Омаралиева Г.А.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ТРЕХ ЗОННОЙ БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ

В докладе исследуется асимптотическое поведение решения трех зонной бисингулярной задачи на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Существенные особенности задачи – присутствие малого параметра при старшей производной, существование промежуточного пограничного слоя и не гладкость решения соответствующей невозмущенной задачи.

Краевую задачу с перечисленными особенностями назовем бисингулярно возмущенной задачей с промежуточным пограничным слоем (по терминологии А.М. Ильина [1, 2]) или трех зонной задачей (по терминологии А.Х. Найфе [3]).

Асимптотическое разложение исследуемой задачи построено обобщенным и классическим методами погранфункций и с помощью принципа максимума получена оценка для остаточного члена разложения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\varepsilon^3 y_\varepsilon''(x) + x^4 y_\varepsilon'(x) + (x^4 - \varepsilon) y_\varepsilon(x) = f(x),\ x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) = a,\ y_\varepsilon(1) = b, \tag{2}$$

где a, b – известные постоянные, $f \in C^\infty[0,1]$, $f(0) \neq 0$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Уравнение (1) описывает два тесно связанных между собой процесса. Первое – это стационарное распределение тепла в движущейся среде, зависящее от одной переменной x. Малый параметр ε – это малая теплопроводность, а коэффициент $p(x)=x^4$ связан со скоростью среды. Другая интерпретация связана со случайным блужданием частицы на отрезке при условии, что $p(x)=x^4$ определяет среднюю скорость движения, а параметр ε – малую дисперсию [1].

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение решения двухточечной краевой задачи (1)-(2) на отрезке [0,1], когда малый параметр стремится к нулю, т.е. при $\varepsilon\to 0$.

ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ

Если формально считать, что значение малого параметра равна нулю, т.е. $\varepsilon=0$, то получим дифференциальное уравнение первого порядка с особой точкой при $x=0$:

$$x^4 y_0'(x) + x^4 y_0(x) = f(x). \tag{3}$$

В уравнении (1) в окрестности особой точки $x=0$ введем преобразование, т.е. растяжение координатной оси $x=\varepsilon^{\alpha}t$, $0<\alpha=\mathrm{const}$, тогда по правилам дифференцирования получаем $\mathrm{d}x=\varepsilon^{\alpha}\mathrm{d}t$ и $\mathrm{d}x^2=\varepsilon^{2\alpha}\mathrm{d}t^2$. В данном случае уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\varepsilon^{3-2\alpha}\frac{d^2 y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{3\alpha}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + (\varepsilon^{4\alpha}t^4 - \varepsilon)y_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t),\ t\in(0,\varepsilon^{-\alpha}). \tag{4}$$

Когда малый параметр ε стремится к нулю предельная форма уравнения (4) зависит от значения величины α. При положительном значений величины α справедливо неравенство: $3\alpha<4\alpha$. Поэтому из левой части равенства (4) «главной» будет следующее выражение:

$$\varepsilon^{3-2\alpha}\frac{d^2 y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{3\alpha}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} - \varepsilon y_\varepsilon(t).$$

Уравнивая порядки поведения слагаемых по малому параметру двух любых слагаемых (4) имеем соответствующие характерные пределы, возможны следующие случаи:

1) 3–2α=3α ⇒ α=3/5;

2) 3–2α=1 ⇒ α=1;

3) 3α=1 ⇒ α=1/3.

Если α=3/5 (первый случай), то получим выражение

$$\varepsilon^{9/5}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{9/5}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t),$$

так как $\varepsilon^{9/5}<\varepsilon$, то главной частью этого выражения будет $\varepsilon y_\varepsilon(t)$, и здесь отсутствует производная. Поэтому первый случай, т.е. α=3/5 не будем рассматривать.

Если α=1 (второй случай), то получим выражение

$$\varepsilon\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^3t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t),$$

в главной части $\varepsilon\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$ присутствует производная второго порядка. Поэтому случай α=1 будем исследовать.

И наконец третий случай, если α=1/3, то получим выражение

$$\varepsilon^{7/3}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$$

в главной части $\varepsilon t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$ присутствует производная первого порядка. Поэтому и этот случай α=1/3 будем исследовать.

ФОРМАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Формальное асимптотическое приближение решения задачи (1)-(2). В задаче (1)-(2) сделаем преобразование

$$y_\varepsilon(x) = be^{1-x} z_\varepsilon(x),$$

где $z_\varepsilon(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда

$$y'_\varepsilon(x) = -be^{1-x}(z_\varepsilon(x) - z'_\varepsilon(x)),$$
$$y''_\varepsilon(x) = be^{1-x}(z_\varepsilon(x) - 2z'_\varepsilon(x) + z''_\varepsilon(x)),$$

и задача (1)-(2) приводится к виду:

$$\varepsilon^3 z_\varepsilon''(x) + (x^4 - 2\varepsilon^3) z_\varepsilon'(x) + (\varepsilon^3 - \varepsilon) z_\varepsilon(x) = \tilde{f}(x),\ x \in (0,1), \tag{5}$$

$$z_\varepsilon(0) = \tilde{a},\ z_\varepsilon(1) = 1, \tag{6}$$

Решение задачи (5), (6) будем искать в виде ряда:

$$z_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(\tau) + \frac{1}{\mu^3} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(t), \tag{7}$$

где $t = \dfrac{x}{\mu},\ \mu = \sqrt[3]{\varepsilon},\ \tau = \dfrac{x}{\varepsilon}.$

Как и в предыдущем главе к правой части уравнения (5) добавим и вычтем пока неизвестную функцию $h_\varepsilon(x)$. Т.е. уравнение (1) запишем в виде:

$$\varepsilon^3 z_\varepsilon''(x) + (x^4 - 2\varepsilon^3) z_\varepsilon'(x) + (\varepsilon^3 - \varepsilon) z_\varepsilon(x) = \tilde{f}(x) - h_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x),\ x \in (0,1), \tag{8}$$

Подставляя соотношение (7) в уравнение (8) и в краевые условия (6) получаем задачи:

$$\varepsilon^3 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v''_k(x) + (x^4 - 2\varepsilon^3) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v'_k(x) + (\varepsilon^3 - \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) = \tilde{f}(x) - h_\varepsilon(x), \tag{9}$$

$$v_0(1) = 1,\ v_k(1) = 0,\ k \in N; \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\mu^4 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w''_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (t^4 w'_k(t) - w_k(t)) - 2\mu^5 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w'_k(x) + \\ &+ \mu^6 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(x) = h_\mu(t),\ t \in (0, 1/\mu), \end{aligned} \tag{11}$$

$$w_k(1/\mu) = 0,\ k \in N_0; \tag{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\pi''_k(\tau) - \pi_k(\tau)) = 2\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi'_k(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\tau^4 \pi'_k(\tau) + \pi_k(\tau)),\ \tau \in (0, 1/\varepsilon), \tag{13}$$

$$\pi_0(0) = -(w_0(0) + \mu w_1(0) + \mu^2 w_2(0)),\ \lim_{\tau \to \infty} \pi_0(\tau) = 0; \tag{14}$$

$$\pi_1(0)=a-(v_0(0)+w_3(0)+\mu w_4(0)+\mu^2 w_5(0)),\ \ \lim_{\tau\to\infty}\pi_1(\tau)=0; \qquad (15)$$

$$\pi_j(0)=-(v_{j-1}(0)+w_{3j}(0)+\mu w_{3j+1}(0)+\mu^2 w_{3j+2}(0)),\ \ \lim_{\tau\to\infty}\pi_j(\tau)=0,\ 1<j\in N. \quad (16)$$

Пусть

$$h_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(h_{k,0}+h_{k,1}x+h_{k,2}x^2+h_{k,3}x^3), \qquad (17)$$

$h_{k,\mathrm{j}}$ – пока неопределенные числа, конкретизируются ниже.

Рассмотрим задачу (9)-(10). Задачу (9)-(10) запишем в виде:

$$x^4 v'_0(x)=\tilde f(x)-(h_{0,0}+h_{0,1}x+h_{0,2}x^2+h_{0,3}x^3),\ x\in(0,1), v_0(1)=1; \qquad (18)$$

$$x^4 v'_k(x)=\tilde f_k(x)-(h_{k,0}+h_{k,1}x+h_{k,2}x^2+h_{k,3}x^3),\ x\in(0,1),\ v_k(1)=0, \qquad (19)$$

где $\tilde f_k(x)=v_{k-1}(x)-v_{k-3}(x)+2v'_{k-3}(x)-v''_{k-3}(x),\ v_s(x)\equiv 0,\ \mathrm{s}<0.$

Интегрируя краевую задачу (18) имеем:

$$v_0(x)=1+\int_1^x \frac{\tilde f(s)-h_{0,0}-h_{0,1}s-h_{0,2}s^2-h_{0,3}s^3}{s^4}ds.$$

По условию задачи $\tilde f\in C^\infty[0,1],$, поэтому функцию $\tilde f(x)$ в окрестности точки x=0 можно представить в виде:

$$\tilde f(x)=\tilde f(0)+\tilde f'(0)x+\frac{\tilde f''(0)}{2}x^2+\frac{\tilde f'''(0)}{6}x^3+x^4\tilde f_0(x).$$

Если неизвестные коэффициенты $h_{0,j}$ выбрать следующим образом:

$$h_{0,0}=\tilde f(0),\ h_{0,1}=\tilde f'(0),\ h_{0,2}=\frac{\tilde f''(0)}{2},\ h_{0,3}=\frac{\tilde f'''(0)}{6},$$

то получим гладкую функцию:

$$v_0(x)=1+\int_1^x \tilde f_0(s)ds,$$

где $\tilde f_0(x)=\dfrac{1}{x^4}\left(\tilde f(x)-\tilde f(0)-\tilde f'(0)x-\dfrac{\tilde f''(0)}{2}x^2-\dfrac{\tilde f'''(0)}{6}x^3\right),\quad \tilde f_0(0)=\dfrac{\tilde f^{IV}(0)}{24}$ и $v_0\in C^\infty[0,1].$

Аналогично, интегрируя задач (19), получим:

$$x^4 v'_k(x) = \tilde{f}_k(x) - (h_{k,0} + h_{k,1}x + h_{k,2}x^2 + h_{k,3}x^3),\ x \in (0,1),\ v_k(1) = 0$$

$$v_k(x) = \int_1^x \frac{\tilde{f}_k(s) - h_{k,0} - h_{k,1}s - h_{k,2}s^2 - h_{k,3}s^3}{s^4} ds,$$

где $\tilde{f}_k(x) = v_{k-1}(x) - v_{k-3}(x) + 2v'_{k-3}(x) - v''_{k-3}(x),\ v_s(x) \equiv 0,\ \mathrm{s} < 0.$

И здесь мы определим значения неизвестных коэффициентов $h_{k,\mathrm{j}}$. Пусть

$$\tilde{f}_k(x) = \tilde{f}_k(0) + \tilde{f}'_k(0)x + \frac{\tilde{f}''_k(0)}{2}x^2 + \frac{\tilde{f}'''_k(0)}{6}x^3 + x^4 \tilde{\tilde{f}}_k(x)$$

и

$$h_{k,0} = \tilde{f}_k(0),\ h_{k,1} = \tilde{f}'_k(0),\ h_{k,2} = \frac{\tilde{f}''_k(0)}{2},\ h_{k,3} = \frac{\tilde{f}'''_k(0)}{6},\ k \in N.,$$

тогда

$$v_k(x) = \int_1^x \tilde{\tilde{f}}_k(s) ds \ \Rightarrow\ v_k \in C^\infty[0,1],\ k \in N.$$

Перейдем теперь к задаче (11)-(12). Уравнение (11) запишем в виде:

$$\begin{aligned} Lw_k \equiv t^4 w'_k(t) - w_k(t) = -w''_{k-4}(t) + 2w'_{k-5}(t) - w_{k-6}(t) + \\ + h_{k,0} + (\mu t)h_{k,1} + (\mu t)^2 h_{k,2} + (\mu t)^3 h_{k,3},\ t \in (0, 1/\mu), \end{aligned} \tag{20}$$

В задаче (20), (12), при k=0 имеем задачу:

$$Lw_0 = h_{0,0} + (\mu t)h_{0,1} + (\mu t)^2 h_{0,2} + (\mu t)^3 h_{0,3},\ t \in (0, 1/\mu),\ w_0(1/\mu) = 0,$$

последнее уравнение можно записать в виде

$$\left(w_0(t) e^{\frac{1}{3t^3}} \right)' = t^{-4} e^{\frac{1}{3t^3}} \left(h_{0,0} + \mu t h_{0,1} + (\mu t)^2 h_{0,2} + (\mu t)^3 h_{0,3} \right),$$

интегрируя находим $w_0(t)$:

$$w_0(t) = e^{-\frac{1}{3t^3}} \int_{\mu^{-1}}^t s^{-4} e^{\frac{1}{3s^3}} \left(h_{0,0} + h_{0,1}\mu s + h_{0,2}(\mu s)^2 + h_{0,3}(\mu s)^3 \right) ds.$$

Отметим некоторые свойства функции $w_0(t)$:

$$a)\ w_0(0) = -h_{0,0}, \quad b)\ w_0(t) \to -\frac{h_{0,0}}{t^3},\ t \to \infty, \quad c)\ w_0 \in \mathrm{C}^\infty[0, 1/\mu].$$

Аналогично, при k=1,2… получим задачи:

$$Lw_j = h_{j,0} + (\mu t)h_{j,1} + (\mu t)^2 h_{j,2} + (\mu t)^3 h_{j,3},$$
$$t \in (0,1/\mu),\ w_j(1/\mu) = 0,\ j = 1,2,3;$$

$$Lw_4 = -w''_0(t) + h_{4,0} + (\mu t)h_{4,1} + (\mu t)^2 h_{4,2} + (\mu t)^3 h_{4,3},\ t \in (0,1/\mu),$$

$$Lw_5 = -w''_1(t) + 2w'_0(t) + h_{5,0} + (\mu t)h_{5,1} + (\mu t)^2 h_{5,2} + (\mu t)^3 h_{5,3},\ t \in (0,1/\mu),\ w_5(1/\mu) = 0$$

$$Lw_k = -w''_{k-4}(t) + 2w'_{k-5}(t) - w_{k-6}(t) +$$
$$+ h_{k,0} + (\mu t)h_{k,1} + (\mu t)^2 h_{k,2} + (\mu t)^3 h_{k,3},\ t \in (0,1/\mu),\ w_k(1/\mu) = 0,\ 5 < k \in N.$$

Решения этих задач существуют единственны и $w_k \in C^\infty(0,1/\mu]$.

Следует отметить, что функций $w_k(t)$ являются функциями пограничного слоя, но эти функций убывают вне пограничного слоя степенным характером.

Переходим к исследованию задач (13)-(16). Уравнению (13) можно записать в виде рекуррентных соотношений:

$$\pi''_0(\tau) - \pi_0(\tau) = 0, \tag{21}$$

$$\pi''_1(\tau) - \pi_1(\tau) = 2\pi'_0(\tau), \tag{22}$$

$$\pi''_k(\tau) - \pi_k(\tau) = 2\pi'_{k-1}(\tau) - (\tau^4 \pi'_{k-2}(\tau) + \pi_{k-2}(\tau)), 1 < k \in N. \tag{23}$$

Решения задач (21), (14); (22), (15) и (23), (16) существуют, единственны и представимы в виде, соответственно:

$$\pi_0(\tau) = -(w_0(0) + \mu w_1(0) + \mu^2 w_2(0))e^{-\tau},$$

$$\pi_1(\tau) = (a - v_0(0) - w_3(0) - \mu w_4(0) - \mu^2 w_5(0))e^{-\tau} - 2\pi_0(0)\tau e^{-\tau},$$

$$\pi_k(\tau) = -(v_{k-1}(0) + w_{3k}(0) + \mu w_{3k+1}(0) + \mu^2 w_{3k+2}(0))e^{-\tau} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\int_\tau^{+\infty} e^{\tau-s}\Psi_k(s)ds + \int_0^\tau e^{s-\tau}\Psi_k(s)ds - \int_0^{+\infty} e^{-(\tau+s)}\Psi_k(s)ds\right), k = 2,3,...$$

где $\Psi_k(\tau) = 2\pi'_{k-1}(\tau) - (\tau^4\pi'_{k-2}(\tau) + \pi_{k-2}(\tau)),\ 1 < k \in N.$

Найденные решения $\pi_k(\tau)$ устроняют “невязки” в точке x=0 и экспоненциально убывают вне пограничного слоя.

Докажем, что построенный ряд (7) является асимптотическим рядом. Для этого нам достаточно оценить остаточный член разложения (7).

ОБОСНОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Пусть

$$R_{n,\varepsilon}(x) = z_\varepsilon(x) - z_{n,\varepsilon}(x),$$

где $z_{n,\varepsilon}(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x) + \frac{1}{\mu^3}\sum_{k=0}^{3n+3} \mu^k w_k(t) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \pi_k(\tau)$,

$R_{n,\varepsilon}(x)$ – остаточный член разложения (7).

Тогда относительно $R_{n,\varepsilon}(x)$ получим следующую двухточечную краевую задачу

$$\begin{aligned} lR_{n,\varepsilon} \equiv \varepsilon^3 R''_{n,\varepsilon}(x) + (x^4 - 2\varepsilon^3)R'_{n,\varepsilon}(x) - \varepsilon(1-\varepsilon^2)R_{n,\varepsilon}(x) - \\ - \varepsilon^{n+1}\Phi(x,t,\tau,\varepsilon) = 0,\ \ x \in (0,1), \end{aligned} \tag{24}$$

$$R_{n,\varepsilon}(0) = 0,\ R_{n,\varepsilon}(1) = O(e^{-1/\varepsilon}),\ \varepsilon \to 0\,. \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi(x,t,\tau,\varepsilon) = z_n(x) - z_{n-2}(x) + 2z'_{n-2}(x) - z''_{n-2}(x) - \varepsilon(z_{n-1}(x) - 2z'_{n-1}(x) + z''_{n-1}(x)) + \\ &+\varepsilon^2(z_n(x) - 2z'_n(x) + z''_n(x)) - \sqrt[3]{\varepsilon}(w''_{3n}(t) - 2w'_{3n-1}(t) + w_{3n-2}(t)) - \\ &-\sqrt[3]{\varepsilon^2}(w''_{3n+1}(t) - 2w'_{3n}(t) + w_{3n-1}(t)) - \varepsilon(w''_{3n+2}(t) - 2w'_{3n+1}(t) + w_{3n}(t)) - \\ &-\varepsilon\sqrt[3]{\varepsilon}(w''_{3n+3}(t) - 2w'_{3n+2}(t) + w_{3n+1}(t)) + \varepsilon\sqrt[3]{\varepsilon^2}(2w'_{3n+3}(t) - w_{3n+2}(t)) - \mu^6 w_{3n+3}(t) + \\ &+2\pi'_{n+1}(\tau) - \tau^4\pi'_n(\tau) - \pi_n(\tau) - \varepsilon(\tau^4\pi'_{n+1}(\tau) + \pi_{n+1}(\tau)). \end{aligned}$$

Для оценки остаточной функций применяем метод дифференциальных неравенств. Пусть $u^{\text{Н}}_\varepsilon(x)$ – нижнее решение, а $u^{\text{В}}_\varepsilon(x)$ – верхнее решение и

$$u^{\text{Н}}_\varepsilon(x) = -\varepsilon^n Mz(x),\quad u^{\text{В}}_\varepsilon(x) = \varepsilon^n Mz(x),$$

где $z(x)=1-x^2/2>0$, $M = \max\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{2\varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon)}{2x^5 + \varepsilon\left(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2)\right)}\right|$,

$$0 < 1{,}5 - x^2 < 2 - x^2 - 3\varepsilon^2 \le 2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2)\ .$$

Тогда при $x\in[0,1]$ и $0<\varepsilon<<1$ имеем:

a) $u^H_\varepsilon(x) < u^B_\varepsilon(x),\ x \in [0,1], 0 < \varepsilon << 1;$

b) $u^H_\varepsilon(0) < u^B_\varepsilon(0),\ \ u^H_\varepsilon(1) < u^B_\varepsilon(1),\ \ 0 < \varepsilon << 1;$

$$c)\ \ lu^{H}{}_{\varepsilon} \geq 0,\ lu^{B}{}_{\varepsilon} \leq 0.$$

Действительно

$$lu^{H}{}_{\varepsilon} = M(\varepsilon^3 + x^5 - 2\varepsilon^3 x + (\varepsilon - \varepsilon^3)(1 - \frac{x^2}{2})) - \varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2}(2x^5 + \varepsilon(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2)))\left(M - \frac{2\varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon)}{2x^5 + \varepsilon(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2))}\right) \geq 0;$$

$$lu^{B}{}_{\varepsilon} = \varepsilon^n(-M(\varepsilon^3 + x^5 - 2\varepsilon^3 x + (\varepsilon - \varepsilon^3)(1 - \frac{x^2}{2})) - \varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon)) =$$

$$= -\frac{\varepsilon^n}{2}(2x^5 + \varepsilon(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2)))\left(M - \frac{2\varepsilon\Phi(x,t,\tau,\varepsilon)}{2x^5 + \varepsilon(2 - x^2 - \varepsilon^2(4x - x^2))}\right) \leq 0.$$

Поэтому, задача (24), (25) имеет единственное решение $R_{n,\varepsilon}(x)$, которое ограничено верхним и нижнем решениям:

$$u^{H}{}_{\varepsilon}(x) \leq R_{n,\varepsilon}(x) \leq u^{B}{}_{\varepsilon}(x),\quad при\quad x \in [0,1], 0 < \varepsilon << 1;$$

$$\text{т.е. } -\varepsilon^n Mz(x) \leq R_{n,\varepsilon}(x) \leq \varepsilon^n Mz(x),\quad при\quad x \in [0,1], 0 < \varepsilon << 1.$$

Отсюда следует, что $R_{n,\varepsilon}(x) = O(\varepsilon^n),\quad при\quad \varepsilon \to 0,\ \ x \in [0,1].$

ВЫВОД

Теорема. Для решения двухточечной краевой задачи (1) и (2) на отрезке $x \in [0,1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_{\varepsilon}(x) = be^{1-x}\left(\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^k \pi_k(\tau) + \frac{1}{\mu^3}\sum_{k=0}^{3n+3}\mu^k w_k(t)\right) + O(\varepsilon^n),\ \varepsilon \to 0.$$

Эти результаты опубликованы в журнале Вестник ОшГУ [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе [Текст] / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.
2. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука. – 1989. – 334 с.
3. Найфе, А. Введение в методы возмущений [Текст] / А. Найфе. – Москва: Мир. – 1984. – 535 с.

4. Омаралиева, Г.А. Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов // Труды Института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук. – 2022. –Т. 28. – № 2. – С. 193-200.
5. Омаралиева, Г.А. Асимптотика решения двух зонной двухточечной краевой задачи [Текст] / Г.А. Омаралиева, Д.А. Турсунов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13. – № 2. – С. 40–46.
6. Омаралиева, Г.А. Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем [Текст] / Г.А. Омаралиева, *Турсунов Д.А., Маматбуваева М.И., Раманкулова Ш.А.* // Вестник Ошского государственного университета. – 2021. – Т. 1. – № 1. – С. 102-109.
7. Омаралиева, Г.А. Бисингулярно возмущенное уравнение первого порядка с бипограничным слоем [Текст] / Г.А. Омаралиева, *Турсунов Д.А., Муса уулу Н. Э.* // Вестник Ошского государственного университета. – 2022. – № 4. – С. 244-251.
8. Омаралиева, Г.А. Асимптотика решения трех зонной задачи Коши [Текст] / Г.А. Омаралиева // Вестник ЖАГУ. – 2022. – № 4. – С. 244-251.
9. Омаралиева, Г.А. Достаточное условие существования дополнительной зоны в сингулярно возмущенных краевых задачах второго порядка [Текст] / Г.А. Омаралиева // Бюллетень науки и практики.– 2023. – Т. 9. – № 2. – С. 10-16.