Примерные экзаменационные вопросы

1. Теория множеств: Способы задания множеств, операции над множествами, булеан, эквивалентные множества, виды множеств.
2. Аналитическая геометрия на плоскости: прямая линия на плоскости, угол между прямыми на плоскости. условие параллельности и перпендикулярности прямых, плоские линии второго порядка, преобразование систем координат.
3. Логика высказываний, исчисление предикатов, понятие алгоритма.
4. Уравнение линии, поверхности и плоскости в пространстве; взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве; поверхности второго порядка.
5. Теория групп.
6. Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.
7. Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность.
8. Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^n в R^m, производная сложной функции, ряд Тейлора, теорема о неявной функции, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.
9. Линейная алгебра: системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность, полилинейные формы, симметрическая и внешняя степень векторного пространства.
10. Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.
11. Общая топология: топологические пространства, компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра.
12. Основы теории чисел: Теоремы Ферма, теория сравнения, непрерывные цепные дроби, кодирование.
13. Нормированные векторные пространства, гильбертовы пространства. Пространства L_1 и L_2. Ряд Фурье, теорема Фейера. Полнота тригонометрической системы функций L_2, условия Дини сходимости ряда Фурье. Преобразование Фурье, его основные свойства.
14. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
15. Линейные топологические и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха. Компактные операторы.

16. Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.
17. Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.
18. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстродействия для линейных систем.
19. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.
20. Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм.
21. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.
22. Классификация двумерных замкнутых поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей.
23. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши – Ковалевской. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики
24. Теория кривых и поверхностей в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Деривационные формулы.
25. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.).
26. Риманова метрика и римановы многообразия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика. Геометрия Лобачевского. Проективная геометрия.
27. Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур.
28. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.
29. Автономные системы уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы.

30. Тензоры и тензорные поля на гладких многообразиях. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли.
31. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.
32. Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм.
33. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.).
34. Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности.
35. Обобщенные функции. Свертка обобщенных функций, преобразование.
36. Группы Ли и алгебры Ли, присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Действия групп Ли на гладких многообразиях.
37. Необходимость математических пакетов.
38. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Задачи на собственные функции и собственные значения.
39. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона –Якоби.
40. Интегральные уравнения.