Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги

Ош мамлекеттик университети

Эл аралык билим берүү программаларынын жогорку мектеби
Россия-Евразия интеграциялоо бөлүмү

Окутуучу А.Садиеванын “Математика жана компьютердик илимдер” адистигинин
1-курсунун МКН(б)1-23 тайпасына өтүлүүчү
“Көп өзгөрүлмөлүү функциянын жекече туундусу” деген темадагы практикалык сабагынын план-иштелмеси
(улантуучу тайпа, 1 саат)

Ош-2024

МАЗМУНУ

Киришүү бөлүгү

“Көп өзгөрүлмөлүү функциянын жекече туундусун табуу” темасы боюнча сабак түздөн-түз мурунку материалга негизделген жалпылоо жана билимди системалаштыруу сабак болуп саналат: туунду аныктоо, туунду эсептөө эрежелери, элементардык функциялардын туундусунун таблицасы, көп өзгөрүлмөлүү функция.

Тема: Көп өзгөрүлмөлүү функциянын жекече туундусун табуу

Жалпы билим берүү максаты:

- Теориялык билимдерди системалаштыруу жана тереңдетүү;
- Мисалдарды чыгаруу алынган билимдерди жана көндүидөрдү анализдөө;

Өнүктүрүүчү максаты:

- Өз алдынча билим алуу муктаждыктарын, чыгармачылык активдүүлүгүн өнүктүрүү;

Тарбиялык максаты:

- жоопкерчилик сезимин, баарлашуу маданиятын, бири-бирин сыйлоону, өз ара түшүнүшүүнү, өз ара колдоону, өзүнө ишенүүнү тарбиялоо;

Сабактын тиби**: бышыктоо сабагы.**

Сабактын жабдылышы**: тесттик тапшырма, карточка-штрих, карточка-мисалдар, интерактивдүү доска, презентация, компьютер.**

Сабакты уюштууруу формасы: **Жекече, командалык.**

Сабактын убактысы: **45 минут**

Балоо критерийлери: Студенттердин пикирин эске алуу менен окутуучу тарабынан бааланат.

НББП ОНдун берилиши	Дисциплинаны окутуу натыйжасы	Компетенциялар
ОН-3. Илим, технология жана инновация.жаатында математикалык билимди колдоно алат,	ДОН-1. Коюлган максаттын алкагында тапмышмалардын чөйрөсүн аныктоого жана аны чечүүнүн оптималдуу ыкмаларын тандоого жөндөмдүү;	**ЖПК-1.** Өзүнүн кесиптик ишмердүүлүгүндө математикалык анализ, комплекстик жана функционалдык анализ, алгебра ж.б. математиканын баардык тармактарындагы фундаменталдык билимдерин колдонууга жана кеңеш берүүгө даяр; **ИК-2.** Математика жана илим, программалоонун негиздери жана маалыматтык технологиялар боюнча негизги билимдерин көрсөтө алат;

<u>Сабактын планы:</u>

1. Уюштуруу бөлүгү. (3 минута)

2. Темага багыттоо бөлүгү:
   Формуланы аныктоо (Тесттик тиркеме боюнча) (5 минут)
   Таблицаны толтуруу (карточкада иштөө) (5 минут

3. Практикалык бөлүгү. Мисалдарды чыгаруу. (10 минута)

   Каталар үстүндө иштөө (топтоо талкуу жүргүзүү) (7 минута)

4. Мисалдар менен бышыктоо (12 минута)

5. Сабакты жыйынтыктоо бөлүгү (3 минута)

Сабактын жүрүшү.

1. **Уюштуруу бөлүгү.**
   Окутуучу саламдашып, студенттерди баалоонун критерийлери (Тиркеме 1) менен тааныштыруу (Сабакка катышууну көзөмөөлдөө).

2. **Темага багыттоо.**
   - Plickers.com тиркемесинин жардамында экранга “Көп өзгөрүлмөлүү функция жана анын жекече туундусу” темасы боюнча 5 тесттик суроолор берилип, ар бир студенттин жекече карточкасынын жардамында жооптор алынып, жалпы суроо-жооп иретинде формула, аныктоолор кайталоо жүргүзүү (https://www.plickers.com/seteditor/6609503e4f41cc203569f96e)
   - Бир өзгөрүлмөлүү функциянын туундусун табуу таблицасын кайталоо. Тапшырма: таблицаны толтуруу (Тиркеме 2).

3. **Практикалык бөлүгү.**
   - Студенттер уч топко бөлүнүп, ар бир топко бирден плакат менен маркер берилип, карточка таркатылат. Карточкадагы 1-мисалды аткаруу сунушталат. Ал мезгилде топтун курамынан тандалып алынган студент берилген мисалды аткарып, калган студенттер доскага колдонулуучу эреже, формулаларды жазып командалык иш алып барылат. (Тиркеме 3)
   - Чыгарылган мисалга анализ жүргүзүлөт (SWAT анализ)

4. **Мисалдар менен бышыктоо.** Карточкага ар бир студент үчүн 2- 3- көнүгүү берилип студенттер өз алдынча аткаруу менен тема бышыкталат. (Тиркеме 3)

5. **Сабакты жыйынтыктоо бөлүгү.**

   - Балоо критерийлерин эске алуу менен студенттерди баалоо (Тиркеме 1)
   - Үйгө тапшырма: Карточкада берилган үйгө тапшырма бөлүгүн аткаруу (Тиркеме 3).

Тиркеме 1

Баалоо критерийлери

№	Аткарылган жумуш	Упайдын саны
1.	Тесттик суроолорго туура жооп берүү	1 упай
2.	Таблицаны туура толтуруу	1 упай
3.	Командалык ишти алып баруу	1 упай
4.	Өз алдынча ишти аткаруу	1 упай (бир мисалдын туура аткаруусу эсепке алынат)
5.	Активдүү катышууга	1 упай
	Жалпы упайдын саны:	5 упай

Тиркеме 2

Туундуну табуунун таблицасы жана эрежелерин аныктайбыз

№	Берилген функция	*Туундусу*	Тууралыгын белгиле ➢ туура (+), ➢ туура эмес (-), ➢ тушунуксуз (?)
1.	$y = 2x$	$y' = 2$	
2.	$y = cosx$	$y' = -\ sinx$	
3.	$y = C$	$y' = 0$	
4.	$y = 2x^3 + 1/x$	$y' = 6x^2 - \frac{1}{x^2}$	
5.	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{cos^2x}$	
6.	$y = e^x$	$y' = e^x$	
7.	$y = sinx$	$y' = \ cosx$	
8.	$y = 100000$	$y' =0$	
9.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
10.	$y = lnx$	$y' = \frac{1}{x}$	
11.	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	
12.	$y = Cv$	$y' = Cv'$	
13.	$y = \frac{\nu}{v}$	$y' = \frac{\nu' v - v'\nu}{v^2}$	
14.	$y = \nu \cdot v$	$y' = \ \nu' v + v'\nu$	
15.	$y = y(\nu(x))$	$y' = y'(\nu(x)) \cdot \nu'(x)$	

Практикалык сабакты аткарууга коюлган талаптар:

Теориялык материал

Бир нече өзгөрүлмөлүү функциянын жекече туундусу көз карандысыз өзгөрмөлөрдүн бири боюнча калган өзгөрмөлөр туруктуу деп эсептелген шартта функциянын туундусу (биринчи тартиптеги) катары аныктала т аныкталат. Жекече туундуларды эсептөөдө негизги элементардык функциялардан туунду алуу таблицаларын колдоно беребиз.

x жана y эки өзгөрмөлөрдөн көз каранды болгон $z = z(x, y)$ функциясынын x *аргументи* боюнча *жекече туундусу* деп y турактуу болгон учурда x аргументи боюнча $z = z(x, y)$ функциянын туундусун айтабыз. Ал эми аналогиялуу түрдө y *аргументи боюнча* $z = z(x, y)$ *функциясынын жекече туундусу* x аргументи турактуу болгон учурдагы функциянын туундусу катары аныкталат.

Функциянын жекече туундулары төмөнкү түрдө белгиленет: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Кандайдыр бир $P(x, y)$ чекитинде $z = z(x, y)$ функциясынын толук дифференциалы төмөнкү көрүнүштө аныкталат:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (1)$$

мында $\frac{\partial z}{\partial x}$ жана $\frac{\partial z}{\partial y}$ $P(x, y)$ чекитинде аныкталып, ал эми көз карандысыз өзгөрмөлөрдүн дифференциалы алардын өсүндүсүнө $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ барабар.

Дифференциал үчүн (1) формула x жана y аргументтери да башка функциялардын аргументтери болсо да күчүндө болот. Бул биринчи тартиптеги толук дифференциалдын инварианттык касиети болуп саналат.

Аналогиялуу түрдө көз карандысыз өзгөрмөлөрдүн каалаган саны үчүн функциянын толук дифференциалы аныкталат.

Мисалдар

1 тапшырма: Төмөнкү функциянын жекече туундуларын аныктагыла:

1) $z = x^3 - 3x^2y + 2y^3$;

2) $z = \arcsin\frac{y}{x}$;

3) $u = z^{xy^2}$.

Чыгаруу: 1) x боюнча фукнкциянын жекече туундусуну табууда y ти турактуу катары каралат. Анда төмөндөгүнү алабыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy.$$

Аналогиялуу түрдө x ти турактуу деп y өзгөрүлмөсү боюнча функциянын жекече туундусун табабыз:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6y^2.$$

2)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\arcsin\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\arcsin\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

3) Мында u x, y жана z көз карандысыз өзгөрүлмөдөн көз каранды болгон функция. Ар бир өзгөрүлмө боюнча функциянын жекече туундусун эсептөөдө калган эки өзгөрүлмө турактуу деп кароо менен аныкталат. Натыйжада,

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^{xy^2}\ln z}_{y\,=\,const,\ z\,=\,const};\qquad \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^{xy^2}\ln z}_{x\,=\,const,\ z\,=\,const};\qquad \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}=xy^2z^{xy^2-1}}_{x\,=\,const,\ y\,=\,const}$$

__2 тапшырма:__ $(1;-1)$ чекитинде $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ функциясынын толук дифференциалын аныктагыла.

__Решение:__ Жекече туундуларын табабыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2\cdot\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\cdot 2x=-\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;-1)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2\cdot\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\cdot 2y=-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;-1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Демек, (1) формула боюнча $dz=-\frac{\sqrt{2}}{4}dx+\frac{\sqrt{2}}{4}dy$ болот.

Тиркеме 3

КАРТОЧКА №1

Командалык иштөө үчүн көнүгүүлөр

1. Төмөнкү функциялардын жекече туундуларын тапкыла:

а) $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$**;** **б)** $z = \frac{y}{x}$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

2. Төмөнкү функциялардын жекече туундуларын тапкыла:

а) $z = x^2 - 3y^2 + 5xy$

б) $u = t^5 \sin^3 z$

Берилген функциялардын экинчи тартиптеги туундуларын аныктагыла:

а) $z = x^2 - 3y^2 + 5xy$

б) $z = x^2 y^3$

Үйдө иштөө үчүн көнүгүүлөр

3. Төмөнкү функциялардын экинчи тартиптеги жекече туундуларын тапкыла:

а) $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. ***Жообу:*** $24x + 6y$**.**

б) $z = xy + \sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. ***Жообу:*** $-\sin(x+y)$**.**

в) $z = \ln \operatorname{tg}(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. ***Жообу:*** $-\frac{4\cos 2(x+y)}{\sin^2 2(x+y)}$**.**

г) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. ***Ж:*** 0**.**

КАРТОЧКА №2

Командалык иштөө үчүн көнүгүүлөр

1. Төмөнкү функциялардын жекече туундуларын тапкыла:

а) $z = x^3 + 6xy^2 - 4y^3 - 2xy$ **;** **б)** $z = x^2 y^3$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

2. Төмөнкү функциялардын жекече туундуларын тапкыла:

а) $u = \frac{y}{x} - \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$

б) $u = t^5 \sin^3 z$

Берилген функциялардын экинчи тартиптеги туундуларын аныктагыла:

а) $z = \cos(xy)$

б) $u = xy^z$

Үйдө иштөө үчүн көнүгүүлөр

3. Төмөнкү функциялардын экинчи тартиптеги жекече туундуларын тапкыла:

а) $z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. ***Жообу:*** $24x + 6y$.

б) $z = xy + \sin(x + y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. ***Жообу:*** $-\sin(x + y)$.

в) $z = \ln \operatorname{tg}(x + y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. ***Жообу:*** $-\frac{4\cos 2(x + y)}{\sin^2 2(x + y)}$.

г) $z = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. ***Жообу:*** 0.

КАРТОЧКА №3

Командалык иштөө үчүн көнүгүүлөр

1. Төмөнкү функциялардын жекече туундуларын тапкыла:

а) $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ **;** **б)** $z = \frac{x}{y}$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

2. Төмөнкү функциялардын жекече туундуларын тапкыла:

а) $z = x^4 cos^2 y$

б) $z = x^2y - xy^2 + 7$

Берилген функциялардын экинчи тартиптеги туундуларын аныктагыла:

а) $z = x^2y^3$

б) $z = \frac{y}{y-x}$

Үйдө иштөө үчүн көнүгүүлөр

3. Төмөнкү функциялардын экинчи тартиптеги жекече туундуларын тапкыла:

а) $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. ***Жообу:*** $24x + 6y$**.**

б) $z = xy + \sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. ***Жообу:*** $-\sin(x+y)$**.**

в) $z = \ln \operatorname{tg}(x+y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. ***Жообу:*** $-\frac{4\cos 2(x+y)}{\sin^2 2(x+y)}$**.**

г) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. ***Жообу:*** 0**.**

Өз алдынча иштөө үчүн кошумча көнүгүүлөр:

1. Төмөнкү функциялардын жекече туундуларын тапкыла:

1) $z = x^2 - 3y^2 + 5xy$; 2) $z = x^3 + 6xy^2 - 4y^3 - 2xy$;

3) $z = \frac{y}{x}$; 4) $z = \frac{y-2x}{x+2y}$; 5) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

6) $z = y^x$; 7) $z = x^{y^2}$; 8) $z = e^{-\frac{y}{x}}$;

9) $z = arctg\frac{x}{y}$; 10) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 11) $z = ye^{-xy}$;

12) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 13) $u = \frac{y}{x} - \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$.

2. Берилген функциялардын толук дифференциалын аныктагыла:

1) $z = x^2 y^3$; 2) $z = \frac{xy}{y-x}$; 3) $z = e^{y^2 - xy}$;

4) $z = \cos(xy)$; 5) $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$; 6) $u = x^2 yz^4$;

7) $u = \frac{y}{xz}$; 8) $u = xy^z$ 9) $u = \ln\left(x^3 - y^3 + 2z^3\right)$.

3. Функциянын толук дифференциалынын маанилерин тапкыла:

1) $z = \frac{x}{y}$ $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}1$ маанисинде;

2) $z = \frac{y}{y-x}$ $x = 1$, $y = 2$, $dx = \frac{1}{2}$, $dy = -\frac{1}{3}$ маанисинде;

3) $z = e^{xy}$ $x = -2$, $y = -1$, $dx = -0{,}3$, $dy = 0{,}2$ маанисинде;

4) $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $dx = -0{,}1$, $dy = 0{,}3$, $dz = 0{,}2$ маанисинде.

Өзүн-өзү текшерүү сурооолору:

1. $z = z(x, y)$ функциясынын x аргументи боюнча жекече туундусу деп эмнени айтабыз?
2. $z = z(x, y)$ функциясынын y аргументи боюнча жекече туундусу деп эмнени айтабыз?
3. Кандайдыр бир чекиттеги функциянын толук дифференциалынын аныктамасын бергиле.
4. Биринчи тартиптеги толук дифференциалдын инварианттуулук касиетинин мааниси эмнеде?
5. Экинчи жана үчүнчү тартиптеги жекече туундуларды аныктоо менен белгилөөлөрүн эске түшүргүлө

СВОТ (SWOT-анализ) (англ, strength - күч, кубат, weak - бошондук, солгун тартуу, opportunity - мүмкүнчүлүк жана threat - коркунуч)