

МИНИСТРЕСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
КЫРГЫЗКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА МЕЖДУНАРОДНЫХ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ



#### ДОКЛАД

на тему: Производные высшего порядков в явном, неявном и параметрическом виде

Выполнила: Омарали кызы А.

Группа: МКН(б)-1-22

Руководитель: Шайдуллаев Б.

## ***ПЛАН***

- 1. Введение***
- 2. Основная часть***
- 3. Заключение***

**1. Производные высшего порядков в явном, и неявном и параметрическом виде**

**Производные высшего порядков**

Пусть  $y = f(x)$  – некоторая дифференцируемая функция, производная от которой  $f'(x)$  также является дифференцируемой функцией. Производная функции  $y' = f'(x)$  обозначается символическим выражением  $y'' = f''(x)$  и называется **второй производной** (или **производной второго порядка**) функции  $f(x)$ :

$$y'' = (y')'.$$

Запись вида

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

позволяет указать в явной форме переменную, по которой выполняется дифференцирование функции. Однако такое обозначение является достаточно громоздким и поэтому обычно используется его сокращенная форма:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Эта формула читается как “игрек два штриха равен дэ два игрек по дэ икс дважды”.

Производной  $n$ -го порядка от функции  $f(x)$  называется производная от производной  $(n - 1)$ -го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Верхний индекс  $n$ , заключенный в круглые скобки, указывает порядок производной. Например, пятую производную от функции  $y$  записывают в виде  $y^{(5)}$ . Для обозначения производных до третьего порядка включительно обычно предпочитают использовать штрихи:  $y', y'', y'''$  или  $f'(x), f''(x), f'''(x)$ . Если порядок производной  $n \geq 4$ , то для его обозначения допускается использование римских цифр, например,  $y^{IV} = y^{(4)}$ .

Отметим также, что под производной нулевого порядка от функции  $f(x)$  понимается сама функция  $f(x)$ :

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

### Производные высших порядков неявно заданной функции.

Пусть функция  $y = f(x)$  задана неявно в виде уравнения  $F(x; y) = 0$ . Продифференцировав это уравнение по  $x$  и разрешив полученное уравнение относительно производной  $y'$ , найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по  $x$  первую производную получим вторую производную от неявной функции. Подставляя уже найденное значение  $y'$  в выражение второй производной, выразим  $y''$  через  $x$  и  $y$ . Аналогично поступаем для нахождения производной третьего порядка (и дальше).

Пример. Найти  $y''$ , если  $x^2 + \ln y = 1$

### Замечание (к неявному заданию функций)

В уравнении  $F(x, y) = 0$  переменных  $x$  и  $y$  входят равноправно, поэтому можно считать, что это уравнение задает неявно функцию  $y(x)$  или функцию  $x(y)$ .

Например,  $2x + 3y - 6 = 0$  или  $y = \frac{6 - 2x}{3}$  или  $x = \frac{6 - 3y}{2}$ .

Добавлено примечание ([A1]):

### Явно или неявно заданные функции

Если формула, связывающая аргумент  $x$  и функцию, имеет вид

$$y = f(x),$$

то переменная называется **явно заданной функцией переменной  $x$** .

Например,  $y = x^2$ ,  $y = \arcsin x + 5$ .

Если формула, связывающая аргумент  $x$  и функцию, записана в виде уравнения  $F(x, y) = 0$ , то определяемая из этого уравнения переменная  $y(x)$  называется **функцией, заданной неявно**.

Пример 3 (неявно заданные функции)

1) Уравнение  $\sqrt{x} - 4y + 5 = 0$  задает неявно функцию  $y = \frac{\sqrt{x} + 5}{4}$ ;

2) уравнение  $\log_2 y - x - 1 = 0$  задает неявно функцию  $y = 2^{x+1}$ ;

3) уравнение  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  задает неявно две функции  $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ ;

4) уравнение  $\operatorname{tg} y = x$  задает неявно бесконечное множество функций  $y = \operatorname{arctg} x + \pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Из примеров видно, что если уравнение  $F(x, y) = 0$  удастся решить относительно, то осуществляется переход от неявно заданной функции к ее явному заданию  $y = y(x)$ . При этом часто получается многозначная функция, которую всегда можно рассматривать как совокупность однозначных функций (совокупность однозначных ветвей многозначной функции).

Например,  $x^2 + y^2 = 4$   $\cup$   $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$   $\cup$   $\begin{cases} y = +\sqrt{4 - x^2} \\ y = -\sqrt{4 - x^2} \end{cases}$ ;

$\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x \\ y = \operatorname{arctg} x + p \\ y = \operatorname{arctg} x - p \end{cases}$   
 $\operatorname{tg} y = x$   $\cup$   $y = \operatorname{arctg} x + pn, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \cup \dots$

Однако на практике решить уравнение  $F(x, y) = 0$  относительно переменной получается далеко не всегда или это решение получается слишком громоздким. Например, уравнение  $\sin(x + y) + y - x^2 = 0$  нельзя решить относительно. Поэтому в этих случаях приходится работать с функциями, имеющими только неявное задание.

### Параметрические заданные функции

Пусть зависимость между аргументом  $x$  и функцией  $y$  задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (21.1)$$

где  $t$  — вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную  $y'_x$ , считая, что функции (21.1) имеют производные и что функция  $x=x(t)$  имеет обратную  $t=\varphi(x)$ . По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \quad (21.2)$$

Функцию  $y=f(x)$ , определяемую параметрическими уравнениями (21.1), можно рассматривать как сложную функцию  $y=y(t)$ , где  $t=\varphi(x)$ . По правилу дифференцирования сложной функции имеем:  $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ . С учетом равенства (21.2) получаем

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \quad \text{т. е.} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Полученная формула позволяет находить производную  $y'_x$  от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости  $y$  от  $x$ .

<< Пример 21.2

Пусть 
$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Найти  $y'_x$ .

Решение: Имеем  $x'_t = 3t^2$ ,  $y'_t = 2t$ . Следовательно,  $y'_x = 2t/t^2$ , т. е.  $y'_x = \frac{2}{3t}$ .

В этом можно убедиться, найдя непосредственно зависимость  $y$  от  $x$ .

Действительно,  $t = \sqrt[3]{x}$ . Тогда  $y = \sqrt[3]{x^2}$ . Отсюда  $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ , т. е.  $y'_x = \frac{2}{3t}$ .

## Примеры

Уравнение [окружности](#) имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Параметрическое представление окружности:

$$x = \cos t; y = \sin t$$

Уравнение [гиперболы](#) описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметрическое представление гиперболы (точнее, её ветви  $x > 0$ ):

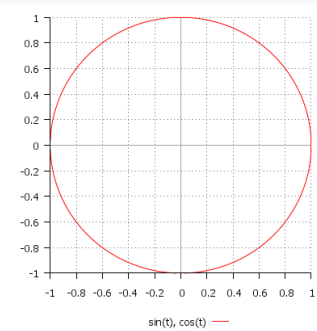
$$x = a \operatorname{ch} t; y = b \operatorname{sh} t$$



# Примеры графиков параметрических функций на плоскости

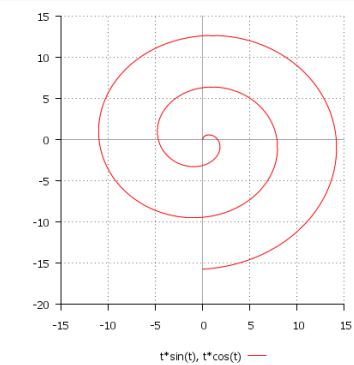
## Окружность

$x=\sin(t)$  , $y=\cos(t)$ ,  $t\in[0;2\pi]$



## Спираль

$x=t\sin(t)$  , $y=t\cos(t)$ ,  $t\in[0;5\pi]$



### ***Заключение***

Объект исследования – процесс исследования параметрически заданной функции.

Предмет исследования – график параметрически заданной функции.

Цель работы – на основе анализа теоретических и практических данных обосновать эффективность изучения параметрически заданной функции путем построения ее графика.

### ***Литература***

1. Смирнов В.А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011. — .
2. Смирнов В.А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия: пособ. для подготовки к ЕГЭ / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2009. — 272 с. — (Готовимся к ЕГЭ). —
3. Денищева Л.О., Рязановский А.Р., Семенов П.В., Сергеев И.Н. ЕГЭ 2009. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов. — М.: Эксмо, 2008. — .
4. Открытый банк заданий ЕГЭ по математике 2012 г. — Режим доступа: <http://mathege.ru/or/ege/Main>. — (тест).
5. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: 9 кл. / под ред. С.А. Шестакова. — М.: АСТ; Астрель, 2006. — .
6. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 11 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений (профильный уровень): в 2 ч. — Ч. 1. / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. — М.: Мнемозина, 2007.
7. Бунимович Е.А., Булычев Основы статистики и вероятность: учеб. пособие (5—11 кл.). — М.: Дрофа, 2008. — 286с.: ил. — (Темы школьного курса
8. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика. — М.: МЦНМО; ОАО «Московские учебники», 2008.
9. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ: учеб. пособие для шк. с углубл. изуч. математики (11 кл.). — М.: Мнемозина, 2000.

