53}\alpha^3 = 0; & (3.3) \\ D^4_{541}\alpha^1 + D^4_{542}\alpha^2 + D^4_{543}\alpha^3 = 0, & (3.4) \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$\alpha^1 = \begin{vmatrix} \Lambda^4_{52} & \Lambda^4_{53} \\ D^4_{542} & D^4_{543} \end{vmatrix}; \quad \alpha^2 = \begin{vmatrix} \Lambda^4_{53} & \Lambda^4_{51} \\ D^4_{543} & D^4_{541} \end{vmatrix}; \quad \alpha^3 = \begin{vmatrix} \Lambda^4_{51} & \Lambda^4_{52} \\ D^4_{541} & D^4_{542} \end{vmatrix} \qquad (3.5)$$

Для того чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (3.5);

Рассмотрим линию β принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\overrightarrow{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^2\vec{e}_2 + \beta^4\vec{e}_4.$$

А касательный вектор линии $f_5^4(\beta) = \overline{\beta}$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\beta}} = \beta^1\overrightarrow{d_1} + \beta^2\overrightarrow{d_2} + \beta^4\overrightarrow{d_4} = \beta^1\left(\beta^1 + \beta^2 d_2^1 + \beta^4 d_4^1\right)\overrightarrow{e_1} + \beta^2\overrightarrow{e_2} + \left(\beta^1 d_1^4 + \beta^2 d_2^4\right)\overrightarrow{e_4} +$$
$$+\left(\beta^1 d_1^5 + \beta^2 d_2^5 + \beta^4 d_4^5\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\overrightarrow{\beta}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(124)}$ следует:

$$\beta^1 d_1^5 + \beta^2 d_2^5 + \beta^4 d_4^5 = 0$$

Отсюда учитывая формулы (3.2) имеем следующее:

$$D^4_{541}\beta^1 + D^4_{542}\beta^2 + D^4_{544}\beta^4 = 0 \qquad (3.6)$$

Для того чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.6).

Рассмотрим линию γ принадлежащую распределению $\Delta_{(125)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^5 \vec{e}_5 .$$

А касательный вектор линии $f_5^4(\gamma) = \bar{\gamma}$ имеет вид:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1 \overrightarrow{d_1} + \gamma^2 \overrightarrow{d_2} + \gamma^5 \overrightarrow{d_5} = \left(\gamma^1 + \gamma^2 d_2^1 + \gamma^5 d_5^1\right)\vec{e}_1 + \gamma^2 \overrightarrow{e_2} + +\left(\gamma^1 d_1^4 + \gamma^2 d_2^4\right)\overrightarrow{e_4} +$$
$$+\left(\gamma^1 d_1^5 + \gamma^2 d_2^5 + \gamma^5 d_5^5\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(125)}$ следует:

$$\gamma^1 d_1^4 + \gamma^2 d_2^4 = 0 .$$

Отсюда учитывая формулы (3.2) имеем следующее:

$$\Lambda_{51}^4 \gamma^1 + \Lambda_{52}^4 \gamma^2 = 0 \tag{3.7}$$

Для того чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(125)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.7).

Рассмотрим линию δ принадлежащую распределению $\Delta_{(234)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\delta} = \delta^2 \overrightarrow{e_2} + \delta^3 \overrightarrow{e_3} + \delta^4 \overrightarrow{e_4} .$$

А касательный вектор линии $f_5^4(\delta) = \bar{\delta}$ имеет вид:

$$\vec{\bar{\delta}} = \delta^2 \overrightarrow{d_2} + \delta^3 \overrightarrow{d_3} + \delta^4 \overrightarrow{d_4} = \left(\delta^2 d_2^1 + \delta^3 d_3^1 + \delta^4 d_4^1\right)\overrightarrow{e_1} + \delta^2 \overrightarrow{e_2} + \delta^3 \overrightarrow{e_3} + \left(\delta^2 d_2^4 + \delta^3 d_3^4\right)\overrightarrow{e_4} +$$
$$+\left(\delta^4 d_2^5 + \delta^3 d_3^5 + \delta^4 d_4^5\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{\delta}, \vec{\bar{\delta}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(234)}$ следует:

$$\begin{cases} \delta^2 d_2^1 + \delta^3 d_3^1 + \delta^4 d_4^1 = 0; \\ \delta^2 d_2^5 + \delta^3 d_3^5 + \delta^4 d_4^5 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формулы (3.2) имеем следующее:

$$\begin{cases} \Lambda_{52}^1 \delta^2 + \Lambda_{53}^1 \delta^3 + \Lambda_{54}^1 \delta^4 = 0; \\ D_{542}^4 \delta^2 + D_{543}^4 \delta^3 + D_{544}^4 \delta^4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим следующее

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{54}^1 \\ D_{543}^4 & D_{544}^4 \end{vmatrix}; \quad \delta^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{54}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ D_{544}^4 & D_{542}^4 \end{vmatrix}; \quad \delta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ D_{542}^4 & D_{543}^4 \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

Для того чтобы линия δ, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (3.8).

Рассмотрим линию s принадлежащую распределению $\Delta_{(235)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\vec{s} = s^2\overrightarrow{e_2} + s^3\overrightarrow{e_3} + s^5\overrightarrow{e_5}.$$

А касательный вектор линии $f_5^4(s) = \overline{s}$ имеет вид:

$$\vec{\bar{s}} = s^2\overrightarrow{d_2} + s^3\overrightarrow{d_3} + s^5\overrightarrow{d_5} = \left(s^2 d_2^1 + s^3 d_3^1 + s^5 d_5^1\right)\overrightarrow{e_1} + s^2\overrightarrow{e_2} + s^3\overrightarrow{e_3} + \left(s^2 d_2^4 + s^3 d_3^4\right)\overrightarrow{e_4} +$$
$$+\left(s^2 d_2^5 + s^3 d_3^5 + s^5 d_5^5\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{s}, \vec{\bar{s}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(235)}$ следует:

$$\begin{cases} s^2 d_2^1 + s^3 d_3^1 + s^5 d_5^1 = 0; \\ s^2 d_2^4 + s^3 d_3^4 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формулы (3.2) последние равенства примут вид:

$$\begin{cases} \Lambda_{52}^1 s^2 + \Lambda_{53}^1 s^3 + \Lambda_{55}^1 s^5 = 0; \\ \Lambda_{52}^4 s^2 + \Lambda_{53}^4 s^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$s^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{55}^1 \\ \Lambda_{53}^4 & 0 \end{vmatrix}; \quad s^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{55}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ 0 & \Lambda_{52}^4 \end{vmatrix}; \quad s^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

Обратно, если выполняется условие (3.9), то линия s, принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$, будет квазидвойной линией частичного отображения f_5^4.

Рассмотрим линию t принадлежащую распределению $\Delta_{(345)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\vec{t} = t^3\overrightarrow{e_3} + t^4\overrightarrow{e_4} + t^5\overrightarrow{e_5}.$$

А касательный вектор линии $f_5^4(t) = \overline{t}$ имеет вид:

$$\vec{\bar{t}} = t^3\overrightarrow{d_3} + t^4\overrightarrow{d_4} + t^5\overrightarrow{d_5} = \left(t^3 d_3^1 + t^4 d_4^1 + t^5 d_5^1\right)\overrightarrow{e_1} + t^3\overrightarrow{e_3} + t^3 d_3^4\overrightarrow{e_4} + \left(t^3 d_3^5 + t^4 d_4^5 + t^5 d_5^5\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{t}, \vec{\bar{t}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(345)}$ следует:

$$t^3 d_3^1 + t^4 d_4^1 + t^5 d_5^1 = 0.$$

Отсюда учитывая формулы (3.2) имеем следующее:

$$\Lambda^{1}_{53}t^{3}+\Lambda^{1}_{54}t^{4}+\Lambda^{1}_{55}t^{5}=0. \tag{3.10}$$

Обратно, для того чтобы линия t, принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ всегда являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.10).

Рассмотрим линию p принадлежащую распределению $\Delta_{(145)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\overrightarrow{p}=p^{1}\overrightarrow{e_1}+p^{4}\overrightarrow{e_4}+p^{5}\overrightarrow{e_5}\,.$$

А касательный вектор линии $f_5^4(p)=\overline{p}$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\overline{p}}=p^{1}\overrightarrow{d_1}+p^{4}\overrightarrow{d_4}+p^{5}\overrightarrow{d_5}=\left(p^{1}+p^{4}d_4^{1}+p^{5}d_5^{1}\right)\overrightarrow{e_1}+p^{1}d_1^{4}\,\overrightarrow{e_4}+\left(p^{1}d_1^{5}+p^{4}d_4^{5}+p^{5}d_5^{5}\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Отсюда следует, что условия $\overrightarrow{p}\,,\overrightarrow{\overline{p}}\,,\overrightarrow{XF_5^4}\in\Delta_{(145)}$ всегда выполняются.

Значит, линия p принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4.

Рассмотрим линию q принадлежащую распределению $\Delta_{(134)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\overrightarrow{q}=q^{1}\overrightarrow{e_1}+q^{3}\overrightarrow{e_3}+q^{4}\overrightarrow{e_4}\,.$$

А касательный вектор линии $f_5^4(q)=\overline{q}$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\overline{q}}=q^{1}\overrightarrow{d_1}+q^{3}\overrightarrow{d_3}+q^{4}\overrightarrow{d_4}=\left(q^{1}+q^{3}d_3^{1}+q^{4}d_4^{1}\right)\overrightarrow{e_1}+q^{3}\overrightarrow{e_3}+\left(q^{1}d_1^{4}+q^{3}d_3^{4}\right)\overrightarrow{e_4}+$$
$$+\left(q^{1}d_1^{5}+q^{3}d_3^{5}+q^{4}d_4^{5}\right)\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\overrightarrow{q}\,,\overrightarrow{\overline{q}}\,,\overrightarrow{XF_5^4}\in\Delta_{(134)}$ имеем:

$$q^{1}d_1^{5}+q^{3}d_3^{5}+q^{4}d_4^{5}=0$$

Учитывая формулы (3.2) имеем следующее:

$$D^{4}_{541}q^{1}+D^{4}_{543}q^{3}+D^{4}_{544}q^{4}=0. \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что для того чтобы линия q, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.11).

$\Delta_{(245)}$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон θ сызыгын карайлы. Анын жаныма вектору

$$\overrightarrow{\theta} = \theta^2 \overrightarrow{e_2} + \theta^4 \overrightarrow{e_4} + \theta^5 \overrightarrow{e_5} .$$

А касательный вектор линии $f_5^4(\theta) = \overline{\theta}$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\overline{\theta}} = \theta^2 \overrightarrow{d_2} + \theta^4 \overrightarrow{d_4} + \theta^5 \overrightarrow{d_5} = \left(\theta^2 d_2^1 + \theta^4 d_4^1 + \theta^5 d_5^1\right) \overrightarrow{e_1} + \theta^2 \overrightarrow{e_2} + \theta^2 d_2^4 \ \overrightarrow{e_4} + \left(\theta^2 d_2^5 + \theta^4 d_4^5 + \theta^5 d_5^5\right) \overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{\theta}, \overrightarrow{\overline{\theta}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(245)}$ имеем:

$$\theta^2 d_2^1 + \theta^4 d_4^1 + \theta^5 d_5^1 = 0.$$

Отсюда учитывая формулы (3.2) имеем следующее:

$$\Lambda_{52}^{1} \theta^2 + \Lambda_{54}^{1} \theta^4 + \Lambda_{55}^{1} \theta^5 = 0. \qquad (3.12)$$

Обратно, если выполняется условие (3.12), то линия θ, принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4.

Рассмотрим линию μ принадлежащую распределению $\Delta_{(135)}$. Ее касательный вектор имеет вид:

$$\overrightarrow{\mu} = \mu^1 \overrightarrow{e_1} + \mu^3 \overrightarrow{e_3} + \mu^5 \overrightarrow{e_5} .$$

А касательный вектор линии $f_5^4(\mu) = \overline{\mu}$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\overline{\mu}} = \mu^1 \overrightarrow{d_1} + \mu^3 \overrightarrow{d_3} + \mu^5 \overrightarrow{d_5} = \left(\mu^1 + \mu^3 d_3^1 + \mu^5 d_5^1\right) \overrightarrow{e_1} + \mu^3 \overrightarrow{e_3} + \left(\mu^1 d_1^4 + \mu^3 d_3^4\right) \overrightarrow{e_4} +$$
$$+ \left(\mu^1 d_1^5 + \mu^3 d_3^5 + \mu^5 d_5^5\right) \overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\overrightarrow{\mu}, \overrightarrow{\overline{\mu}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(135)}$ имеем

$$\mu^1 d_1^4 + \mu^3 d_3^4 = 0$$

Отсюда учитывая формулы (3.2) имеем следующее:

$$\Lambda_{51}^{4} \mu^1 + \Lambda_{53}^{4} \mu^3 = 0 \qquad (3.13)$$

Отсюда, для того чтобы линия μ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (3.13).

Доказана следующая теорема:

Теорема 3.1. 1) Для того чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.5);

2) Для того чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.6);

3) Для того чтобы линия γ принадлежащая распеделению $\Delta_{(125)}$ была квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось усиловие (3.7);

4) Для того чтобы линия δ принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4, чтобы координаты ее касательного вектора были в виде (3.8);

5) Для того чтобы линия s, принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы координаты ее касательного вектора удовлетворяли условие (3.9);

6) Для того чтобы линия t, принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.10);

7) Линия p, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4;

8) Для того чтобы линия q, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.11);

9) Для того чтобы линия θ, принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.12);

10) Для того чтобы линия μ, принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.13).

§4. Программа для получения 3D модели пространственного геометрического фрактала

Координата расположения сфер имеет основное значение для получения интерактивной 3D графики данного фрактала. В каждой вершине додекаэдра расположены сферы одинакового уровня. При нахождении координат вершин додекаэдра используется следующие *v* векторы:

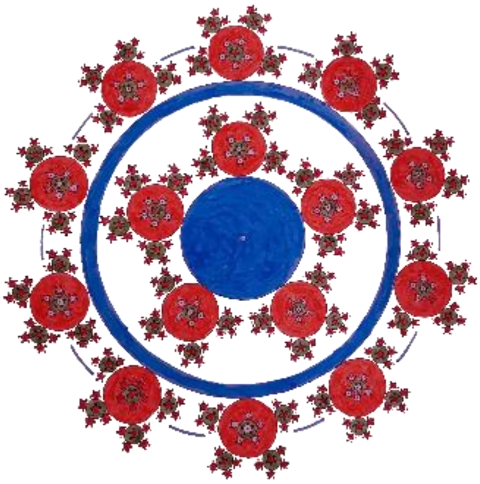

Рис. 1. Проекция пространственного геометрического фрактала на плоскость

v(0, q, p), v(0, q, -p), v(0, -q, p), v(0, -q, -p), v(p, 0, q), v(p, 0, -q), v(-p, 0, q), v(-p, 0, -q), v(q, p, 0), v(q, -p, 0), v(-q, p, 0), v(-q, -p, 0), v(1, 1, 1), v(1, 1, -1), v(1, -1, 1), v(1, -1, -1), v(-1, 1, 1), v(-1, 1, -1), v(-1, -1, 1), v(-1, -1, -1), где $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q = \frac{1}{p}$

Введем рекурсивную функцию при расположении сфер по вектору *v*. Для определения уровней сфер используем IFS (iterated function systems) – систему повторяющихся функций.

Программа написана на языке JavaScript. Для получения интерактивной 3D графики использована библиотека Three.js.

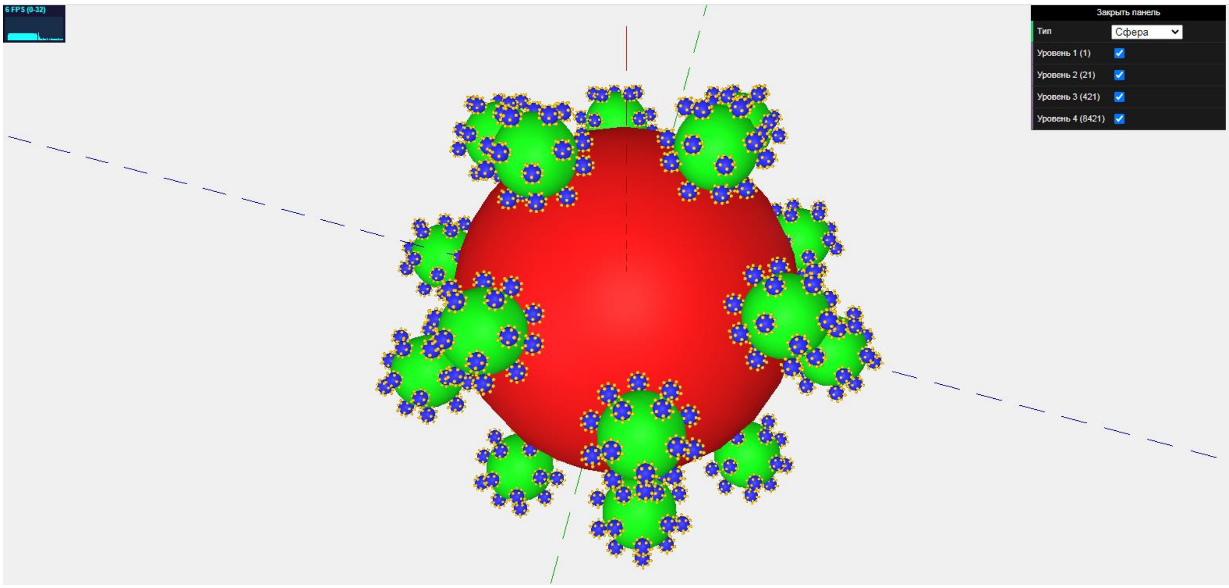

Рис. 2. 3D модель пространственного геометрического фрактала (4 уровня)

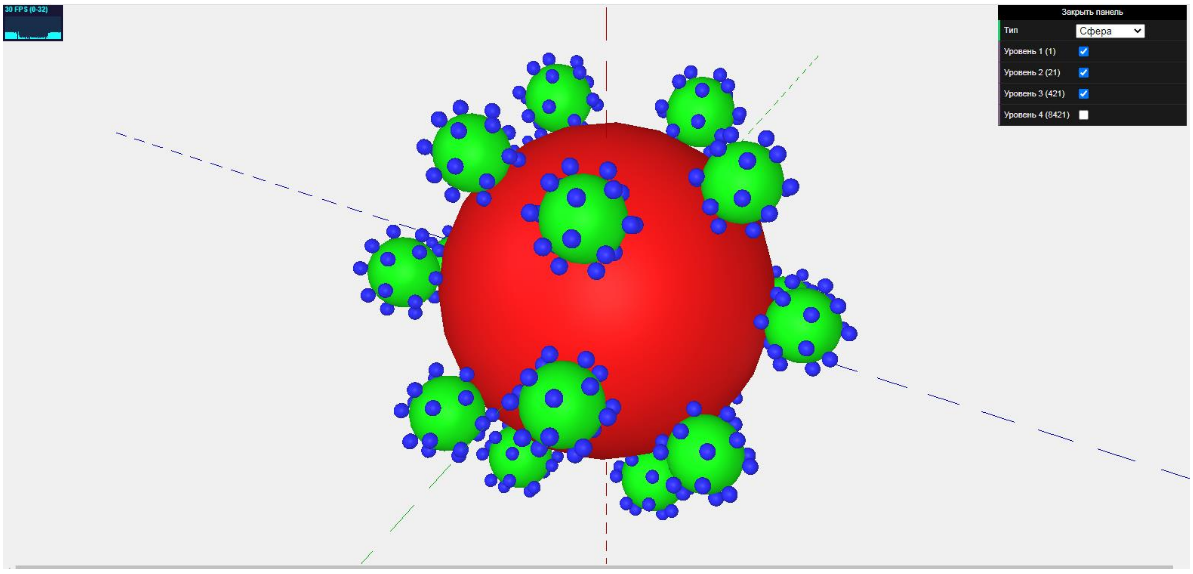

Рис. 3. 3D модель пространственного геометрического фрактала (3 уровня)

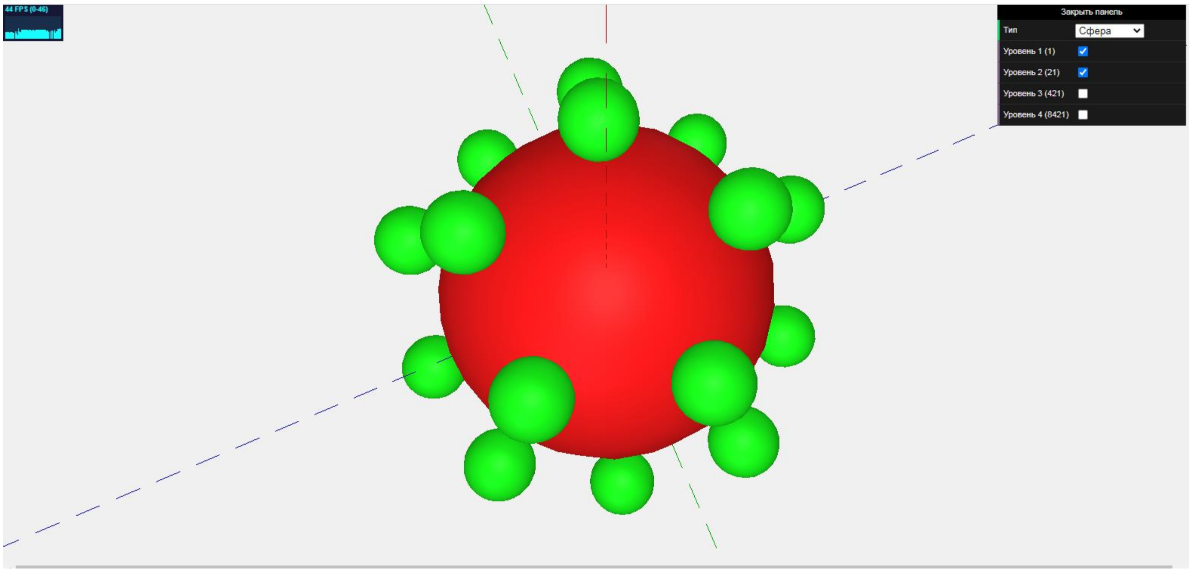

Рис. 4. 3D модель пространственного геометрического фрактала (2 уровня)

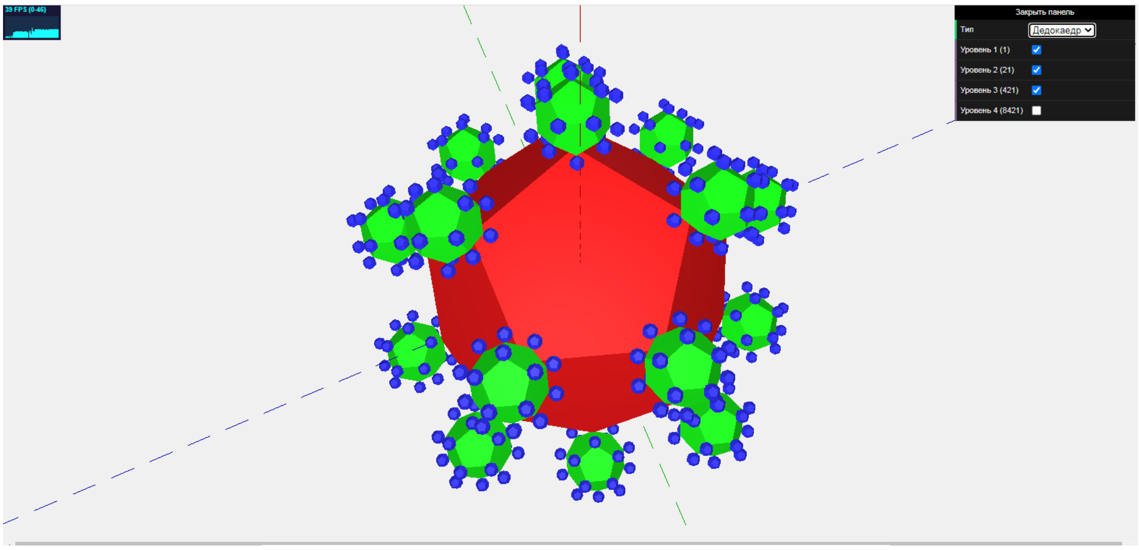

Рис. 5. 3D модель додекаэдра (3 уровня)

Листинг программы

```
let lLen=4;
let fr = 1;
let rlKaf = 0.2;
let dedocalc=[];
let dedos=[];
class inputGUIa {
	constructor() {
		this.group_1=true;
		this.group_2=true;
		this.group_3=true;
		this.group_4=false;
		this.type = "Сфера"
	}
}
let inputGUI = new inputGUIa();
let gui = new dat.GUI({closeOnTop: true, width: 250});
let type = gui.add(inputGUI, 'type', [ 'Сфера', 'Дедокаедр' ] ).name('Тип');
let checkLv = [
	gui.add(inputGUI, 'group_1').name('Уровень 1 (1)'),
	gui.add(inputGUI, 'group_2').name('Уровень 2 (21)'),
	gui.add(inputGUI, 'group_3').name('Уровень 3 (421)'),
	gui.add(inputGUI, 'group_4').name('Уровень 4 (8421)')
]
let sColor = [
	{ r:1, g:0.1, b:0.1 },    { r:0.1, g:1, b:0.1 },
	{ r:0.2, g:0.2, b:1 },    { r:1, g:0.8, b:0.1 },
	{ r:0.2, g:1, b:1 }, { r:1, g:0.2, b:0.7 },
	{ r: 1, g: 0.1, b: 1 }
]
class DedoVectors{
	constructor(){
		const p = (1+ Math.sqrt(5))/2, q = 1/p;
   this.vs = [          //  x   y   z
			new THREE.Vector3(  0,  q,  p), //  0  green
			new THREE.Vector3(  0,  q, -p), //  1
			new THREE.Vector3(  0, -q,  p), //  2
			new THREE.Vector3(  0, -q, -p), //  3

			new THREE.Vector3(  p,  0,  q), //  4  pink
			new THREE.Vector3(  p,  0, -q), //  5
			new THREE.Vector3( -p,  0,  q), //  6
			new THREE.Vector3( -p,  0, -q), //  7

			new THREE.Vector3(  q,  p,  0), //  8  blue
			new THREE.Vector3(  q, -p,  0), //  9
			new THREE.Vector3( -q,  p,  0), // 10
			new THREE.Vector3( -q, -p,  0), // 11

			new THREE.Vector3(  1,  1,  1), // 12  orange
			new THREE.Vector3(  1,  1, -1), // 13
			new THREE.Vector3(  1, -1,  1), // 14
			new THREE.Vector3(  1, -1, -1), // 15
```

```
				new THREE.Vector3( -1,  1,  1), // 16
				new THREE.Vector3( -1,  1, -1), // 17
				new THREE.Vector3( -1, -1,  1), // 18
				new THREE.Vector3( -1, -1, -1)  // 19
			]
			return this.vs.map(i=>i.normalize())
		}
}

type.onChange(function(value){
		objecDraw(value)
})

class Dedocalc{
		constructor(pos, r, lv){
			this.pos = pos
			this.r = r
			this.lv = lv
			if (this.lv < lLen-1){
				let dv = new DedoVectors()
				dv.forEach((el,i)=>{
					let nPos = new THREE.Vector3()
					let dist = this.r*(rlKaf+.99)
					dedocalc.push( new Dedocalc(nPos.addVectors(this.pos,
el.multiplyScalar(dist)), this.r*rlKaf, this.lv+1))
				})
			}
		}
}

dedocalc.push( new Dedocalc(new THREE.Vector3(),fr,0))

let dgeometry, dmaterial, oMesh	;
objecDraw("Сфера")

function objecDraw(v){
		if (v == "Сфера")		dgeometry = new THREE.SphereGeometry( fr, 24, 12 );
		if (v == "Дедокаедр")		dgeometry = new THREE.DodecahedronGeometry( fr, 0 );

		dmaterial = new THREE.MeshPhongMaterial();
		oMesh = new THREE.Mesh( dgeometry, dmaterial );
		console.log(v);
		dedoArr()
		dedosUpdate()
}

function dedoArr(){
		dedos = []
		dedocalc.forEach(el=>{
			let meshNew = oMesh.clone();
			meshNew.material = oMesh.material.clone();
			meshNew.material.color = sColor[el.lv];
			dedos.push(meshNew);
```

```
	})
}

function dedosUpdate(){

	let groupS = new THREE.Group();
	scene.traverse(function(child){
		if(child.name == "asd"){
		  scene.remove(child);
		}
	});
	dedos.forEach((el,i)=>{
		el.position.copy(dedocalc[i].pos)
		let kf = dedocalc[i].r/(fr);
		el.scale.set(kf,kf,kf);
		groupS.add(el)
	})
	groupS.name = "asd"
	scene.add(groupS);
	groupS.rotation.set(30*Math.PI/180,0,0)
	lvCheck(false,3);

}

function lvCheck(v,l){
	dedos.forEach((el, i)=>{
		if (dedocalc[i].lv == l) el.visible = v;
	})
}
checkLv.forEach((el, i) => {
	el.onChange((v) => lvCheck(v,i))
})
function update() {
}
function render() {
	renderer.render( scene, camera );
}
function Gameloop() {
	requestAnimationFrame( Gameloop );
	update();
	render();
	stats.update();
};
Gameloop();
function rndInt(min, max) {
	return Math.floor(Math.random() * (max - min) + min) + 1;
}
function rndM(min, max){
	return Math.random() * (max - min) + min;
}
```

§5. Асимптотика решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа

В прямоугольнике рассмотрим первую краевую задачу [1, 2]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}+q(t,x)z(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Omega, \tag{4.1}$$

$$z(0,x)=\varphi(x),\quad x\in[0,1], \tag{4.2}$$

$$z(t,0)=\mu_1(t),\ z(t,1)=\mu_2(t),\quad t\in[0,T], \tag{4.3}$$

где ε – малый положительный параметр, $0<a$ – const, $\Omega=\{(t,x)\,|\,0<t\le T, 0<x<1\}$,

$q,p,f\in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, $\varphi\in C^{\infty}[0,1],\ \mu_1,\mu_2\in C^{\infty}[0,T],\ q(t,x)>0:(t,x)\in\bar{\Omega},\ \varphi(0)=\mu_1(0),\ \varphi(1)=\mu_2(0)$.

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение первой краевой задачи (4.1)-(4.3), при $\varepsilon\to 0$.

Решение задачи (4.1)–(4.3) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра [3–5]:

$$z(t,x)=U(t,x)+V(\tau,x)+\Pi_1(t,\eta_1)+\Pi_2(t,\eta_2)+W_1(\tau,\eta_1)+W_2(\tau,\eta_2) \tag{4.4}$$

где $\tau=t/\varepsilon,\ \eta_1=x/\lambda, \eta_2=(1-x)/\lambda,\ \lambda=\sqrt{\varepsilon}$,

Подставляя соотношение (4.4) в задачу (4.1)–(4.3), получаем следующие задачи:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 \mathrm{U}(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial \mathrm{U}(t,x)}{\partial x}+q(t,x)U(t,x)=f(\mathrm{t},\mathrm{x}),\ (\mathrm{t},x)\in\Omega; \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}-\varepsilon a^2\frac{\partial^2 V(\tau,x)}{\partial x^2}+\varepsilon^2 p(\tau,x)\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial x}+q(\tau,x)V(\tau,x)=0,\ (\tau,x)\in\Omega_1; \tag{4.6}$$

$$a^2\frac{\partial^2\Pi_j(t,\eta_j)}{\partial\eta_j^2}-q(t,\eta_j)\Pi_j(t,\eta_j)=\lambda^2\frac{\partial\Pi_j(t,\eta_j)}{\partial t}+\lambda^3 p(t,\eta_j)\frac{\partial\Pi_j(t,\eta_j)}{\partial\eta_j},\ (t,\eta_j)\in\Omega_{2j}; \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial W_j(\tau,\eta_j)}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 W_j(\tau,\eta_j)}{\partial\eta_j^2}+q(\tau,\eta_j)W_j(\tau,\eta_j)=-\lambda^4 p(\tau,\eta_j)\frac{\partial W_j(\tau,\eta_j)}{\partial\eta_j},\ (\tau,\eta_j)\in\Omega_{3j}; \tag{4.8}$$

где $\Omega_1=\{(\tau,x)\,|\,0<\tau\le\mu^{-1}T,\ 0\le x\le 1\}$, $\Omega_{2j}=\{(\mathrm{t},\eta_j)\,|\,0\le t\le T,\ 0<\eta_j\le\lambda^{-1}\}$,

$\Omega_{3j}=\{(\tau,\eta_j)\,|\,0<\tau\le T\varepsilon^{-1},\ 0<\eta_j\le\lambda^{-1}\},\ j=1,2.$

Подставляя соотношение (4.4) в начальное условие (4.2) получаем:

$$\varphi(x)=U(0,x)+V(0,x)+\Pi_1(0,\eta_1)+\Pi_2(0,\eta_2)+W_1(0,\eta_1)+W_2(0,\eta_2)\Rightarrow$$

$$V(0,x)=\varphi(x)-U(0,x), \tag{4.9}$$

$$W_j(0,\eta_j) = -\Pi_j(0,\eta_j), \;\; j=1,2. \tag{4.10}$$

Теперь подставляя соотношение (4.4) в граничные условия (4.3), имеем:

$$\mu_1(t) = U(t,0) + V(t\varepsilon^{-1},0) + \Pi_1(t,0) + \Pi_2(t,\lambda^{-1}) + W_1(t\varepsilon^{-1},0) + W_2(t\varepsilon^{-1},\lambda^{-1}) \;\; ,$$

учитывая, что $\Pi_2(t,\lambda^{-1}) = 0,\; W_2(t\varepsilon^{-1},\lambda^{-1}) = 0$ – условие для погранслойных функций, получаем:

$$\Pi_1(t,0) = \mu_1(t) - U(t,0), \tag{4.11}$$

$$W_1(\tau,0) = -V(\tau,0), \tag{4.12}$$

аналогично

$$\mu_2(t) = U(t,1) + V(t\varepsilon^{-1},1) + \Pi_2(t,0) + W_2(t\varepsilon^{-1},0) \Rightarrow$$

$$\Pi_2(t,0) = \mu_2(t) - U(t,0), \tag{4.13}$$

$$W_2(\tau,0) = -V(\tau,1)\,. \tag{4.14}$$

В результате мы получили шесть задач:

– из уравнения (4.5) методом малого параметра однозначно определяем $U(t,x)$;

– из (4.6) и (4.9) определяем $V(\tau,x)$;

– из (4.7), (4.11) и (4.13) определяем $\Pi_j(t,\eta_j)$, j = 1, 2;

– из (4.8), (4.10), (4.12) и (4.14) определяем $W_j(\tau,\eta_j)$, j = 1, 2.

Начнем с уравнения (4.5).

Лемма 4.1. Для решения $U(t,x)$ уравнения (4.5) справедливо формальное асимптотическое разложение

$$U(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t,x)\,, \tag{4.15}$$

где $u_k \in C^\infty(\bar{\Omega}),\; k = 0,1,2,...$ – конкретизируются при доказательстве леммы 1.

Доказательство. Формально подставляя (4.15) в (4.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем:

$$u_0(t,x) = \frac{f(t,x)}{q(t,x)}, \tag{4.16}$$

$$u_k(t,x) = -\frac{1}{q(t,x)}\left(\frac{\partial u_{k-1}(t,x)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u_{k-1}(t,x)}{\partial x^2}\right) - \frac{p(t,x)}{q(t,x)}\frac{\partial u_{k-2}(t,x)}{\partial x},\; k \in N,\; u_{-1}(t,x) \equiv 0, \tag{4.17}$$

заметим, что $u_k \in C^\infty(\bar{\Omega}),\; k = 0,1,2,...$. Лемма 1 доказана.

Перейдем к задаче (4.6), (4.9). Пусть

$$V(\tau,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\tau,x), \tag{4.18}$$

где $v_k(\tau,x)$ – пока неизвестные функций.

Подставляя (4.18) в (4.6) и (4.9), имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\frac{\partial v_k(\tau,x)}{\partial\tau}-\varepsilon a^2\frac{\partial^2 v_k(\tau,x)}{\partial x^2}+\varepsilon^2\sum_{j=0}^{k}\tau^j p_j(x)\frac{\partial v_{k-j}(\tau,x)}{\partial x}+\sum_{j=0}^{k}\tau^j q_j(x)v_{k-j}(\tau,x)\right)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(0,x)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(0,x),$$

где $q_j(x)=\dfrac{\partial^j q(0,x)}{\partial\tau^j}$, $q_0(x)=q(0,x)$, $p_j(x)=\dfrac{\partial^j p(0,x)}{\partial\tau^j}$.

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial v_0(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_0(\tau,x)=0,\ v_0(0,x)=\varphi(x)-u_0(0,x); \tag{4.19}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_k(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_k(\tau,x)=\\ =a^2\frac{\partial^2 v_{k-1}(\tau,x)}{\partial x^2}+\sum_{j=0}^{k}\tau^j p_j(x)\frac{\partial v_{k-j-2}(\tau,x)}{\partial x}+\sum_{j=1}^{k}\tau^j q_j(x)v_{k-j}(\tau,x),\ v_k(0,x)=-u_k(0,x),\ k\in N.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Решение задачи (4.19) существует, единственно и представимо в виде:

$$v_0(\tau,x)=(\varphi(x)-u_0(0,x))e^{-q(x)\tau}.$$

Для $v_1(\tau,x)$ имеем:

$$\frac{\partial v_1(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_1(\tau,x)=a^2\frac{\partial^2 v_0(\tau,x)}{\partial x^2}+\tau q_1(x)v_0(\tau,x),\ v_1(0,x)=-u_1(0,x).$$

Справедлива

Лемма 4.2. Решение задачи

$$\frac{\partial\tilde v(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)+\ldots+p_n(x)\tau^n\right),\ (\tau,x)\in\Omega_1,\ \tilde v(0,x)=\tilde v^0(x),\ x\in[0,1]$$

существует, единственно и представимо в виде

$$\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\tilde v^0(x)+e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)\tau+p_1(x)\frac{\tau^2}{2}+\ldots+p_n(x)\frac{\tau^{n+1}}{n+1}\right),$$

где $q_0(x)>0\ x\in[0,1]$, $q_0, p_j, \tilde v^0\in C^\infty[0,1]$.

Доказательство. Уравнение

$$\frac{\partial\tilde v(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)+p_1(x)\tau+\ldots+p_n(x)\tau^n\right),\ (\tau,x)\in\Omega_1,$$

запишем в виде

$$\left(\tilde{v}(\tau,x)e^{q_0(x)\tau}\right)'_\tau = \left(p_0(x)+p_1(x)\tau+...+p_n(x)\tau^n\right),$$

полученное выражение интегрируем по τ, учитывая начальное условие:

$$\tilde{v}(\tau,x)e^{q_0(x)\tau}-\tilde{v}^0(x)=\int_0^\tau (p_0(x)+...+p_n(x)s^n)ds \quad \Rightarrow \tilde{v}(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\tilde{v}^0(x)+P_{n+1,\tau}(\tau,x)e^{-q_0(x)\tau},$$

где $P_{n+1,\tau}(\tau,x)=p_0(x)\tau+p_1(x)\dfrac{\tau^2}{2}+...+p_n(x)\dfrac{\tau^{n+1}}{n+1}$. Лемма 4.2 доказана.

С помощью леммы 4.2 доказывается существование и единственность решений задач (4.20). Кроме этого из леммы 4.2 следует, что эти решения экспоненциально стремятся к нулю при стремлении τ к бесконечности, т. е.:

$$v_k(\tau,x)=O\left(e^{-q_0(x)\tau}\right),\ \tau\to\infty,\ q_0(x)>0:\ x\in[0,1],\ k=0,1,2,...$$

Перейдем к задачам (4.7), (4.11) и (4.13). Здесь две задачи относительно функций $\Pi_1(t,\eta_1)$ и $\Pi_2(t,\eta_2)$ – аналогичные, поэтому достаточно рассмотреть одну. Мы рассмотрим задачу относительно функций $\Pi_1(t,\eta_1)$:

$$a^2\frac{\partial^2\Pi_1(t,\eta_j)}{\partial\eta_1^2}-q(t,\eta_1)\Pi_1(t,\eta_1)=\lambda^2\frac{\partial\Pi_1(t,\eta_1)}{\partial t}+\lambda^4 p(t,\eta_1)\frac{\partial\Pi_1(t,\eta_1)}{\partial x},\quad (t,\eta_1)\in\Omega_{21}, \tag{4.21}$$

$$\Pi_1(t,0)=\mu_1(t)-U(t,0),\ t\in[0,T]. \tag{4.22}$$

Пусть

$$\Pi_1(t,\eta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\pi_{1,k}(t,\eta_1), \tag{4.23}$$

где $\pi_{1,k}(t,\eta_1)$ – пока неизвестные функций, причем $\lim\limits_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,k}(t,\eta_1)=0,\ t\in[0,T]$.

Подставляя (4.23) в (4.21) и (4.22) имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left(a^2\frac{\partial^2\pi_{1,k}(t,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}-\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j q_j(t)\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+2}\left(\frac{\partial\pi_{1,k}(t,\eta_1)}{\partial t}+\lambda^2\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j p_j(t)\frac{\partial\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)}{\partial x}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\pi_{1,k}(t,0)=\mu_1(t)-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k}u_k(t,0),\ t\in[0,T].$$

где $q_j(t)=\dfrac{\partial^j q(t,0)}{\partial\eta_1^j}$, $p_j(t)=\dfrac{\partial^j p(t,0)}{\partial\eta_1^j}$, $q_0(t)=q(t,0)$.

Отсюда для $\pi_{1,0}(t,\eta_1)$ имеем:

$$a^2\frac{\partial^2\pi_{1,0}}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi_{1,0}=0,\ (t,\eta_1)\in\Omega_{21},\ \pi_{1,0}(t,0)=\mu_1(t)-u_0(t,0),\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,0}(t,\eta_1)=0,\ t\in[0,T].$$

Решение этой задачи можно представить в виде

$$\pi_{1,0}(t,\eta_1)=\left(\mu_1(t)-u_0(t,0)\right)e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}.$$

Для $\pi_{1,k}(t,\eta_1),\ k\in N$ имеем:

$$a^2\frac{\partial^2\pi_{1,k}}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi_{1,k}=\sum_{j=1}^{k}\eta_1^j q_j(t)\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)+\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j p_j(t)\frac{\partial\pi_{1,k-j-2}(t,\eta_1)}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{1,k-2}(t,\eta_1)}{\partial t},(t,\eta_1)\in\Omega_{21},$$
$$\pi_{1,2k}(t,0)=-u_k(t,0),\ \pi_{1,2k-1}(t,0)=0,\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,k}(t,\eta_1)=0,\ \ t\in[0,T]. \tag{4.24}$$

Справедлива

Лемма 4.3. Решение задачи

$$a^2\frac{\partial^2\pi}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi=e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\left(p_1(t)\eta_1+\ldots+p_n(t)\eta_1^n\right),\ \ (t,\eta_1)\in\Omega_{21},$$
$$\pi(t,0)=\pi^0(t),\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi(t,\eta_1)=0,\ t\in[0,T],$$

существует, единственно и представимо в виде

$$\pi(t,\eta_1)=e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\pi^0(t)+e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\eta_1\left(\tilde{p}_1(t)\eta_1+\ldots+\tilde{p}_n(t)\eta_1^n\right),$$

где $q_0(t)>0\ \ t\in[0,T],\ q_0,\tilde{p}_j,\pi^0\in C^\infty[0,T].$

Лемма 4.3 доказывается прямым интегрированием, как и лемма 4.2.

С помощью леммы 4.3 доказывается существование, единственность решений задач (4.24). Для решений задач (4.24) справедливы оценки:

$$\pi(t,\eta_1)=O\left(e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\right),\ \eta_1\to\infty,\ t\in[0,T],\ 0<a,\ 0<q_0(t).$$

Перейдем к задачам (4.8), (4.10), (4.12) и (4.14) для определения угловых погранслойных функций $W_j(\tau,\eta_j)$, j = 1, 2.

Здесь тоже достаточно рассмотреть одну из них, либо задачу для $W_1(\tau,\eta_1)$, либо для $W_2(\tau,\eta_2)$, второе исследуется аналогично. Рассмотрим задачу для $W_1(\tau,\eta_1)$:

$$\frac{\partial W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}+q(\tau,\eta_1)W_1(\tau,\eta_1)+\lambda^3 p(\tau,\eta_1)\frac{\partial W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1}=0,\quad (\tau,\eta_1)\in\Omega_{31}, \tag{4.25}$$

$$W_1(0,\eta_1)=-\Pi_1(0,\eta_1),\quad W_1(\tau,0)=-V(\tau,0). \tag{4.26}$$

Пусть

$$W_1(\tau,\eta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w_{1,k}(\tau,\eta_1), \tag{4.27}$$

где $w_{1,k}(\tau,\eta_1)$ – пока неизвестные функций.

Подставляя (4.27) в (4.25) и (4.26) получаем:

$$\frac{\partial w_{1,j}}{\partial \tau} - a^2 \frac{\partial^2 w_{1,j}}{\partial \eta_1^2} + q_0 w_{1,j} = 0, \quad (\tau, \eta_1) \in \Omega_{31},\ j = 0,1;$$

$$\frac{\partial w_{1,k}}{\partial \tau} - a^2 \frac{\partial^2 w_{1,k}}{\partial \eta_1^2} + q_0 w_{1,k} = \Phi_k(w_{1,k-1}, w_{1,k-2}, ..., w_{1,0}, \tau, \eta_1), \quad (\tau, \eta_1) \in \Omega_{31},\ k = 2,3,...$$

$$w_{1,k}(0,\eta_1) = -\pi_{1,k}(0,\eta_1), w_{1,2k}(\tau,0) = -v_k(\tau,0),\ w_{1,2k+1}(\tau,0) = 0,\ k = 0,1,...,$$

где $q_{n,m} = \dfrac{\partial^{n+m} q(0,0)}{\partial \tau^n \partial \eta_1^m}$, $0 < q_0 = q(0,0)$, Φ_k – линейно зависят от предыдущих $w_{1,j}$ ($j<k$) и их производных от η_1, полиномиально зависят от τ, и η_1.

Если ввести обозначение $w_{1,k}(\tau,\eta_1) = e^{-q_0 \tau} y_k(\tau,\eta_1)$, то

$$\frac{\partial w_{1,k}(\tau,\eta_1)}{\partial \tau} = -q_0 e^{-q_0\tau} y_k(\tau,\eta_1) + e^{-q_0\tau} \frac{\partial y_k(\tau,\eta_1)}{\partial \tau};\ \frac{\partial^2 w_{1,k}(\tau,\eta_1)}{\partial \eta_1^2} = e^{-q_0\tau} \frac{\partial^2 y_k(\tau,\eta_1)}{\partial \eta_1^2},\text{ и}$$

рассматриваемая задача примет вид:

$$\frac{\partial y_k}{\partial \tau} - a^2 \frac{\partial^2 y_k}{\partial \eta_1^2} = \Phi_k(y_{1,k-1}, y_{1,k-2}, ..., y_{1,0}, \tau, \eta_1), \quad (\tau,\eta_1) \in \Omega_{31},\ k = 0,1,... \tag{4.28}$$

$$y_k(0,\eta_1) = -\pi_{1,k}(0,\eta_1), y_{2k}(\tau,0) = -e^{q_0\tau} v_k(\tau,0),\ y_{2k+1}(\tau,0) = 0,\ k = 0,1,... \tag{4.29}$$

где $\Phi_j \equiv 0, j = 0,1.$

Решения задач (4.28), (4.29) существуют, единственны и представимы в виде [6]:

$$y_k(\tau,\eta_1) = -\int_0^\infty \pi_{1,k}(0,\xi) G(\tau,\xi,\eta_1) d\xi + \int_0^\tau \psi_k(t) H(\eta_1, \tau - t) dt + \int_0^\tau \int_0^\infty \Phi_k(t,x) G(\eta_1, x, \tau - t) dx dt,$$

где

$$H(\eta_1,\tau) = \frac{\eta_1}{2a\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} e^{-\frac{\eta_1^2}{4a\tau}},\ G(\tau,x,\eta_1) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}\left(\exp\left(-\frac{(\eta_1 - x)^2}{4a^2\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(\eta_1 + x)^2}{4a^2\tau}\right)\right),$$

$$\psi_{2k}(\tau) = -e^{q_0\tau} v_k(\tau,0), \psi_{2k-1}(\tau) \equiv 0,\ \Phi_k(\tau,\eta_1) = \Phi_k(y_{1,k-1}, y_{1,k-2}, ..., y_{1,0}, \tau, \eta_1).$$

Отсюда следует, что функций $w_{1,k}(\tau,\eta_1)$ экспоненциально убывают при $\tau + \eta_1 \to \infty$

.

Таким образом, нами построены все функций входящие в правую часть равенства (4.4).

Обоснование. Оценим остаточный член разложения (4.4).

Пусть $z(t,x) = z_n(t,x) + R(t,x)$, где $R(t,x)$ – остаточный член разложения,

$$z_n(t,x)=U_n(t,x)+V_n(\tau,x)+\Pi_{1,2n+1}(t,\eta_1)+\Pi_{2,2n+1}(t,\eta_2)+W_{1,2n+1}(\xi,\eta_1)+W_{2,2n+1}(\xi,\eta_2),$$

$$U_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(t,x), V_n(\tau,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(\tau,x),\ \Pi_{j,2n+1}(t,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k\pi_{j,k}(t,\eta_j),$$

$$W_{j,2n+1}(\tau,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k w_{\mathrm{j},k}(\tau,\eta_j)\,.$$

Тогда для остаточного члена получим следующую задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial R(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 R(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial R(t,x)}{\partial x}+q(t,x)R(t,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad (t,x)\in\Omega, \tag{4.31}$$

$$R(0,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad x\in[0,1],\ z(t,0)=z(t,1)=O(\varepsilon^{n+1}),\ t\in[0,T],\ \varepsilon\to 0\,. \tag{4.32}$$

Применяя принцип максимума [7], получаем:

$$\left|R(t,x)\right|\le \max_{\substack{(t,x)\in\bar\Omega\\ 0<\varepsilon<<1}}\left\{q^{-1}(t,x)O(\varepsilon^{n+1}),\ O(\varepsilon^{n+1})\right\}.$$

Отсюда имеем:

$$R(t,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad (t,x)\in\bar\Omega,\ \ \varepsilon\to 0.$$

Теорема 4.1. Для решения задачи (4.1)-(4.3) при стремлении малого параметра к нулю в области $\bar\Omega$ справедливо асимптотическое разложение

$$z(t,x)=U_n(t,x)+V_n(\tau,x)+\Pi_{1,2n+1}(t,\eta_1)+\Pi_{2,2n+1}(t,\eta_2)+W_{1,2n+1}(\xi,\eta_1)+W_{2,2n+1}(\xi,\eta_2)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где функций $U_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(t,x), V_n(\tau,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(\tau,x),\ \Pi_{j,2n+1}(t,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k\pi_{j,k}(t,\eta_j),$ $W_{j,2n+1}(\tau,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k w_{j,k}(\tau,\eta_j)$ определены выше.

Заключение

Для построения 3D моделей геометрических фракталов имеются три варианта программ: полу автоматизированный, автоматизированный и ручной, также можно воспользоваться различными программными обеспечениями. Например, Компас3D, 3ds Max, и другими. Существуют специализированные программы, которые имеют приложенные алгоритмы для реализации основных этапов построения.

Поскольку, основной задачей данного исследования является создание специального скрипта, который даст возможность полностью автоматизировать процесс, рассмотрение математической основы теории фракталов и изучение методов их построения для реализации практический части производится посредством языка программирования JavaScript и библиотеки WebGL, Tree.js.

Разработан скрипт для построения 3D модели пространственного фрактала.

Исследована существование двойных и квазидвойных линий частичных отображений евклидова пространств E_5.

Оценка полноты решений поставленных задач

По всем пунктам поставленных задач необходимо продолжение исследований.

– Результаты оценки научно-технического уровня выполненной НИР в сравнении с лучшими достижениями в этой области. Графен – двумерная оллотропная модификация углерода, образованная слоем атомов углерода толщиной в один атом. Его кристалическая структура – гексагональная решётка, т.е. простой и плоский геометрический фрактал. (Нобелевская премия 2010-года по физике присуждена выходцам из Росии, работающим в Великобретании К. Новоселову и А. Гейму за создание графена).

Мы надеемся, что созданная нами плоские и пространственные геометрические фракталы в будущем будут иметь широкое применение в различных отраслях наук.

С другой стороны, учеными-химиками (докт.хим. наук, профессор Алтыбаева Д.Т. и др.) получены комплексные соединения и их кристалическими структурами являются геометрические фракталы. Представляет большой научный интерес “обратное”, т.е. создание комплексного соединения, которе имеет кристаллическую структуру соответствующему заданному “наперёд” геометрическому фракталу.

Получены следующие результаты:

– Построены два плоские геометрические фракталы: “Геометрическая звезда” (авт.свид. № 4741, 24.02.2022), “Шестеро и седьмой” (авт.свид. № 4740, 24.02.2022);

– Программа для получения 3D модели пространственного геометрического фрактала (авт.свид. № 770, 10.03.2022);

– Получено авторское свидетельство на рабочую тетрадь “Көрсөтмөлүү геометрия (Мейкиндик ой жүгүртүүнү өнүктүрүү үчүн көнүгүүлөр [текст]/Г. Матиева, Г.М. Борбоева/ 5-6-класстардын окуучулары үчүн жумушчу дептер. – Ош, 2022. – 54 с.” (№4854, 07.06.2022);

– Издана монография “Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе” (авторы: Матиева Г, Папиева Т.М., Курбанбаева Н.Н.);

– Издано учебное пособие “Геометриянын негиздери” (авторы: Матиева Г, Папиева Т.М., Азимов Б.А.);

– Получены необходимые и достаточные условия того, что линии $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p, q, s, t, \mu, \theta$ соответственно принадлежащие распределениям $\Delta_{(123)}$, $\Delta_{(124)}$, $\Delta_{(125)}, \Delta_{(234)}, \Delta_{(235)}$, $\Delta_{(345)}$, $\Delta_{(145)}$, $\Delta_{(134)}$, $\Delta_{(245)}$, $\Delta_{(135)}$ являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3.

– Доказаны необходимые и достаточные условия того, что линии $\alpha, \beta, \gamma, \delta, h, p, q, s, t, m$ соответственно принадлежащие распределениям $\Delta_{(123)}$, $\Delta_{(124)}$, $\Delta_{(125)}, \Delta_{(234)}, \Delta_{(235)}$, $\Delta_{(345)}$, $\Delta_{(145)}$, $\Delta_{(134)}$, $\Delta_{(245)}$, $\Delta_{(135)}$ являются квазидвойными линиями частичного отображения f_3^2.

– Получены необходимые и достаточные условия того, что линии $\alpha, \beta, \gamma, \delta, s, t, p, q, \theta, \mu$ соответственно принадлежащие распределениям $\Delta_{(123)}$, $\Delta_{(124)}$, $\Delta_{(125)}, \Delta_{(234)}, \Delta_{(235)}$, $\Delta_{(345)}$, $\Delta_{(145)}$, $\Delta_{(134)}$, $\Delta_{(245)}$, $\Delta_{(135)}$ являются квазидвойными линиями частичного отображения f_5^4.

– Построено полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными параболического типа.

– Доказано, что полученное разложение действительно является асимптотическим решением поставленной задачи на всем прямоугольнике.

Литература

1. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий [Текст]/ В.Т Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур,1975.вып.6.-С.19-25.
2. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей // Ученые записки. Т.243. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1965. – С. 29-37.
3. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.
4. Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей // Изв. вузов. Математика, 1967. Т.9. – С. 3-11.
5. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространств // В кн: III Межвузовская конференция по проблемам геометрии. Тезисы докладов. – Казань: Казанский университет, 1967. – С. 8.
6. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств // Ученые записки. Т.1., № 374. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. – С. 28-40.
7. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространства // Ученые записки. Т.1. №374. – Москва: МГПИ им. В.И.Ленина, 1970. – С. 41-51.
8. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства // Монография. – Ош, 2003. – С. 212-219.
9. Матиева Г., Папиева Т.М. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.
10. Матиева Г., Папиева Т. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.
11. Матиева Г. Необходимое и достаточное условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении евклидова пространства // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. − Вып. 31. – С. 259-264.
12. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва, Наука, 1967. – С. 481-482.

13. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии / И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк // Москва: ИЛ, 1948. Т.II. – 348 с.

14. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии // М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.

15. Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.

16. Г.Матиева. Авторское права на геометрической фрактал “Сфера с четырнадцатью башнями” (свидетельство №3895, от 12.06.2020).

17. Г.Матиева. Авторское права на геометрической фрактал ““Планета Мирбек”” (свидетельство №3959, от 08.09.2020).

18. А.И. Азевич. Симфония фракталов, журнал «Информатика» №23/2008.

Приложение

Список опубликованных работ и полученных авторских свидетельств

1) Matieva, G. Space Fractal Program for 3D Model Construction [электронное издание]/ Gulbadan Matieva, Ularbek Moldoyarov, Bektur Azimov, Gulmira Shamshieva, Nurkyz Sarygulova, Zhypargul Abdullaeva/ An International Journal of Neuroscience and Quantum Physics. – DOI: 10.4704/nq.2022.20.14. NQ88071. – https://www.neuroquantology.com/article.php?id=9370 (SCOPUS)

2) Матиева, Г. Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе [текст] / Г. Матиева, Т.М.Папиева, Н.Н. Курбанбаева/ Монография. – Ош, 2022. – 137 с.

3) Матиева, Г. Геометриянын негиздери [текст] / Г. Матиева, Т.М.Папиева, Б.А. Азимов/ Учебное пособие. – Ош, 2022. – 104 с.

4) Шамшиева, Г.А. Евклиддик мейкиндикте берилген бөлүштүрүүнүн минималдык болушунун бир шарты жөнүндө [текст] / Г.А. Шамшиева и др. / Научный журнал «Наука. Образование. Техника» (НОТ) Кыргызско-Узбекского Международного университета имени Б. Сыдыкова. – № 1 (73), 2022. – Ош, 2022. – С. 46-52. https://elibrary.ru/item.asp?id=49429530. (РИНЦ)

5) Мустапакулова, Ч.А. Төрт ченемдүү E_4 евклиддик мейкиндикте (f,Δ_3) түгөйүнүн квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө [текст] / Ч.А. Мустапакулова др. / Научный журнал «Наука. Образование. Техника» (НОТ) Кыргызско-Узбекского Международного университета имени Б. Сыдыкова. – № 1 (73). – Ош, 2022. – С. 52-59. https://elibrary.ru/item.asp?id=49429531 (РИНЦ)

6) Матиева, Г. E_5 Евклиддик мейкиндигинде f_2^1 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] / Г. Матиева и др. – Научный журнал «Наука. Образование. Техника» (НОТ) Кыргызско-Узбекского Международного университета имени Б. Сыдыкова. – № 3 (75). – Ош, 2022. – С. 32-39. (РИНЦ) https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49900608

7) Матиева, Г. E_5 Евклиддик мейкиндигинде f_5^4 бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө [текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.О. Рустамова. – Научный журнал «Наука. Образование. Техника» (НОТ) Кыргызско-Узбекского Международного университета имени Б. Сыдыкова. – № 3 (75). – Ош, 2022. – С. 39-49. (РИНЦ) https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49900609

8) Азимов, Б.А. E_{p+3} мейкиндигинде берилген V_3 бетине бириктирилген беттин айрым касиеттери [текст] / Б.А. Азимов. – Научный журнал «Наука. Образование. Техника» (НОТ) Кыргызско-Узбекского Международного университета имени Б. Сыдыкова. – № 2 (74). – Ош, 2022. – С. 49-52. https://elibrary.ru/item.asp?id=49535833 (РИНЦ)

9) Азимов, Б.А. Условия существования двойных линий частичного отображения пространство E_4 [текст] / Б.А. Азимов. – Научный журнал «Наука. Образование. Техника» (НОТ) Кыргызско-Узбекского Международного университета имени Б. Сыдыкова. – № 2 (74). – Ош, 2022. – С. 53-59. https://elibrary.ru/item.asp?id=49535834 (РИНЦ)

10) Tursunov D.A., Omaralieva G.A. An intermediate boundary layer in singularly perturbed first-order equations. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 193–200. (SCOPUS)

11) Tursunov D.A., Kozhobekov K.G., Bekmurza uulu Ybadylla Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation $\varepsilon y''+xp(x)y'-q(x)y = f$ // Eurasian Mathematical Journal. Volume 13, Number 3 (2022), 82 – 91. (SCOPUS)

12) Tursunov D.A., Kozhobekov K.G. Asymptotics of the Solution of Bisingularly Perturbed First Boundary Value Problem // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 2, pp. 506–512. (SCOPUS)

13) Тиешелүү козголбогон теңдеме регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон учурда неймандын маселеси / Турсунов Д.А., Орозов М.О., Халмурзаев А.К.// Вестник Жалал-Абадского государственного университета. 2022. № 1 (50). С. 43-48. (РИНЦ) https://www.elibrary.ru/author_items.asp?authorid=609013&show_refs=1&show_option=1

14) Тиешелүү козголбогон теңдеме регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон учурда дирихленин маселеси / Турсунов Д.А., Орозов М.О., Халмурзаев А.К.// Вестник Жалал-Абадского государственного университета. 2022. № 1 (50). С. 37-43. (РИНЦ)

15) Асимптотики решения возмущенной задачи с регулярной особой точкой / Турсунов Д.А., Бекмурза уулу Ы. // Вестник Ошского государственного университета. – 2022. № 1. – С. 159-166. (РИНЦ)

16) Химиялык реакциядагы секирик жөнүндө /Алымкулов К., Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А., Азимов Б.А. // Вестник Ошского государственного университета. 2022. № 1. С. 66-72. (РИНЦ)

17) Асимптотика решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа / Кожобеков К.Г., Шооруков А.А., Турсунов Д.А. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2022. Т. 14. № 1. С. 27-34. (РИНЦ)

18) Авторское свидетельство на рабочую тетрадь “Көрсөтмөлүү геометрия (Мейкиндик ой жүгүртүүнү өнүктүрүү үчүн көнүгүүлөр)” (№4854, 07.06.2022);

19) Авторское свидетельство на геометрический фрактал: “Геометрическая звезда” (№ 4741, 24.02.2022);

20) Авторское свидетельство на геометрический фрактал: “Шестеро и седьмой” (авт.свид. № 4740, 24.02.2022);

21) Авторское свидетельство на программу для получения 3D модели пространственного геометрического фрактала (авт.свид. № 770, 10.03.2022).

Приложение 1

Форма представления отчета по выполнению государственных программ на основе целевых проектов и разработок, финансируемых из республиканского бюджета

№	Наименование государственной программы и проекта	Научный руководитель, должность, ученая степень и звание	Наименование государствен-ного заказчика	Наименование ВУЗа, НИИ, реализующих проект	Цели и задачи проекта	Объект исследования и разработки	Методы исследования	примечание
1.	Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)	Доктор физико-математических наук, профессор Матиева Гулбадан	Ошская областная государствен-ная администрация	Ошский государственный университет	1) Построение новых классов плоских и пространственных геометрических фракталов и исследование их приложений; 2) Разработать программ для получения компьютерных изображений построенных фракталов и получение их 3D моделей;	Геометрические фракталы, частичное отображения евклидова пространства	Метод внешних форм Картана и метод подвижного репера; язык программирования JavaScript и L-system	

					3) Изучение свойств частичного отображения евклидова пространства порождаемого заданным - мерным распределением (когда распределение минимальное); 4) Определение необходимых и достаточных условий существования двойных и квазидвойных линий частичного отображения f; 5) Доказать необходимое и достаточное условия существования неподвижных прямых частичного отображения f;			

					5) Изучение отображения $f: T_p(x) \to N_{n-p}(x), f(M) = M''$, где M$\in T_p(x)$, $T_p(x)$ – касательная -мерная плоскость p-мерной поверхности V_p в E_n; $N_{n-p}(x) -$ нормальная плоскость поверхности V_p. 6) Доказать необходимое и достаточное условия того, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(i,j,k)}$, является квазидвойной линией отображения f_j^k;			

Приложение 1.1

Форма представления полугодового (промежуточного) отчета государственных программ на основе целевых проектов и разработок, финансируемых из республиканского бюджета

№	Наименование государственной программы и проекта	Задание по календарному плану (Объем работ, подлежащих выполнению)	Выполненные работы по календарному плану (краткая аннотация о полученных научных результатах)	Этапы НИР	Вид отчета (промежуточный/ заключительный/ полугодовой)	Начало реализации программы и проекта (год)	Срок окончания программы и проекта (год)	Доказательная база (№ приложение): акт выполн. работ; протоколы обсуждения; договора о внедрении; договора о совместной работе с предприятиями; размещение информации о ходе реализации и результатах на сайте НИИ, в СМИ.
2.	Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп	-Исследование частичных отображений евклидова пространства E_n заданное p-мерным распределением; - Нахождение условий существования двойных и квазидвойных	- Доказаны необходимые и достаточные условия того, что линии соответственно принадлежащие распределениям являются квазидвойными линиями частичных отображений f_3^2, f_4^3, f_5^4. - Построено полное	I этап - 01.01.2021-31.12.2021 II этап - 01.01.2022-31.12.2022 III этап - 01.01.2023-31.12.2023	промежуточный	01.01.2021	31.12.2023	Результаты работ обсуждались на научно-техническом совете ОшГУ (протокол №4, 23.06.2022) Результаты научно-исследовательских работ были доложены - на международной научной конференции “3rd International Conference on Applied and Industrial Mathematics and Statistics

	чагылтуулардын геометриясы)	линий частичного отображения f; - Построение геометрически х новых фракталов на плоскости и в пространстве; - Разработка программ получения компьютерных изображений и моделей новых фракталов	равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными параболического типа. - Доказано, что полученное разложение действительно является асимптотическим решением поставленной задачи на всем прямоугольнике.					2022”, 24-26 August 2022, Малайзия, университет Паханг. Тема доклада: «Necessary and sufficient conditions of the existence of quazudouble lines of the partial mapping of space E_n». – на региональном научном семинаре “Актуальные проблемы математики и их применения” имени чрен-корреспондента НАН КР, профессора К. Алымкулова

			- Составлена программа для получения 3D модели пространственного геометрического фрактала - Получены 2 геометрические фракталы						

Приложение 2

Количественная информация о реализации и результатах государственной программы и проекта

№	Наименование государственной программы и проекта	Публикации					Авт свидетельства, патент	Акт внедрения	Примечание
		Статьи в SCOPUS, WoS тема статьи, с указанием даты	Статьи в РИНЦ тема статьи, с указанием даты	Статьи в других научных журналах тема статьи, с указанием даты, в т.ч. за рубежом	Тезисы/ в т.ч. за рубежом	Монографии, Учебные пособия			
1.	Современные проблемы фрактальной геометрии и геометрия частичных отображений евклидова пространства (Фракталдык геометриянын учурдагы маселелери жана евклиддик мейкиндиктеги бөлүктөп чагылтуулардын геометриясы)	4	11			2	4	-	