Тема: Вольтерранын биринчи типтеги классикалык эмес сызыктуу интегралдык теңдемесинин чыгарылышы жөнүндө

Маселенин коюлушу

Төмөнкү интегралдык теңдемени карайлы:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t)\,;\; t\in[t_0,T] \qquad (1)$$

мында $\alpha(t)$, $K(t,s)$ жана $f(t)-$ берилген функциялар, $\alpha(t)\in C^1[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=\beta<t_0$, $f(t)\in C^1[t_0,T]$, $\alpha(t)\le t$ бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн, $K(t,s)$ жана $K_t^{'}(t,s)-$ $G=\{(t,s):\; \alpha(t)\le s\le t\le T\}$ аймагында үзгүлтүксүз функциялар, $\alpha(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде өсүүчү функция, ал эми $u(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде изделүүчү функция.

Маселенин чечилиши

Төмөнкү шарттар орун алсын дейли:

a) $K(t,s)$ жана $K_t^{'}(t,s)-$ $G=\{(t,s):\; \alpha(t)\le s\le t\le T\}$, аймагында үзгүлтүксүз функциялар, $K(t,t)\ne 0$ бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн.

b) $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$, $f(t)$, $f'(t)\in[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=\beta<t_0$, $\alpha(T)=t_0$, $\alpha(t)\le t$, бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн, мында $\alpha(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде өсүүчү функция.

$$u(t)=\varphi(t)\,,\; t\in[\beta,t_0] \qquad (2)$$

болсун дейли, мында $\varphi(t)-$ $[\beta,t_0]$ кесиндисинде белгилүү үзгүлтүксүз функция.

Анда (1) интегралдык теңдемени дифференцирлеп,

$$K(t,t)u(t)-K(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{t} K_t'(t,s)u(s)ds = f'(t)\,,\; t\in[t_0,T]$$

теңдемесине ээ болобуз. Мындан төмөнкүнү алабыз:

$$u(t)=\frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)}u(\alpha(t))\alpha'(t)-\int_{\alpha(t)}^{t}\frac{K_t'(t,s)}{K(t,t)}u(s)ds+\frac{f'(t)}{K(t,t)}\,,\; t\in[t_0,T] \qquad (3)$$

a), b) шарттарды жана (2) функцияны эске алып, (3) интегралдык теңдемени

$$u(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)} u(s)ds + P(t)\,,\ t \in [t_0, T] \tag{4}$$

көрүнүшүндө жазабыз, мында

$$P(t) = \frac{K(t,\alpha(t))}{K(t,t)} \varphi(\alpha(t))\alpha'(t) - \int_{\alpha(t)}^{t_0} \frac{K'_t(t,s)}{K(t,t)} \varphi(s)ds + \frac{f'(t)}{K(t,t)}\,,\ t \in [t_0, T]\,. \tag{5}$$

Эми $t = t_0$ эсептеп жана (2), (5) функцияларды эске алып, (1) теңдемеден жана (4) функциядан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0, s)\varphi(s)ds = f(t_0)\,; \tag{6}$$

$$\varphi(t_0) = \frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)} \varphi(\alpha(t_0))\alpha'(t_0) - \int_{\beta}^{t_0} \frac{K'_t(t_0,s)}{K(t_0,t_0)} \varphi(s)ds + \frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)} \tag{7}$$

Төмөнкүдөй теорема айталы:

Теорема. a), b), (6) жана (7) шарттары орун алсын дейли. Анда, (2) шарты менен берилген (1) интегралдык теңдеме (4) көрүнүштөгү экинчи типтеги интегралдык теңдемеге эквиваленттүү, мында $P(t)$ – (5) формула менен аныкталган.

Далилдөө: Айталы, $u(t) \in C[\beta, T]$ функциясы (1) теңдеменин (2) шарты канааттандырган чечими болсун. Анда (2) шарт жана (3), (5) катыштардын негизинде $u(t) \in C[t_0, T]$ функциясы (4) интегралдык теңдеменин чечими болот.

Тескерисинче, $u(t) \in C[t_0, T]$ функциясы (4) интегралдык теңдеменин чечими болсун дейли, мында $P(t)$ – (5) формула менен аныкталган. $v(t)$ – функциясын төмөнкү формула боюнча аныктайбыз:

$$v(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \beta \le t \le t_0, \\ u(t), & t_0 \le t \le T. \end{cases} \tag{8}$$

Анда (5) функциянын, (7) жана (2) шарттарынын негизинде (4) интегралдык теңдемеден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$K(t,t)u(t)-K(t,\alpha(t))u(\alpha(t))\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{t}K'_t(t,s)v(s)ds=f'(t),\ t\in[t_0,T]$$

мындан

$$\left(\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v(s)ds\right)'_t=f'(t);\ t\in[t_0,T]. \tag{9}$$

(9) туундуну t_0 дөн t га чейин интегралдап жана (6) шарты эске алуу менен

$$\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v(s)ds=f(t);\ t\in[t_0,T]$$

ээ болобуз.

Б.а. (8) формула менен аныкталган функция (1) теңдеменин (2) шартты канааттандырган чечими болот. Теорема далилденди.

Мындан төмөкнкү натыйжа келип чыгат.

Натыйжа: Теореманын шарттары орун алсын дейли. Анда (2) шарттын канаатандырган (1) интегралдык теңдеме $C[\beta,T]$ мейкиндигинде жалгыз чечимге ээ болот.

Мисал: Төмөнкү интегралдык теңдемени карайлы:

$$\int_{t-1}^{t}[1+(t-s)]u(s)ds=t^2+3t-\frac{5}{3};\ t\in[0;1] \tag{10}$$

Ал теңдеме

$$u(t)=2t,\ t\in[-1;0] \tag{11}$$

шарты менен берилген. Мында $\alpha(t)=t-1$, $t_0=0$, $\beta=-1$, $T=1$, $K(t,s)=1+(t-s)$, $\alpha'(t)=1$, $f(t)=t^2+3t-\frac{5}{3}$. Дагы кошумча $t\in[-1;0]$ болгондо $u(t)=2t$. $\varphi(t)=2t$, $t\in[-1;0]$ болсун дейли. Бул учурда $(t,s)=G=\{(t,s):t-1\le s\le t\le 1\}$ үчүн $K(t,t)=1$, $K(t,\alpha(t))=2$, $K'_t(t,s)=1$, $\varphi(\alpha(t_0))=-2$, $f'(t)=2t+3$.

(6) жана (7) шарттарды текшерели:

$$\int_{\alpha(t_0)}^{t_0}K(t_0,s)u(s)ds=f(t_0);$$

$$\int_{-1}^{0}(1-s)2sds=\int_{-1}^{0}(2s-2s^2)ds=\left(s^2-\frac{2}{3}s^3\right)_{-1}^{0}=-\frac{5}{3}=f(0),$$

$$\varphi(t_0)=\frac{K(t_0,\alpha(t_0))}{K(t_0,t_0)}\varphi(\alpha(t_0))\alpha'(t_0)-\int_{\beta}^{t_0}\frac{K_t'(t_0,s)}{K(t_0,t_0)}\varphi(s)ds+\frac{f'(t_0)}{K(t_0,t_0)};$$

$$0=\varphi(0)=P(0)=\frac{2}{1}\cdot(-2)\cdot 1-\int_{-1}^{0}\frac{1}{1}2sds+\frac{3}{1}=-1-s^2\Big|_{-1}^{0}=-1+1=0.$$

Анда теорема 1 боюнча (11) шарт менен берилген (10) интегралдык теңдеме төмөнкү интегралдык теңдемеге эквиваленттүү болот:

$$u(t)=-\int_{0}^{t}u(s)ds+P(t),\ t\in[0;1] \tag{12}$$

мында

$$P(t)=4(t-1)1-\int_{t-1}^{0}2sds+2t+3=4(t-1)+2t+3-\int_{t-1}^{0}2sds=6t-1+s^2\Big|_{t-1}^{0}=$$

$$=6t-1+(t-1)^2=6t-1+t^2-2t+1=t^2+4t;$$

$$P(t)=t^2+4t;\ t\in[0;1] \tag{13}$$

Анда (12) интегралдык теңдеменин чечимин төмөнкүчө табабыз:

$$u(t)=P(t)-\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(t-s)}P(s)ds$$

$$u(t)=P(t)-\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(t-s)}P(s)ds=t^2+4t-\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(t-s)}(s^2+4s)ds=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=s^2+4s & dv=\mathrm{e}^{-(t-s)}ds \\ du=(2s+4)ds & v=\mathrm{e}^{-(t-s)}\end{matrix}\right|=t^2+4t-\mathrm{e}^{-(t-s)}\left(s^2+4s\right)_0^t+\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(t-s)}(2s+4)ds=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=2s+4 \\ du=2ds\end{matrix}\right|=t^2+4t-(t^2+4t)+\mathrm{e}^{-(t-s)}\left(2s+4\right)_0^t-2\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(t-s)}ds=$$

$$=2t+4-4e^{-t}-2e^{-(t-s)}\Big|_0^t=2t+4-4e^{-t}-2+2e^{-t}=2t-2e^{-t}+2=2(t-e^{-t}+1)$$

Ошентип, берилген интегралдык теңдеменин жообу:

$$u(t)=2(t-e^{-t}+1);\ t\in[0;1] \tag{14}$$

Жыйынтык: Вольтерранын биринчи түрдөгү (1) классикалык эмес интегралдык теңдемеси чечилди. **Теорема** айтылып, далилденди жана **натыйжада** (2) шартты канаатандырган (1) интегралдык теңдеме $C[\beta,T]$ мейкиндигинде жалгыз чечимге ээ болору көрсөтүлдү. Мисал берилип, толугу менен чыгарылып көрсөтүлдү.