Ош мамлекеттик университети

Жалал-Абад мамлекеттик университети

Диссертациялык кеңеш Д 05.22.651

Кол жазманын укугунда
УДК 517.928.2

Омаралиева Гулбайра Абдималиковна

Үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасы

01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

Физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациянын
АВТОРЕФЕРАТЫ

Ош – 2023

Диссертациялык иш Ош мамлекеттик университетинин математикалык анализ кафедрасында аткарылган

Илимий жетекчи: **Турсунов Дилмурат Абдиллажанович**, физика-математика илимдердин доктору, профессор, Ош мамлекеттик университетинин Эл аралык билим берүү программаларынын жогорку мектебинин директору

Расмий оппоненттер: **Искандаров Самандар**, физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институтунун интегро-дифференциалдык теңдемелер теориясы лабораториясынын башчысы

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Ош технологиялык университетинин колдонмо математика кафедрасынын башчысы

Жетектөөчү мекеме: Фергана мамлекеттик университетинин математикалык анализ жана дифференциалдык теңдемелер кафедрасы, Дареги: 112000, Өзбекистан, Фергана ш., Мураббийлар к., 19.

Диссертацияны коргоосу 2023-жылдын 29- ноябрь күнү саат 14^{00} дө Ош мамлекеттик университетине жана Жалал-Абад мамлекеттик университетине караштуу физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын коргоо боюнча түзүлгөн Д 05.22.651 диссертациялык кеңештин жыйынында корголот. Дареги: Кыргызстан, 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331, ауд. 203.

Диссертацияны коргоонун онлайн трансляциялоо коду: https://vc.vak.kg/b/052-pvt-luj-9ih.

Диссертация менен Ош мамлекеттик университетинин (Ош шаары, Ленин көчөсү, 331) жана Б. Осмонов атындагы Жалал-Абад мамлекеттик университетинин (Жалал-Абад ш., Ленин көчөсү, 57) китепканаларынан жана Кыргыз Республикасынын Президентине караштуу Улуттук аттестациялык комиссиянын сайтынан https://vak.kg/d_05_22_651/99335/ таанышууга болот.

Автореферат 2023- жылдын 20- октябрында жөнөтүлдү.

Диссертациялык кеңештин окумуштуу катчысы
ф.-м.и.к., доцент Бекешов Т.О.

ИШТИН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. XIX-кылымдын аягында суюктуктун кыймылы жөнүндөгү илим дээрлик бири-бирине байланышпаган эки тармакка бөлүндү: суюктуктун сүрүлүүсүз кыймылы үчүн Эйлер түзгөн теңдемелерден келип чыккан теориялык гидродинамика жана эксперименталдык натыйжалардын саны, методдору, максаты боюнча теориялык гидродинамикадан абдан айырмаланган чоң көлөмгө таянган эксперименталдык гидродинамика[1].

Мурда изилденген көптөгөн сингулярдык козголгон маселелерде, мисалы, А.Н. Тихоновдун (1952), А. Найфенин (1984), С.А. Ломовдун (1984), А.Б. Васильеванын (1985), В.Ф. Бутузовдун (2010), Н.Н. Нефедовдун (2022), М. Иманалиевдин(1988), А.М. Ильиндин (1989), К. Алымкуловдун (1992), А.С. Омуралиевдин (2009), К.С. Алыбаевдин (2001) ж.б. жумуштарында чек ара катмарынын аймагында бир гана мүнөздүү предел болгон. Диссертацияда алгачкы жолу чек ара катмарында эки мүнөздүү предел болгон учур изилденет. Ошондуктан жыйынтыктоочу ажыралма тышкы ажыралмадан сырткары эки ички ажыралманы камтыйт. Бул ажыралмалардын ар биринин жарактуу аймактары адатта зоналар деп аталат, ал эми маселенин өзү бул учурда үч зоналуу маселе деп аталат[2].

Диссертациялык иш үч зоналуу бисингулярдык маселелердин – өзгөчө чекитке жана аралык чек ара катмарына ээ сингулярдык козголгон маселелердин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузууга арналган. Кошинин жана Дирихленин үч зоналуу бисингулярдык маселелеринин толук, бир калыптагы асимптотикалык чыгарылыштары жалпыланган чек ара функцияларынын методу менен тургузулат, анткени А.Б. Васильеванын[3] классикалык чек ара функциялар методун түздөн-түз колдонууга болбойт.

Автор изилдеген үч зоналуу бисингулярдык маселелер мурда изилденген эмес.

Диссертациянын темасынын ири илимий программалар (долбоорлор) жана негизги илим изилдөө жумуштар менен байланышы. Жумуш Ош МУнун алдындагы фундаменталдык жана колдонмо изилдөөлөр Институтунда «Фазалык өтүү маселелери жана критикалык кубулуштар. Алардын теңдемелеринин математикалык аспектилери, ылдам өтүү жана асимптотикалар» аталыштагы илимий проекттин алкагында аткарылган. Илимий проект Кыргыз

---

[1] Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.

[2] Найфе А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.

[3] Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. − Москва: Высшая школа. – 1990. – 208 с.

Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги тарабынан каржыланган, 2019- ж.

Изилдөөнүн максаты жана милдеттери. Изилдөөнүн максаты – биринчи жана экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу.

Изилдөө милдеттери:

1) Биринчи жана экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык маселелердин бир классы үчүн аралык чек ара катмарынын жашашынын жетиштүү жана зарыл шарттарын табуу.

2) Баштапкы жана чектик үч зоналуу маселелердин чыгарылыштарынын толук бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу жана бул ажыралмаларды негиздөө.

Иштин илимий жаңылыгы. Алгачкы жолу диссертациялык жумушта:

- биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык Кошинин маселелеринин бир классы үчүн экспоненциалдык эмес кемүүчү аралык чек ара катмарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары табылды;

- үч зоналуу бисингулярдык биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн Кошинин маселелеринин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулду жана негизделди;

- экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык Дирихленин маселелеринин бир классы үчүн экспоненциалдык эмес кемүүчү аралык чек ара катмарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары табылды;

- үч зоналуу бисингулярдык экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн Дирихленин маселелеринин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулду жана негизделди.

Алынган жыйынтыктардын практикалык маанилүүлүгү. Диссертациялык иште изилденген маселелер теориялык жана практикалык жактан кызыктуу, анткени биринчи даражадагы кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу Коши маселеси жана экинчи даражадагы кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу Дирихле маселеси колдонулушунун көптүгү жана ар түрдүүлүгү боюнча математикада өзгөчө орунду ээлейт.

Чек ара катмарынын теориясындагы практикалык маселелерди чыгарууда кичинекей параметрдин даражалары боюнча ар кандай

тартиптеги тактык менен мындай маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык жакындаштырууларын тургузуу абдан маанилүү.

Диссертациянын коргоого коюлуучу негизги жоболору

- биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык Кошинин маселелеринин бир классы үчүн экспоненциалдык эмес кемүүчү аралык чек ара катмарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары;
- биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык Кошинин маселелеринин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу;
- биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык Кошинин маселелеринин чыгарылыштары үчүн тургузулган бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларды негиздөө;
- экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык Дирихленин маселелеринин бир классы үчүн экспоненциалдык эмес кемүүчү аралык чек ара катмарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары;
- экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык Дирихленин маселелеринин чыгарылыштары үчүн тургузулган бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларды негиздөө

Изденүүчүнүн жеке салымы. Диссертацияда чагылдырылган бардык илимий жыйынтыктар авторго гана таандык. Биргелешкен [2], [3] жана [7] жумуштарда маселенин коюлушу илимий жетекчиге, илимий натыйжалар жана теоремалардын далилдөөсү изденүүчү Г.А. Омаралиевага, ал эми жыйнтыктардын талкуусуна К.Г. Кожобеков, М.И. Маматбуваева, Ш.А. Раманкулова жана Муса уулу Н.Э. катышкан.

Изилдөөнүн натыйжаларын апробациялоо. Жумуштун жыйынтыктары төмөнкү Эл аралык конференцияларда баяндалган жана талкууланган:

- А. Самойленконун туулган күнүнүн 80 жылдыгына арналган «Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8» конференция. – Чолпон-Ата, 2018-ж.;
- академик А.А. Бөрүбаевдин 70 жылдыгына арналган “Заманбап математиканын маселелери жана анын колдонулуштары”. – Бишкек: КР УИА математика институту,16-19 июнь 2021-ж.;
- профессор А.К.Керимбековдун 75 жылдыгына жана илимий-педагогикалык ишмердүүлүгүнүн 50 жылдыгына арналган «Оптималдуу башкаруу, динамикалык системалар жана оператордук теңдемелер теорияларынын актуалдуу маселелери» (Бишкек, КРСУ, 23-25-июнь, 2022-ж.).

Төмөнкү илимий семинарлар баяндалган жана талкууланган:

- “Дифференциалдык теңдемелердин актуалдуу маселелери”. Семинардын жетекчилери: ф.-м.и.д. профессор, КР УИАнын корреспондент-мүчөсү К. Алымкулов жана ф.-м.и.д., профессор К.С. Алыбаев (Ош ш., 2018-2023-жж.);

- “Математикалык физиканын заманбап көйгөйлөрү” семинардын жетекчиси академик Ш.А. Алимов (Өзбекистан Республикасынын илимдер академиясына караштуу В.И. Романовский атындагы математика Институту).

Диссертациянын натыйжаларынын басылып чыгарылышы. Изилдөөлөрдүн натыйжасында изденүүчү тарабынан: 7 макала [1]-[7] жана 2 докладдардын тезиси [8]-[9] жарыкка чыгарылган. Анын ичинде [2], [3] макалалар Scopus жана Web of Science базаларында индексирленген журналдарда жарыкка чыккан. [6]- макала RSCI базасында индексирленген журналда жарыкка чыккан. Бардык макалалар импакт фактору нөл эмес журналдарда жарыкка чыккан. [1]-[3], [6] макалалар жарыкка чыккан журналдардын РИНЦтеги импакт фактору 0,1 ден жогору. Жарыкка чыгарылган макалалар боюнча 215 балл топтогон.

Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү. Жумуш мазмундан, шарттуу белгилөөлөрдүн тизмесинен, киришүү жана 10 параграфга бөлүнгөн төрт баптан, жыйынтыктардан, 81 колдонулган адабияттардын тизмесинен турат. Ар бир бап аягында корутунду менен аякталат. Диссертациянын жалпы көлөмү машина жазмасында терилген 101 бет.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

Киришүүдө теманын актуалдуулугу негизделген, жумушка жалпы мүнөздөмө, изилдөөнүн максаты жана маселеси, илимий жаңылыгы, практикалык балуулугу, коргоого алынып чыгарылган негизги баяндамасы берилген.

1- бап «АДАБИЯТТАРГА ТАЛДОО» эки параграфтан турат. «§1.1. Сингулярдык козголгон маселелер боюнча талдоо» жана «§ 1.2. Бисингулярдык маселелер боюнча талдоо» параграфтарда диссертациянын темасына жакын сингулярдык козголгон жана бисингулярдык маселелер боюнча талдоо келтирилген. Эки параграфта диссертациялык иштин темасына эң жакын башка авторлордун эмгектеринин илимий натыйжаларына талдоо жүргүзүлөт. Биринчи баптын корутундусунда, жүргүзүлгөн талдоолордун негизинде диссертациялык изилдөө актуалдуу, оригиналдуу, өз убагында жана белгилүү бир теориялык жана практикалык кызыкчылыкка ээ экендиги белгиленген.

2- бап «ИЗИЛДӨӨНҮН МЕТОДОЛОГИЯСЫ ЖАНА МЕТОДДОРУ» эки параграфтан турат. «§ 2.1. Изилдөөнүн объектилери жана предметтери» деп аталган § 2.1де изилдөөнүн объектилери, предмети келтирилген:

Изилдөөнүн объектилери: Үчүнчү баптын изилдөө объектиси – биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык маселелер:

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(x^\gamma q(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,T],\ \ y_\varepsilon(0)=a,$$

мында $n, m,\gamma\in\mathbf{N},\ n>m(1+1/\gamma)$, a=const, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T]$, $0<\alpha_0<q(x),\ \ 0<\alpha_0<p(x): x\in[0,T]$.

Төртүнчү баптын изилдөө объектиси – экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык маселелер:

$$\varepsilon^n y_\varepsilon''(x)+x^k p(x)y_\varepsilon'(x)-(x^k q(x)+\varepsilon^m r(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,1],$$

$$y_\varepsilon(0)=a,\ y_\varepsilon(1)=b,$$

мында $p,q,r,f\in C^\infty[0,1],\ f(0)\neq 0$, $0<p(0)$, $0<q(0)$, $0<r(0)$, $n>m$, $1<k$, $(n, k, m\in N)$, ал эми $y_\varepsilon(x)$ – ε кичине параметрден көз каранды болгон изделүүчү функция.

Изилдөөнүн предмети:

- биринчи жана экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык маселелерде аралык чек ара катмарларынын пайда болуу шарттарын табуу;
- кичине параметр боюнча ар кандай тартиптеги тактыкта үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу.

«§ 2.2. Изилдөө методдору» атталыштагы параграфта диссертацияда бир нече жолу колдонулган аныктамалар, теоремалар жана методдор кеңири баяндалган. Диссертацияда негизинен бөлүктөп интегралдоо, биринчи жана экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелерди интегралдоо, кичине параметр, классикалык чек ара функциялар, чек ара функциялардын жалпыланган, салыштыруу, дифференциалдык барабарсыздыктар методдору жана максимум принципи колдонулат:

Диссертациянын негизги илимий оригиналдуу жыйынтыктары 3 жана 4- баптарда келтирилген.

Маселелердин өзгөчөлүктөрү: биринчи өзгөчөлүгү – изделүүчү функциянын эң жогорку тартиптеги туундусунун астында кичине параметрдин болушу; экинчи өзгөчөлүгү – тиешелүү козголбогон (кубулган) маселенин чыгарылышы каралып жаткан кесиндиде жылма функция эмес, б.а. өзгөчө чекитке ээ; үчүнчү өзгөчөлүгү – аралык чек ара катмарынын пайда болушу.

Үчүнчү бапта «БИРИНЧИ ТАРТИБИ ҮЧ ЗОНАЛУУ БИСИНГУЛЯРДЫК МАСЕЛЕЛЕР» биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык маселелердин бир

классы үчүн аралык чек ара катмарынын болушу үчүн жетиштүү жана зарыл шарттар алынган.

Үчүнчү бап үч параграфтан турат, биринчи параграфта түшүнүктүү болуш үчүн эң жөнөкөй учур кеңири баяндалган:

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x)+(x+\varepsilon)y_\varepsilon(x)=f_\varepsilon(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \qquad (1)$$

мында a – ε кичине параметрден көз каранды эмес кандайдыр туруктуу сан, $f_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x),\ f_k\in C^\infty[0,T],$ $f_0(0)\neq 0$, ал эми $y_\varepsilon(x)$ – ε кичине параметрден көз каранды болгон изделүүчү функция.

(1)-баштапкы маселенин $[0,T]$ кесиндиде $\varepsilon\to 0$ болгондо чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык жакындашусун тургузуу талап кылынат.

Төмөнкү теорема далилденген

1-Теорема. Кошинин үч зоналуу бисингулярдык (1)- маселесинин асимптотикалык чыгарылышын $[0,T]$ кесиндиде кичине параметр нөлгө умтулганда төмөнкү асимптотикалык катар көрүнүшүндө жазууга болот:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j v_j(x)+\varepsilon^{-1}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))+O(\varepsilon^s),\ \varepsilon\to 0,$$

мында $v_j(x)=\dfrac{f_j(x)-v_{j-1}(x)-v'_{j-3}(x)-h_j}{x},\ j=0,1,...,\ v_s(x)\equiv 0, s<0,$

$$h_0=f_0(0),\ h_1=f_1(0)-v_0(0),\ h_2=f_2(0)-v_1(0),$$

$$h_j=f_j(0)-v_{j-1}(0)-v'_{j-3}(0),\ 2<j\in\mathbf{N},\ v_j\in C^\infty[0,T],\ j=0,1,...$$

$$w_0(t)=\frac{h_0}{t+1};\quad w_1(t)=\frac{h_1-w'_0(t)}{t+1},\quad w_j(t)=\frac{h_j-w'_{j-1}(t)}{t+1},\ j=0,1,...$$

$$\pi_j(\tau)=e^{-\tau}c_j+e^{-\tau}(c_{j,0}\tau+c_{j,1}\tau^2+...+c_{j,s}\tau^{s+1}),\ \ c_j,\ c_{j,k}=const.$$

Экинчи параграфта «§ 3.2. Баштапкы чекитте өзгөчөлүктүн сызыктуу өсүүсү» төмөнкү Кошинин маселеси изилденген:

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,T],\ y_\varepsilon(0)=a, \qquad (2)$$

мында $n,m\in\mathbf{N}$, a – const, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T],\ 0<c_0<q(x),$ $0<c_0<p(x):x\in[0,T]$.

Төмөнкү теорема далилденген

2-Теорема. Эгерде (2)- баштапкы маселеде n жана m параметрлери $n>2m$ барабарсыздыгын канааттандырышса, анда $x=0$ баштапкы чекиттин чеке белинде аралык (кошумча) чектик катмар жашайт.

Далилдөө. Эгерде чектик катмардын аймагында бир эмес бир нече мүнөздүк пределдер жашаса, анда тиешелүү түрдө көп зоналуу маселе жөнүндө сөз болот. Ошондуктан теореманы далилдөө үчүн $n>2m$

барабарсыздык орун алган учурда чектик катмардын аймагында, б.а. x=0 баштапкы чекиттин чеке белинде эки мүнөздүк пределдин жана $n \le 2m$ барабарсыздыгы орун алган учурда бир мүнөздүк пределдин жашашын көрсөтүү жетиштүү.

Айталы $x=\varepsilon^{\alpha}t$ болсун, мында $\alpha>0$, анда $dx=\varepsilon^{\alpha}dt$ болот жана (2)-теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$\varepsilon^{n-\alpha}\frac{dy_{\varepsilon}(t)}{dt}+(\varepsilon^{\alpha}tq(\varepsilon^{\alpha}t)+\varepsilon^{m}p(\varepsilon^{\alpha}t))y_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t)\,. \tag{3}$$

а) Мейли $n > 2m$ болсун.

1) $\alpha=n/2$ болгондо:

$$\varepsilon^{\frac{n}{2}-m}\left(\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+tq(\varepsilon^{\alpha}t)\psi_{\varepsilon}(t)\right)+p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t) \tag{4}$$

келип чыгат;

2) $\alpha=n-m$ болгондо:

$$\left(\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+tq(\varepsilon^{\alpha}t)\psi_{\varepsilon}(t)\right)+\varepsilon^{n-2m}p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t) \tag{5}$$

келип чыгат;

3) ал эми $\alpha=m$ болгондо:

$$\varepsilon^{n-2m}\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+(tq(\varepsilon^{\alpha}t)+p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t)\,, \tag{6}$$

алабыз, мында $\psi_{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{m}y_{\varepsilon}(t)$.

Чектик катмарда чыгарылыштары чектик функция касиетине ээ болгон эки теңдемени алабыз, алар (5) жана (6).

$n>2m \Rightarrow n-m>m$ болгондуктан $\tau=\varepsilon^{m-n}x$ масштабдын өзгөрүүсү x=0 баштапкы чекитке жакынраак чектик катмарды мүнөздөйт, бул катмарды сол зона деп атайбыз, ал эми $t=\dfrac{x}{\varepsilon^{m}}$ масштабтын өзгөрүүсү башка аймакты аныктайт, аны аралык зона деп атайбыз, анткени ал зона сол зона менен оң зона деп аталуучу тышкы ажыралманын арасында жатат.

б) Айталы $n \le 2m$ орун алсын, б.а. $n > 2m$ аткарылбасын. Бул учурда бир гана мүнөздүк пределдин жашашын далилдейбиз.

Алгач барабардык орун алган учурду карайбыз, б.а. $n=2m$ учурду. $\alpha=m$ болгон учурда төмөнкү бир гана теңдемени алабыз:

$$\frac{d\psi_{\varepsilon}(t)}{dt}+(tq(\varepsilon^{\alpha}t)+p(\varepsilon^{\alpha}t))\psi_{\varepsilon}(t)=f(\varepsilon^{\alpha}t)\,, \tag{7}$$

мында $\psi_{\varepsilon}(t)=\varepsilon^{m}y_{\varepsilon}(t)$.

Эми $n < 2m$ учурду изилдейбиз.

1) Мейли $\alpha=n/2$ болсун, анда төмөнкүнү алабыз:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+tq(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{m-\frac{n}{2}}p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t); \qquad (8)$$

2) $\alpha=n-m$ болгондо

$$\varepsilon^{2m-n}\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+tq(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t) \qquad (9)$$

келип чыгат;

3) $\alpha=m$ болгондо

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+\varepsilon^{2m-n}(tq(\varepsilon^\alpha t)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t), \qquad (10)$$

алабыз, мында $\psi_\varepsilon(t)=\varepsilon^m y_\varepsilon(t)$.

Бул жерде чектик катмарда бир гана теңдемеге ээ болобуз, (10).

$n>2m$ шарттын зарылдыгын тышкы чыгарылыштын жардамында далилдөөгө болот. Айталы $n=km$ болсун, мында $2<k\in\mathbf{N}$. (2)- баштапкы маселенин тышкы чыгарылышы төмөнкү катар көрүнүшүндө изделет:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x), \qquad (11)$$

мында $y_j(x)$ – азырынча белгисиз функциялар.

(11)- катарды формалдуу түрдө (2)- теңдемеге коебуз:

$$\varepsilon^n\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y'_j(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j y_j(x)=f(x),\ \ x\in[0,T],$$

акыркы барабардыкты төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$y'_{j-n}(x)+xq(x)y_j(x)+p(x)y_{j-m}(x)=f(x),\quad j=0,1,\ldots\qquad y_s(x)\equiv 0,\ s<0.$$

бул жерден:

$$y_j(x)=\frac{f(x)-p(x)y_{j-m}(x)-y'_{j-n}(x)}{xq(x)}$$

таап алабыз, жеке учурда, j=0 болгондо: $y_0(x)=\dfrac{f(x)}{xq(x)}$.

Шарт боюнча $n=km$, $2<k\in\mathbf{N}$, ошондуктан

$$y_m(x)=-\frac{p(x)y_0(x)}{xq(x)};\ \ y_{2m}(x)=-\frac{p(x)y_m(x)}{xq(x)}\ \text{болот;}$$

ал эми $j=n$ болгон учурда:

$$y_n(x)=-\frac{p(x)y_{n-m}(x)+y'_0(x)}{xq(x)}\qquad \text{же}\qquad y_{jm}(x)=-\frac{p(x)y_{m(j-1)}(x)+y'_0(x)}{xq(x)}$$

келип чыгат.

Бул туюнтмалардан төмөнкү келип чыгат:

$$y_k(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^k\tilde{y}_k(x),\ k\in N_0=N\cup\{0\},\ \ \tilde{y}_k\in C^\infty[0,1].$$

Бул деген төмөнкү (12)- катардын мүчөлөрү бисингулярдык маселелерге таандык болгон “өсүүчү өзгөчөлүк” касиетине ээ экендигин билдирет:

$$y_\varepsilon(x)=\frac{f(x)}{xq(x)}+\frac{1}{x}\frac{\varepsilon^m}{x}\tilde{y}_1(x)+\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^2\tilde{y}_2(x)+...+\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon^m}{x}\right)^j\tilde{y}_j(x)+... \qquad (12)$$

мында $\tilde{y}_j\in C^\infty[0,1],\ j\in\mathbf{N}$.

(12)- катар чектик катмарда ички өзгөрүлмөнүн кандай болушун айтып турат, б.а. ички өзгөрүлмө x=$\varepsilon^m t$ экендигин айтып турат.

Ошондуктан (2)- теңдемеде x=$\varepsilon^m t$ деп өзгөртүп түзөбүз:

$$\varepsilon^{m(k-1)}\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+(\varepsilon^m tq(\varepsilon^m t)+\varepsilon^m p(\varepsilon^m t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^m t) \qquad (13)$$

эгерде $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-m}w_\varepsilon(t)$ белгилөөсүн кийирип алсак, анда (13)- төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon^{m(k-2)}\frac{dw_\varepsilon(t)}{dt}+(tq(\varepsilon^m t)+p(\varepsilon^m t))w_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^m t) \qquad (14)$$

Акыркы барабардыктын сол жагынын башкысы $(tq(\varepsilon^m t)+p(\varepsilon^m t))w_\varepsilon(t)$ туюнтма болот, анткени ε=0 болгондо (14)- түн сол жагында $(tq(0)+p(0))w_0(t)$ гана калат. Биз дифференциалдык эмес теңдеме алдык. Бул деген баштапкы чекиттин чеке белинде дагы бир чектик катмар жашайт. Бул чектик катмар x=0 баштапкы чекиттеги “келишпестикти” жоюуучу биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы болот.

(14)- барабардыкты канааттандырган функция аралык чектик катмар болот.

Төмөнкү теорема далилденди.

3-Теорема. (2)- Кошинин маселесинин чыгарылышы үчүн $x\in[0,T]$ кесиндиде төмөнкү асимптотикалык ажыралма орун алат

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^{mj}v_j(x)+\varepsilon^{-m}\sum_{j=0}^{s+1}\varepsilon^j(w_j(t)+\pi_j(\tau))+O(\varepsilon^{ms)}),\ \varepsilon\to 0,$$

мында $v_j(x)=\dfrac{f(x)-p(x)v_{j-1}(x)-v'_{j-k}(x)-h_j}{xq(x)},\ 2<k\in\mathbf{N},\ v_j\in C^\infty[0,T],$

$$h_0=f(0),\ h_1=-p(0)v_0(0),\ h_j=-(p(0)v_{j-1}(0)+v'_{j-k}(0)),$$

$$w_0(t)=\frac{h_0}{tq(t\varepsilon^m)+p(t\varepsilon^m)};\quad w_j(t)=\frac{h_j-w'_{(j-k+2)m}(t)}{tq(t\varepsilon^m)+p(t\varepsilon^m)},\ w_s\equiv 0, s<0.$$

$$\pi_j(\tau)=e^{-p_0\tau}c_j+e^{-p_0\tau}(c_{j,0}\tau+c_{j,1}\tau^2+...+c_{j,s}\tau^{s+1}),\ \ c_j,\ c_{j,k}=const.$$

Бул жерде калдык мүчө үчүн төмөнкү баштапкы маселе алынган:

$$MR_{s,\varepsilon}\equiv\varepsilon^n R'_{s,\varepsilon}(x)+(xq(x)+\varepsilon^m p(x))R_{s,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{ms+m}),\ x\in[0,T],\ R_{s,\varepsilon}(0)=0 \qquad (15)$$

(15)- маселенин чыгарылышы эки усул менен бааланган:

1-усул. Айкын чыгарылышты бөлүктөп интегралдап:

$$R_{s,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{ms+m-n})e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}\int_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}d\xi=$$

$$=O(\varepsilon^{ms+m-n})e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}\int_0^x\frac{\varepsilon^n}{\xi q(\xi)+\varepsilon^m p(\xi)}de^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}=$$

$$=O(\varepsilon^{ms+m-n})e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}\left(\frac{\varepsilon^n}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}-\frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^m p(0)}\right)+$$

$$+O(\varepsilon^{ms+m})e^{-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^x(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}\int_0^x\frac{q(\xi)+\xi q'(\xi)+\varepsilon^m p'(\xi)}{(\xi q(\xi)+\varepsilon^m p(\xi))^2}e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\xi(sq(s)+\varepsilon^m p(s))ds}d\xi,\ \varepsilon\to 0.$$

Бул жерден $R_{s,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{ms}),\ \varepsilon\to 0$ келип чыгат.

2-усул. С.А. Чаплыгиндин теоремасын колдонуп салыштыруу методу менен (15)- маселенин чыгарылышын баалайбыз. Мейли $d=\max\limits_{x\in[0,T]}\Phi(x,t,\tau)$,

$$z^{up}(x)=\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m},\qquad z^{down}(x)=-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m},\ x\in[0,T]$$

болсун. Анда

$$Mz^{up}>0,\ Mz^{down}<0,\ \ z^{up}(0)=\frac{d+1}{p(0)}\varepsilon^{ms}>0,\ z^{down}(0)=-\frac{d+1}{p(0)}\varepsilon^{ms}<0 \text{ болот.}$$

Чындыгында,

$$Mz^{up}\equiv\varepsilon^n\left(\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m}\right)'+\varepsilon^{ms+m}+\varepsilon^{ms+m}(d-\Phi)=$$

$$=\varepsilon^{ms+m}\left(1-\varepsilon^n\frac{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))'}{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))^2}d\right)+\varepsilon^{ms+m}\left(d-\Phi\right)>0,\ 0<\varepsilon<<1;$$

$$Mz^{down} \equiv \varepsilon^n\left(-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m}\right)' - \varepsilon^{ms+m} - \varepsilon^{ms+m}(d+\Phi) =$$

$$= -\varepsilon^{ms+m}\left(1-\varepsilon^n \frac{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))'}{(xq(x)+\varepsilon^m p(x))^2}d\right) - \varepsilon^{ms+m}\left(d+\Phi\right) < 0,\ 0<\varepsilon<<1;$$

С.А. Чаплыгиндин теоремасынын бардык шарттары аткарылат, ошондуктан

$$z^{down}(x) < R_\varepsilon(x) < z^{up}(x), x \in [0,T] \text{ жана}$$

$$-\frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m} < R_\varepsilon(x) < \frac{d+1}{xq(x)+\varepsilon^m p(x)}\varepsilon^{ms+m},\ x\in[0,T] \text{ болот.}$$

Мисал келтирилген.

1-Мисал. Төмөнкү маселени карайбыз

$$\varepsilon^3 y'_\varepsilon(x) + (x+\varepsilon)y_\varepsilon(x) = 1+2x,\ x\in[0,1],\ y_\varepsilon(0)=1.$$

Бул мисалда *n=3, m=1, f(x)=1+2x.*

Тышкы чыгарылыш

$$y_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}\left(1+2x+\frac{\varepsilon}{x}(2x^2-x-1)+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^k \tilde{y}_k(x)+\ldots\right) \text{ болот.}$$

Асимптотикалык чыгарылыш

$$y_\varepsilon(x) = v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(w_0(t)+\pi_0(\tau)+\varepsilon(w_1(t)+\pi_1(\tau))+\varepsilon^2(w_2(t)+\pi_2(\tau))\right)+O(\varepsilon^2),$$

болот, мында $x=\varepsilon t$, $x=\varepsilon^2\tau$, $h_\varepsilon = 1-2\varepsilon$,

$$v_0(x) = \frac{1+2x-1}{x} = 2 \Rightarrow v_0(x)=2\ \ v_1(x) = -\frac{2-2}{x} \Rightarrow v_1(x)\equiv 0.$$

$$w_0(t) = \frac{1}{1+t};\ w_1(t) = -\frac{2(t+1)^2-1}{(t+1)^3};\ w_2(t) = -\frac{2t^2+4t-1}{(t+1)^5}.$$

$$\pi_0(\tau) = -e^{-\tau},\ \pi_1(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2 e^{-\tau},\ \pi_2(\tau) = e^{-\tau}+\frac{1}{8}\tau^4 e^{-\tau}.$$

Төмөнкү 1, 2 жана 3- таблицаларда Maple системасында жүргүзүлгөн сандык эсептөөлөрдүн натыйжалары келтирилген:

1-Таблица.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\lvert y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\rvert$ **ε=0,1**	0,2	8,2*10^{-2}	1,9*10^{-3}	5,1*10^{-4}	1,7*10^{-5}	7,2*10^{-6}
$\lvert y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\rvert$	0,02	0	10^{-9}	10^{-9}	10^{-9}	0

ε=0,01						

2-Таблица.

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\vert y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\vert$ **ε=0,001**	0,002	2*10^{-8}	1*10^{-8}	1*10^{-8}	0	0

3-Таблица.

x	0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005
$\vert y_\varepsilon(x)-\tilde{y}_\varepsilon(x)\vert$ **ε=0,0001**	0,0002	10^{-6}	0	0	0	0

Үчүнчү параграфта мурда 3.2- параграфта изилденген маселе жалпыланган. Бул жерде өзгөчө чекиттин эселүүлүгүн аралык чектик катмарга таасири аныкталды. Аралык чектик катмардын жашоо шарты табылды.

Төмөнкү Кошинин маселеси изилденет

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(x^\gamma q(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)= f(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \qquad (16)$$

мында $n, m,\gamma\in\mathbf{N}$, a – const, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T]$, $0<c_0<q(x)$, $0<c_0<p(x):x\in[0,T]$, $\gamma - x$=0 өзгөчө чекиттин эселүүлүгү.

Төмөнкү теоремалар далилденди

4-Теорема. Эгерде $n>m+\dfrac{m}{\gamma}$ болсо, анда (16)- баштапкы маселе үч зоналуу бисингулярдык маселе болот.

Эсептөөгө ыңгайлуу болушу үчүн $n=mk,\ 1+\dfrac{1}{\gamma}<k\in N$ деп алабыз жана $\varepsilon^m=\lambda$ белгилөө кийирип алабыз, λ– кичи параметр. Анда (16)-маселе төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\lambda^k y'_\lambda(x)+(x^\gamma q(x)+\lambda p(x))y_\lambda(x)= f(x),\ x\in[0,T],\quad y_\varepsilon(0)=a, \qquad (17)$$

5-Теорема. (17)- Кошинин маселесинин чыгарылышы үчүн $k>1+\dfrac{1}{\gamma}$ шарты орун алганда $x\in[0,T]$ кесиндиде төмөнкү асимптотикалык ажыралма орун алат

$$y_\lambda(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j v_j(x)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)+\lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau)\,,\ \varepsilon\to 0.$$

мында $v_i(x)=\dfrac{f(x)-p(x)v_{i-1}(x)-v'_{i-k}(x)-h_i(x)}{x^\gamma q(x)}$, $2<k\in\mathbf{N}$, $v_j\in C^\infty[0,T]$,

$$h_j(x)=\sum_{i=0}^{\gamma-1} f_{j,i}x^i,\ \ f_{j,i}=\frac{1}{i!}f_j^{(i)}(0),\ f_0(x)\equiv f(x),\ f_1(x)=-p(x)v_0(x),$$

$$f_j(x)=-(p(x)v_{j-1}(x)+v'_{j-k}(x)),\ v_s(x)\equiv 0, s<0;\ w_0(t)=\frac{h_0(t\mu)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},$$

$$w_j(t)\equiv 0,\ \ j=0,1,...,\gamma(k-1)-2;\ w_{\gamma(k-1)-1}(t)=-\frac{w'_0(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},$$

$$w_{\gamma j}(t)=\frac{h_j(t\mu)-w'_{j\gamma-\gamma(k-1)+1}(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},\ \ w_s(t)=-\frac{w'_{s-\gamma(k-1)+1}(t)}{t^\gamma q(t\mu)+p(t\mu)},\ s\neq\gamma j;$$

$$\pi_j(\tau)=e^{-p_0\tau}c_j+e^{-p_0\tau}(c_{j,0}\tau+c_{j,1}\tau^2+...+c_{j,s}\tau^{s+1}),\ \ c_j,\ c_{j,k}=const.$$

2-Мисал. Төмөнкү маселени карайбыз:

$$\varepsilon^2 y'_\varepsilon(x)+(x^3+\varepsilon)y_\varepsilon(x)=1-x^2+x^4+x^5,\ \ x\in[0,1],\ \ y_\varepsilon(0)=2.$$

Каралып жаткан мисалда

n=2, m=1, γ=3, $f(x)=1-x^2+x^4+x^5$, a=2, $x=t\mu,\ \mu=\varepsilon^{1/3},\ x=\tau\varepsilon$.

Ошондуктан

$$y_\varepsilon(x)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\varepsilon^2 v_2(x)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(w_0(t)+\mu w_1(t)+\mu^2 w_2(t)+\mu^3 w_3(t)+\mu^4 w_4(t)+\mu^5 w_5(t)+\mu^6 w_6(t)\right)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(\pi_0(\tau)+\varepsilon\pi_1(\tau)+\varepsilon^2\pi_2(\tau))+O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,T]$$ болот,

мында $v_0(x)=\dfrac{1-x^2+x^4+x^5-h_0(x)}{x^3}=x+x^2,\quad h_0(x)=1-x^2;$

$$v_1(x)=-\frac{v_0(x)+h_1(x)}{x^3}=-\frac{x+x^2+h_1(x)}{x^3}=0,\ \ h_1(x)=-x-x^2;$$

$$v_2(x)=-\frac{v_1(x)+v'_0(x)+h_2(x)}{x^3}=-\frac{1+2x+h_2(x)}{x^3}=0,\ \ h_2(x)=-1-2x;$$

$$v_i(x)\equiv 0,\ h_i(x)\equiv 0;\ 2<i\in\mathbf{N};$$

$$w_0(t)=\frac{1-t\mu}{t^3+1},\quad w_1(t)\equiv 0,\quad w_2(t)=-\frac{w'_0(t)}{t^3+1},\ w_3(t)=-\frac{t\mu+(t\mu)^2}{t^3+1},$$

$$w_4(t)=-\frac{w'_2(t)}{t^3+1},\ w_5(t)=-\frac{w'_3(t)}{t^3+1},\ w_6(t)=-\frac{1+2t\mu+w'_4(t)}{t^3+1},$$

$$\pi_0(\tau)=-(1-\varepsilon)e^{-\tau},\ \ \pi_1(\tau)=(2-\varepsilon)e^{-\tau},\ \pi_2(\tau)=-6e^{-\tau}+\frac{\tau^4}{4}(1-\varepsilon)e^{-\tau}.$$

«4-БАП. ҮЧ ЗОНАЛУУ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ БИСИНГУЛЯРДЫК МАСЕЛЕЛЕР» деп аталган бапта сызыктуу бир тектүү эмес экинчи

тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн Дирихленин бисингулярдык маселелеринин бир классы үчүн экспоненциалдуу түрдө кемибөөчү аралык чектик катмарынын жашашынын жетиштүү жана зарыл шарттары. табылган. Үч зоналуу Дирихленин бисингулярдык маселелеринин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулган жана негизделген.

4.1 параграфта төмөнкү үч зоналуу Дирихленин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы тургузулган:

$$\varepsilon^3 y_\varepsilon''(x) + x^4 y_\varepsilon'(x) + (x^4 - \varepsilon) y_\varepsilon(x) = f(x), \ x \in [0,1], \tag{18}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \ y_\varepsilon(1) = b, \tag{19}$$

мында a, b – белгилүү турактуулар, $f \in C^\infty[0,1]$, $f(0) \neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ – изделүүчү функция, ал ε кичи параметрден көз каранды.

$y_\varepsilon(x) = be^{1-x} z_\varepsilon(x)$ өзгөртүп түзүүсүнүн жардамында (18)-(19)- маселе төмөнкү маселеге алып келинет:

$$\varepsilon^3 z_\varepsilon''(x) + (x^4 - 2\varepsilon^3) z_\varepsilon'(x) + (\varepsilon^3 - \varepsilon) z_\varepsilon(x) = \tilde{f}(x), \ x \in [0,1], \tag{20}$$

$$z_\varepsilon(0) = \tilde{a}, \ z_\varepsilon(1) = 1, \tag{21}$$

мында $z_\varepsilon(x)$ – жаңы белгисиз функция, $\tilde{f}(x) = \frac{1}{b} e^{x-1} f(x)$.

Төмөнкү теорема далилденген

6-Теорема. (18)-(19) эки чекиттүү чектик маселенин чыгарылышы үчүн $x \in [0,1]$ кесиндиде төмөнкү асимптотикалык ажыралма орун алат

$$y_\varepsilon(x) = be^{1-x} \left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \pi_k(\tau) + \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=0}^{3n+3} \mu^k w_k(t) \right) + O(\varepsilon^n), \ \varepsilon \to 0,$$

мында $v_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x)$ –жылма тышкы чыгарылыш; $w_\varepsilon(t) = \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=0}^{3n+3} \mu^k w_k(t)$ – экспоненциалдуу эмес, даражалуу мүнөздө кемүүчү аралык чектик катмардык чыгарылыш, $t = x/\mu, \ \mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$; $\pi_\varepsilon(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \pi_k(\tau)$ – экспоненциалдуу кемүүчү чектик катмардык чыгарылыш, $\tau = x/\varepsilon$.

§ 4.2 де x=0 сингулярдык чекитте өзгөчөлүктүн квадраттык өскөн учуру изилденген.

Төмөнкү чектик маселени карайбыз

$$\varepsilon^4 y''_\varepsilon(x) + x^2 p(x) y'_\varepsilon(x) - \varepsilon q(x) y_\varepsilon(x) = f(x), \ x \in [0,1], \tag{20}$$

$$y_\varepsilon(0) = a, \ y_\varepsilon(1) = b, \tag{21}$$

мында a, b – белгилүү турактуулар, $0 < c_0 < p(x), \ 0 < c_0 < q(x), f(x)$ – функциялар $x \in [0,1]$ кесиндиде чексиз дифференцирленүүчү белгилүү

функциялар, $p(0)=p_0$, $q(0)=q_0$, ал эми $y'_\varepsilon(x)$ – кичине парамтрден көз каранды болгон изделүүчү функция.

Төмөнкү теорема далилденген

7-Теорема. (20), (21) чектик маселенин чыгарылышын $x\in[0,1]$ кесиндиде, ε→0 болгондо төмөнкү көрүнүштө жазууга болот

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^k w_k(t)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{2n+2}\mu^k\pi_k(\tau)+R_{n,\varepsilon}(x),$$

мында $|R_{n,\varepsilon}(x)|\le\varepsilon^n c,\ 0<c-\text{const},\ v_k\in C^\infty[0,1],$

$$v_0(x)=\int_1^x\frac{f(s)-(h_{0,0}+h_{0,1}s)}{s^2p(s)}ds+b\ ,\ h_{0,0}=f(0),\ h_{0,1}=f'(0),$$

$$v_1(x)=\int_1^x\frac{q(s)v_0(s)-(h_{1,0}+h_{1,1}s)}{s^2p(s)}ds\ ,$$

$$h_{1,0}=q(0)v_0(0),\ h_{1,1}=q'(0)v_0(0)+q(0)v'_0(0),$$

$$v_k(x)=\int_1^x\frac{q(s)v_{k-1}(s)-v''_{k-4}(s)-(h_{k,0}+h_{k,1}s)}{s^2p(s)}ds,\ k\in N,\ v_s(x)\equiv 0,\ s<0\ ,$$

$$h_{k,0}=q(0)v_{k-1}(0)-v''_{k-4}(0),\ h_{k,1}=q'(0)v_{k-1}(0)+q(0)v'_{k-1}(0)-v'''_{k-4}(0)\ ,$$

$$w_0(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi\,,$$

$$w_k(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon\varphi-w''_{k-1}(\varphi)}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi,\ \ k\in N.$$

$$\pi_0(\tau)=-w_0(0)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau},\ \pi_2(\tau)=(a-v_0(0)-w_1(0))e^{-\sqrt{q_0}\,\tau}+P_1(\tau,\mu\tau)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

$$\pi_{2k}(\tau)=-(v_{k-1}(0)+w_k(0))e^{-\sqrt{q_0}\,\tau}+P_{2k}(\tau,\mu\tau)e^{-\sqrt{q_0}\,\tau},\ \pi_{2k-1}(\tau)=P_{2k-1}(\tau,\mu\tau)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

$P_s(\tau,\mu\tau)$ – көп мүчө, мында τ=0 болгондо $P_s(0,0)\equiv 0$ болот.

§ 4.3 тө мурдагы 4.1 жана 4.2 параграфтардын натыйжалары жалпыланат. Төмөнкү теңдеме каралат:

$$\varepsilon^n y_\varepsilon''(x)+x^k p(x)y_\varepsilon'(x)-(x^k q(x)+\varepsilon^m r(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in[0,1],\quad (22)$$

(21)- чек аралык шарттары менен, мында a, b – белгилүү турактуу сандар, $p,q,r,f\in C^\infty[0,1]$, $f(0)\neq 0$, $0<c_0<p(0)$, $0<c_0<q(0)$, $0<r(0)$, $n>m$, $1<k$, (n, k, $m\in N$), ал эми $y_\varepsilon(x)$ – изделүүчү функция.

Төмөнкү теоремалар далилденген

8-Теорема. Эгерде $m<\dfrac{n(k-1)}{k+1}$ болсо, анда (22), (21) Дирихленин

маселесинде x=0 сол жактагы чек аралык чекиттин чеке белинде классикалык чектик катмардан сырткары дагы бир экспоненциалдуу эмес аралык чектик катмар жашайт, б.а. (21)-(22) маселе үч зоналуу бисингулярдык маселе болот.

9-Теорема. (21), (22) эки чекиттүү Дирихленин чектик маселесинин чыгарылышы үчүн $x\in[0,1]$ кесиндиде $m<\dfrac{n(k-1)}{k+1}$ шарты орун алганда жана ε→0 болгондо төмөнкү асимптотикалык ажыралма орун алат:

$$y_\varepsilon(x)=\left(\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^{jm}v_j(x)+\frac{1}{\mu^{(k-1)m}}\sum_{j=0}^{(k-1)(s+1)m}\mu^j w_j(t)+\frac{1}{\lambda^{2m}}\sum_{j=0}^{2m(s+1)}\lambda^j\pi_j(\tau)\right)e^{\int_1^x\frac{q(s)}{p(s)}ds}+O(\varepsilon^{ms}),$$

мында $\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^{jm}v_j(x)$ – жылма тышкы чыгарылыш; $\sum_{j=0}^{(k-1)(s+1)m}\mu^j w_j(t)$ – экспоненциалдуу эмес бирок даражалуу мүнөздө кемүүчү аралык чектик катмар, $t=x/\mu^m$, $\mu=\sqrt[k-1]{\varepsilon}$;

$\sum_{j=0}^{2m(s+1)}\lambda^j\pi_j(\tau)$ – экспоненциалдык мүнөздөө кемүүчү чектик катмардык чыгарылыш, $\tau=x/\lambda^{n-m},\lambda=\sqrt{\varepsilon}$. Конкреттүү мисал келтирилген.

3-Мисал. Төмөнкү маселени карайбыз:

$$\varepsilon^4 y''_\varepsilon(x)+x^2y'_\varepsilon(x)-(x^2+\varepsilon)y_\varepsilon(x)=1+x+x^2,\quad y_\varepsilon(0)=-1,\ y_\varepsilon(1)=1. \quad (23)$$

(23)- маселенин асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$y_\varepsilon(x)=e^{x-1}\left(1+\int_1^x\frac{(1+s+s^2)e^{1-s}-e}{s^2}ds+\right.$$

$$+\varepsilon\int_1^x\frac{1}{s^2}\left(1+\int_1^s\frac{(1+u+u^2)e^{1-u}-e}{u^2}du-3+e-\frac{e}{2}s\right)ds-\frac{1}{\varepsilon}e(1-e^{\varepsilon-\frac{1}{t}})+$$

$$+e^{-\frac{1}{t}}\left(-\frac{3-e}{t}+\frac{e}{2}\varepsilon\ln t-\frac{1}{2t^4}e^{1+\varepsilon}+\frac{1}{5t^5}e^{1+\varepsilon}+\varepsilon(3-e)-\frac{e}{2}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon^4}{2}e^{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon^5}{5}e^{1+\varepsilon}\right)-$$

$$-\varepsilon e^{-\frac{1}{t}}\int_{1/\varepsilon}^{t}\frac{w''_1(s)+2w'_0(s)}{s^2}e^{\frac{1}{s}}ds+\frac{1}{\lambda^2}e^{1-\tau}-\frac{1}{12\lambda}e^{1-\tau}\tau(2\tau^2+3\tau+3)+$$

$$-(4-e)e^{-\tau}+\tau\frac{20\tau^5+24\tau^4+15\tau^3-30\tau^2-45\tau-45}{1440}e^{1-\tau}+$$

$$+\lambda\tau P_8(\tau)e^{1-\tau}-\lambda^2(v_1(0+w_1(0))e^{-\tau}+\lambda^2\tau P_{11}(\tau)e^{1-\tau}+O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0.$$

КОРУТУНДУ

Диссертацияда биринчи жана экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык маселелер изилденген.

Алгачкы жолу

- биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык Кошинин маселелеринин бир классы үчүн аралык экспоненциалдык кемибөөчү чектик катмарынын жашашы үчүн жетиштүү жана зарыл шарттар табылган.
- үч зоналуу бисингулярдык Кошинин маселелеринин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулган жана негизделген.
- экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдуу Дирихле маселелердин бир классы үчүн аралык экспоненциалдык төмөндөбөй турган чек ара катмарынын болушу үчүн жетиштүү жана зарыл шарттар табылган.
- үч зоналуу бисингулярдык Дирихленин маселелеринин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулган жана негизделген.

Оригиналдуу ыкманын жардамы менен, анын маңызы А.М.Ильиндин илимий мектебинде иштелип чыккан жана ийгиликтүү колдонулган асимптотикалык ажыралмаларды жалгаштыруунун универсалдуу методунун ордуна жардамчы функция методу колдонулат, бул ыкма салыштырмалуу жөнөкөй процедураны колдонуу менен каралып жаткан класстагы маселелердин чыгарылыштары үчүн бир калыптагы асимптотикалык ажыралманы алууга мүмкүнчүлүк берет.

ПРАКТИКАЛЫК СУНУШТАР

Диссертациянын илимий натыйжалары козголуулар теориясында, гидродинамикада, аэродинамикада, физикада жана илимдин башка тармактарында колдонууга сунуштайбыз.

Үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык ажыралмасын тургузууга карата иштелип чыккан алгоритмдер практикада колдонулушун табат деген ойдобуз.

Биздин диссертацияны козголуулар теориясы боюнча лекцияларды окууда, «Математика», «Колдонмо математика жана информатика», «Физика-математикалык билим берүү» жана «Математика жана компьютердик илимдер» багыттары боюнча аспиранттарды, PhD докторлорду, магистрлерди жана бакалаврларды даярдоодогу атайын курстарды окутууда. Андан сырткары дифференциалдык теңдемелердин сапаттык теориясы менен байланышкан математиканын, физиканын,

техниканын ж.б. илимдин тармактарынын аймактарында теориялык маселелерди чыгарууда колдонууга сунуштайбыз.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН ТЕМАСЫ БОЮНЧА ЖАРЫЯЛАНГАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ:

1. **Омаралиева, Г.А.** Достаточное условие существования дополнительной зоны в сингулярно возмущенных краевых задачах второго порядка [Текст] / Г.А. Омаралиева // Бюллетень науки и практики. – 2023. – Т. 9. – № 2. – С. 10-16. DOI: 10.33619/2414-2948/87/01

2. **Омаралиева, Г.А.** Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов // Труды Института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук. – 2022. –Т. 28. – № 2. – С. 193-200. DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-193-200

3. **Omaralieva, G.A.** Asymptotics of the Solution of Bisingular Boundary Value Problems with a Biboundary Layer [Text] / G.A. Omaralieva, K.G. Kozhobekov, D.A. Tursunov // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022. – Vol. 43. – no. 11. –P. 166–172. DOI: 10.1134/S1995080222140190

4. **Омаралиева, Г.А**. Бисингулярно возмущенное уравнение первого порядка с бипограничным слоем [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов, Н. Э. Муса уулу // Вестник ОшГУ. – 2022. – № 4. – С. 244-251. DOI: 10.52754/16947452_2022_4_244

5. **Омаралиева, Г.А.** Асимптотика решения трех зонной задачи Коши [Текст] / Г.А. Омаралиева // Вестник ЖАГУ. – 2022. – № 4. – С. 17-22. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50422789

6. **Омаралиева, Г.А.** Асимптотика решения двух зонной двухточечной краевой задачи [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13. – № 2. – С. 40–46. DOI: 10.14529/mmph210207

7. **Омаралиева, Г.А.** Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов, М.И. Маматбуваева, Ш.А. Раманкулова // Вестник ОшГУ. – 2021. – Т. 1. – № 1. – С. 102-109. DOI: 10.52754/16947452_2021_1_1_102

8. **Omaralieva, G.A.** Three-band boundery boundary value problem [Text] / G.A. Omaralieva, D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Theses of international scientific conference “Problem of modern mathematics and its applications”. Kyrgyzstan, Bishkek-Issyk-Kul, 16-19 June, 2021. – P. 67.

9. **Omaralieva, G.A.** Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem with additional boundary layer [Text] / G.A. Omaralieva, D.A. Tursunov // MADEA-8 International Conference. Kyrgyzstan-Turkey-Ukraine. Bishkek. – 2018. – P. 128.

Омаралиева Гулбайра Абдималиковнанын «Үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасы» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: үч зоналуу маселе, аралык чектик катмар, экспоненциалдуу эмес чектик катмар, кичи параметр, асимптотикалык чыгарылыш, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, өзгөчө чекит, дифференциалдык барабарсыздыктар методу, жалпыланган чектик функциялар методу.

Изилдөө объектиси: Үч зоналуу бисингулярдык маселелер.

Изилдөө предмети: биринчи жана экинчи тартиптеги сызыктуу кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн бисингулярдык маселелерде аралык чектик катмардын пайда болуу шарттарын табуу; 2) үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу.

Иштин максаты. Биринчи жана экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу.

Изилдөөнүн методдору жана аппараты: бөлүктөп интегралдоо, биринчи жана экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдемелерди интегралдоо, кичи параметр, чектик функциялардын классикалык, чектик функциялардын жалпыланган методдоруу, салыштыруу, дифференциалдык барабарсыздык методу жана максимум принцип.

Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы. Алгачкы жолу биринчи жана экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн үч зоналуу бисингулярдык маселелердин бир классында аралык экспоненциалдуу эмес түрдө кемүүчү чектик катмарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттар табылды. Алгачкы жолу биринчи жана экинчи тартиптеги үч зоналуу бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулду жана негизделди.

Колдонуу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар. Илимий натыйжалар козголуулар теориясында, гидродинамикада, аэродинамикада жана илимдин башка тармактарында колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу жааты. Ушул сыяктуу маселелер гидродинамикада, физикада, аэродинамикада, океанологияда, астрономияда ж.б. илимдин аймактарында жана техникада кездешет.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Омаралиевой Гулбайры Абдималиковны на тему: «Асимптотика решения трех зонных бисингулярных задач» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: трех зонная задача, промежуточный пограничный слой, не экспоненциальный пограничный слой, малый параметр, асимптотическое решение, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, особая точка, метод дифференциальных неравенств, обобщенный метод погранфункций.

Объект исследования: Трех зонные бисингулярные задачи.

Предмет исследования: найти условия при которых появляются промежуточные пограничные слои в линейных бисингулярных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнениях первого и второго порядков; построение равномерных асимптотических разложений решений трех зонных бисингулярных задач.

Цель работы. Построение асимптотики решения трех зонных бисингулярных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Методы исследования и аппаратура: интегрирования по частям, интегрирования линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, малого параметра, классический метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций, сравнения, дифференциальных неравенств и принцип максимума.

Полученные результаты и их новизна. Впервые найдены достаточное и необходимое условия существование промежуточного не экспоненциально убывающего пограничного слоя для одного класса трехзонных бисингулярных задач первого и второго порядков. Впервые построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений трехзонных бисингулярных задач первого и второго порядков.

Степень использования или рекомендации по использованию. Научные результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике и в других отраслях науки.

Область применения. Подобные задачи встречаются в гидродинамике, физике, аэродинамике, океанологии, астрономии и др. областях науки и техники.

SUMMARY

Omaralieva Gulbayra Abdimalikovna Dissertation «Asymptotics of solving three zone bisingular problems» for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences (specialty 01.01.02 **–** differential equations, dynamical systems and optimal control**)**

Key words: three zone problem, intermediate boundary layer, nonexponential boundary layer, small parameter, asymptotic solution, singularly perturbed problem, bisingular problem, singular point, method of differential inequalities, generalized method of boundary layer functions.

Object of research. Three-zone bisingular problems.

Subject of research: to find the conditions under which intermediate boundary layers appear in linear bisingular problems for ordinary differential equations of the first and second orders; construction of uniform asymptotic expansions of solutions to three zone bisingular problems.

Purpose of work. Construction of asymptotics for the solution of three zone bisingular problems for ordinary differential equations of the first and second orders.

Research methods and equipment: integration by parts, integration of linear inhomogeneous ordinary differential equations of the first and second orders, small parameter, classical method of boundary functions, generalized method of boundary functions, comparison, differential inequalities and the maximum principle

The results obtained and their novelty. For the first time, sufficient and necessary conditions for the existence of an intermediate non-exponentially decreasing boundary layer for one class of three zone bisingular problems of the first and second orders are found. For the first time, complete, uniform asymptotic expansions of solutions of three zone bisingular problems of the first and second orders were constructed and justified.

Degree of use or recommendations for use. Scientific results can be applied in perturbation theory, hydrodynamics, aerodynamics and other branches of science.

Application area. Similar problems are encountered in hydrodynamics, physics, aerodynamics, oceanology, astronomy, and other fields of science and technology.

Басмага берилди: 19.10.2023-ж.
Көлөмү : 1,5 б.т. Буйрутма № ____
Форматы 60х90 1/16. Нускасы 120 даана.

ОшМУ нун “Билим” редакциялык-басма бөлүмү
Ош ш., Ленина к., 331.