

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Департамент аспирантуры и докторантуры

ОП 510100 Математика



ПОРТФОЛИО



Сарыгулова Нуркыз Акболушовна

Ош-2021

Содержание

- **ДИПЛОМЫ**
- **ГРАМОТЫ**
- **СЕРТИФИКАТЫ**
- **ПОСОБИЯ**
- **СТАТЬИ**

ДИПЛОМЫ

Кыргыз Республикасы

ДИПЛОМ
АРТЫКЧЫЛЫГЫ МЕНЕН
№ CD110212852

ОШИ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Мамлекеттик аттестациялык комиссиянын
2011-жылдын 30-майындагы чечими менен
Сафизулова Нуркыз Акболутовна
"Математика"
адистиги боюнча
математика мугалими
квалификациясы ыйгарылды.

Мамлекеттик аттестациялык
комиссиянын төрагасы: 

Ректор: 

М.О.

Диплом жогорку билим жөнүндөгү мамлекеттик документ болуп эсептелет.
2 барак тиркеме милдеттүү.

Дипломдун үчүнчүсү: www.dipr.com.kg

Каттоо номери 1113



Ош шаары, 10-август 2011-жыл

Кыргызская Республика

ДИПЛОМ
С ОТЛИЧИЕМ
№ CD110212852

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Решением Государственной аттестационной комиссии
от 30 мая 2011 года
Сафизуловой Нуркыз Акболутовна
присвоена квалификация
учитель математики
по специальности
"Математика".

Председатель Государственной
аттестационной комиссии: 

Ректор: 

М.П.

Диплом является государственным документом
о высшем образовании.
Приложение на 2-х листах обязательно.

Пример подписей: www.dipr.com.kg

Регистрационный номер 1113



город Ош, 10 августа 2011 года



ГРАМОТЫ

Учителю! Мугалимге!

2012-жылы «Жаштар жана Билим»
тегилана карата окуучуларга шаардык
олимпиадада ийгиликтүү катыштак-
тарга үчүн Ош шаардык №38-мектеп-
гимназиясынан тали математика
мугалими Сарогулова Нурказ 8-март
Аялдардан 31 аралык күнүмө карата
мектептин мактоо бааракчоса

менен сойлокам.

Математика мугалими

Мугалимге



С.Б.

Жолдашева Б.

Нуркулова З.



КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫ
ОШ ШААРЫНЫН МЭРИЯСЫ
ОШ ШААРЫНЫН
ЖАШТАР ИШТЕРИ БОЮНЧА КОМИТЕТИ



**АРДАК
ГРАМОТА**

Ош шаарында "2012-жыл - жаштар жана билим жылында" мамлекеттик жаштар саясатын өнүктүрүүдө кошкон салымы үчүн мугалимдер күнүнө карата

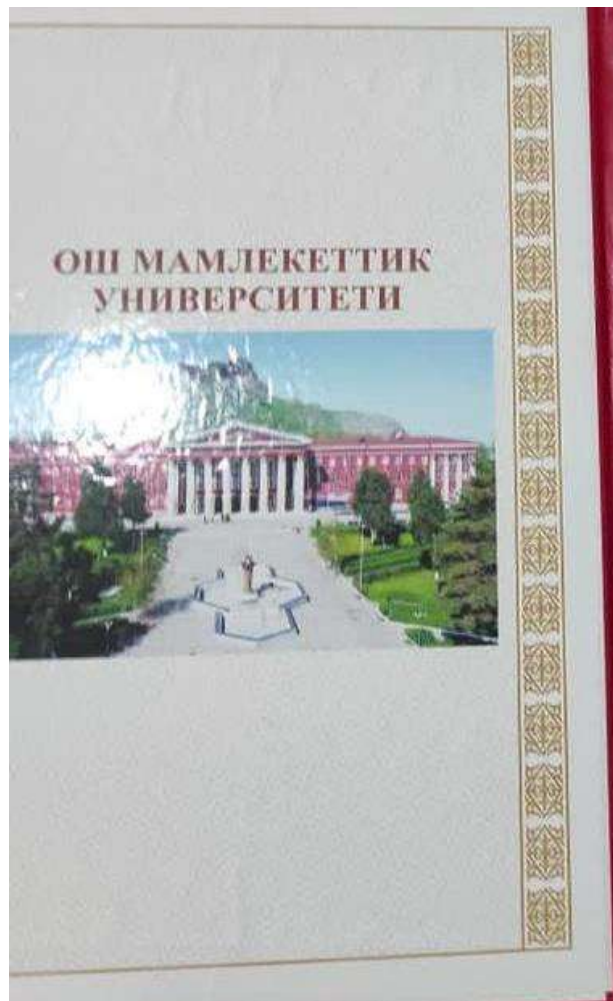
Ош шаарындагы №38 Барпы атындагы гимназия мектебинин мугалими

**САРЫГУЛОВА НУРКЫЗ
АКБОЛУШЕВНА**
сыйланат


Ош шаарынын жаштар иштери боюнча комитетинин төрагасы С. Жунусбаев

Буйрук № 292
- 18 - 06 - 2012 -

Ош - 2012



КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН
БИЛИМ БЕРУУ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ
ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ



Билим берүү, тарбиялоо, коомдук иштердеги көп жылдык үзүрлүү эмгеги үчүн жана "Мугалимдер күнүнө" карата индустриалдык-педагогикалык колледжинин "Орто кесиптик билим берүүнүн теориясы жана методикасы" кафедрасынын окутуучусу

**Сарыгулова Нуркыз
Акболушовна**

АРДАК ГРАМОТА
менен сыйланат

ОшМУнун ректору, профессор Исмаилов К.А.

Буйрук №967 26.09.2018.



СЕРТИФИКАТЫ







МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
МЕЖДУНАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КООПЕРАЦИИ



СЕРТИФИКАТ

Сарыгулова Нуркыз Акболушовна

прошел(а) семинар повышения квалификации:
«Формирование учебной мотивации у студентов».
с 18 по 25 апреля 2022 года, в объеме 72 часа.

Ректор МУИТ

Бегалыев У.Т.



К.э.н., доцент РУК

Татина Э.А.



LE 150001566 МОИИ КР



Агентство по аккредитации образовательных программ и организаций (ААОПО)

Сертификат

Настоящим подтверждается, что

**Сарыгулова
Нуркыз**

прошла подготовку на семинаре-тренинге ААОПО
“Проведение независимой аккредитации программ и организаций профессионального образования”



Директор ААОПО

Б. И. Исмаилов



Регистрационный номер: СТ-010450

Дата выдачи: 2.11. 2017 г.



Учебные пособия и практикумы

К. БАЙГАЗИЕВ, Н. А. САРЫГУЛОВА,
Ч. Х. АБДУЛЛАЕВА, Э. КУТПИДИН уулу

МАТЕМАТИКА

БОЮНЧА АДАПТАЦИЯЛЫК КУРС

...	Миллиондор классы			Миңдиктер классы			Бирдиктер классы			Класс
...	Жүздүктөр	Ондуктар	Бирдиктер	Жүздүктөр	Ондуктар	Бирдиктер	Жүздүктөр	Ондуктар	Бирдиктер	Разряддары
...										Модель
...	1	4	8	2	5	6	7	0	4	Сан
...	Бир жүз кырк сегиз миллион			эки жүз элүү алты миң			жетти жүз төрт			Окутушу

ОШ-2019

Статьи и тезисы

NeuroQuantology | October 2022 | Volume 20 | Issue 14 | Page 505-508 | Doi: 10.4704/nq.2022.20.14.NQ88071
Gulbadan Matieva¹, Ularbek Moldoyarov², Bektur Azimov³, Gulmira Shamshieva³, Nurkyz Sarygulova⁴, Zhyppargul Abdullaeva^{5*}
Space Fractal Program for 3D Model Construction



Space Fractal Program for 3D Model Construction

Gulbadan Matieva¹, Ularbek Moldoyarov², Bektur Azimov³, Gulmira Shamshieva³, Nurkyz Sarygulova⁴, Zhyppargul Abdullaeva^{5*}

Abstract

Program created for 3D model space for geometrical fractal construction and its projections on octahedron symmetry planes, which have limit for space fractal were determined. From mathematical point of view, a fractal is primarily set of fractional dimensions.

Key Words: Space fractal, Projection, Limit octahedron, 3D model.

DOI Number: 10.4704/nq.2022.20.14.NQ88071

Neuro Quantology 2022; 20(14):505-508

505

INTRODUCTION

Fractal geometry and the chaos theory closely related to higher education subjects such as fractal graphics, chaotic dynamics, etc., while the fractal sets can be studied in the school mathematics course (Sekovanov, 2006). Study of Fractals as concepts, which have scientific

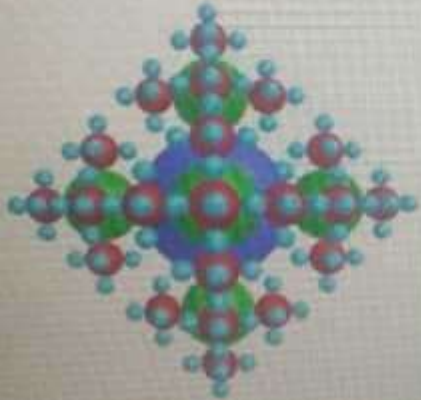
us (Trubetskoy & Trubetskova, 2016).

refused to study the forms that nature demonstrates to us by studying Euclidean geometric figures and inventing all sorts of the new geometry is capable to describe many of the irregular and fragmented forms in the

can be used. For example, Compass3D, 3ds Max, etc. There are specialized programs that have attached to algorithms for implementing the main stages of construction.

Since the main objective of this study is to create a special script that will make it possible to fully automate the process, consideration of the mathematical basis of fractals theory and constructing study methods implement the practical part is carried out using the JavaScript programming language and the WebGL library, Three.js.

Figure 3 is showing a script for building a 3D model of a spatial fractal "Sphere with six towers" (Azevich, 2008).



```
slx3=0, sly3=0, slz3=0; for (var k = 0; k < 6; k++) {if( ifBreak( j, k ) == 0 ) {var slr=sr/8; var pis=3*slr; var rXYZ = releaseXYZ( k, slx2, sly2, slz2, pis);slx3=rXYZ[0]; sly3=rXYZ[1]; slz3=rXYZ[2]; var geometry = new THREE.SphereGeometry( slr, 3*slr, 3*slr ); var material = new THREE.MeshStandardMaterial( { color: 0xe3bb2e5 } ); var sphere = new THREE.Mesh( geometry, material ); sphere.position.set( slx3, sly3, slz3 ); sphereArr[3].push(sphere); var slx4=0, sly4=0, slz4=0; for (var l = 0; l < 6; l++) {if( ifBreak( k, l ) == 0 ) {var slr=sr/16; var pis=3*slr; var rXYZ = releaseXYZ( l, slx3, sly3, slz3, pis); slx4=rXYZ[0]; sly4=rXYZ[1]; slz4=rXYZ[2]; var geometry = new THREE.SphereGeometry( slr, 4*slr, 4*slr ); var material = new THREE.MeshStandardMaterial( { color: 0xff9500 } ); var sphere = new THREE.Mesh( geometry, material ); sphere.position.set( slx4, sly4, slz4 ); sphereArr[4].push(sphere);
```

507

Series of fractals shown in the Figures 4 to 6.



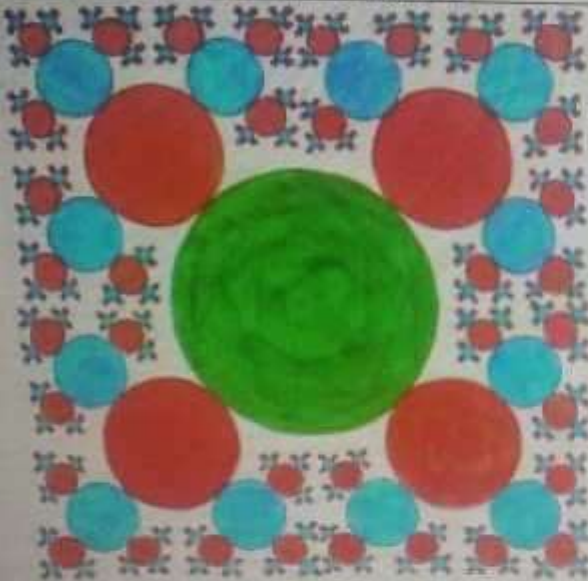


Fig. 5. Geometric fractal limited square of circles.

As a result, a 3D model of this fractal obtained as shown in the Figure 6.



Budiansky, P.S., & Safonova, O.N. (2011). Fractal geometry in economics. *Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*, (1), 37-42.

Essey, M. Maina, J.N. (2020). Fractal analysis of concurrently prepared latex rubber casts of the bronchial and vascular systems of the human lung. *OpenBiol*.10190249190249. <http://doi.org/10.1098/rsob.190249>

Gapontseva, M. G., Fedorov, V. A., & Gapontsev, V. L. (2009). The concepts of fractal geometry as the language of objects of pedagogy and the theory of scientific knowledge. *Education and Science*, (2), 3-22.

Graves, T., Gramacy, R., Watkins, N., & Franzke, C. (2017). A Brief History of Long Memory: Hurst, Mandelbrot and the Road to ARFIMA, 1951-1980. *Entropy*, 19(9), 437. <http://dx.doi.org/10.3390/e19090437>

Husain, A., Nanda, M.N., Chowdary, M. S., & Sajid, M. (2022). Fractals: An Eclectic Survey, Part-I. *Fractal and Fractional*, 6(2), 89. <http://dx.doi.org/10.3390/fractalfract6020089>

Mandelbrot B. Fractal geometry of nature. Moscow: Institute for Computer Research, 2002: 656.

Matieva, G. (2018a). About one spatial geometric fractal. *Current Scientific Research in the Modern World*, 5-9(37), 21-25.

Matieva G. (2018b). Authorship copyright for the geometric fractal "Carpet" (certificate No. 3332, dated 05/23/2018).

Matieva G. (2018c). Authorship copyright for the geometric fractal "Sphere with six towers" (certificate No. 2257, dated 06/04/2018).

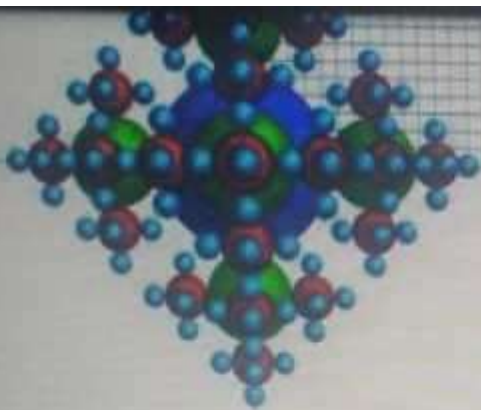


Fig. 3. 3D computer image of sphere with six towers.

```

var slx1=0, sly1=0, slz1=0; for (var i = 0; i < 6;
i++){var slr=sr/2; var pis=3*slr;var rXYZ =
releaseXYZ(i, slx0, sly0, slz0, pis); slx1=rXYZ[0];
sly1=rXYZ[1]; slz1=rXYZ[2]; var geometry =
new THREE.SphereGeometry( slr, slr, slr); var
material = new THREE.
MeshStandardMaterial({color: 0x22cc22}); var
sphere = new THREE.Mesh( geometry, material
); sphere.position.set( slx1, sly1, slz1);
sphereArr[1].push(sphere); var slx2=0, sly2=0,
slz2=0; for (var j = 0; j < 6; j++) (if( ifBreak( i, j )
== 0 ) {var slr=sr/4; var pis=3*slr; var rXYZ=
releaseXYZ( j, slx1, sly1, slz1, pis);
slx2=rXYZ[0]; sly2=rXYZ[1]; slz2=rXYZ[2]; var
geometry = new THREE.SphereGeometry( slr,
2*slr, 2*slr ); var material = new
THREE.MeshStandardMaterial( { color:
0xe80000 } ); var sphere = new THREE.Mesh(
geometry, material ); sphere.position.set( slx2,
sly2, slz2 ); sphereArr[2].push(sphere); var

```

```

geometry, material ); sphere.position.set( slx4,
sly4, slz4 ); sphereArr[4].push(sphere);

```

Series of fractals shown in the Figures 4 to 6.

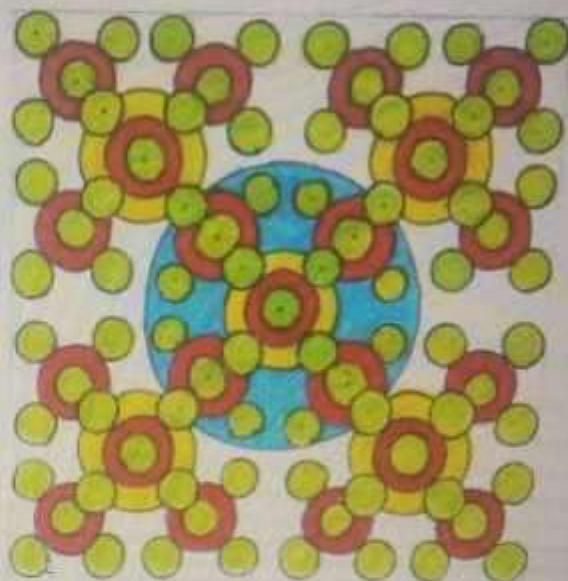


Fig. 4. Geometric flat fractal carpet.

clouds are not spheres, mountains are not cones, the lines of the shore are not circles, the bark is not smooth, and lightning does not spread in a straight line. ...Nature shows us not just a higher degree, but a completely different level of complexity. "The number of different length scales in structures is always infinite."

A new figure fractal can act as a model of complex natural systems, such as tree crowns, mountain ranges, coastlines, the surface of the Moon, etc. Tree-like fractals are used to model not only plants, but also the bronchial tree, the work of the kidneys, the circulatory system (Essey & Maina, 2020).

Previously, a spatial geometric fractal and its projections on the face and diagonal plane of the cube, which is the limit for fractal, were constructed (Matieva, 2018a).

The description of the construction of a single space fractal and its projection onto the base and the diagonal plane of a correct, straight, hexagonal prism, which is the boundary for the space fractal.

Let us draw a sphere $S(O, r)$ with center at a point O and radius r .

Circles $C_1(O, r), C_2(O, r), C_3(O, r)$ divide the sphere $S(O, r)$ into an "equal" six parts. (Figure 1). Let us construct six spheres with centers lying on the axes $(Ox), (Oy), (Oz)$ and radius $r' < r$, which touch the sphere $S(O, r)$ at diametrically opposite points $A_1 A_2; B_1 B_2; C_1 C_2$ (fig.1).

Further, we will do the same with each sphere with radius $r' < r$. For example, consider the sphere $S(B_1, r')$. Let's construct five spheres with radius $r'' < r'$, which touch the sphere $S(B_1, r')$ at five diametrically opposite points (except

Fig.1. Geometric fractal sphere with small six spheres.



Fig.2. Sphere with small six spheres surrounding by other small spheres (manual building).

The projection of this fractal onto the plane of symmetry of the octahedron is the "common" base of the two pyramids shown in Figure 3 previously constructed by Prof. G. Matieva (Matieva, 2018b,c). The section of a spatial fractal with other planes of the limiting octahedron is shown in Figure 4. This flat fractal coincides in symmetry with the fractal was proposed (Azevich, 2008).

MATERIALS AND METHODS:

To build 3D models of geometric fractals, there

The description of the construction of a single space fractal and its projection onto the base and the diagonal plane of a correct, straight, hexagonal prism, which is the boundary for the space fractal.

Let us draw a sphere $S(O, r)$ with center at a point O and radius r .

Circles $C_1(O, r), C_2(O, r), C_3(O, r)$ divide the sphere $S(O, r)$ into an "equal" six parts. (Figure 1). Let us construct six spheres with centers lying on the axes $(Ox), (Oy), (Oz)$ and radius $r' < r$, which touch the sphere $S(O, r)$ at diametrically opposite points $A1 A2; B1 B2; C1 C2$ (fig.1.).

Further, we will do the same with each sphere with radius $r' < r$. For example, consider the sphere $S(B1, r')$. Let's construct five spheres with radius $r'' < r'$, which touch the sphere $S(B1, r')$ at five diametrically opposite points (except for the point $B1$), etc. (Figure 2).

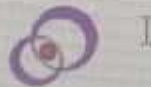


Fig.2. Sphere with small six spheres surrounding by other small spheres (manual building).

The projection of this fractal onto the plane of symmetry of the octahedron is the "common" base of the two pyramids shown in Figure 3 previously constructed by Prof. G. Matieva (Matieva, 2018b,c). The section of a spatial fractal with other planes of the limiting octahedron is shown in Figure 4. This flat fractal coincides in symmetry with the fractal was proposed (Azevich, 2008).

MATERIALS AND METHODS:

To build 3D models of geometric fractals, there are three program options: semi-automated, automated and manual, also various software



can be used. For example, Compass3D, 3ds Max, etc. There are specialized programs that have

slx3=0, sly3=0, slz3=0; for (var k = 0; k < 6; k++) if (tBreak/(1+k) == 0) (var slr=sr/8; var

"Geometry of Nature" in 1977 (Husain et al., 2022). It contains all the scientific results of scientists in the same area, who worked in the period 1875-1925. Among them are: Poincare, Fatou, Julia, Cantor, Hausdorff.

Currently it has been possible to integrate these works into an entire system. Fractal geometry is a revolution in mathematics and a mathematical description of nature. B. Mandelbrot, the discoverer of fractional geometry, writes: "Why is geometry often called as cold and dry? One of the reasons is its inability to describe the shape of a cloud, a mountain, a tree or a sea shore."

Clouds are not spheres, mountains are not cones, the lines of the shore are not circles, the bark is not smooth, and lightning does not spread in a straight line. ...Nature shows us not just a higher degree, but a completely different level of complexity. "The number of different length scales in structures is always infinite."

A new figure fractal can act as a model of complex natural systems, such as tree crowns, mountain ranges, coastlines, the surface of the Moon, etc. Tree-like fractals are used to model not only plants, but also the bronchial tree, the

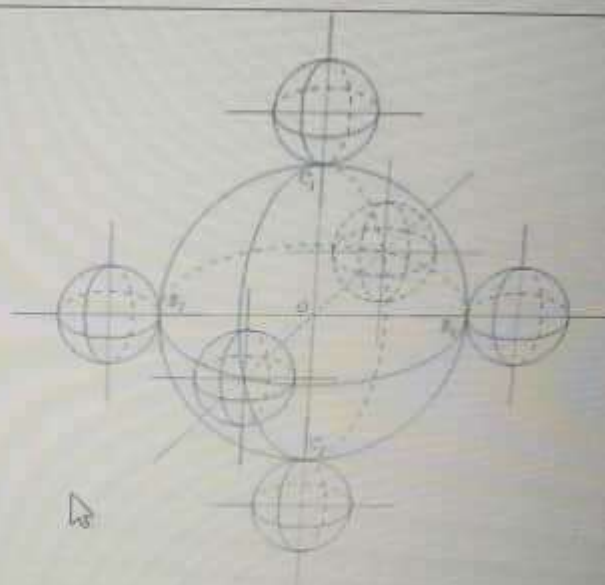


Fig. 1. Geometric fractal sphere with small six spheres.



is primarily set of fractional dimensions.

Key Words: Space fractal, Projection, Limit octahedron, 3D model.

DOI Number: 10.4704/nq.2022.20.14. NQ88071

Neuro Quantology 2022; 20(14):505-508

INTRODUCTION

Fractal geometry and the chaos theory closely related to higher education subjects such as fractal graphics, chaotic dynamics, etc., while the fractal sets can be studied in the school mathematics course (Sekovanov, 2006). Study of Fractals as concepts, which have scientific picture of the world, started relatively recently, only in the last quarter of the twentieth century (Budiansky & Safonova, 2011).

Conceptual apparatus and geometric images in the study of fractals make it possible to formulate ideas that do not make sense in the language of sets with the usual topology. Thus, it becomes possible to assert the simultaneous presence of some object has different and even opposite qualities (Gapontseva et al., 2009).

The concept "fractal" was introduced by Benoit Mandelbrot in 1975. In his book "Fractal geometry of nature" he writes that mathematicians of past years have always theories that do not explain the reality around

us (Trubetskoy & Trubetskova, 2016).

refused to study the forms that nature demonstrates to us by studying Euclidean geometric figures and inventing all sorts of the new geometry is capable to describe many of the irregular and fragmented forms in the surrounding world and generating entirely complete theories by defining a family of figures that I call fractals" (Graves et al., 2017). However, according to Mandelbrot (2002), "... the new geometry is capable to describe many of the irregular and fragmented forms in the surrounding world and generating entirely complete theories by defining a family of figures that I call fractals." To all those who study geometry, it is well known that dimension of the segment is equal to 1, the square is 2, the cube and the parallelepiped are equal to 3. The fractional dimensions are the main attributes of fractals associated with the release of Mandelbrot's book «Fractal

***Corresponding Author: Zhympargul Abdullaeva, Address:** Science and Research Department, Osh State University, Kyrgyzstan, Email: zhympar@osshsu.kg, Mob: +996779528043, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5777-4478>

¹Department of Algebra and Geometry, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

²Department of Automated Systems and Digital Technologies, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

³Department of Applied Mathematics, Informatics and Graphic Design, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

⁴Industrial Pedagogical College, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Relevant conflicts of interest/financial disclosures: The authors declare that the research was conducted in the absence of any commercial or financial relationships that could be construed as a potential conflict of interest.

Received: _____ Accepted: _____

Fig. 5. Geometric fractal limited square of circles.

As a result, a 3D model of this fractal obtained as shown in the Figure 6.

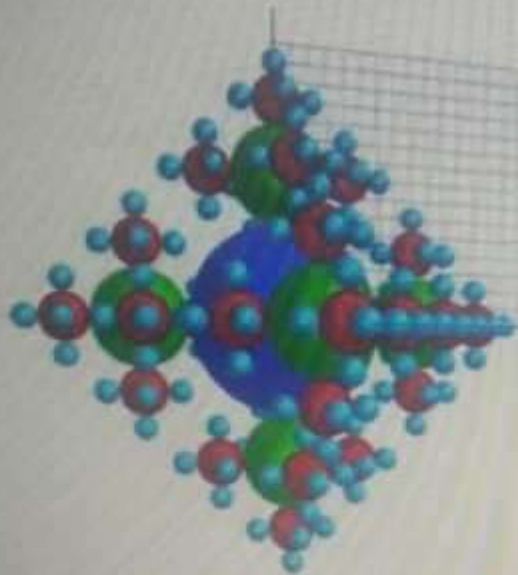


Fig. 6. Computer image of sphere with six towers from a different perspective.

Conclusion

A program has been created to obtain a 3D model of a spatial geometric fractal according to given projections in planes that are planes of spatial fractal symmetry.

References:

Azevich A.I. Symphony of Fractals, Informatics magazine

and Fractional, 6(2), 89.

<http://dx.doi.org/10.3390/fractalfract6020089>

Mandelbrot B. Fractal geometry of nature. Moscow: Institute for Computer Research, 2002: 656.

Matieva, G. (2018a). About one spatial geometric fractal. *Current Scientific Research in the Modern World*, 5-9 (37), 21-25.

Matieva G. (2018b). Authorship copyright for the geometric fractal "Carpet" (certificate No. 3332, dated 05/23/2018).

Matieva G. (2018c). Authorship copyright for the geometric fractal "Sphere with six towers" (certificate No. 3352, dated 06/04/2018).

Sekovanov, V.S. (2006). Formation of motivation for mathematics when constructing fractals using L-systems. *Bulletin of the Kostroma State University*, 12 (6), 171-175.

Trubetskoy, D.I. & Trubetskova, E.G. (2016). Fractal geometry in faces and destinies. *News of higher educational institutions. Applied Nonlinear Dynamics*, 24(6), 5-38.

I



О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЗАДАННОЙ СЕТЬЮ ФРЕНЕ

ГУЛМИРА А. ШАМШИЕВА¹, НУРКЫЗ А. САРЫГУЛОВА²

^{1,2} ОмГУ, Ом, Кыргызстан

e-mail: ¹gshamshieva@mail.ru, ²n.sarygulova@mail.ru

Аннотация. В области Ω евклидова пространства E_5 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathbb{R} = (X, e_i)(i, j, k = \overline{1, 5})$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии векторных полей e_i образуют сеть Френе Σ_5 . В области Ω найдем r -мерные ($r, q, s = 2, 3, 4$) распределения, определяемые векторными полями e_i . Найдены связи между векторами средних кривизин r -мерных распределений и кривизнами линий сети Френе.

Ключевые слова: евклидово пространство, распределение, циклическая сеть Френе, вектор средней кривизны.

1. Введение

В области Ω евклидова пространства E_5 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathbb{R} = (X, e_i)(i, j, k = \overline{1, 2, 3, 4, 5})$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1]. Интегральные линии векторных полей e_i образуют сеть Френе Σ_5 . В области Ω найдем r -мерные ($r, q, s = 2, 3, 4$) распределения, определяемые векторными полями e_i . Найдены связи между векторами средних кривизин r -мерных распределений и кривизнами линий сети Френе.

1. ВВЕДЕНИЕ

В области Ω евклидова пространства E_5 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathfrak{R} = (X, \vec{e}_i)$ ($i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$) в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Девриационные формулы репера \mathfrak{R} имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^1 \vec{e}_1, d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

Интегральные линии векторных полей \vec{e}_i образуют сеть Френе Σ_5 для линии заданного семейства. Поскольку репер \mathfrak{R} построен на касательных к линиям сети Σ_5 , формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \quad (3)$$

В силу последнего равенства из формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \quad (4)$$

Дифференцируя внешним образом равенства (3) получим:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j \wedge \omega_i^l.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{ij}^k \omega^j = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_j^l \wedge \omega^l$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0, \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0, \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0. \quad (7)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2, k_2^1 = \Lambda_{21}^3, k_3^1 = \Lambda_{31}^4, k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = \Lambda_{51}^4$ - первая, вторая, третья и четвертая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [3] $F_i^j (i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i} \vec{e}_j. \quad (8)$$

На каждой касательной (X, \vec{e}_i^j) существуют по четыре псевдофокуса. На прямой (X, \vec{e}_1^1) существуют псевдофокусы $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5$, на прямой $(X, \vec{e}_2^2) - F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5$, на прямой $(X, \vec{e}_3^3) - F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5$, на прямой $(X, \vec{e}_4^4) - F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5$, на прямой $(X, \vec{e}_5^5) - F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4$.

Сеть Σ_5 в $\Omega \subset E_5$ называется циклической сетью Френе [4], если реперы $\mathcal{R}_1 = (X, \vec{e}_1^1, \vec{e}_2^2, \vec{e}_3^3, \vec{e}_4^4, \vec{e}_5^5), \mathcal{R}_2 = (X, \vec{e}_2^2, \vec{e}_3^3, \vec{e}_4^4, \vec{e}_5^5, \vec{e}_1^1), \mathcal{R}_3 = (X, \vec{e}_3^3, \vec{e}_4^4, \vec{e}_5^5, \vec{e}_1^1, \vec{e}_2^2), \mathcal{R}_4 = (X, \vec{e}_4^4, \vec{e}_5^5, \vec{e}_1^1, \vec{e}_2^2, \vec{e}_3^3), \mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_5^5, \vec{e}_1^1, \vec{e}_2^2, \vec{e}_3^3, \vec{e}_4^4)$ являются соответственно реперами Френе для линий $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ сети Σ_5 одновременно.

Пусть сеть Σ_5 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\bar{\Sigma}_5$.

2. МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Касательные векторы к линиям сети Френе Σ_5 определяют следующие трехмерные распределения: $\Delta_3^{(ijk)} = (X, \vec{e}_i^i, \vec{e}_j^j, \vec{e}_k^k)$ (i, j, k - различные). В случае, когда сеть Френе Σ_5 является циклической сетью Френе, найдем векторы средних кривизн [5] этих распределений.

Через $\bar{M}_3^{(ijk)}$ обозначим вектор средней кривизны распределения $\Delta_3^{(ijk)}$. Тогда

$$\bar{M}_3^{(120)} = \frac{1}{3} \Lambda_{31}^1 \vec{e}_1. \quad (9)$$

где Λ_{31}^1 - первая кривизна линии ω^1 сети Σ_5 .

$$\bar{M}_3^{(144)} = \frac{1}{3} (\Lambda_{11}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5). \quad (10)$$

где Λ_{11}^2 - первая кривизна линии ω^1 сети Σ_5 , Λ_{44}^5 - первая кривизна линии ω^4 сети Σ_5 .

$$\tilde{M}_3^{(135)} = \frac{1}{3}(\Lambda_{11}^2 e_2^{\sim} + \Lambda_{33}^4 e_5^{\sim}), \quad (11)$$

$$\tilde{M}_3^{(234)} = \frac{1}{3}\Lambda_{44}^5 e_5^{\sim}; \quad (12)$$

$$\tilde{M}_3^{(235)} = \frac{1}{3}\Lambda_{11}^2 e_2^{\sim}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_3^{(345)} &= \vec{0}, \\ \tilde{M}_3^{(145)} &= \frac{1}{3}\Lambda_{33}^4 e_5^{\sim}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tilde{M}_3^{(125)} = \frac{1}{3}\Lambda_{22}^3 e_3^{\sim}; \quad (15)$$

где Λ_{22}^3 - первая кривизна линии ω^2 сети Σ_5 ,

$$\tilde{M}_3^{(125)} = \frac{1}{3}\Lambda_{22}^3 e_3^{\sim}; \quad (16)$$

$$\tilde{M}_3^{(124)} = \frac{1}{3}(\Lambda_{22}^3 e_3^{\sim} + \Lambda_{44}^5 e_5^{\sim}). \quad (17)$$

Аналогично найдем вектор средней кривизны 4-мерных распределений

$$\Delta_4^{(1234)} = (X, e_1^{\sim}, e_2^{\sim}, e_3^{\sim}, e_4^{\sim}); \Delta_4^{(1235)} = (X, e_1^{\sim}, e_2^{\sim}, e_3^{\sim}, e_5^{\sim}); \Delta_4^{(2345)} = (X, e_2^{\sim}, e_3^{\sim}, e_4^{\sim}, e_5^{\sim});$$

$$\tilde{M}_4^{(1234)} = \frac{1}{4}\Lambda_{44}^5 e_5^{\sim}; \quad (18)$$

$$\tilde{M}_4^{(1235)} = \frac{1}{4}\Lambda_{33}^4 e_5^{\sim}; \quad (19)$$

$$\tilde{M}_4^{(2345)} = \vec{0}.$$

Векторы средних кривизн двумерных распределений $\Delta_2^{(ij)}$ ($i \neq j$) имеют вид

$$\tilde{M}_2^{(12)} = \frac{1}{2}\Lambda_{22}^3 e_3^{\sim}. \quad (20)$$

или

$$\Lambda_{ji}^k \omega_j^i \wedge \omega^l = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_j^i \wedge \omega^l.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_j^i \wedge \omega^j - \Lambda_{ji}^k \omega_j^i \wedge \omega^l = 0$$

или

$$(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{ij}^k \omega_j^i - \Lambda_{ji}^k \omega_j^i) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [2] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{ij}^k \omega_j^i - \Lambda_{ji}^k \omega_j^i = \Lambda_{ilm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = (\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \omega_j^l + \Lambda_{ij}^k \omega_{im}^l) \omega^m. \quad (5)$$

Система величин $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ образуют геометрический объект второго порядка. Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1 \bar{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \bar{e}_2,$$

$$d_1 \bar{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \bar{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \bar{e}_3,$$

$$d_1 \bar{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \bar{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \bar{e}_4,$$

$$d_1 \bar{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \bar{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \bar{e}_5,$$

$$d_1 \bar{e}_5 = \Lambda_{51}^4 \bar{e}_4.$$

и

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^4 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{11}^6 = 0, \Lambda_{11}^7 = -\Lambda_{11}^8 = 0, \quad (6)$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{21}^6 = 0, \Lambda_{21}^7 = -\Lambda_{21}^8 = 0, \Lambda_{21}^9 = -\Lambda_{21}^{10} = 0. \quad (7)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2, k_2^1 = \Lambda_{21}^1, k_3^1 = \Lambda_{31}^2, k_4^1 = \Lambda_{41}^3 = \Lambda_{11}^4 = \Lambda_{21}^5 =$ первая, вторая, третья и четвертая кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдорядок [3] $F_i^j (i \neq j)$ касательной к линии ω^k сети Σ_2 определяется следующим радиус-вектором:

- а) распределения $\Delta_3^{(345)}, \Delta_4^{(2345)}$ — являются минимальными;
- б) векторы средних кривизн распределений $\Delta_3^{(123)}, \Delta_3^{(235)}, \Delta_2^{(23)}, \Delta_4^{(1235)}$ — коллинеарны (см. (9), (13), (24), (19)), в том числе векторы средних кривизн распределений $\Delta_3^{(123)}, \Delta_3^{(235)}$ — равны;
- в) векторы средних кривизн распределений $\Delta_3^{(234)}, \Delta_3^{(1234)}, \Delta_2^{(34)}$ — коллинеарны (см. (12), (18), (27));
- г) векторы средних кривизн распределений $\Delta_3^{(135)}, \Delta_2^{(13)}$ — коллинеарны (см. (21), (11));
- д) векторы средних кривизн распределений $\Delta_3^{(134)}, \Delta_2^{(14)}$ — коллинеарны (см. (22), (10)).
- Псевдофокус $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^3} \vec{e}_3. \quad (30)$$

Когда точка $X \in \Omega$ смещается в области Ω , псевдофокус F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_5$. В результате получим частичное отображение $f_3^2: \Omega \rightarrow \Omega_3^2$ такое, что $f(X) = F_3^2$. Продифференцируем равенство (30) и применяя формулы (1), (2), (3) имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2 + \omega^3 \vec{e}_3 + \omega^4 \vec{e}_4 + \omega^5 \vec{e}_5,$$

где

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_2 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2} \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^4} \vec{e}_4; \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_2 + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2} \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^4} \vec{e}_4; \\ \vec{e}_3 &= \left(1 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\right) \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^4} \vec{e}_4; \\ \vec{e}_4 &= -\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^4} \vec{e}_2 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2} \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \\ \vec{e}_5 &= \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^4} \vec{e}_2 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2} \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^4} \vec{e}_4 + \vec{e}_5. \end{aligned} \quad (31)$$

$$\Delta_4^{(1)} = (\lambda, e_1, e_2, e_3, e_4); \Delta_4^{(2)} = (\lambda, e_1, e_2, e_3, e_5); \Delta_4^{(3)} = (\lambda, e_2, e_3, e_4, e_5);$$

$$\vec{M}_4^{(1234)} = \frac{1}{4} \Lambda_{44}^5 e_5^2; \quad (18)$$

$$\vec{M}_4^{(1235)} = \frac{1}{4} \Lambda_{33}^4 e_4^2; \quad (19)$$

$$\vec{M}_4^{(2345)} = \vec{0}.$$

Векторы средних кривизин двумерных распределений $\Delta_2^{(ij)}$ ($i \neq j$) имеют вид:

$$\vec{M}_2^{(12)} = \frac{1}{2} \Lambda_{22}^3 e_3^2; \quad (20)$$

$$\vec{M}_2^{(13)} = \frac{1}{2} (\Lambda_{11}^2 e_2^2 + \Lambda_{33}^4 e_4^2); \quad (21)$$

$$\vec{M}_2^{(14)} = \frac{1}{2} (\Lambda_{11}^2 e_2^2 + \Lambda_{44}^5 e_5^2); \quad (22)$$

$$\vec{M}_2^{(15)} = \frac{1}{2} \Lambda_{11}^2 e_2^2; \quad (23)$$

$$\vec{M}_2^{(23)} = \frac{1}{2} \Lambda_{33}^4 e_4^2; \quad (24)$$

$$\vec{M}_2^{(24)} = \frac{1}{2} (\Lambda_{22}^3 e_3^2 + \Lambda_{44}^5 e_5^2); \quad (25)$$

$$\vec{M}_2^{(25)} = \frac{1}{2} \Lambda_{22}^3 e_3^2; \quad (26)$$

$$\vec{M}_2^{(34)} = \frac{1}{2} \Lambda_{44}^5 e_5^2; \quad (27)$$

$$\vec{M}_2^{(35)} = \frac{1}{2} \Lambda_{22}^3 e_3^2; \quad (28)$$

$$\vec{M}_2^{(45)} = \frac{1}{2} \Lambda_{22}^3 e_3^2; \quad (29)$$

Теорема 1.

Если сеть Френе Σ_2 является инволютивной сетью Френе, то

$$\begin{aligned}
\vec{c}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_2 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2} \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_4; \\
\vec{c}_2 &= \vec{e}_2 + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2} \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_4; \\
\vec{c}_3 &= \left[1 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\right] \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_4; \\
\vec{c}_4 &= -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_2 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2} \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \\
\vec{c}_5 &= -\frac{\Lambda_{35}^2}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_2 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2} \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{35}^4}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_4 + \vec{e}_5.
\end{aligned} \tag{31}$$

Формулы найдены в работе [6]. Присоединим к области Ω_3^2 подвижной репер $\mathcal{R}' = (F_2^3, \vec{c}_i)$.

Линии $\omega^i, g(\omega^i) = \bar{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения g , если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ пересекаются, либо параллельны [7].

Линии $\omega^i, g(\omega^i)$ в E_5 называются квазидвойными линиями частичного отображения g , если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ принадлежат одному и тому же подпространству пространства E_5 .

Рассмотрим линию γ , принадлежащую распределению $\Delta_3^{(145)}$. Её касательный вектор имеет вид $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^4 \vec{e}_4 + \gamma^5 \vec{e}_5$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $f_2^3(\gamma) = \bar{\gamma}$ в виде: $\vec{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma}^1 \vec{c}_1 + \bar{\gamma}^4 \vec{c}_4 + \bar{\gamma}^5 \vec{c}_5$. Учитывая формулу (31) отсюда получим: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1 \vec{e}_1 + (\gamma^1 \vec{c}_1^2 + \gamma^4 \vec{c}_4^2 + \gamma^5 \vec{c}_5^2) \vec{e}_2 + (\gamma^1 \vec{c}_1^3 + \gamma^4 \vec{c}_4^3 + \gamma^5 \vec{c}_5^3) \vec{e}_3 + (\gamma^1 \vec{c}_1^4 + \gamma^4 \vec{c}_4^4 + \gamma^5 \vec{c}_5^4) \vec{e}_4 + \gamma^5 \vec{e}_5$, где \vec{c}_j^i - j -тая координата вектора \vec{c}_i .

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, X \vec{F}_2^3 \in \Delta_3^{(145)}$ имеем:

$$\gamma^1 \vec{c}_1^2 + \gamma^4 \vec{c}_4^2 + \gamma^5 \vec{c}_5^2 = 0; \tag{32}$$

$$\gamma^1 \vec{c}_1^3 + \gamma^4 \vec{c}_4^3 + \gamma^5 \vec{c}_5^3 = 0. \tag{33}$$

Учитывая формулу (31) отсюда получим:

$$\Lambda_{41}^2 \gamma^1 + \Lambda_{41}^4 \gamma^4 + \Lambda_{45}^2 \gamma^5 = 0; \tag{34}$$

$$C_{321}^2 \gamma^1 + C_{324}^2 \gamma^4 + C_{325}^2 \gamma^5 = 0; \tag{35}$$

Обратно, если имеют места условия (34), (35), то линии γ и $\bar{\gamma}$ являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^3 .

Аналогично, рассмотрим линию β , принадлежащую распределению $\Delta_3^{(245)}$. Её касательный вектор: $\vec{\beta} = \beta^1 e_1 + \beta^4 e_4 + \beta^5 e_5$. Касательный вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_2^3(\beta)$ имеет вид:

$$\vec{\bar{\beta}} = (\beta^2 + \beta^4 c_4^2 + \beta^5 c_5^2) e_2 + (\beta^2 c_2^3 + \beta^4 c_4^3 + \beta^5 c_5^3) e_3 + (\beta^2 c_2^4 + \beta^4 + \beta^5 c_5^4) e_4 + \beta^5 e_5.$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}}, X \vec{F}_3^2 \in \Delta_3^{(245)}$ получим:

$$\beta^2 c_2^3 + \beta^4 c_4^3 + \beta^5 c_5^3 = 0.$$

Учитывая формул (31), отсюда имеем:

$$C_{322}^2 \beta^2 + C_{324}^2 \beta^4 + C_{325}^2 \beta^5 = 0. \quad (36)$$

Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (36), то линии β и $\bar{\beta}$ являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^3 .

3. Вывод

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.

- линия γ , принадлежащая распределению $\Delta_3^{(145)}$, является квазидвойной линией частичного отображения f_2^3 тогда и только тогда, когда выполнены условия (34), (35);
- линия β , принадлежащая распределению $\Delta_3^{(245)}$, является квазидвойной линией частичного отображения f_2^3 тогда и только тогда, когда выполнены условия (36).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ришневский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [текст] П.К.Ришневский. - Москва, Наука, 1967. - с.481-482
- Фиников С.П. Метод виллиных форм Каррания в дифференциальной геометрии.-М./Т. Гостехиздат, 1948. -432 с.
- Бисвален В.Т. О многообразиях с нулем и ненулевым кривизинным [текст] В.Т.Бисвален. - Литовский математический сборник, 1966. V.1.5-1. - с.175-181
- Маттеви Л. Геометрия частных отображений, сетей и распределений связных пространств [текст] Л.Маттеви. - Миланский. - Огг, 2003. - с.242-249

Теорема 2.

- а) линия γ , принадлежащая распределению $\Delta_3^{(145)}$, является квазидвойной линией частичного отображения f_2^3 тогда и только тогда, когда выполнены условия (34), (35);
- б) линия β , принадлежащая распределению $\Delta_3^{(245)}$, является квазидвойной линией частичного отображения f_2^3 тогда и только тогда, когда выполнены условия (36).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ращевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [текст]/П.К.Ращевский //Москва, Наука, 1967. - с.481-482.
- [2] Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. -М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 432-с.
- [3] Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [текст]/В.Т.Базылев//Литовский математический сборник, 1966. VI.№4. -с.475-491.
- [4] Матиева Г. Геометрии частных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [текст]/Г.Матиева /Монография - Ош, 2003 - с.212-219.
- [5] Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n //Проблемы Геометрии - Москва: ВИНТИ,1975 - т.7,с. 215-229.
- [6] Матиева Г. О существовании квазидвойных линий частичного отображения в евклидовом пространстве E_6 . Г.Матиева, Н.Н.Курбанбаева, Ч.Х.Абдуллаева // Вестник ОшГУ: математика, физика, технология.2023- №1.с.145-15.
- [7] Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [текст] / В.Т.Базылев // Известия вузов. Математика, 1967. Т.9. - с.3-11.