ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Б. ОСМОНОВА

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ Д 05.22.651

На правах рукописи
УДК: 517.956.6

Абдумиталип уулу Кубатбек

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош - 2023

Работа выполнена на кафедре Математического анализа Ошского государственного университета

Научный руководитель:	**Асылбеков Таалайбек Дүкөнбаевич,** кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры Прикладной математики, информатики и графического дизайна Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош)
Официальные оппоненты:	**Искандаров Самандар,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории интегро-диффренциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики (Кыргызстан, г. Бишкек).
	Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Прикладной математики и информатики Ошского технологического университета имени М.М. Адышева (Кыргызстан, г. Ош).
Ведущая организация:	Наманганский инженерно-строительный институт, кафедра Высшей математики. Адрес: 160100, Узбекистан, Наманганская область, г. Наманган, ул. Ислама Каримова, 12.

Защита диссертации состоится 28 февраля 2023 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 05.22.651 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете и Жалал-Абадском государственном университете имени Б. Осмонова по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

Код онлайн трансляции защиты диссертации:
https://vc.vak.kg/b/052-pvt-luj-9ih

С диссертацией можно ознакомится в библиотеках Ошского государственного университета и имени Б. Осмонова Жалал-Абадского государственного университета и на сайте диссертационного совета: https://oshsu.kg.

Автореферат разослан 26 января 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Важнейшим разделом теории неклассических уравнений математической физики является теория уравнений смешанных (эллиптико-гиперболического, параболо-гиперболического, эллиптико-параболического) типов. Разрешимость краевых задач для таких уравнений изучены в работах Ф. Трикоми (1947), А.В. Бицадзе (1959), М.С. Салахитдинова (1974), Т.Д. Джураева (1963), М.М. Смирнова (1970), Т.Ш. Кальменова (1993), А.М. Нахушева (1969), В.И. Жегалова (1987), Е.И. Моисеева (1988), К.Б. Сабитова (2016), А.К. Уринова (2010), А. Сопуева (1986), А.С. Бердышева (2015), Ю.П. Апакова (2019) и других авторов.

Развитие теории смешанных параболо-гиперболических уравнений реализованы в работах Т.Д. Джураева (1986) и его учеников при решении краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка. Доказано, что, если порядок уравнения увеличивается до четвертого порядка, тогда на линии изменения типа уравнений требуется условия сопряжения функции с её производными до второго или третьего порядков. Исследования краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка требует новые подходы и методы их решения.

Актуальность темы. В работах М.М. Смирнова (1970) и Л.А. Бобылёва (1972) изучены краевые задачи для смешанных эллиптико-гиперболических уравнений 4-го порядка вида

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, y > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, y < 0, \end{cases} , \ L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда

$$L_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ или } L_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \text{ а } L_2 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}, y > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, y < 0, \end{cases} \tag{2}$$

исследованы в работах Т.Д. Джураева (1986), А. Сопуева (1986), М. Мамажанова (1986) и их учеников.

В работе Т.Д. Асылбекова (2003) рассмотрены краевые задачи для уравнения вида (1) в области D_1, когда старший член уравнения имеет вид $L_1 L_2 \equiv \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\dfrac{\partial}{\partial y}$. А.З. Пирматовым (2003) изучены краевые задачи для уравнения вида (1) в области $D = \{(x,y): 0 < x < \ell, -h_1 < y < h\}$, когда старший член уравнения имеет вид $L_1 L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. В работе Т.Ы. Саадалова (2016) изучены краевые задачи для уравнения вида (1) в области $D=\{(x,y): 0<x<\ell, -h_1<y<h\}$, когда старшие члены уравнения имеют вид $L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_2 \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, y>0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, y<0. \end{cases}$

Прикладная важность исследования краевых задач для уравнений смешанного типа, а также многочисленные их применения указаны в работах М.А. Абдрахманова (1971), Ж.А. Акилова (1982), Г.М. Стручиной (1961), Дж. Уизема (1977), Я.С. Уфлянда (1964). Однако, краевые задачи для уравнений четвертого порядка с операторами вида (2) мало исследованы.

Диссертационная работа посвящена формулировке и исследованию корректности краевых задач и задачи сопряжений для уравнений вида (1), когда L_1 – смешанный параболо-гиперболический оператор:

$$L_1 \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + c_1(x,y), y>0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y), y<0, \end{cases}$$

а $L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ или $L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ или $L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Работа выполнена в соответствии с Государственной и целевой программы НТР «Межгосударственная целевая программа и НТР с участием Кыргызской Республики» на тему: «Локальные и нелокальные задачи для уравнений в частных производных четвертого порядка» (гос. регистр. №0007520, 01.01.2018 г.).

Цель и задачи исследования. Целью исследования является постановка и доказательство корректности краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Задачи исследования:

1. Доказательство существования и единственности решения задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;

2. Определения классов функций, обеспечивающие гладкость решения, а также выявления зависимости количество условий сопряжения от порядка уравнения;

3. Нахождения достаточных условий для однозначной разрешимости

задачи сопряжений;

4. Определения конфигурации области для корректной постановки краевых задач для уравнений в частных производных четвертого порядка.

Научная новизна работы:

1. Сформулированы условия корректности задач сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;

2. Получены формулы представления решений задачи сопряжения в явном виде для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;

3. Доказаны теоремы существования и единственности решений задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с линией склеивания $y=0$;

4. Разработан алгоритм решения задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Практическая значимость полученных результатов. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании явлений и процессов, протекающих в неоднородных, кусочно-однородных средах и при сосредоточенных факторах, а также вносит определённый вклад для развития теории краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Экономическая значимость полученных результатов. Разработанные математические методы решения краевых задач дают возможность аналитически решить задачи сопряжений для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка и реализуемы для получения численных расчётов, и тем самым снижаются расходы на исследование процессов, математические модели которых описываются такими уравнениями.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Формулировка условия корректности задач сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;

2. Исследование однозначной разрешимости задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;

3. Влияния конфигурации области и условия склеивания на корректности постановки задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;

4. Получение явного представления решений задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Апробация результатов исследований. Итоги работы и полученные результаты регулярно обсуждались:

1. на семинаре «Уравнения в частных производных» (г. Ош, ОшГУ, 2014-2022 гг.), руководитель – д.ф.-м.н., профессор А. Сопуев;

2. на региональном научном семинаре «Актуальные проблемы математики и их применения», руководитель – заслуженный деятель науки КР, член-корреспондент НАН КР, д.ф.-м.н., профессор К. Алымкулов (г. Ош, 2014-2021 гг.);

3. на семинаре по дифференциальным уравнениям, руководитель – д.ф.-м.н., профессор К.С. Алыбаев (г. Жалал-Абад, ЖАГУ. 2018-2022 гг.);

4. на семинаре "Классические и неклассические проблемы дифференциальных уравнений" – д.ф.-м.н., профессор Ю.П. Апаков (г. Наманган, Наманганский инженерно-строительный институт, 2021 года);

5. на международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (г. Ташкент, Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улукбека, 24-26 октября 2019 года);

6. на международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики» (г. Фергана, Ферганский государственный университет, 12-13 марта 2020 года);

7. на международной научной конференции «Проблемы современной математики и ее приложения», посвященная 70-летию академика Борубаева Алтая Асылкановича (г. Бишкек, Национальной академии наук Кыргызской Республики, 16-18 июня 2021 года);

8. на международной научной конференции "Актуальные проблемы теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений" 50-летию научно-педагогической деятельности и 75-летнему юбилею профессору Акылбека Керимбековича Керимбекова (г. Бишкек, КРСУ, 23-25 июня 2022 года);

9. региональном семинаре «Актуальные пролемы математики и их применения» имени К. Алымкулова (г. Ош, 2022 года.).

Личный вклад соискателя. В совместных работах [5] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а доказательство теоремы существования и единственности решения, приведенные примеры и полученные результаты принадлежат автору работы.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основное содержание настоящей работы полностью опубликовано в 9 статьях и 4 тезисах международных конференциях, приведенных в автореферате. Общее количество накопленных баллов – 170.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, состоящих из 13 разделов, списка использованных источников из 93 наименований и заключения. Нумерация разделов - двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер раздела. Нумерация теорем, формул, примеров - тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер раздела, третья на порядковый номер в разделе. Объем текста 118 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **ВВЕДЕНИИ** дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ» состоит из двух разделов.

В **разделе 1.1 «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ»** дается обзор литературы по теме диссертации. В данном разделе проведен анализ научных результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы.

В **разделе 1.2 «ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ»** приведен подробный обзор научных результатов диссертации. Изложены постановки задач и теоремы без доказательств.

В заключении первой главы отмечено, что на основании проведенных анализов диссертационное исследование актуально, своевременно и имеет определенный теоретический и практический интерес.

Вторая глава «МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» состоит из двух разделов.

В **разделе 2.1 «ОБЪЕКТЫ И ПРЕДМЕТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ»** приведены объекты и предметы исследования.

Объект исследования. Объектами исследования диссертационной работы являются постановка и исследование корректности краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка на плоскости.

Предметом исследования является построение решения задачи сопряжений при условиях, когда коэффициенты уравнений постоянные, коэффициенты уравнений переменные, область исследования содержит характеристическую линию:

- доказательство однозначной разрешимости задачи сопряжения для модельных смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;
- доказательство существования и единственности решения задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами при младших членах;
- отыскание решения задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами.

В **разделе 2.2 «МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ»** изложены используемые в данной диссертации метод понижения порядка уравнений, метод Римана, метод функции Грина, метод последовательных приближений, методы интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма.

В **третьей главе «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО** x» исследована существование и единственность решения краевых задач для уравнения четвертого порядка, когда параболо-гиперболический оператор применяется к обыкновенному дифференциальному оператору второго порядка по x.

В **разделе 3.1** в области D, ограниченная отрезками линий $AC: x+y=0,\ CB: x-y=\ell\ (\ell>0),\ BB_0: x=\ell,\quad B_0A_0: y=h(h>0),\quad A_0A: x=0$ (Рисунок 1) рассматривается уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \tag{3}$$

где $L_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}, y>0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, y<0, \end{cases}$, $L_2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Пусть $D_1 = D \cap (y>0),\ D_2 = D \cap (y<0)$. C^{n+m} означает класс функций, имеющие непрерывные все производные $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(r=0,1,...,n; s=0,1,...,m\right)$.

Отметим что уравнение (3) в области D_1 имеет четырехкратную действительную характеристику $y=const$, а в области D_2 имеет двукратную характеристику $y=const$ и две характеристику $x+y=const$, $x-y=const$.

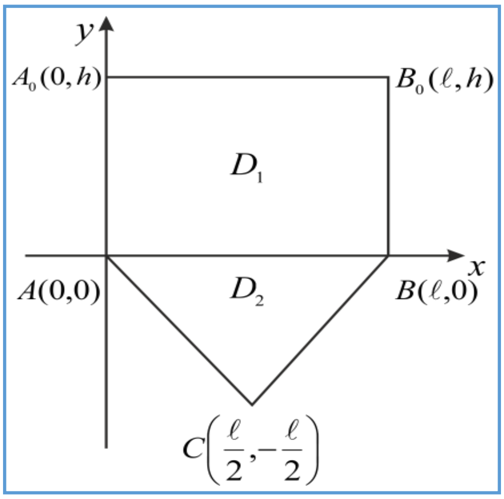

Рисунок 1. Рисунок области D

Задача 3.1.1. Требуется найти в области $D \setminus (y=0)$ решение уравнения (1), удовлетворяющая условиям:

$u, u_x, u_{xx} \in C\left(\overline{D}\right) \cap C_1\left(D\right) \cap$
$\cap \left[C^{2+1}\left(D_1\right) \cup C^{2+2}\left(D_2\right)\right];$

$$\begin{cases} u\big|_{x=0} = \varphi_1(y),\ u_x\big|_{x=0} = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h,\ u_{xx}\big|_{x=0} = \varphi_3(y), \\ u_{xx}\big|_{x=\ell} = \varphi_4(y),\ 0 \le y \le h,\ u\big|_{x=-y} = \psi_1(y),\ -\dfrac{\ell}{2} \le y \le 0, \\ u_x\big|_{x=-y} = \psi_2(y),\ u_{xx}\big|_{x=-y} = \psi_3(y),\ -\dfrac{\ell}{2} \le y \le 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $\varphi_i(y)(i=\overline{1,4}),\psi_i(y)(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{cases}\varphi_1(y),\,\varphi_2(y)\in C^2[0,h],\,\varphi_3(y),\,\varphi_4(y)\in C[0,h],\\ \psi_i(y)\in C^2\left[-\dfrac{\ell}{2},0\right](i=1,2),\,\psi_3(y)\in C^4\left[-\dfrac{\ell}{2},0\right];\end{cases} \tag{5}$$

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0),\,\varphi_2(0)=\psi_2(0),\,\varphi_3(0)=\psi_3(0). \tag{6}$$

Краевые задачи для уравнения $L_2L_1u=0$ изучены в работах Джураева Т.Д. (1986), Сопуева А. (1986), Мамажанова М. (1986), Асылбекова Т.Д. (2003), Саадалова Т.Ы. (2016) и других авторов.

Введя обозначение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\upsilon(x,y), \tag{7}$$

задачу 3.1.1 сведем к задаче Трикоми для уравнения $L_1\upsilon=0$ с краевыми условиями

$$\upsilon|_{x=0}=\varphi_3(y),\;\upsilon|_{x=\ell}=\varphi_4(y),\,0\le y\le h,\;\upsilon|_{x=-y}=\psi_3(y),\,-\frac{\ell}{2}\le y\le 0, \tag{8}$$

решение которого представимо в виде

$$\upsilon(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_4(\eta)d\eta+\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau''(\xi)d\xi,\;y>0,$$

$$\upsilon(x,y)=\tau''(x+y)-\psi_3\left(-\frac{x+y}{2}\right)+\psi_3\left(\frac{y-x}{2}\right),\;y<0,$$

где $G(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Интегрируя дважды по x в пределах от $-y$ до x, учитывая при этом граничные условия (8) из (7), получаем решение задачи 3.1.1 в виде:

$$u(x,y)=\varphi_1(y)+x\varphi_2(y)+\int_0^x(x-\xi)\upsilon(\xi,y)d\xi,\;(x,y)\in D_1, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\tau(x+y)+(x+y)[\psi_2(y)-\psi_2(0)]+\psi_1(y)-\psi_1(0)+\\&+\int_{-y}^x(x-\xi)\left[\psi_3\left(\frac{y-\xi}{2}\right)-\psi_3\left(-\frac{y+\xi}{2}\right)\right]d\xi,\;(x,y)\in D_2.\end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 3.1.1. Пусть выполняются условия (5), (6). Тогда решение задачи 3.1.1 существует, единственно и представимо по формулам (9) и (10).

В **разделе 3.2** в области D, указанной в разделе 3.1, для уравнения

$$L_1\,L_2\,u=0, \tag{11}$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + c_1(x,y), y > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y), y < 0, \end{cases}, \; L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

рассматривается следующая

Задача 3.2.1. Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса $u, u_x, u_{xx} \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^1(D) \cap \left[C^{2+1}(D_1) \cup C^{2+2}(D_2)\right]$, удовлетворяющая в области $D \setminus (y=0)$ уравнению (11) и следующим условиям:

$$\begin{aligned} &u\big|_{x=0} = \varphi_1(y),\, u_x\big|_{x=0} = \varphi_2(y),\, u_{xx}\big|_{x=0} = \varphi_3(y),\, u_{xx}\big|_{x=\ell} = \varphi_4(y),\, 0 \le y \le h, \\ &u\big|_{x=-y} = \psi_1(y),\, u_x\big|_{x=-y} = \psi_2(y),\, u_{xx}\big|_{x=-y} = \psi_3(y),\, -\frac{\ell}{2} \le y \le 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $a_2(x,y), b_2(x,y), c_i(x,y)(i=1,2)$, $\varphi_i(y)(i=\overline{1,4}), \psi_j(y)(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned} &a_2(x,y),\, a'_{2x}(x,y),\, b_2(x,y),\, b'_{2y}(x,y),\, c_2(x,y) \in C(D_2) \\ &c_1(x,y) \in C(D_1),\, \forall (x,y) \in \bar{D}_1 : \left|c_1(x,y)\right| \le 0; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^2[0,h],\, \varphi_3(y), \varphi_4(y) \in C[0,h], \\ &\psi_i(y) \in C^2\left[-\frac{\ell}{2}, 0\right](i=1,2),\, \psi_3(y) \in C^4\left[-\frac{\ell}{2}, 0\right]; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0),\; \varphi_2(0) = \psi_2(0),\; \varphi_3(0) = \psi_3(0). \tag{15}$$

Пусть $u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x), u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell$, где $\tau(x), \nu(x)$ – неизвестные функции. Введем новые функции $\upsilon_i(x,y)\;(i=1,2)$:

$$\begin{cases} u_{xx} = \upsilon_1(x,y),\, (x,y) \in D_1. \\ u_{xx} = \upsilon_2(x,y),\, (x,y) \in D_2. \end{cases} \tag{16}$$

Тогда задача 3.2.1 сводится к определению решение уравнения

$$0 = \begin{cases} \upsilon_{1xx} - \upsilon_{1y} + a_1(x,y)\upsilon_{1x} + c_2(x,y)\upsilon_1 = 0, (x,y) \in D_1, \\ \upsilon_{2xx} - \upsilon_{2yy} + a_2(x,y)\upsilon_{2x} + b_2(x,y)\upsilon_{2y} + c_2(x,y)\upsilon_2 = 0, (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{17}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon_1\big|_{x=0} = \varphi_3(y),\, \upsilon_1\big|_{x=\ell} = \varphi_4(y),\, 0 \le y \le h,\; \upsilon_2\big|_{x=-y} = \psi_3(y),\, -\frac{\ell}{2} \le y \le 0 \tag{18}$$

и условиям сопряжения

$$\upsilon_1(x,+0) = \upsilon_2(x,+0),\, \upsilon_{1y}(x,+0) = \upsilon_{2y}(x,+0),\, 0 \le x \le \ell. \tag{19}$$

Методом интегральных уравнений разрешимость задачи (17)-(19) сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода относительно $\nu_1(x) = \nu''(x)$:

$$v_1(x)=\int_0^{\ell} N(x,t)v_1(t)dt+g(x), \qquad (20)$$

где $N(x,t)$ и $g(x)$ известные функции, выражающиеся через данные задачи 3.2.1. Если выполняется условие

$$\|N\|\ell<1, \qquad (21)$$

где $\|N\|=\max\limits_{\substack{0\le x\le\ell\\0\le t\le\ell}}|N(x,t)|$, тогда уравнение (20) имеет единственное решение.

После определения $v_1(x)$, последовательно находим $\tau(x),\,\nu(x)$ и тем самым найдем решение задачи 3.2.1. Имеет место

Теорема 3.2.1. Если выполняются условия (13), (14), (15), (21), тогда задача 3.2.1 существует и имеет единственное решение.

В **разделе 3.3.** В области $D_1=\{(x,y):0<x<\ell,\,0<y<h\}$ рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c(x,y)\right)u=0, \qquad (22)$$

а $c(x,y)$ – заданная функция.

Задача 3.3.1. Требуется найти функцию $u(x,y)\in C^{2+0}\left(\overline{D_1}\right)\cap$ $\cap C^{2+1}(D_1)\cap C^{4+0}(D_1)$, удовлетворяющее в области D_1 уравнению (22), и условиям

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\tau(y),\ u(\ell,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h,\, u(x,0)=\psi(x),\, 0\le x\le\ell,\\ &u_{xx}(0,y)=\mu(y),\ u_{xx}(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h;\end{aligned} \qquad (23)$$

Пусть выполняется условие

$$\tau(y),\,\mu(y),\,\varphi_1(y),\,\varphi_2(y)\in C[0,h],\,c(x,y)\in C(D_1),\ \psi(x)\in C^2[0,\ell]; \qquad (24)$$

$$\tau(0)=\psi(0),\,\varphi_1(0)=\psi(\ell),\,\mu(0)=\psi''(0),\,\varphi_2(0)=\psi''(\ell). \qquad (25)$$

$$\forall(x,y)\in\overline{D_1}:c(x,y)\le 0. \qquad (26)$$

Методом понижения порядка уравнения и функции Грина найдем решение задачи (22)-(23).

Теорема 3.3.1. Если выполняются условия (24), (25) и (26), тогда решение задачи 3.3.1 существует и единственно в области D_1.

Пример 3.3.1. Найти решение задачи 3.3.1, если $c(x,y)=-\lambda^2\left(y+1\right)^2$, $\lambda\ne 0$. Заметим, что условие (26) выполняется. Функцию Грина построим в виде

$$G_2(x,\xi,y)=\begin{cases}\dfrac{sh\left[\lambda(y+1)x\right]sh\left[\lambda(y+1)(\xi-\ell)\right]}{\lambda(y+1)sh\left[\lambda(y+1)\ell\right]}, \; 0\le x\le \xi,\\ \dfrac{sh\left[\lambda(y+1)\xi\right]sh\left[\lambda(y+1)(x-\ell)\right]}{\lambda(y+1)sh\left[\lambda(y+1)\ell\right]}, \; \xi\le x\le \ell.\end{cases}$$

Тогда решение задачи 3.3.1 имеет вид

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\int_0^\ell G_2(x,\xi,y)f(\xi,y)d\xi,$$

где $u_0(x,y)=\dfrac{\ell-x}{\ell}\tau(y)+\dfrac{x}{\ell}\varphi_1(y),\; f(x,y)=\upsilon(x,y)-\lambda^2(y+1)^2u_0(x,y)$,

$$\upsilon(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\chi_1(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\chi_2(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^\ell G_\xi(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi,\; \psi_1(x)=\psi''(x)-\lambda^2\psi(x),$$

$$\chi_1(y)=\mu(y)-\lambda^2(y+1)^2\tau(y),\; \chi_2(y)=\varphi_2(y)-\lambda^2(y+1)^2\varphi_1(y).$$

В **четвертой главе «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО** y» исследована существование и единственность решения краевых задач для уравнения четвертого порядка, когда параболо-гиперболический оператор применяется к обыкновенному дифференциальному оператору второго порядка по y.

В **разделе 4.1** в области D, указанной в разделе 3.1, рассмотрим уравнения

$$0=\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \;(x,y)\in D_1,\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \;(x,y)\in D_2,\end{cases} \tag{27}$$

и изучим следующую задачу.

Задача 4.1.1. Найти в области D функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})$, удовлетворяющее уравнению (27) и краевым условиям

$$\begin{cases} u(0,y)=\varphi_1(y),\; u(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h, u|_{AC}=\psi_1(x), 0\le x\le \dfrac{\ell}{2},\\ u|_{BC}=\psi_2(x), \dfrac{\ell}{2}\le x\le \ell,\; \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_3(x), 0\le x\le \dfrac{\ell}{2},\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_4(x), \dfrac{\ell}{2}\le x\le \ell,\; \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{AC}=\psi_5(x),\; 0\le x\le \dfrac{\ell}{2},\end{cases} \tag{28}$$

где $\phi_i(x)(i=1,2), \psi_j(x)(j=\overline{1,5})$ – заданные гладкие функции, n – внутренняя нормаль, условиям склеивания

$$\begin{cases} u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \\ u_{yy}(x,-0)=u_{yy}(x,+0),\ u_{yyy}(x,-0)=u_{yyy}(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \end{cases} \tag{29}$$

условиям гладкости и согласования

$$\begin{cases} \varphi_i(y)\in C^2\left[0,h\right]\left(i=1,2\right),\ \psi_j(x)\in C^3\left[0,\frac{\ell}{2}\right]\left(j=1,3\right), \\ \psi_5(x)\in C^2\left[0,\frac{\ell}{2}\right], \psi_k(x)\in C^3\left[\frac{\ell}{2},0\right], k=2,3 \\ \varphi_1(0)=\psi_1(0), \varphi_2(0)=\psi_2(\ell), \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right)=\psi_2\left(\frac{\ell}{2}\right), \psi_3\left(\frac{\ell}{2}\right)=\psi_4\left(\frac{\ell}{2}\right) \end{cases} \tag{30}$$

Методами понижения порядка, общих решений и функции Грина доказана

Теорема 4.1.1. Если выполняются условия (30), тогда решение задачи 4.1.1 существует и единственно.

В **разделе 4.2** в области D, описанной в разделе 3.1, рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}+c_1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, (x,y)\in D_1, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, (x,y)\in D_2, \end{cases} \tag{31}$$

где $c_1, c_2 = const.$

Задача 4.2.1. Найти в области D функцию $u\left(x,y\right)\in C(\overline{D})\cap$ $\cap C^3(\overline{D})\cap [C^{2+2}(D_1)\cup C^{2+4}(D_2)]$, удовлетворяющее уравнению (31) и условиям (28), а также условиям гладкости и согласования

$$\begin{aligned} &\varphi_i(y)\in C^2\left[0,h\right](i=1,2),\ \psi_j(x)\in C^3\left[0,\frac{\ell}{2}\right](j=1,3), \\ &\psi_5(x)\in C^2\left[0,\frac{\ell}{2}\right],\ \psi_k(x)\in C^3\left[\frac{\ell}{2},0\right](k=2,4), \\ &\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_2(0)=\psi_2(\ell), \end{aligned} \tag{32}$$

Из постановки задачи 4.2.1 вытекает условия склеивания вида (28). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ u_{yy}(x,0)=\mu(x), \\ &u_{yyy}(x,0)=\theta(x),\ 0\le x\le \ell, \end{aligned} \tag{33}$$

где $\tau(x), \nu(x), \mu(x), \theta(x)$ – неизвестные функции.

Используя метод понижения порядка уравнений и метод функции Римана, разрешимость задачи 4.2.1 эквивалентным образом сведем к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции $\theta(x)$:

$$\theta(x)=\Phi(x)+\int_0^\ell K(x,\xi)\theta(\xi)d\xi, \tag{34}$$

где $K(x,\xi), \Phi(x)$ – заданные функции, выражающиеся через данные задачи 4.2.1.

При выполнении условия

$$\ell\|K\|_{C(\bar{Q})}<1, \tag{35}$$

где $\|K\|_{C(\bar{Q})}=\max\limits_{(x,\xi)\in\bar{Q}}|K(x,\xi)|$, $Q=\{(x,\xi):0\le x\le\ell, 0\le\xi\le\ell\}$, уравнение (34) имеет единственное решение. После определения $\theta(x)$, удается определить $\tau(x), \nu(x), \mu(x)$ и тем самым построим решение задачи 4.2.1.

Теорема 4.2.1. Пусть выполняются условия (32) и (35**.** Тогда решение задачи 4.2.1 существует и единственно.

В **разделе 4.3** в области D, описанной в разделе 3.1, рассмотрим уравнение

$$L_1L_2u=0, \tag{36}$$

где

$$L_1=\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}+a_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+c_1(x,y),\ y>0,\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}+c_2(x,y),\ y<0,\end{cases} \qquad L_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$a_i(x,y),\ c_i(x,y)(i=1,2), b_2(x,y)$ – заданные гладкие функции.

Задача 4.3.1. Требуется определить функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ является решением уравнения (4.3.1) в области $D\setminus(y=0)$;

2) $u(x,y)\in C^1(\overline{D}), u_{yy}(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap\left[C^{2+1}(D_1)\cup C^2(D_2)\right]$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ u|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,\ u|_{AC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le\frac{\ell}{2},\ u|_{BC}=\psi_2(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell$$

$$,\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_3(x),\ 0\le x\le\frac{\ell}{2},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_4(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell,\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC}=\psi_5(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell,$$

где $\varphi_i(y)\ (i=1,2), \psi_j(x)\ (j=\overline{1,5})$ – заданные гладкие функции, n – внутренняя нормаль, причем

$$\forall (x,y)\in \bar{D}_1 :\ c_1(x,y)-\frac{1}{2}a_{1x}(x,y)\le 0,$$

$$\varphi_i(y)\in C^1\left[0,h\right]\ (i=1,2),\ \psi_j(x)\in C^3\left[0,\frac{\ell}{2}\right]\ (j=1,3),$$

$$\psi_k(x)\in C^3\left[\frac{\ell}{2},\ell\right]\ (k=2,4),\ \psi_5(x)\in C^2\left[\frac{\ell}{2},\ell\right], \tag{37}$$

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_2(0)=\psi_2(\ell),\ \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right)=\psi_2\left(\frac{\ell}{2}\right),$$

$$-\psi_1'\left(\frac{\ell}{2}\right)+\sqrt{2}\psi_3\left(\frac{\ell}{2}\right)=\psi_2'\left(\frac{\ell}{2}\right)+\sqrt{2}\psi_4\left(\frac{\ell}{2}\right).$$

Методом интегральных уравнений, как и в задаче 4.2.1, разрешимость задачи 4.3.1 эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно $\theta(x)$, которая при выполнении условия

$$\ell\cdot\max_{0\le x,t\le \ell}\left|K(x,t)\right|<1 \tag{38}$$

имеет единственное решение.

Теорема 4.3.1. Если выполняются условия (37) и (38), тогда решение задачи 4.3.1 существует и единственно.

В **пятой главе «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ»** исследована существование и единственность решения краевых задач для уравнения четвертого порядка, когда параболо-гиперболический оператор применяется к дифференциальному оператору $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

В **разделе 5.1** в области D рассмотрена краевая задача 5.1.1 для уравнения

$$L_1 L_2 u=0,$$

где

$$L_1\equiv\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}+c_1,\ y>0,\\[2mm] \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+c_2,\ y<0,\end{cases}\qquad L_2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ c_i\equiv const\ (i=1,2).$$

Задача 5.1.1. Требуется определить функцию $u(x,y)$, которая обладает следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ является решением уравнения (5.1.1) в области $D\setminus(y=0)$;

2) $u(x,y)$ и ее производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$;

3) $\Box u=u_{xx}-u_{yy}$ непрерывна в области $\bar{D}$;

4) $\dfrac{\partial \Box u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \Box u}{\partial y}$ непрерывны в области $\bar{D}$;

5) $u(x,y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ u|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,,$$

$$u_{xx}|_{AA_0}=\varphi_3(y),\ u_{xx}|_{BB_0}=\varphi_4(y),\ 0\le y\le h,$$

$$u|_{AC}=\psi_1(x), 0\le x\le \frac{\ell}{2}, \quad u|_{BC}=\psi_2(x), \frac{\ell}{2}\le x\le \ell,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3(x), \frac{\ell}{2}\le x\le \ell,$$

где $\varphi_i(y)\ (i=\overline{1,4}, \psi_j(j=\overline{1,3})$ – заданные гладкие функции, n – внутренняя нормаль.

В **разделе 5.2** в области D рассматривается уравнение

$$L_1 L_2 u = 0 \tag{39}$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}+c_1(x,y), \ \ y>0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}+c_2(x,y), \ \ y<0, \end{cases} \qquad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $a_2(x,y), b_2(x,y), c_i(x,y)\ (i=1,2)$ – заданные функции, причем

$$\begin{aligned} &\forall (x,y)\in \bar{D}_1 : c_1(x,y)\le 0, c_1(x,y)\in C(\bar{D}_1); \\ &\forall (x,y)\in \bar{D}_2 : a_2(x,y), a_{2x}(x,y), b_2(x,y), b_{2y}(x,y), c_2(x,y)\in C(\bar{D}_2). \end{aligned} \tag{40}$$

Задача 5.2.1. Найти в области $D\backslash(y=0)$ решение уравнения (39), удовлетворяющее условиям:

1) $u, u_x, u_y \in C(\bar{D}), \Box u, \dfrac{\partial \Box u}{\partial x}, \dfrac{\partial \Box u}{\partial y}\in C(\bar{D}), \ \ \Box u \equiv u_{xx}-u_{yy}$;

2) $u|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ u|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$

$$\begin{aligned} &u_{xx}|_{AA_0}=\varphi_3(y),\ u_{xx}|_{BB_0}=\varphi_4(y),\ 0\le y\le h, u|_{AC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le \frac{\ell}{2}, \\ &u|_{BC}=\psi_2(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le \ell,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le \ell, \end{aligned} \tag{41}$$

где n – внутренняя нормаль, $\varphi_i(y)\ (i=\overline{1,4},\ \psi_j(x)\ (j=\overline{1,3})$ – заданные функции, причем

$$\begin{gathered}\varphi_i(y)\in C^2[0,h]\,(i=1,2),\ \varphi_j(y)\in C[0,h]\ (j=3,4),\\ \psi_1(x)\in C^2\left[0,\frac{\ell}{2}\right],\ \psi_2(x)\in C^2\left[\frac{\ell}{2},\ell\right],\ \psi_3(x)\in C^3\left[\frac{\ell}{2},\ell\right];\\ \varphi_4(0)-\varphi_2''(0)=-\sqrt{2}\psi_3'(\ell),\\ \varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_2(0)=\psi_2(\ell),\ \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right)=\psi_2\left(\frac{\ell}{2}\right).\end{gathered}\tag{42}$$

Введем обозначение: $\square u=\upsilon_i(x,y),(x,y)\in D_i\ (i=1,2),$ где $\upsilon_i(x,y)$ – решение уравнения

$$0=\begin{cases}\upsilon_{1xx}-\upsilon_{1y}+c_1(x,y)\upsilon_1,(x,y)\in D_1,\\ \upsilon_{2xx}-\upsilon_{2yy}+a_2(x,y)\upsilon_{2x}+b_2(x,y)\upsilon_{2y}+c_2(x,y)\upsilon_2,(x,y)\in D_2.\end{cases}\tag{43}$$

Из постановки задачи 5.2.1 получаем следующие условия склеивании

$$\upsilon_1(x,+0)=\upsilon_2(x,+0)=\mu(x),\ \upsilon_{1y}(x,+0)=\upsilon_{2y}(x,+0)=\theta(x),\ 0\le x\le\ell,$$

где $\mu(x),\theta(x)$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

Используя последнее условие (41), из решения задачи Коши имеем соотношение

$$\mu(x)=\Phi(x)+\int_x^{\ell}T(x,\xi)\theta(\xi)d\xi,\tag{44}$$

где $\Phi(x)$, $T(x,\xi)$ – известные функции. С другой стороны, в области D_1 имеем соотношение

$$\mu(x)=g(x)+\int_x^{\ell}G_1(x,\xi)\theta(\xi)d\xi,\tag{45}$$

где $G_1(x,\xi)$ – функция Грина, а $g(x)$ – известная функция. Исключая $\mu(x)$ из (42) и (43), придем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\theta(x)=g(x)+\int_0^{\ell}N(x,t)\theta(t)d\xi,\tag{46}$$

где $N(x,t)$, $g(x)$ – заданные функции, выражающиеся через данные задачи 5.2.1. Если

$$\ell\cdot\|N\|<1,\tag{47}$$

тогда уравнение (44) имеет единственное решение.

Теорема 5.2.5. Если выполняются условия (40), (42) и (47), тогда решение задачи 5.2.1 существует и единственно.

В **разделе 5.3** рассматривается уравнение 4-го порядка вида

$$L_1L_2u=0\tag{48}$$

где

$$L_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + a_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + c_1(x,y), \ y > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y), \ y < 0, \end{cases} \qquad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$a_1(x,y), a_2(x,y), b_2(x,y), c_i(x,y)\,(i=1,2)$ – заданные функции, причем

$$\begin{aligned} &\forall (x,y) \in \bar{D}_1 : a_1(x,y), a_{1x}(x,y), a_{2y}(x,y), c_1(x,y) \in C(\bar{D}_1), c_1(x,y) \le 0, \\ &\forall (x,y) \in \bar{D}_2 : a_2(x,y), a_{2x}(x,y), b_2(x,y), b_{2y}(x,y), c_2(x,y) \in C(\bar{D}_2). \end{aligned} \tag{49}$$

и исследована задача 5.3.1, которая отличается от задачи 4.3.1, тем, что вместо непрерывных условий склеивания, рассматривается следующие условия:

$$\mu_2(x) = \alpha(x)\mu_1(x) + \gamma(x), \theta_2(x) = \beta(x)\theta_1(x) + \delta(x), 0 \le x \le \ell,$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ – заданные функции, причем $\mu_1(x) = \square u(x,+0)$,

$$\mu_2(x) = \square u(x,-0), \ \theta_1(x) = \frac{\partial \square u(x,+0)}{\partial y}, \theta_2(x) = \frac{\partial \square u(x,-0)}{\partial y}, \ 0 \le x \le \ell,$$

$$\forall (x,y) \in \bar{D}_1 : c_1(x,y) - \frac{1}{2}a_1(x,y) \le 0,$$

$$\varphi_i(y) \in C^2[0,h]\,(i=1,2), \ \varphi_j(y) \in C[0,h]\,(j=3,4),$$

$$\psi_1(x) \in C^2\left[0,\frac{\ell}{2}\right], \psi_2(x) \in C^2\left[\frac{\ell}{2},\ell\right], \psi_3(x) \in C^3\left[\frac{\ell}{2},\ell\right];$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \ \varphi_2(0) = \psi_2(\ell), \ \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{\ell}{2}\right),$$

$$\alpha(\ell)\left[\varphi_4(0) - \varphi_2''(0)\right] + \gamma(\ell) = -\sqrt{2}\psi_3'(\ell).$$

Разрешимость задачи 5.3.1, как и в задаче 3.2.1, устанавливается методом интегральных уравнений.

ВЫВОДЫ

В данной диссертационной работе сформулированы и исследованы существование и единственности решения задачи сопряжения для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка как с постоянными, так и с переменными младшими коэффициентами.

В работе методом понижении порядка уравнения разрешимость задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В гиперболической части области для получения решения используется метод функций Римана, а в параболической части области – метод функции Грина и метод последовательных приближений.

В ходе исследования выявлено, что для однозначной разрешимости рассматриваемых задач условия сопряжения должны задаваться на линии изменения типа уравнений, причем потребуется выполнение в одном случае три, а в другом - задания двух условий сопряжения. Приведены примеры решения задачи сопряжения.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Полученные результаты, могут быть использованы для развития теории краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка, а также при моделировании явлений и процессов, протекающих в неоднородных, кусочно-однородных средах и при сосредоточенных факторах.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Абдумиталип уулу, К.** Краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа четвертого порядка [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Вестник ОшГУ. – Том 1. – № 1. – Ош, 2020. – С. 81-87. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43068366

2. **Абдумиталип уулу, К.** Краевая задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа четвертого порядка с постоянными коэффициентами [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2020. – № 3. – С.3-9. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45543579

3. **Абдумиталип уулу, К.** Краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Вестник ОшГУ. – Том 1. – № 1. – Ош, 2021. – С. 21-32. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46561744

4. **Абдумиталип уулу, К.** Краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором колебания струны [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Вестник ОшГУ. – Том 3. – № 1. – Ош, 2021. – С. 10-18. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47406379

5. **Абдумиталип уулу, К.** Краевая задача для уравнения четвертого порядка параболического типа [Текст] / Т.Д. Асылбеков, К. Абдумиталип уулу // Вестник ОшГУ. – № 1. – Ош, 2022. – С. 12-19. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48614382

6. **Абдумиталип уулу, К.** Краевые задачи для уравнения четвертого порядка, содержащий параболо-гиперболический оператор [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Вестник ОшГУ. – № 1. – Ош, 2022. – С. 20-28. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48614383

7. **Абдумиталип уулу, К.** Краевые задачи для уравнения четвертого порядка с параболо-гиперболическим оператором [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2022. – № 4. – С. 3-12. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49516410

8. **Абдумиталип уулу, К.** Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными условиями склеивания [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Бюллетень науки и практики. – Нижневартовск, 2022. – Т. 8. – №11. – С. 12-23. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49814061

9. **Абдумиталип уулу, К.** Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с младшими членами [Текст] / К. Абдумиталип уулу // Вестник КРСУ. – Бишкек, 2022. – Т. 22. – №12. – С. 3-11. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50199509

Абдумиталип уулу Кубатбектин “Төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелер” деген темада 01.01.02 – дифференциалык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: чек аралык маселе, чек аралык шарттар, жалгаштыруу маселелери, аралаш парабола-гиперболикалык теңдемелер, Гриндин жана Римандын функциялары, интегралдык тендеме, чечимдин жалгыздыгы, чечимдин жашашы.

Изилдөөнүн объектиси: төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелер.

Изилдөөнүн предмети: төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболикалык тендемелер үчүн чек аралык маселелеринин корректтүүлүгү.

Изилдөөнүн максаты: Төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелеринин бир маанилүү чечимге ээ болушунун жеткиликтүү шарттарын аныктоо.

Изилдөө методдору: математикалык физиканын теңдемелери, аралаш типтеги тендемелер, функционалдык анализ жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер теорияларынын методдору, Гриндин жана Римандын функциялары колдонулат.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү:

- төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболикалык теңдемелер

үчүн коюлган чек аралык маселелердин корректүүлүк шарттары аныкталган;

- төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелердин чечимдеринин жашашынын жана жалгыздыгынын жеткиликтүү шарттары табылган;
- төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелердин бир маанилүү чечилиши далилденген;
- төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболикалык теңдемелер үчүн Римандын функциясы тургузулган.

Алынган теориялык жыйынтыктар аралаш парабола-гиперболикалык чек аралык маселелер теориясындагы жаңы жыйынтыктар болуп эсептелет.

Изилдөөнүн практикалык маанилүүлүгү. Маселерди чечүүнүн иштеп чыгылган алгоритми аралаш парабола-гиперболикалык тендемелердин чек аралык маселелери менен байланышкан практикалык маселелерди чечүүдө колдонсо болот.

РЕЗЮМЕ

диссертации Абдумиталип уулу Кубатбека на тему: “Краевые задачи для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: краевые задачи, граничные условия, задачи сопряжения, параболо-гиперболические уравнения, функции Грина и Римана, интегральное уравнение, единственность решения, существование решения.

Объект исследования: краевые задачи для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Предмет исследования: корректность краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Цель исследования: установление достаточных условий однозначной разрешимости краевой задачи сопряжений для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Методы исследования: используются методы теории уравнений математической физики, уравнений смешанного типа, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений, функции Грина и Римана.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования:

- сформулированы корректность постановки краевых задач и задачи сопряжений для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого

порядка;

- найдены достаточные условия существования и единственности решений краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;
- доказаны однозначные разрешимости краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка;
- построены функции Римана для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Полученные теоретические результаты являются новыми в теории смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

Практическая значимость полученных результатов. Разработанный алгоритм построения решения может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с краевых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка.

SUMMARY

Dissertation "Boundary value problems for mixed fourth order parabolo-hyperbolic equations" of Abdumitalip uulu Kubatbek is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: boundary value problems, boundary conditions, conjugation problems, parabolo-hyperbolic equations, Green's and Riemann's functions, integral equation, uniqueness of a solution, existence of a solution.

Object of research: boundary value problems for mixed fourth-order parabolo-hyperbolic equations.

Subject of research: well-posedness of boundary value problems for mixed fourth-order parabolo-hyperbolic equations.

The purpose of the study: establishing of sufficient conditions for the unique solvability of the boundary value problem of conjugations for mixed fourth-order parabolo-hyperbolic equations.

Research methods: methods of the theory of equations of mathematical physics, equations of mixed type, functional analysis and the theory of nonlinear integral equations, Green's and Riemann's functions are used.

Scientific novelty and theoretical significance of the research:

• the correctness of the formulation of boundary value problems and the problem of conjugations for mixed parabolo-hyperbolic equations of the fourth order was formulated;

• sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions to boundary

value problems for mixed fourth-order parabolo-hyperbolic equations were found;

• unique solvability of boundary value problems for mixed fourth-order parabolo-hyperbolic equations was proved;

• Riemann functions are constructed for mixed parabolo-hyperbolic equations of the fourth order.

The theoretical results obtained are new in the theory of mixed fourth-order parabolo-hyperbolic equations.

Practical significance of the results obtained. The developed algorithm for constructing a solution can be used in applications for solving practical problems related to boundary value problems for mixed fourth-order parabolo-hyperbolic equations.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Сокращенные обозначения

- R *– множество действительных чисел;*
- $\forall$ *– "для всех ... ";*
- $\cap$ *– операция пересечения множеств;*
- $\subset$ *– знак принадлежности включения;*
- $\in$ *– знак принадлежности;*
- $=$ *– знак равенства;*
- $\neq$ *– знак неравенства;*
- $\equiv$ *– знак тождественного равенства;*
- D $(\bar{D})$ *– открытая (замкнутая) ограниченная односвязная область;*
- $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ *– замкнутые подобласти области* $\bar{D}$ *;*
- $C^{(n)}(D)$ *– класс функций, определенных и непрерывно дифференцируемых до порядка* n *включительно в области* D*;*
- $C^{n+m}(D)$ – класс функций, имеющие непрерывные все производные $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(r = 0,1,...,n; s = 0,1,...,m\right)$ *в области* D*;*
- $\|K\|_{C(\bar{Q})} = \max\limits_{(x,\xi)\in\bar{Q}} |K(x,\xi)|$.

Подписано к печати: 25.01.2023 г.
Формат 60х84 1х16.
Объем: 1,5 п.ф. Тираж 100 шт.

Редакционно-издательский отдел «Билим» ОшГУ
г. Ош. ул. Ленина, 331.