МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Республиканской научной конференции на тему

«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СМЕЖНЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ»

I

Фергана, 16-17 май, 2025 год

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

O‘zR FA V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA MATEMATIKANING TURDOSH BO‘LIMLARI ZAMONAVIY MUAMMOLARI

mavzusidagi Respublika ilmiy anjumani

T E Z I S L A R T O‘ P L A M I

Farg‘ona, 2025 - yil 16 - 17 - may

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

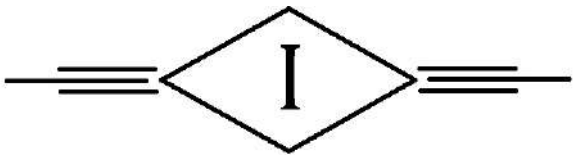
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

Т Е З И С Ы Д О К Л А Д О В

Республиканской научной конференции на тему

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СМЕЖНЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ

Фергана, 16-17 май, 2025 год



Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики: тезисы докладов Республиканской научной конференции (16-17 мая 2025 года, г.Фергана, Узбекистан). – Фергана. 2025. – 303 с.

Тезисы докладов Республиканской научной конференции "**Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики**" содержат научные доклады по следующим направлениям: вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа; неклассические уравнения математической физики; динамические системы и оптимальное управление; алгебра, анализ, геометрия и теория вероятностей; прикладная математика и информатика; методика преподавания математики и информатики.

Данная конференция организована на основании приказа №490 Министра высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан от 24 декабря 2024 года.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

профессор **Арипов М.М.**	профессор **Ходжибаев В.Р.**
профессор **Ашуров Р.Р.**	доцент **Гозиев К.С.**
профессор **Артыкбаев А.**	доцент **Ибайдуллаев Т.**
профессор **Арзикулов Ф.Н.**	доцент **Каримов К.Т.**
профессор **Ахлимирзаев А.**	доцент **Кодиров К.Р.**
профессор **Каримов Э.Т.**	доцент **Рахимов К.О.**
профессор **Каримов Ш.Т.**	доцент **Рузалиев Ш.А.**
профессор **Хасанов А.**	доцент **Халилов К.С.**

Ответственные за выпуск:

к.ф.-м.н., доцент	**Хайдаров И.У.**
к.ф.-м.н., доцент	**Тожибоев И.Т.**
PhD по ф.-м. н.	**Маманазаров А.О.**
PhD по ф.-м. н.	**Усмонов Д.А.**
	Турдиев Х.Н.
	Орипов Д.Д.

© *Ферганский государственный университет, 2025*

Организационный комитет

Шермухаммадов Б.Ш.	- председатель, ректор ФерГУ.
Аюпов Ш.А.	- сопредседатель, академик АН РУз., Президент АН РУз.
Азамов А.	- сопредседатель, академик АН РУз.
Ахмадалиев Ю.И.	- зам. председателя, проректор по научной работе и инновациям ФерГУ.
Бакиров Т.Ю.	- зам. председателя, декан физико-математического факультета ФерГУ.

Члены оргкомитета

Абдукодиров А.Т. (г.Фергана)	Арзикулов Ф.Н. (г.Андижан)
Азизов Э.Ю. (г.Фергана)	Ахлимирзаев А. (г.Андижан)
Апаков Ю.П. (г.Наманган)	Бердышев А.С. (г.Алматы)
Гозиев К.С. (г.Фергана)	Рахимов К.О. (г.Фергана)
Зуннунов Р.Т. (г.Ташкент)	Рахматуллаев М.М. (г.Наманган)
Ибайдуллаев Т.Т. (г.Андижан)	Тожибоев И.Т. (г.Фергана)
Кадиркулов Б.Ж. (г.Ташкент)	Хакимов Р.М. (г.Наманган)
Каримов К.Т. (г.Фергана)	Халилов К.С. (г.Фергана)
Каримов Ш.Т. (г.Фергана)	Хасанов А. (г.Ташкент)
Каримов Э.Т. (г.Ташкент)	Хасанов А.Б.(г.Самарканд)
Кодиров К.Р. (г.Фергана)	Хонкулов У.Х. (г.Фергана)
Мамажонов Ж.Д. (г.Фергана)	Эргашев Т.Г. (г.Ташкент)
Мирсабуров М. (г.Термез)	Юлдашев Т.К. (г.Ташкент)

Программный комитет

Алимов Ш.А.	- председатель, академик АН РУз (Узбекистан)
Ашуров Р.Р.	- сопредседатель, профессор (Узбекистан)
Каримов Ш.Т.	- зам. председателя, профессор (Узбекистан)

Члены программного комитета

Арипов М.М. - (Ташкент)
Артыкбаев А. - (Ташкент)
Бабажонов Б.А. - (Ургенч)
Бегматов Акр.Х. - (Ташкент)
Ворисов А.К. - (Ташкент)
Гафуров М.У. - (Ташкент)
Джамалов С.З. - (Ташкент)
Дурдиев К.С. - (Бухара)
Зикиров О.С. - (Ташкент)
Имомназаров Х.- (Россия)
Исломов Б. - (Ташкент)
Касимов Ш.Г. - (Ташкент)
Мамадалиев Н. - (Ташкент)
Муминов К.К.- (Ташкент)
Розиков У.А. - (Ташкент)
Садуллаев А.С. - (Ташкент)
Тахиров Ж.О. - (Ташкент)
Фарманов Ш.К. - (Ташкент)
Фаязов К.С. - (Ташкент)
Ходжибаев В.Р. - (Наманган)
Яхшимурадов А.Б. - (Ургенч)
Шадиметов Х.М. - (Ташкент)

СОДЕРЖАНИЕ

Ахмаджон Кушакович Уринов (посвящается 75-летию со дня рождения) 15

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЯ И СМЕШАННОГО ТИПА

1. **Aripov M.M., Atabaev O. Kh.** Global solvability of solutions doubly degenerate nonlinear parabolic system in a medium with variable density with nonlinear source and absorption 20

2. **Mahamoud A.A., Shishkina E.L.** Differential equations involving fractional-order Bessel operators 21

3. **Kadirkulov B.J., Begimkulov F. Kh.** On a nonlocal problem for a degenerate elliptic equation 23

4. **Kalimbetov B.T., Turekhanov K.A., Khabibullaev Zh.O.** Regularization method for a singularly perturbed fractional-order partial integro-differential equation with rapidly oscillating inhomogeneity 24

5. **Abdullaev O.Kh., Duysenbaev R.S** An inverse problem for a loaded degenerate fractional order diffusion equation with involution perturbation 27

6. **Abdullaev O.Kh.,Sobirjonov A.K.** An inverse problem for a fractional pseudo-parabolic loaded equation with involution perturbation 29

7. **Azizov M.S.,Kamolova Z.D.** Initial boundary value problem for degenerate beam equation 31

8. **Bibulova D.A., Kalimbetov B.T., Turekhanov K.A.** Regularization method for a singularly perturbed integro-differential system with a rapidly oscillating components 32

9. **Jurayeva D.U., Usmonov D.A.** A Problem with integral condition for a hyperbolic equation 35

10. **Karimov K.T., Azimova T.E.** Ikkita buzilish nuqtalariga ega bo‘lgan oddiy differensial tenglama uchun spektral masala 36

11. **Khajiev I. O., Shobdarov E. B.** Conditional correctness of the boundary value problem for a non-homogeneous mixed-type equation 38

12. **Kadiraliyev A.** Anti-periodic boundary value problem for a second-order partial differential equation with disruption 39

13. **Mamanazarov A., Khalilov K., Kodiraliyev A.** Direct and inverse source problems non-local boundary conditions for a time-fractional space degenerate diffusion equation 41

14. **Mamanazarov A.O., Mahmudjonova Sh.B.** An inverse source problem for a time-fractional space degenerate subdiffusion equation 43

15. **Mamanazarov A.O., Mirzagiyosova S.M.** Unique solvability of an inverse problem for a fourth order degenerate partial differential equation 45

16. **Mo‘ydinov I.M.** Uchinchi tartibli psevdogiperbolik tenglama uchun Gursa masalasi 47

17. **Nishonova Sh.T., Akbarova O.M.** To‘g‘ri to‘rtburchakda ikkita tip o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi 49

18. **Rakhmonov Z.R., Yarmetova D.I.** Asymptotics of self-similar solutions of the heat conduction problem in an inhomogeneous medium with a source 50

19. **Rasulova K. M., Azizov M. S.** On an inverse problem for the string vibration equation 52

20. **Ruziev M.Kh., Kazakbaeva K.B.** A nonlocal boundary value problem for the Holmgren equation with singular coefficient and spectral parameter 53

21. **Sadieva A.S., Tursunov D.A., Orozov M.O.** On a singularly perturbed problem with unstable spectrum 55

22. **Sobirjonova M. Q.** Unique solvability of an inverse problem for a fourth order degenerate partial differential equation 57

23. **Toktorbaev A.M., Toktomuratova Zh.E.** Movement of the piston in a reacting mix of gases 59

24. **Tolipov N.I.** Yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarning yechilishini tadqiq qilish 60

25. **Toshpulatov M.** An inverse source problem for a time-fractional mixed equation in a cylindrical domain 61

26. **Xalilov Q.S., Ne’matjonova M.R.** Giperbolik tenglamasida spektral parametr qatnashgan aralash tipdagi tenglama uchun integral shartli bir masala haqida 62

27. **Муравник А. Б., Половинкин И. П., Ситник С. М.** О некоторых современных задачах по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям 64

28. **Исломов Б. И.** Трехмерный аналог задачи Трикоми для уравнения параболо - гиперболического типа дробного порядка в бесконечной призматической области 67

29. **Джамалов С.З.** Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа второго и высокого порядков 70

30. **Джамалов С.З., Шакиров А.А.** Об одной коэффициентной обратной задаче с нелокальными граничными условиями периодического типа для трехмерного уравнения Трикоми в параллелепипеде 70

31. **Кадиркулов.Б.Ж., Узакбаева Д.Е.** Об одной прямой и обратной задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа четвёртого порядка 72

32. **Кожобеков К.Г., Сопуев А.А.** Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с интегральным условием склеивания 73

33. **Мирсабуров М., Амонов Б.Б., Утаҷрова С.Н.** Задача Франкля с нелокальным условием на несимметричном, относительно начало координат, отрезке оси $x = 0$. 74

34. **Мирсабуров М., Маматмуминов Д.** Задача с непольным условием Трикоми и аналогом условия Франкля на частях граничных характеристик для уравнения смешанного типа 76

35. **Сопуев А., Абдумиталип уулу К.** Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения 4-го порядка с линией изменения типа $x = 0$ 78

36. **Сопуев А., Жээнбаев Н.А.** О краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка 79

37. **Хасанов А.** Обобщенные операторы дробного интегрирования с ядром гипергеометрической функций Гаусса 80

38. **Аббасова М.О.** Задача Неймана для многомерного уравнения Гельмгольца в гипероктанте 81

39. **Акбарова М., Х., Акбарова С.Х.** О разрешимости задачи с нелокальными условиями для эллиптико-параболического уравнения смешанного типа 82

40. **Аллакова Ш., Эсанова Д.** Задача со смещением на внутренних характеристиках для одного класса уравнений 83

41. **Арзикулов З.О., Хасанов А., Эргашев Т.Г.** Конфлюэнтные гипергеометрические функции и их применение к решению задачи Дирихле-Неймана для уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами 85

42. **Бегайдаров М.У., Калимбетов Б.Т., Сапаков Д. А.** Главный член асимптотики решение сингулярно возмущенной дифференциальной системы с быстро осциллирующими компонентами 87

43. **Бойназаров А.Н., Юлбарсов Х.А.** Обыкновенное дифференциальное уравнение с целой и дробной степенью оператора Бесселя 89

44. **Чориева С.Т., Тошмуродова М.Д.** Постановка задачи Бицадзе-Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом 90

45. **Исмоилов А.И.** Обратная задача для одного частного случая уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу 92

46. **Исмоилов М.Х., Каримов Ш.Т.** Кратные операторы Эрдейи-Кобера дробного порядка и их свойства 94

47. **Jalilov M.A.** Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка 95

48. **Жиенбаева Г.А.** Распространение тепла в бесконечном цилиндре с источником мгновенного воздействия 96

49. **Каримов К. Т., Олимова Д. С.** Нелокальная краевая задача в полубесконечном параллелепипеде для трехмерного уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами 98

50. **Каримов К. Т., Шокиров А.М.** Пространственная задача с условиями Франкля для уравнения с сингулярным коэффициентом 100

51. **Каримов Ш.Т., Орипов Ш.А., Орозов М.О.** Задача Дарбу для уравнения Буссинеска-Лява с оператором Бесселя 101

52. **Комилова Н.** Об одной краевои задаче для гиперболического уравнения второго рода, вырождающегося внутри характеристического четырехугольника 103

53. **Маковецкий В.И.** Второй интеграл Сонина как оператор преобразования в дифференциальных уравнениях смешанного типа 105

54. **Мирсабурова Д.М., Рузиева З.Ф., Бегимова Ш.Ч.** Задача с неполным условием типа условия Бицадзе-Самарского и аналогом условия Франкля для одного класса уравнений смешанного типа 107

55. **Муродова М.** О единственности одной краевой задачи для уравнения с сингулярным коэффициентом в трехмерном пространстве 109

56. **Окбоев А.Б.** О задаче типа Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода 111

57. **Орипов Д.Д.** Исследование одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка 112

58. **Рафиков А.Н.** Задачи типа Бицадзе-Самарского для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу 113

59. **Тулакова З.Р.** О смешанной задаче для многомерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами 114

60. **Тураев Р.Н., Мирзаев Ф.С.** Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коеффициентом 116

61. **Усмонов Д.А., Турдиева К.О.** Спектральная задача для вырождающегося дифференциального уравнения эллиптического типа 118

62. **Халхаджаев Б.Б.** О слабом обобщенном решение полунелокальной краевой задачи уравнении смешанного типа второго рода четвертого порядка 119

63. **Худоёров А.А., Зуннунов Р.Т., Хайдаров И.У.**Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода со спектральным параметром в области - эллиптическая часть которой вертикальная полуполоса 120

64. **Бектошева Ш. А., Шейдуллаева Т.Т.**Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода в области, эллиптическая часть которой - первая четверть плоскости 122

65. **Эргашев А.А., Зуннунов Р.Т.**Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода в области, эллиптическая часть которой прямоугольник 123

66. **Nishonova Sh.T., Sodiqova M.S.**On a problem with a discontinuous gluing condition for an elliptic-hyperbolic equation 125

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. **Aripov M., Bobokandov M.** Analysis of crosswise diffusion system with a time-dependent source 126

2. **Ashurov R.R., Fayziyev Yu.E., Khushvaktov N.Kh.** On the initial value problem for the Barenblatt-Zheltov-Kochina type fractional equation 127

3. **Ashurov R., Saparbayev R.** Existence and uniqueness of the inverse problem for the fractional integro-differential telegraph equation in a bounded domain 128

4. **Ashurov R.R., Sulaymonov I.A.** Monotonicity in the parameter of the Mittag-Leffler function and determining the fractional exponent of the subdiffusion equation 130

5. **Xasanov A.B., Xudayorov U.O.** Integral manbali Liuvill tenglamasini davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida integrallash 131

6. **Kadirkulov B. J., Ergashev O. T.** On the spectral problem of the Bitsadze-Samarskii type for a second-order ordinary differential equation 133

7. **Karimov E.,Tokmagambetov N.** The estimation of the bivariate Mittag-Leffler type function and its application to inverse problems for a sub-diffusion equation 134

8. **Fayziev Yu.E., Khudoykulova M.U.** Nonlocal problem for a fractional differential equation of the Boussinesq type 135

9. **Abdulboqiyev X.** Boundary problem for partial mixed differential equation with Caputo fractional derivative 136

10. **Abdumurodova Sh.A., Abdiraimova Sh.T.** Kasr tartibli to‘lqin tarqalish tenglamasi uchun aralash masala 137

11. **Alimov Z.S.** Inverse-source problem for the subdiffusion equation with the Hadamard fractional derivative 138

12. **Anvarjonov B.B., Pardayeva O.F.** A free boundary model for epidemiological spread with advection 139

13. **Azizov M.S., Orifjonova Q.M.** Yuklangan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun bir chegaraviy masala yechimining yagonaligi haqida 141

14. **Babadjanova A. K., Aminova M. M.** On the matrix negative order Korteweg-de Vries equation with a self -consistent source 143

15. **Babadjanova A.K., Atanazarova. Sh.E., Axmadjonov M.** On the matrix negative order modified Korteweg-De Vries equation with a source 144

16. **Eshbekov R.Kh.** On the Hirota-type equation with a self-consistent source in integral form 146

17. **Jumaev J.J.** An inverse diffusion coefficient problem in generalized fractional diffusion equation 148

18. **Karimov E.T., Usmonov D.A., Mirzaeva M. M.** About the Cauchy problems for the time-fractional diffusion equations with the Prabhakar fractional derivative 149

19. **Karimov K.T., Toshmatov M.M.** Buziladigan oddiy differensial tenglama uchun nolokal shartli spektral masala 151

20. **Karimov Sh.T., Abdumo‘minova Sh.A.** Uchinchi tartibli giperbolik tenglama uchun teskari masala 152

21. **Karimov Sh.T., Tulasheva Y.I.** The Cauchy problem for the degenerate plate vibration equation 154

22. **Karimov Sh.T., Xalilov M.K.** Teskari spektral masalalarni almashtirish operatorlari usulida ishlash 156

23. **Karimov Sh.T., Yo‘ldoshaliyeva X.H.** Parabolik tenglamalar uchun teskari koeffitsientli masalalarni teskari spektral masalalarga keltirish 157

24. **Khasanov Sh.** The Cauchy problem for a differential equation involving the ψ-Prabhakar fractional derivative and a priory estimate 159

25. **Rafiqov A.N., Mahamadaminova Sh. V.** Furyening integral almashtirishi va uning boshlang‘ich chegaraviy masalalarni yechishga tatbiqi 160

26. **Makhmudov K.O., Makhmudov O.I., Niyozov I.E.** The Cauchy problem for biharmonic equation of Helmholz type 161

27. **Mamedov K.P., Jumaniyazov N.P., Azamatov A.P.** On the integration of the mKdV equation with a source in the class of finite density functions, in the case of simple eigenvalues 163

28. **Musurmonov E.A., Saliyev A.A., Shukurova Z.U., Shukurov A.M.** Izotropik fazo qattiq sharda ko‘ndalang yassi to‘lqin difraksiyasi 165

29. **Nishonova Sh.T. Murodov S.X.** Nonlocal boundary value problem for fourth-order partial differential equations with double characteristics 166

30. **Oripov Sh.A., Fozilov M.N.** A boundary value problem for a third-order homogeneous differential equation with a characteristic transition line 167

31. **O‘rolova Sh.** Cheksiz yulduzsimon grafda berilgan kasr hosilali uchinchi tartbli tenglama uchun Koshi masalasi 168

32. **Qurbanbaev O‘.O.,Djakaeva K.D.** Ikkinchi tartibli to‘lqin tenglamalari uchun Koshi masalasini yechishda sistemadan foydalanish 170

33. **Sharifjonova N.S.** Boundary value problem for fourth-order a complex differential equation in a rectangular domain 171

34. **Sulaymonov I. A., Shamsiddinova K.Z.** Kasr vektor tartibli parabolik tenglamalar sistemasi 172

35. **Turdiev Kh. N.** Nonlocal problem for a generalized telegraph equation with the Prabhakar fractional derivative 173

36. **Umarov R.A.** Partial differential equations, third order equation with multiple characteristics, boundary value problem 176

37. **Usmonov D.A., Tokhirjonov U.R.** Initial-boundary value problem with nonlocal initial conditions for a partial differential equation containing an integro-differential operator with a Bessel function in the kernel 177

38. **Usmonov D.A., Tursunova E.G.** A Cauchy problem for two-term Prabhakar fractional operators 179

39. **Xalilov Q.S., Mo‘ydinona Sh.M.** Ikkinchi tartibli parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun bir nolokal shartli masala haqida 180

40. **Xayrullayeva A.** Zinapoyasimon grafda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich chegaraviy masalaning yechimi mavjudligi 182

41. **Yuldashova H.A.** Existence the solution to the Cauchy problem for a higher-order fractional equation with singular coefficients 184

42. **Ikromova N. S, Yunusalieva M.T.** Unique solvability of a mixed problem for time-fractional space-degenerate parabolic equation on a bounded domain 185

43. **Khujakulov J.R., Abdimurodova X.A., Yo'ldosheva M. D.**One non-local problem for a time fractional equations with the Regularized Prabhakar derivative on metric graph 187

44. **Хасанов А.Б., Жураева У.Ю.** Некоторые свойства полигармонических функций, определенных в четномерном евклидовом пространстве 188

45. **Исломов Б.И., Юнусов О.М.** Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения гиперболического типа третьего порядка в специальной области 190

46. **Апаков Ю.П. Иброхимов Х.К.** Об одном методе решение краевой задачи для вязко-трансзвукового уравнения с несимметричными условиями по времени 192

47. **Апаков Ю.П., Меликузиева Д.М.** Об одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка, содержащее третью производную по времени в полуограниченной области 194

48. **Зикиров О.С., Болтаева М.У.**Об одной нелокальной задаче для уравнения телеграфа 196

49. **Зикиров О. С., Сагдуллаева М. М.**Нелокальная задача с интегральными условиями для уравнения третьего порядка 197

50. **Джамалов С.З., Туракулов Х.Ш.** Об одной линейной обратной задаче для трёхмерного уравнения чаплыгина с периодическими краевыми условиями в неограниченном параллелепипеде 199

51. **Бабажанов Б.А., Атажонов Д.О., Якубова М.З.** Интегрирование обобщенного уравнения Камассы-Холма в классе периодических функций 200

52. **Уразбоев Г.У., Балтаева И.И., Исмоилов О.Б.** Об интегрирование нагруженное уравнение Кортевег-де Фриза отрицательного порядка с простым самосогласованным источником 202

53. **Яхшимуратов А.Б., Матекубов О.М., Маткаримов С.А.** Система Каупа с дополнительным членом в классе периодических функций 203

54. **Яхшимуратов А.Б., Матекубов О.М.** Нагруженная система Каупа в классе периодических функций 205

55. **Абдукодиров А.Т., Мадибрагимова И.М., Мамасидикова Т.А.** О единственности краевых задач для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками 206

56. **Абдукодиров А.Т., Тулкинбоев Т.А.** О канонических видах линейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка с кратными и действительными характеристиками 208

57. **Ашурова З.Р, Жураева У.Ю, Маллаева Ф.У.** Некоторые свойства Функции Карлемана в трехмерном Евклидовом полупространстве 210

58. **Елгондиев К.К., Наурызбаева Ш.О.** Метод усреднения для квазилинейного связанного уравнения Ван Дер Поля-Дюффинга 212

59. **Фармонов Ш.Р.** Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа с характеристической линией изменения типа 214

60. **Гафаров И.А.** Одна задача для аналитического продолжения 217

61. **Газиев К.С.** Краевая задача для уравнения четвёртого порядка составного типа 219

62. **Хамитов А.А.** О построение решение краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с несимметричными условиями в R^3 220

63. **Иргашев Б.Ю., Мухсинова М.К.** Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с вырождением 222

64. **Жураев А.Х.** Об одной краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в полуограниченной области 222

65. **Мамажонов М.М., Шерматова Х.М.** К постановке одной краевой задачи для параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка в пятиугольной области 224

66. **Мамажонов С.М.** О рассмотрении краевой задачи для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками 225

67. **Исмоилов М.Х., Мирзалиев М.М.** Интегральное преобразование Ханкеля и его применение к краевым задачам 227

68. **Муминов З.М.** Задача Коши для одного уравнения параболо-гиперболического типа 229

69. **Омонова А. Н.** Об одной задаче для интегро-дифференциального уравнения второго порядка 230

70. **Отарова Ж.А., Бекиев А.Б.** Разрешимость обратной задачи для уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями 231

71. **Расулов М.С., Умирхонов М.Т.** Задача с двумя разными свободными границами для конкурентно-диффузионной системы 233

72. **Сафаров Ж.Ш., Хуррамова М.Ж.** О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения 234

73. **Сраждинов И.Ф.** О разрешимости смешанной задачи для одной системы составного типа 235

74. **Убайдуллаев У. Ш., Абсоатова Х. Г.** Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа дробного порядка 237

75. **Васиотев В.Б., Гебресласи Х.Ф.** Об эллиптической задаче во внешности многомерного конуса 238

76. **Холбеков Ж. А.** Нелокальная краевая задача для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа, когда нагруженная часть содержит оператор дробного порядка 240

77. **Хуррамов А.Т., Норхонова М.А.** Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения 242

78. **Хушвактова Ш.Дж. Янгибоев З.Ш.** Об одном способе регуляризации в одномерных обратных динамических задачах для уравнений пористых сред 243

79. **Янгибоев З.Ш., Рузимуродова Р.** О первой задаче Дарбу для нелинейного гиперболического уравнения второго порядка 245

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

1. **Ganihodzhayev R.N., Eshmamatova D.B., Muminov U.R.** Classification of character of rest points of the Lotka-Volterra operator acting in s^4 247

2. **Ibragimov G., Ibroximjonov I., Inomiddinov S.** Evasion from a single pursuer in a differential game with changing control resources 249

3. **Rahmatullev M.M., Akhmedov O.U.** p-adic SOS model with an external field on the Cayley tree 250

4. **Samatov B.T., Umaraliyeva N.T.** A discrete pursuit problem with Langenhop type constraints on controls 252

5. **Yuldashev T.K.** Optimal control in inverse problem for fractional order pseudoparabolic equation 254

6. **Abdullayeva Sh. H.**Geometrik grafdagi quvish-qochish o‘yinida $n(\Gamma)$ sonining o‘zgarishi 256

7. **Akhmedov O.S., Muzaffarova D.B.** Accuracy estimation for Cauchy problems in quadratic systems using 4th order Runge-Kutta 256

8. **Eshmamatova D.B., Bozorov A.A., Hakimova D.A.** S^3 simpleksda aniqlangan Lotka-Volterra operatorlari va epidemiologik modelining o‘zaro bog‘liqligi 258

9. **Eshondedayev.F.J.** Uchta qo‘zg‘almas nuqtali p-adik $(1,2)$-ratsional dinamik sistemalar haqida 260

10. **Holboyev A. G.** Dynamic search on the edges of the graph 262

11. **Juraev B.I., Uraimxudjaeva R.O., Juraeva D.T.**Π-strategy in a differential game with integral and linear constraints on controls 264

12. **Karimov D.I.** Aynigan matritsaga ega uch o‘lchamli simpleksda aniqlangan Lotka – Volterra akslantirishlarining traektoriyalari dinamikasi 265

13. **Khaydarov Z. Kh.** Analysis of formal stability in resonant Hamiltonian systems 267

14. **Madrakhimov T.R., Vaisova N.Z., Yusupov B.B.** Local $\frac{1}{2}$-derivations of n-dimensional naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra 269

15. **Muxammadjonov A.A.** Optimal pursuit differential game problem described by infinite system of ternary differential equations 272

16. **Normurodov Ch.B., Shakayeva E.E., Ziyakulova Sh.A.** Dastlab integrallash metodini chegaraviy masalani yechishga tadbiqi 274

17. **Sattarov I.A** On a p-adic $(2,2)$-rational dynamical system with three fixed points 276

18. **Shermukhammedov B. A., Abdusaitov D.Sh.** A piecewise constant argument method for solving second order nonlinear differential equations 278

19. **Soyibboev U.B.**On life-line game when players move by linear equations with time-varying coefficients 280

20. **Turgunboeva M.A., Akbarov A.Kh.** The ℓ-catch problem in the differential game under Grönwall type constraints 281

21. **Uralova S.I., Abdullayeva G.I., Omonov A.H.** A non-stationary evasion problem with the Langenhop type constraints 283

22. **Мамадалиев Н.,А., Мустапокулов Х.Я.** Импульсные управления в дифференциальных играх с геометрическими ограничиниями 285

23. **Рахматуллаев М.М., Исаков Б.М.** Конструктивные меры Гиббса для модели Изинга-Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли. 287

24. **Алыбаев К.С., Нурматова М.Н.** Потеря устойчивости положения равновесия в нескольких точках и задержка решений 289

25. **Эшмаматова Д.Б., Солижанова К.А.** Дискретный аналог математической модели сложных биогенов 291

26. **Ибайдуллаев Т.Т.** Инерционная дифференциальная игра с пополняемыми ресурсами управлений 293

27. **Мусакулова Н.К.** Расщепление решений сингулярно возмущенных уравнений при иррегулярном вырождении 295

28. **Сапарова Г.Б., Ажиева Э., Икромова Н.С.** Применение уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана для дифференциальной игры со случайной продолжительностью 296

29. **Завгороднева С.Ю., Турдиев С.С.** Разработка моделей частичного равновесия при миграции и мутациях 300

ПРОФЕССОР УРИНОВ АХМАДЖОН КУШАКОВИЧ (1950 - 2024)

Из мирового опыта общеизвестно, что для любой страны, стремящейся занять достойное место среди развитых государств, развитие науки и образования должно быть одним из приоритетных направлений государственной политики. Не секрет, что развитие любой отрасли зависит от эффективной работы преданных своему делу людей и энтузиастов, работающих в этой сфере, обеспечивающих выполнение задач. Одним из таких самоотверженных людей, посвятившим всю свою жизнь развитию науки и образования, является выдающийся математик, доктор физико-математических наук, профессор Ахмаджон Кушакович Уринов.

Научная школа по вырождающимся дифференциальным уравнениям и дифференциальным уравнениям смешанного и смешанно-составного типов в Узбекистане связана с именами двух академиков АН РУз М.С.Салахитдинова и Т.Д.Джураева. Они были учениками выдающегося математика двадцатого века, члена-корреспондента АН СССР А.В. Бицадзе. Академики М.С. Салахитдинов и Т.Д. Джураев в Узбекистане подготовили целую плеяду первоклассных ученых математиков. Одним из первых и ярких представителей этой математической школы является Ахмаджон Кушакович Уринов.

А.К. Уринов родился 19 января 1950 года в сельской местности Туда, в Риштанском районе Ферганской области в обычной семье сельских тружеников. Его детство прошло, как и у многих других обычных деревенских детей того времени. Учился в обычной сельской школе, где особенно в старших классах проявлял особый интерес к математическим дисциплинам. Ему также легко поддавались уроки физики и химии. В 1966 году он успешно заканчивает среднюю общеобразовательную школу и поступает без колебания на математический факультет Ферганского государственного педагогического института (ныне Ферганский государственный университет). Математика для него была волшебным миром, куда ему захотелось войти и остать-

ся там навсегда. В 1970 году успешно заканчивает институт. Заметив способность к математике и склонность к научной работе, профессор Дж.Х. Каримов, профессор К.Б. Бойкузиев и доцент Т. Абдурахмонов предложили молодому выпускнику остаться на факультете и работать преподавателем на одной из существующих тогда математических кафедр.

В 1978 году А.К. Уринов с благородной целью занимается научной работой, отправляется в Ташкент на научную стажировку в отдел дифференциальных уравнений Института Математики имени В.И. Романовского АН РУз. На формирование молодого А.К. Уринова как ученого повлиял его научный руководитель академик АН Узб. ССР М.С. Салахитдинов. В течение двух лет он освоил азы теории дифференциальных уравнений смешанного типа. В 1980 году его научный руководитель академик М.С.Салахитдинов предлагает ему остаться в аспирантуре при данном научно-исследовательском институте. В аспирантские годы он исследовал ряд новых краевых задач для уравнений смешанного типа с негладкой линией вырождения. Результаты этих исследований стали основой его кандидатской диссертации. В 1984 году Ахмаджон Кушакович возвращается на работу в Фергану в родной институт уже с дипломом кандидата физико-математических наук. Работу начал с должности старшего преподавателя кафедры математического анализа. С этого времени и поныне он не менял места работы. В 1990 году Ферганский государственный педагогический институт преобразовался в Ферганский государственный университет (ФерГУ). ФерГУ тогда являлся четвертым университетом в Узбекистане. В 1993 году Ахмаджон Кушакович Уринов успешно защищает докторскую диссертацию и получает соответствующую ученую степень. В Фергане до 2019 года он был и оставался единственным доктором наук по научной специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, пока его ученик Ш.Т. Каримов не защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

В 1993 году А.К. Уринов выступает инициатором создания кафедры дифференциальных уравнений в ФерГУ (ныне кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений). До 1997 года он возглавлял эту кафедру, и до конца своей жизни работал профессором этой кафедры. Несмотря на большую научную карьеру, он стремительно продвигается и по административной лестнице. В 1997-1999 годах А.К. Уринов проработал проректором по учебной деятельности ФерГУ, а в 1999-2004 годах проявил свои организаторские качества на должности ректора ФерГУ. Во время пребывания на посту ректора ФерГУ А.К. Уринов внес значительный вклад в развитие науки, укрепление кадрового потенциала вуза, материально-технической базы университета и стремился придать кампусу университета современный облик, соответствующий международным стандартам.

А.К. Уринов заслуженно пользуется огромным признанием среди математиков как автор глубоких фундаментальных исследований в области теории краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящее время подготовка научных кадров в Фергане и все научные достижения по теории дифференциальных уравнений связаны с его именем.

Стержневым направлением исследований А.К. Уринова стало введение новых операторов специального типа, содержащих функцию Бесселя в ядре. Он изучил качественные свойства этих операторов и их композиций с операторами интегро – дифференцирования дробного порядка. Эти результаты были применены при исследовании нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа. Следует отметить, что такие операторы специального типа позволили изучить новый вид нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных

производных со спектральным параметром.

Наряду с изучением дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа в односвязных областях, А.К. Уринов исследовал краевые задачи для этих уравнений и в двусвязных областях. В этих областях им были поставлены и исследованы новые нелокальные краевые задачи. Его работы по нелокальным краевым задачам для линейных уравнений смешанного эллиптико-гиперболичпеского типа со спектральным параметром содержат глубокий математический смысл. Были найдены новые методы доказательства единственности решения внутренней краевой задачи со смещением, однозначной разрешимости нелокальных граничных задач в двусвязной области и определения отсутствия дискретных спектров в конкретных секторах плоскости спектрального параметра. Результаты этих исследований составили содержание его докторской диссертации, которая блестяще была защищена им в 1993 году в том же институте математики имени В.И. Романовского. В последующем, А.К. Уриновым были развиты постановка и исследование новых спектральных задач для дифференциальных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с особенностями в коэффициентах, найдены собственные значения и собственные функции этих задач, изучена полнота систем собственных функций, получены весомые результаты по исследованию дифференциальных уравнений с вырождением типа и порядка, а также вырождающихся дифференциальных уравнений второго рода. В частности, полученная им формула общего решения для одного класса вырождающегося дифференциального уравнения второго рода с успехом применяется в работе других математиков при постановке и исследовании новых начальных и краевых задач.

В последние годы Ахмаджоном Кушаковичем разрабатывается еще одно направление, заключающееся в исследовании уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу и их обобщений. Полученные им результаты в этом направлении применяются при постановке и исследовании локальных и нелокальных краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов с сингулярными коэффициентами. Среди математиков вызвали большой интерес его исследования по изучению задач типа Франкля для таких уравнений с негладкой линией вырождения. В исследовательской деятельности А.К. Уринова особое место занимает исследование нелокальных задач с интегральным условием для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов. Им поставлены и разработаны методы исследования ряда новых задач с интегральным условием в непрямоугольных областях. Для дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами второго порядка и со спектральным параметром найдены фундаментальные решения в виде гипергеометрических рядов. Большой интерес представляют исследования Ахмаджона Кушаковича и его учеников по постановке и исследованию локальных и нелокальных задач для линейных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами эллиптического и смешанного типов в призматических, цилиндрических областях и частях шара, а также по применению теории операторов преобразования и операторов дробного интегро-дифференцирования, в частности обобщённого оператора Эрдейи-Кобера, к решению начальных и граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с оператором Бесселя.

А.К. Уринов является автором более 350 научных и научно-методических работ, опубликованных в национальных и международных научных журналах. Свои научные результаты он оформил в виде 8 монографий и

их издавал в авторитетных издательствах Ташкента. Резюмируя полувековой научно-педагогический опыт, А.К.Уринов написал 1 учебник, 17 учебных пособий и свыше 15 учебно-методических пособий для студентов физико-математических факультетов университетов. Ахмаджан Кушакович является организатором науки и наставником молодого поколения математиков. В 1993 году в Ферганском государственном университете он организовал научный семинар "Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и смежных областей математики". В настоящее время функционирует "Объединённый научный семинар математиков Ферганской долины который, несомненно, вносит огромный вклад в развитие математической науки. А.К. Уринов вел большую научно-педагогическую работу. Много времени и сил он уделял воспитанию молодого поколения математиков. Среди его учеников два доктора физико-математических наук и 20 кандидатов физико-математических наук. В настоящее время ученики А.К. Уринова стали депутатами Законодательной палаты "Олий Мажлис" Республики Узбекистан, проректорами вузов, деканами факультетов, заведующими кафедр, многие стали именными стипендиатами.

Ахмаджон Кушакович Уринов принимал активное участие и в общественной жизни Узбекистана. В 1994-1996, 2003-2004 годах А.К. Уринов являлся членом специального совета по присуждению ученых степеней кандидатов и докторов физико-математических наук при институте математики имени В.И. Романовского АН Узбекистана, в 2002-2005 годах он являлся членом Консультативного совета узбекского журнала "Наука и жизнь был председателем, заместителем председателя и членом организационного комитета ряда международных и республиканских научных конференций, работал на посту председателя научно-координационного совета Ферганского научного центра Академии Наук Республики Узбекистан (2002 г.), в 1999-2004 годах он избирался депутатом Совета народных депутатов города Ферганы. Особую роль А.К.Уринов сыграл и в международном признании престижа отечественной науки. В разные годы он возглавлял и принимал участие в специальных делегациях республики в Гамбурге (Германия), Вашингтоне и Нью-Йорке (США), Токио и Киото (Япония), Пекине и Шанхае (Китай), Сеул (Южная Корея), чем внёс достойный вклад в расширение и укрепление международных связей, посетив Анкару и Стамбул в Турции, а также Тернополь (Украина).

Международные научные связи, установленные учителем, продолжаются его учениками. В частности, его ученик установил прочные международные научные связи с Гентским университетом в Бельгии, с Институтом Прикладной Математики и Автоматизации КБНЦ РАН, с Институтом Космофизических Исследований ДВО РАН, с Университетом Свободы в Германии и Университетом Султана Кабуса в Омане, которые сегодня входят в число ведущих иностранных университетов в мировых рейтингах. Его коллеги по университету и по научной деятельности знают Ахмаджона Кушаковича Уринова как замечательного учёного, настойчивого педагога-наставника молодого поколения, терпеливого и целеустремлённого исследователя и доброго простого человека. В знак признания его достижений в области науки имя А.К. Уринова включено в список 2000 мировых ученых-интеллектуалов XXI века (лист опубликован в Англии). Многогранная жизнь настоящего ученого является важным критерием служения науке и народу. В какой должности бы он не пребывал, скромность, открытость к диалогу и доброжелательное отношение к людям снискали А.К. Уринову глубокое уважение среди сотрудников ФерГУ.

Если бы учитель был жив сегодня, ему исполнилось бы 75 лет. За свою жизнь он сделал много позитивного для математики своей родины. Ахмаджон Кушакович Уринов был не только очень ярким, разносторонним энтузиастом, от-

крытым и скромным учителем, но и заботливым отцом пятерых детей и щедрым дедушкой 15 внуков.

Сколько достойных подражанию ему людей служили и продолжаю служить своего рода мостом между предками и будущими поколениями, постоянно побуждая нас вносить свой вклад в прогресс. Мы, ученики, гордимся тем, что среди таких людей есть имя такого скромного ученого как профессора Ахмаджона Кушаковича Уринова, и что мы живем его памятью. Жизнь продолжается, коллеги, последователи, дети и благодарные ученики всегда помнят учителя и стараются быть достойными его памяти в своей нынешней деятельности. Для нас, учеников, вся жизнь Учителя была примером, и каждый его совет был полон мудрости. Мы бесконечно благодарны за то, что в нашей судьбе был замечательный, щедрый и поистине благородный человек, как наш Учитель! Хотя поистине преданного своему делу учителя Ахмаджона Кушаковича Уринова сегодня уже нет с нами, он оставил после себя бесценное научное наследие, монографии и учебники, многочисленных учеников, которые послужат дальнейшему развитию науки и образования во всем мире.

Ученики, коллеги и редакционная коллегия

1. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

MSC 519.957

Global solvability of solutions doubly degenerate nonlinear parabolic system in a medium with variable density with nonlinear source and absorption

Aripov M. M.[1], Atabaev O. Kh.[2]
[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
mirsaidaripov@mail.ru
[2] Andijan State Technical Institute, Andijan, Uzbekistan;
odiljonatabaev@gmail.com

In this paper, we study the doubly degenerate nonlinear parabolic system in a medium with variable density with nonlinear source and absorption

$$\begin{aligned} |x|^{-n_1}\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla\left(|x|^{l_1}u^{m_1-1}|\nabla u^{k_1}|^{p_1-2}\nabla u\right) + |x|^{-n_1}\left(v^{q_1}-u^{r_1}\right), \\ |x|^{-n_2}\frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla\left(|x|^{l_2}v^{m_2-1}|\nabla v^{k_2}|^{p_2-2}\nabla v\right) + |x|^{-n_2}\left(u^{q_2}-v^{r_2}\right), \\ u(x,t) &= v(x,t) = 0, \quad x\in\partial\Omega,\ t>0. \\ u(x,0) &= v(x,0) = 0, \quad x\in\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x\in\Omega$, $t>0$, and $n_i, l_i, m_i, k_i, p_i, q_i, r_i$ $(i=1,2)$ are parameters. The domain Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$.

The problem (1) arises in different applied fields, including biological population dynamics, nonlinear diffusion, chemical reactions, etc. For more details of physical models described by similar equations, one can refer to the literature [1]-[3] and references therein.

We introduce transformation

$$\begin{aligned} u(t,x) &= w_1\big(t,\varphi_1(x)\big), \\ v(t,x) &= w_2\big(t,\varphi_2(x)\big), \end{aligned} \tag{2}$$

here

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{p_1}{p_1-(n_1+l_1)}|x|^{\frac{p_1-(n_1+l_1)}{p_1}} \quad \text{if} \quad p_1 > n_1+l_1 \\ \varphi_1(x) &= \ln x \quad \text{if} \quad p_1 = n_1+l_1 \\ \varphi_2(x) &= \frac{p_2}{p_2-(n_2+l_2)}|x|^{\frac{p_2-(n_2+l_2)}{p_2}} \quad \text{if} \quad p_2 > n_2+l_2 \\ \varphi_2(x) &= \ln x \quad \text{if} \quad p_2 = n_2+l_2 \end{aligned}$$

Under this transformation, the problem (1) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} &= \frac{1}{\varphi_1^{s_1-1}}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\varphi_1^{s_1-1}w_1^{m_1-1}\left|\frac{\partial w_1^{k_1}}{\partial\varphi_1}\right|^{p_1-2}\frac{\partial w_1}{\partial\varphi_1}\right) + w_2^{q_1} - w_1^{r_1}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} &= \frac{1}{\varphi_2^{s_2-1}}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(\varphi_2^{s_2-1}w_2^{m_2-1}\left|\frac{\partial w_2^{k_2}}{\partial\varphi_2}\right|^{p_2-2}\frac{\partial w_2}{\partial\varphi_2}\right) + w_1^{q_2} - w_2^{r_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

where $s_1 = \frac{p_1(n_1+l_1)}{p_1-(n_1+l_1)}$, $s_2 = \frac{p_2(n_2+l_2)}{p_2-(n_2+l_2)}$. In the case, when $p_1 = n_1 + l_1$, $p_2 = n_2 + l_2$ we have

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(w_1^{m_1-1} \left|\frac{\partial w_1^{k_1}}{\partial \varphi}\right|^{p_1-2} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi}\right) + w_1^{m_1-1} \left|\frac{\partial w_1^{k_1}}{\partial \varphi}\right|^{p_1-2} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + w_2^{q_1} - w_1^{r_1},$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(w_2^{m_2-1} \left|\frac{\partial w_2^{k_2}}{\partial \varphi}\right|^{p_2-2} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi}\right) + w_2^{m_2-1} \left|\frac{\partial w_2^{k_2}}{\partial \varphi}\right|^{p_2-2} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} + w_1^{q_2} - w_2^{r_2},$$

Let $\mu_1 = \max(m_1 + k_1(p_1 - 2), r_1)$, $\mu_2 = \max(m_2 + k_2(p_2 - 2), r_2)$.

Theorem 1. If $p_1 p_2 > (n_1 + l_1)(n_2 + l_2)$ and $q_1 q_2 < \mu_1 \mu_2$ then all non-negative solutions of (1) are global.

References

1. **Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P.** *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations.* De Gruyter, Berlin, 1995.
2. **Aripov M., Sadullaeva S.** *Computer simulation of nonlinear diffusion processes.* National University Press, Tashkent, 2020.
3. **Aripov M., Bobokandov M.** *The Cauchy Problem for a Doubly Nonlinear Parabolic Equation with Variable Density and Nonlinear Time-Dependent Absorption.* J. Math. Sci., 2023. Vol. 277, pp. 355–365.
4. **Aripov M., Atabaev O., Almarashi A.** *On the behavior of solutions of a doubly nonlinear degenerate parabolic system with nonlinear sources and absorptions with variable densities.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2025. Vol. 117, Issue 1, pp. 12–23.
5. **Lu, Haihua, Jiayuan Wu, Wenjun Liu.** *вГ¨ËAnalysis of Solutions to a Parabolic System with Absorption.вГ№* Symmetry 14, no. 6, 1274(2022).
6. **Xu, Runzhang, Wei Lian, Yi Niu.** *вГ¨ËGlobal Well-Posedness of Coupled Parabolic Systems.вГ№* Science China Mathematics 63, no. 2, 321–56 (2020).

MSC 34A08

Differential equations involving fractional-order Bessel operators

Mahamoud A. A.[1], Shishkina E. L.[1,2,3]

[1] Belgorod State National Research University («BelGU»), Belgorod, Russia; 1269765@bsuedu.ru

[2] Voronezh State University, Voronezh, Russia;

[3] Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia; shishkina@amm.vsu.ru

In this paper, we consider the Bessel differential operator

$$(B_\gamma)_y = \frac{d^2}{dy^2} + \frac{\gamma}{y}\frac{d}{dy}. \tag{1}$$

Let $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. **Left-hand fractional Bessel integral on the half-axis** $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ for $f \in L[0,\infty)$ is (see [1,2])

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) = (I B^{\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma} \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)dy.$$

In (1) ${}_2F_1$ is Gauss hypergeometric function, which can be represented as a series

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \qquad (p)_n = p(p+1)\cdots(p+n-1).$$

Let $f \in L[0,\infty)$, $IB^{1-\alpha}_{\gamma,0+} f \in C^2(0,\infty)$ and $f'(0) = 0$. For $0 < \alpha < 1$ we define the **left-hand fractional Bessel derivative on the semi-axis** by the equality

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) = (IB^{1-\alpha}_{\gamma,0+} B_{\gamma} f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2(1-\alpha))} \int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma} \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{1-2\alpha} {}_2F_1\left(1-\alpha+\frac{\gamma-1}{2}, 1-\alpha; 2(1-\alpha); 1-\frac{y^2}{x^2}\right) B_{\gamma} f(y)dy$$

Theorem 1. Let $0 < \alpha < 1$, $g \in L_{loc}(0,\infty)$, there exist constants C and ℓ such that $|g(x)| < Ce^{2\ell x}$ for $x \to \infty$ and $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = g(0+) < \infty$. Then the solution of the equation

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_x f(x) - \lambda f(x) = g(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

for $f(0+) = C$ is

$$f(x) = \ll G^{\alpha}_{\gamma}(\lambda, x) * g(x) \gg_{\gamma} + C \frac{2^{\gamma}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\gamma}{2}+1, \alpha\right), (1,1) \\ (1,\alpha), (\gamma+1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| \lambda x^{2\alpha} \right],$$

where

$$\ll f * g \gg_{\gamma} =$$

$$= (\gamma+1) \int\limits_x^{\infty} \tau^{3-2\gamma} (x^2-\tau^2)^{\frac{\gamma-3}{2}} d\tau \int\limits_0^{\tau^2/4} u^{\frac{\gamma-1}{2}} (\tau^2-4u)^{\frac{\gamma-1}{2}} du \int\limits_0^1 f\left(2\sqrt{uv}\right) g\left(\sqrt{(\tau^2-4u)(1-v)}\right) dv,$$

$$G^{\alpha}_{\gamma}(\lambda, x) = \frac{2^{\gamma}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} x^{2\alpha-\frac{\gamma+3}{2}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\gamma+1}{4}+\alpha, \alpha\right), (1,1) \\ \left(\frac{1-\gamma}{4}+\alpha, \alpha\right), \left(2\alpha+\frac{\gamma-1}{2}, 2\alpha\right) \end{matrix} \middle| \lambda x^{2\alpha} \right].$$

The Fox–Wright function ${}_p\Psi_q$ is defined by the series

$${}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_l, \alpha_l)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{l=1}^{p} \Gamma(a_l + \alpha_l k)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}, \tag{2}$$

$$z \in \mathbb{C},\ a_l, b_j \in \mathbb{C},\ \alpha_l, \beta_j \in \mathbb{R},\ l = 1, ..., p,\ j = 1, ..., q$$

in case this series converges. When the condition

$$\sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{l=1}^{p} \alpha_l > -1,$$

is satisfied the series on the right-hand side of (2) converges for any $z \in \mathbb{C}$. In the case

$$\sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{l=1}^{p} \alpha_l = -1,$$

the series in (2) converges absolutely for $|z| < \delta$ and for $|z| = \delta$ and $\operatorname{Re} \mu > \frac{1}{2}$, where

$$\delta = \prod_{l=1}^{p} |\alpha_l|^{-\alpha_l} \prod_{j=1}^{q} |\beta_j|^{\beta_j},$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{l=1}^{p} a_l + \frac{p-q}{2}.$$

References

1. **Shishkina E.L., Sitnik S.M.,** *"On fractional powers of Bessel operators"*, Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions, 8, No 1, 49-67 (2017).
2. **Shishkina E.L., Sitnik S.M.,** *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*, Academic Press, Cambridge (2020).

MSC 517.95

On a nonlocal problem for a degenerate elliptic equation

Kadirkulov B. J.[1], Begimkulov F. Kh.[2]
[1]Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan;
[1] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; b.kadirkulov@afu.uz
[2]Perfect University, Tashkent, Uzbekistan; begimkulovfkh@gmail.com

Let us consider the equation

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y} u_y - b^2 y^m u = 0, \tag{1}$$

in the vertical half-strip $\{(x,y) : 0 < x < 1, y > 0\}$, bounded by the segment $OA(O(0,0), A(1,0))$ and half-lines $OO_\infty(x = 0)$, $AA_\infty(x = 1), y \geq 0$. Here p is a real number, and m, b are real positive numbers.

This paper investigates the unique solvability of nonlocal problems of the Samarskii-Ionkin type for equation (1).

Problem 1. $(2p > 1)$. Find a solution of equation (1) in the class

$$u(x,y) \in C^0([0,1] \times (0,\infty)) \cap C^2((0,1) \times (0,\infty)) \tag{2}$$

satisfying the conditions

$$\lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0 \text{ uniformly in } \ x \in [0,1], \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = 0, \quad y > 0, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to+0} y^{2p-1}u(x,y) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{5}$$

Problem 2. ($2p = 1$). Find a solution of equation (1) in class (2), satisfying conditions (3), (4), and

$$\lim_{y\to+0} \frac{u(x,y)}{\ln y} = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{6}$$

where $\tau(x)$ is a given function.

To solve the problem, a spectral method is used. Under certain conditions on the given function, theorems of uniqueness and existence of the problem's solution are proved. In proving the uniqueness of the solution, the completeness of the eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem is used, and the solutions are constructed as absolutely and uniformly converging biorthogonal series [1], [2].

References

1. **Shimkovich E.V.** *On weighted boundary value problems for a degenerate elliptic equation in a half-strip.* Lithuanian mathematical collection, 1990. 30, 185-196. (in Russian).
2. **Moiseev E. I.** *Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem.* Differ. Uravn., 2001. 37, No 11, 1565–1567.

UDK 517.96

Regularization method for a singularly perturbed fractional-order partial integro-differential equation with rapidly oscillating inhomogeneity

Kalimbetov B. T.[1], Turekhanov K. A.[2], Khabibullaev Zh. O.[2]
[1]A. Kuatbekov Peoples' Friendship University, Shymkent, Kazakhstan;
bkalimbetov@mail.ru
[2]M. Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan;
kasm-khan@mail.ru, jako8448@mail.ru

An initial problem is considered for a singularly perturbed integro-differential equation:

$$\varepsilon z^{(\alpha)} - A(t)z - \int_{t_0}^{t} K(t,s)z(s,\varepsilon)ds = h_1(t) + h_2(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}, z(t_0,\varepsilon) = z^0,\ t \in [t_0,T],\ t_0 > 0, \tag{1}$$

for a scalar unknown function $z(t,\varepsilon)$, in which $A(t),\ h_1(t),\ h_2(t),\ \beta'(t) > 0,\ (\forall t \in [t_0,T])$ are known functions, $0 < \alpha < 1$, z^0 constant number, $\varepsilon > 0$ is a small parameter. The problem is posed of constructing a regularized [1,2] asymptotic solution to problem (1).

By definition of the fractional derivative [3], the fractional derivative $z^{(\alpha)}$ in terms of integer derivatives is denoted in the following form $t^{(1-\alpha)}\frac{dz}{dt}$. Accordingly, we rewrite the original fractional order equation (1) in the following form:

$$L_\varepsilon z(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon t^{(1-\alpha)}\frac{dz}{dt} - A(t)z - \int_{t_0}^{t} K(t,s)z(s,\varepsilon)ds = h_1(t) + h_2(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}}, z(t_0,\varepsilon) = y^0. \tag{2}$$

In problem (2), the frequency of the rapidly oscillating inhomogeneity is $\beta'(t)$. In what follows, the function $\lambda_1(t) = A(t)$ is called the spectrum of problem (2), and function $\lambda_2(t) = -i\beta'(t)$ is the frequency of a rapidly oscillating inhomogeneity.

Problem (2) will be considered under the following conditions:
(i) $a(t), \beta(t), h_1(t), h_2(t) \in C[t_0, T]$, $K(t,s) \in C^\infty(t_0 \le s \le t \le T)$;
(ii) $A(t) < 0 \ \forall t \in [t_0, T]$.
We will develop an algorithm for constructing asymptotic solution [1] of problem (2).
Introduce the regularized variables:

$$\tau_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} \theta^{(\alpha-1)}\lambda_1(\theta)d\theta \equiv \frac{\psi_1(t)}{\varepsilon}, \ \ \tau_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_2(\theta)d\theta \equiv \frac{\psi_2(t)}{\varepsilon}, \tag{3}$$

and instead of problem (2), consider the problem

$$L_\varepsilon \tilde{z}(t,\tau,\sigma,\varepsilon) \equiv \varepsilon t^{(1-\alpha)}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + \lambda_1(t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tau_1} + t^{(1-\alpha)}\lambda_2(t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tau_2} - \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)\tilde{z}(s, \tfrac{\psi(s)}{\varepsilon}, \sigma, \varepsilon)ds - \tag{4}$$

$$-\lambda_1(t)\tilde{z} = h_1(t) + h_2(t)e^{\tau_2}\sigma, \tilde{z}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)|_{t=t_0,\tau=0} = z^0, \ t \in [t_0, T],$$

for the function $\tilde{z} = \tilde{z}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$, where is indicated (according (3)): $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. It is clear that if $\tilde{z} = \tilde{z}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ вΓY is a solution of the problem (4), then the function is $\tilde{z} = \tilde{z}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \sigma, \varepsilon\right)$ an exact solution to problem (2), therefore, problem (4) is extended with respect to problem (2). However, it cannot be considered fully regularized, since it does not regularize the integral

$$J\tilde{z} \equiv J\left(\tilde{z}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)|_{t=s,\tau=\psi(s)/\varepsilon}\right) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)\tilde{z}(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \sigma, \varepsilon)ds.$$

For its regularization, we introduce the class M_ε asymptotically invariant with respect to the operator $J\tilde{z}$ (see [1], p. 62]). Consider first the space U of vector functions $z(t,\tau,\sigma)$, representable by the sums

$$z(t,\tau,\sigma) = z_0(t,\sigma) + \sum_{i=1}^{2} z_i(t,\sigma)e^{\tau_i}, \quad z_i(t,\sigma) \in C^\infty\left([t_0,T],\mathbb{C}\right), i = \overline{0,2}. \tag{5}$$

Note that in (5) the elements of the space U depend on bounded in $\varepsilon > 0$ the constant $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, which do not affect the development of the algorithm described below, therefore, henceforth, in the record of element (5) of this space U, for the sake of brevity, we omit the dependence on σ. Let us show that the class $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ is asymptotically invariant with respect to the operator J. The image of the operator on the element (5) of the space U has the form:

For the space U we take the space of functions $z\left(t,\tau,\sigma\right)$, represented by sums

$$J\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)z_0(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)z_1(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{s}\theta^{(\alpha-1)}\lambda_1(\theta)d\theta}ds + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)z_2(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{s}\lambda_2(\theta)d\theta}ds.$$

Integrating by parts, we write the image of the operator J on the element (5) of the space U is represented as a series (see [1]):

$$\begin{aligned} J\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon) &= \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)z_0(s)ds + \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\varepsilon^{\nu+1}\left[\left(I_i^\nu\left(K(t,s)z_i(s)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_i} - \left(I_i^\nu\left(K(t,s)z_i(s(s))\right)\right)_{s=t_0}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

where $I_1^0 = \frac{1}{s^{(\alpha-1)}\lambda_1(s)}$, $I_1^\nu = \frac{1}{s^{(\alpha-1)}\lambda_1(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_1^{\nu-1}$, $I_2^0 = \frac{1}{\lambda_2(s)}$, $I_2^\nu = \frac{1}{\lambda_1(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_2^{\nu-1}, \nu \geq 1$.

Now let $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ be an arbitrary continuous function on $(t,\tau) \in G = [t_0,T] \times \{\tau : Re\tau_1 < 0,\ Re\tau_2 \leq 0\}$, with asymptotic expansion

$$\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t,\tau), y_k(t,\tau) \in U \tag{7}$$

converging as $\varepsilon \to +0$ (uniformly in $(t,\tau) \in G$).

Although the operator $\tilde{J}$ is formally defined, its utility is obvious, since in practice it is usual to construct the $N-$th approximation of the asymptotic solution of the problem (2), in which impose only $N-$th partial sums of the series (7), which have not a formal, but a true meaning. Now you can write a problem that is completely regularized with respect to the original problem (2):

$$\varepsilon t^{(1-\alpha)}\frac{\partial\tilde{z}}{\partial t} + \lambda_1(t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\tau_1} + t^{(1-\alpha)}\lambda_2(t)\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\tau_2} - \lambda_1(t)\tilde{z} - \tilde{J}\tilde{z} = h_1(t) + h_2(t)e^{\tau_2}\sigma,\ \tilde{z}(t_0,0,\sigma,\varepsilon) = z^0. \tag{8}$$

Substituting the series (7) into (8) and equating the coefficients of the same powers of ε, we obtain the following iterative problems:

$$Lz_0(t,\tau,\sigma) \equiv \lambda_1(t)\frac{\partial z_0}{\partial\tau_1} + t^{(1-\alpha)}\lambda_2(t)\frac{\partial z_0}{\partial\tau_2} - \lambda_1(t)z_0 - R_0z_0 = \tag{9$_0$}$$

$$= h_1(t) + h_2(t)e^{\tau_2}\sigma,\ \ z_0(t_0,0) = z^0;$$

$$Lz_1(t,\tau,\sigma) = -t^{(1-\alpha)}\frac{\partial z_0}{\partial t} + R_1z_0,\quad z_1(t_0,0) = 0; \tag{9$_1$}$$

$$L\,z_k(t,\tau,\sigma) = -t^{(1-\alpha)}\frac{\partial z_{k-1}}{\partial t} + R_kz_0 + ... + R_1z_{k-1},\ z_k(t_0,0) = 0,\quad k \geq 1. \tag{9$_k$}$$

Each iterative problem (9$_k$) has the form

$$L\,z(t,\tau,\sigma) \equiv \lambda_1(t)\frac{\partial z}{\partial\tau_1} + t^{(1-\alpha)}\lambda_2(t)\frac{\partial z}{\partial\tau_2} - \lambda_1(t)z - R_0z = H(t,\tau,\sigma),\ \ z(t_0,0) = z^*, \tag{10}$$

where $H(t,\tau,\sigma) = H_0(t,\sigma) + \sum\limits_{i=1}^{3} H_i(t,\sigma)e^{\tau_i}$ is the known function of space U, y_* is the known function of the complex space $\mathbf{C}$, and the operator R_0 has the form (see (6))

$$R_0z \equiv R_0(\,z_0(t) + \sum_{j=1}^{2} z_j(t)e^{\tau_j}+) \triangleq \int_{t_0}^{t} K(t,s)z_0(s)ds.$$

Let us prove the following statement.

Theorem 1. Let conditions (i), (ii) be fulfilled and the right-hand side $H(t,\tau,\sigma) = H_0(t,\sigma)+ + \sum\limits_{j=1}^{2} H_j(t,\sigma)e^{\tau_j}$ of equation (10) belongs to the space U. Then the equation (10) is solvable in U, if and only if

$$< H(t,\tau), e^{\tau_1} > \equiv 0, \forall t \in [t_0,T]. \tag{11}$$

If identity (11) holds, then under conditions (i), (ii), equation (10) has the following solution in the space U :

$$z(t,\tau,\sigma) = z_0(t,\sigma) + \alpha_1(t,\sigma)e^{\tau_1} + \left[t^{(1-\alpha)}\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\right]^{-1}H_2(t,\sigma)e^{\tau_2},$$

where $\alpha_1(t,\sigma) \in C^\infty([t_0,T],\mathbf{C})$ is arbitrary function, $z_0(t,\sigma)$ is the solution of an integral equation $z_0(t,\sigma) = \int\limits_{t_0}^{t} \left(-\lambda_1^{-1}(t)K(t,s)\right) z_0(s,\sigma)ds - \lambda_1^{-1}(t)H_0(t,\sigma)$.

Applying Theorem 1 to iterative problems (9_k), we find uniquely their solutions in the space U and construct series (7). Just as in [1,4] we prove the following statement.

Theorem 2. Let conditions (i), (ii) be satisfied for the equation (2). Then, for $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 >> 0$ is sufficiently small), the equation (2) has a unique solution $y(t,\varepsilon)$; in this case, the estimate

$$||z(t,\varepsilon) - z_{\varepsilon N}(t)||_{C[0,T]} \le c_N \varepsilon^{N+1}, N = 0,1,2,\ldots,$$

holds. Here $y_{\varepsilon N}(t)$ is the restriction (at $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$) of the $N-$th partial sum of the series (7), and the constant $c_N > 0$ does not depend on ε at $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

References

1. **Lomov S.A.** *Introduction to general theory of singular perturbations.* American Math. Soc. Providence. - 1992. - 400 p.
2. **Khalil R.** *A new definition of fractional derivative.* Jour. Comput. Appl. Math. - 2014. - 264. - 65 – 70.

An inverse problem for a loaded degenerate fractional order diffusion equation with involution perturbation

Abdullaev O. Kh.[1], Duysenbaev R. S.[2]
[1] Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan; obidjon.mth@gmail.com
[2]Tashkent state technical university named after Islam Karimov; ruslanduysenbaev.0299@gmail.com

This work deals to the study an inverse problem for the loaded degenerating fractional order diffusion equation with involution perturbation. The existence and uniqueness theorem of solutions to the formulated problem was proved.

In fact, that the degenerate differential equations with involution perturbation have been studied in numerous papers.For instance, we mention some of the recently published works [1] -[2].

In this regard, in addition, an extensive bibliography of research in this area can be found in the monographs [3]-[4].

Statement of problem. We consider

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - a_1 t^{\beta}u_{xx}(x,t) + a_2 t^{\beta}u_{xx}(-x,t) + b_1 u(x,t_0) + b_2 u(-x,t_0) = f(x), \quad (x,t) \in \Omega \tag{1}$$

where, D_{0t}^{α} is Rimann-Liouville derivative,

$$D_{0t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}f(s)ds, \;\; 0 < \alpha \le 1,$$

α, β a_i, b_i $(i = 1,2)$ are nonzero real numbers such that, $0 < \alpha \le 1$, $\alpha + \beta > 0$, $a_1 > 0$, $|a_2| < a_1$ and Ω is a rectangular domain given by $\Omega = \{(x,t) : -l < x < l, \;\; 0 < t < T\}$, t_0 is any fixed number, and that $t_0 \in (0,T)$. Our aim is to find a regular solution to the following inverse problem:

Problem IP. Find a pair of functions $u(x,t)$ and $f(x)$ in the domain Ω satisfying equation (1) and the conditions

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \varphi(x), \quad u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [-l,l] \tag{2}$$

$$u(-l,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given functions, $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[-l,l]$, and that

$$\varphi^i(-l) = \psi^i(l) = 0, \ (i = 0,2).$$

Separation of variables leads to the following spectral problem for IP,

$$a_1X''(x) - a_2X''(-x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(-l) = X(l) = 0. \tag{4}$$

The eigenvalue problem (4) is self-adjoint and hence it have real eigenvalues and its' eigenfunctions form a complete orthogonal basis in $L_2(-l,l)$.

Notice, that eigenvalues and corresponding eigenfunctions for the spectral (4), respectively presented as:

$$\lambda_{1k} = (a_1 - a_2)\left(\frac{\pi}{2l}(2k-1)\right)^2, \quad \lambda_{2k} = (a_1 + a_2)\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \ k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

and

$$X_{1k} = \cos\frac{\pi}{2l}(2k-1)x, \quad X_{2k} = \sin\frac{\pi k}{l}x, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Lemma. The systems of functions (6) are complete and orthogonal in $L_2(-l,l)$. This lemma was proven by Nasser Al-Salti, Mokhtar Kirane, Berikbol T. Torebek [ ].

Using the orthogonal system (6), the functions $u(x,t)$ and $f(x)$ can be represented as follows

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}(t)\cos\frac{\pi}{2l}(2n-1)x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{7}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k}\cos\frac{\pi}{2l}(2n-1)x + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{8}$$

where the coefficients $u_{1k}(t), u_{2k}(t), f_{1k}, f_{2k}$ are unknown. Substituting (7) and (8) into equation (1), we obtain the following equations relating the functions $u_{1k}(t), u_{2k}(t)$ and the constants f_{1k}, f_{2k} :

$$D_{ot}^{\alpha}u_{1k}(t) + \lambda_{1k}t^{\beta}u_{1k}(t) = f_{1k} - (b_1 + b_2)u_{1k}(t_0),$$

$$D_{ot}^{\alpha}u_{2k}(t) + \lambda_{2k}t^{\beta}u_{2k}(t) = f_{2k} - (b_1 - b_2)u_{2k}(t_0).$$

Solving Cauchy problem for these equations with initial dates from (2), we can uniquely find $u_{1k}(t), u_{2k}(t)$ and the constants f_{1k}, f_{2k}. Further, based on completeness of the system eigenfunctions (6) and under definite conditions to given functions we will prove uniqueness of solution (7) and (8), in additions convergence of corresponding series, which provide existence of solution to the formulated problem.

References

1. **Sadybekov M., Dildabek G., Ivanova M.** *Direct and inverse problems for nonlocal heat equation with boundary conditions of periodic type.* Boundary Value Problems. 2022:53.
2. **Ashurov R., Kadirkulov B., Ergashev O.** *Inverse problem of Bitsadze–Samarskii type for a two-dimensional parabolic equation of fractional order.* Journal of Mathematical Sciences, 2023. Vol. 274, No. 2.
3. **Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I.** *Loaded equations as perturbations of differential Equations.* Gylym, Almaty,-2010. [in Russian].
4. **Cabada A., Tojo A.F.** *Equations with involutions.* Atlantis Press, 2015.

UDK 517.95

An inverse problem for a fractional pseudo-parabolic loaded equation with involution perturbation

Abdullaev O. Kh. [1,2], Sobirjonov A. K.[1,2]
[1] Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan; obidjon.mth@gmail.com
[2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,Tashkent,Uzbekistan; avazbeksobirjonov1998@gmail.com

This work is devoted to an inverse problem with Dirichlet boundary condition for a loaded pseudo-parabolic equation fractional-order with involution perturbation. The existence and uniqueness theorem of solutions to the formulated problem is investigated. Moreover, the convergence of the obtained solution is also proved.

It should be noted that differential equations with involutively transformed arguments have been studied in numerous papers. In this regard, we mention only some of the recently published works [1]-[2]. In addition, an extensive bibliography of research in this area can be found in the monographs [3]-[4].

Let $\Pi = \{(x,y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$, $Q = \{(x,y,t) : (x,y) \in \Pi, 0 < t < T\}$.

We enter designations:

$$L_a[u](x,y,t) \equiv a_0 u(x,y,t) + a_1 u(p-x,y,t) + a_2 u(x,q-y,t) + a_3 u(p-x,q-y,t),$$

$$\ell_b[u](x,y,t_0) \equiv b_0 u(x,y,t_0) + b_1 u(p-x,y,t_0) + b_2 u(x,q-y,t_0) + b_3 u(p-x,q-y,t_0),$$

where $a_j, b_j, j = 0,1,2,3$ are given real numbers, t_0 is an arbitrary point in $(0,T)$.

For all $\alpha \in (0,1]$, by $\partial_t^\alpha u(x,y,t)$ we designate Caputo derivative by variable t, i.e.

$$\partial_t^\alpha u(x,y,t) = {}_{RL}D^\alpha \left[u(x,y,t) - u(x,y,0)\right] \equiv$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \left[u(x,y,\tau) - u(x,y,0)\right] d\tau.$$

Let $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ be a Laplacian operator.

We consider the equation

$$\partial_t^\alpha \Big(u(x,y,t) - L_a\left[\Delta u\right](x,y,t) \Big) - L_a\left[\Delta u\right](x,y,t) + \ell_b\left[u\right](x,y,t_0) = f(x,y), (x,y,t) \in Q. \tag{1}$$

Problem IP_D. Find a pair of functions $u(x,y,t)$ and $f(x,y)$ in the domain Ω satisfying equation (1) and the conditions

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u(x,y,T) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Pi} \tag{2}$$

and the homogeneous Dirichlet boundary conditions:

$$u(0,y,t)=0, \quad u(p,y,t)=0, \quad y\in[0,q],\ t\in[0,T] \tag{3}$$

$$u(x,0,t)=0, \quad u(x,q,t)=0, \quad x\in[0,p], \ \ t\in[0,T] \tag{4}$$

where $\varphi(x,y)$ and $\psi(x,y)$ are given, sufficiently smooth functions. By a regular solution of the problem IP_D we call the functions $u(x,y,t)$ and $f(x,y)$ from the class $f(x,y)\in C\left(\overline{\Pi}\right)$ and $u(x,y,t)\in C\left(\overline{Q}\right)$, $\partial_t^\alpha u$, $\partial_t^\alpha u_{xx}$, $\partial_t^\alpha u_{yy}\in C(\Omega)$, satisfying conditions (1)-(4) in the classical sense.

Here we seek solutions to problem IP_D in the form of series expansion using a set of functions that form an orthogonal basis in $L_2(\Pi)$. To find the appropriate set of functions to the problem, we shall solve the homogeneous equation corresponding to equation (1) along with the associated boundary conditions using the separation of variables.

Theorem. *Let* $\sigma_{nk}=\frac{\lambda_{nk}}{1+\lambda_{nk}}>0$ *and* $\frac{\partial^6\varphi(x,y)}{\partial x^3\partial y^3}, \frac{\partial^6\psi(x,y)}{\partial x^3\partial y^3}\in L_2(\Pi)$, $\varphi(x,y),\psi(x,y)\in C^2(\overline{\Pi})$, *besides*

$$\frac{\partial^i\varphi(0,y)}{\partial x^i}=\frac{\partial^i\varphi(p,y)}{\partial x^i}=0, \ \ \frac{\partial^i\varphi(x,0)}{\partial y^i}=\frac{\partial^i\varphi(x,q)}{\partial y^i}=0,$$

$$\frac{\partial^i\psi(0,y)}{\partial x^i}=\frac{\partial^i\psi(p,y)}{\partial x^i}=0, \quad \frac{\partial^i\psi(x,q)}{\partial y^i}=\frac{\partial^i\psi(x,q)}{\partial^i y}=0, \quad i=0,2.$$

Then, a unique solution to the Problem IP_D, *exist, unique and it can be written in the form*

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^3q^3}{\pi^6n^3k^3}\cdot\left(\frac{\varphi_{nk}^{(3)}-\psi_{nk}^{(3)}}{1-E_\alpha\left(-\sigma_{nk}T^\alpha\right)}\cdot E_\alpha\left(-\sigma_{nk}t^\alpha\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\psi_{nk}^{(3)}-\varphi_{nk}^{(3)}E_\alpha\left(-\sigma_{nk}T^\alpha\right)}{1-E_\alpha\left(-\sigma_{nk}T^\alpha\right)}\right)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{k\pi y}{q},$$

and

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^3q^3}{\pi^6n^3k^3}\left(\frac{\psi_{nk}^{(3)}-\varphi_{nk}^{(3)}E_\alpha\left(-\sigma_{nk}T^\alpha\right)}{1-E_\alpha\left(-\sigma_{nk}T^\alpha\right)}\left(\sigma_{nk}+\varepsilon_{nk}(b)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\psi_{nk}^{(3)}-\varphi_{nk}^{(3)}}{1-E_\alpha\left(-\sigma_{nk}T^\alpha\right)}\cdot\varepsilon_{nk}(b)\cdot E_\alpha\left(-\sigma_{nk}t_0^\alpha\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{k\pi y}{q},$$

where

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad z,\alpha,\beta\in C,\ Re(\alpha)>0,$$

$\lambda_{nk}=\pi^2\left(\frac{n^2}{p^2}+\frac{k^2}{q^2}\right)\varepsilon_{nk}(a)$, $\quad \varepsilon_{nk}(a)=a_0+(-1)^{k+1}a_1+(-1)^{n+1}a_2+(-1)^{k+n}a_3$, $k,n\in N$.

References

1. **Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R.** *An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation*, Quaest. Math. 2017. Vol 40, Issue 2, pp. 151–160.

2. **Al-Salti N., Kirane M., Torebek B. T.** *On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation*, Hacet. J. Math. Stat. 2019. Vol. 48, Issue 3, pp. 669–681.

3. **Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I.** *Loaded equations as perturbations of differential Equations*, Gylym, Almaty, 2010. [in Russian].
4. **Cabada A., Tojo A. F.** *Equations with involutions*, Atlantis Press, 2015.

UDK 517.95

Initial boundary value problem for degenerate beam equation

Azizov M.S.[1], Kamolova Z.D.[2]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
muzaffar.azizov.1988@mail.ru;
[2]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
zulayxok34@gmail.com;

In a rectangular domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation:

$$u_{tt} + [x^{\alpha} u_{xx}]_{xx} = 0, \tag{1}$$

where $u(x,t)$ is the unknown function, α, T are given real numbers, such that $0 < \alpha < 1$, $T > 0$.

Problem B. Find a function $u(x,t)$ satisfying the following conditions:

1) $u(x,t) \in C^1(\overline{\Omega})$, $[x^{\alpha} u_{xx}]$, $[x^{\alpha} u_{xx}]_x \in C(\overline{\Omega})$, $u_{tt}(x,t)$, $[x^{\alpha} u_{xx}]_{xx} \in C(\Omega)$;

2) It satisfies equation (1) in the domain Ω;

3) It satisfies the following initial and boundary conditions:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1];$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad [x^{\alpha} u_{xx}(x,t)]|_{x=0} = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

where $\varphi_k(x)$, $k = 1,2$ are given continuous functions.

Theorem 1. Let $\varphi_1(x) \in C^1[0,1]$, $[x^{\alpha}\varphi''_1] \in C^3[0,1]$, $[x^{\alpha}\varphi''_1]'''' \in L_2(0,1)$ and $\varphi_2(x) \in C^1[0,1]$, $[x^{\alpha}\varphi''_2] \in C^1[0,1]$, $[x^{\alpha}\varphi''_2]'' \in L_2(0,1)$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1) = 0$, $[x^{\alpha}\varphi''_1(x)]|_{x=0} = 0$, $\varphi''_1(1) = 0$, $[x^{\alpha}\varphi''_1(x)]''|_{x=0} = 0$, $[x^{\alpha}\varphi''_1(x)]''|_{x=1} = 0$, $\varphi_2(0) = \varphi_2(1) = 0$, $[x^{\alpha}\varphi''_2(x)]|_{x=0} = 0$, $\varphi''_2(1) = 0$. Then the solution to the problem B is unique, exists, and is given by the following formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{1n} \cos(\lambda_n t)\vartheta_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \varphi_{2n} \sin(\lambda_n t)\vartheta_n(x)$$

where $\vartheta_n(x)$ and λ_n are the eigenfunctions and eigenvalues of the problem ,

$$[x^{\alpha}\vartheta''(x)]'' = \lambda\vartheta(x)$$

with the boundary conditions

$$\vartheta(0) = 0,\ \vartheta(1) = 0, \quad [x^{\alpha}\vartheta''(x)]|_{x=0} = 0,\ \vartheta''(1) = 0.$$

φ_{1n} , φ_{2n} are Fourier coefficients,

$$\varphi_{1k} = \int_0^1 \varphi_1(x)\,\vartheta_k(x)\,dx, \quad \varphi_{2k} = \int_0^1 \varphi_2(x)\,\vartheta_k(x)\,dx$$

This thesis is based on references [1].

References

1. **Касимова М.** *Смешанная задача для линейного уравнения четвчртого порядка, вырождающегося на границе области.* Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1968. №5. -С. 35-39.
2. **Уринов А.К., Усмонов Д.А.** *Нелокальная начально-граничная задача для вырождающегося уравнения четвчртого порядка с дробной производной ГерасимоваИКапуто.* Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. є 1. -С. 123-139. Bull. Inst. Math., 2023, Vol.6, №1, pp. 138-153.
3. **Уринов А.К., Усмонов Д.А.** *Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвчртого порядка, вырождающегося внутри и на границе области* . Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. -С. 312-318.

UDK 517.96

Regularization method for a singularly perturbed integro-differential system with a rapidly oscillating components

Bibulova D. A.[1], Kalimbetov B. T.[2], Turekhanov K. A.[1]

[1]M. Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan;
danass86@mail.ru, kasm-khan@mail.ru

[2]A. Kuatbekov Peoples' Friendship University, Shymkent, Kazakhstan;
bkalimbetov@mail.ru

The paper considers the following problem

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} - A(t)y - \int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu(\theta)d\theta} K(t,s)y(s,\varepsilon)ds = h_1(t) + h_2(t)e^{\frac{i\beta(t)}{\varepsilon}},\ y(0,\varepsilon) = y^0,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

where $y = \{y_1(t,\varepsilon), \ldots, y_n(t,\varepsilon)\}$ is the unknown vector function, $A(t)$ is matrix, $h_j(t) = (h_{1j}(t), ..., h_{nj}(t))$ is the known functions, $\beta'(t) > 0$ is the frequency of a rapidly oscillating inhomogeneity, $\mu(t) < 0$ is the given known function, y^0 is a constant number, $\varepsilon > 0$ is a small parameter. Problem (1) will be considered under the following conditions:

1) $A(t) \in C^\infty([0,T], \mathbf{C^{n^2}}), h_1(t), h_2(t) \in C^\infty([0,T], \mathbf{C^n}), K(t,s) \in C^\infty(\{0 \le s \le t \le T\}, \mathbf{C^{n^2}})$;

2) the spectrum $\{\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)\}$ of the matrix $A(t)$, the frequency $\lambda_{n+1}(t) = i\beta'(t)$ of the rapidly oscillating inhomogeneity and the spectral value $\lambda_{n+2}(t) = \mu(t)$ of the rapidly varying kernel satisfy at each $t \in [0,T]$ the conditions:

a) $\lambda_i(t) \ne \lambda_j(t), i \ne j, \lambda_j(t) \ne 0, i,j = \overline{1,n+2}$;

b) $\mathrm{Re}\lambda_j(t) \le 0, j = \overline{1,n}, \mathrm{Re}\lambda_{n+2}(t) \le 0, \beta'(t) > 0.$

We introduce regularizing variables [1]

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_j(\theta)\,d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j = \overline{1,n+2}, \tag{2}$$

and consider the following extended problem

$$L_\varepsilon\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon) \equiv \varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n+2}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j} - A(t)\tilde{y} - \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+2}(\theta)d\theta}K(t,s)\tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)ds =$$
$$= h_1(t) + h_2(t)e^{\tau_{n+1}}\sigma,\quad \tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)|_{t=0,\tau=0,\sigma=e^{i\beta(0)/\varepsilon}} = y^0, t \in [0,T]. \tag{3}$$

for the function $\tilde{y} = \tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$, where (according to (2)) $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_{n+2}), \psi = (\psi_1,\ldots,\psi_{n+2})$, $\sigma = e^{\frac{i\beta(0)}{\varepsilon}}$. It is clear that if $\tilde{y} = \tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)$ is the solution if the problem (3), then the vector function $\tilde{y} = \tilde{y}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \sigma, \varepsilon\right)$ is an the exact solution to problem (1); therefore, problem (3) is extended with respect to problem (1). However, it cannot be considered fully regularized, since the integral term

$$J\tilde{y} \equiv J\left(\tilde{y}(t,\tau,\sigma,\varepsilon)|_{t=s,\tau=\psi(s)/\varepsilon}\right) = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+2}(\theta)d\theta} K(t,s)\,\tilde{y}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds$$

has not been regularized in it. To regularize it, we introduce a class M_ε that is asymptotically invariant with respect to the operator ([1], p. 62).

Let us first consider the space U of vector functions $y(t,\tau,\sigma)$, representable by the sums

$$y(t,\tau,\sigma) = y_0(t,\sigma) + \sum\nolimits_{j=1}^{n+2} y_j(t,\sigma)e^{\tau_j},\ y_j(t,\sigma) \in C^\infty([0,T],\mathbf{C^n}), j = \overline{0,n+2}. \quad (4)$$

Note that in (4) the elements of the space U depend on bounded in $\varepsilon > 0$ the constant $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, which do not affect the development of the algorithm described below, therefore, henceforth, in the record of element (4) of this space U, for the sake of brevity, we omit the dependence on σ. Let us show that the class $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ is asymptotically invariant with respect to the operator J. The image of the operator on the element (4) of the space U has the form:

$$Jy(t,\tau) = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_{n+2}(\theta)d\theta} K(t,s)y_0(s)ds + e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+2}(\theta)d\theta} \int_0^t K(t,s)y_{n+2}(s)ds +$$

$$+ \sum\nolimits_{j=1,j\neq n+2}^{n+2} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+2}(\theta)d\theta} \int_0^t K(t,s)y_j(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(\lambda_j(\theta)-\lambda_{n+2}(\theta))d\theta}ds.$$

Integrating by parts, we write the image of the operator J on the element (4) of the space U is represented as a series (see [1]):

$$Jy(t,\tau) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+2}(\theta)d\theta} \int_0^t K(t,s)y_{n+2}(s)ds +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[\left(I_0^\nu\left(K(t,s)y_0(s)\right)\right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{n+2}(\theta)d\theta} - \left(I_0^\nu\left(K(t,s)y_0(s)\right)\right)_{s=0}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1,j\neq n+2}^{n+2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[\left(I_j^\nu\left(K(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_j(\theta)d\theta} - \left(I_j^\nu\left(K(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=0} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_{n+2}(\theta)d\theta}\right]$$

where $I_0^0 = \frac{1}{-\lambda_{n+2}(s)}\cdot, I_0^\nu = \frac{1}{-\lambda_{n+2}}\frac{\partial}{\partial s}I_0^{\nu-1}$, $I_j^0 = \frac{1}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+2}(s)}\cdot, I_j^\nu = \frac{1}{\lambda_j(s)-\lambda_{n+2}(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_j^{\nu-1}, j = \overline{1,n+1}, \nu \geq 1$.

We introduce operators $R_\nu : U \to U$, acting on each element $y(t,\tau) \in U$ of the form (4) according to the law:

$$R_0 y(t,\tau) = e^{\tau_{n+2}} \int_0^t K(t,s)y_{n+2}(s)\,ds, \quad (5_0)$$

$$R_1 y(t,\tau) = \left[\left(I_0^0\left(K(t,s)y_0(s)\right)\right)_{s=t} e^{\tau_{n+2}} - \left(I_0^0\left(K(t,s)y_0(s)\right)\right)_{s=0}\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{n+2}\left[\left(I_j^0\left(K(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_j}-\left(I_j^0\left(K(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=0}e^{\tau_{n+2}}\right], \qquad (5_1)$$

$$\dots$$

Now let $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ be an arbitrary function continuous in $(t,\tau)\in[0,T]\times\{\tau:\mathrm{Re}\tau_j\le 0,\ j=\overline{1,n+2}\}$ and has asymptotic expansion

$$\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,\tau),\quad y_k(t,\tau)\in U \qquad (5)$$

converging at $\varepsilon\to+0$ (uniformly in $(t,\tau)\in[0,T]\times\left\{\tau:\mathrm{Re}\tau_j\le 0, j=\overline{1,n+2}\right\}$).

Now we can write down a problem that is completely regularized with respect to the original problem (2):

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n+2}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y}=h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_{n+2}}\sigma,\quad \tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)|_{t=0,\tau=0}=y^0. \qquad (6)$$

Substituting series (6) into (5) and equating the coefficients at the same degrees of ε, we obtain the following iterative problems:

$$Ly_0(t,\tau)\equiv\sum_{j=1}^{n+2}\lambda_j(t)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_j}-A(t)y_0-R_0y_0=h_1(t)+h_2(t)e^{\tau_{n+2}}\sigma,\quad y_0(0,0)=y^0; \qquad (7_0)$$

$$Ly_1(t,\tau)=-\frac{\partial y_0}{\partial t}+R_1y_0,\quad y_1(0,0)=0; \qquad (7_1)$$

$$\dots$$

Each of the iterative problems (7_k) can be written as

$$Ly(t,\tau)\equiv\sum_{j=1}^{n+2}\lambda_j(t)\frac{\partial y}{\partial\tau_j}-A(t)y-R_0y=H(t,\tau),\quad y(0,0)=y_* \qquad (8)$$

where $H(t,\tau)=H_0(t)+\sum_{j=1}^{n+2}H_j(t)e^{\tau_j}$ is a known function of the space U, $y_*\in\mathbb{C}$ is constant, and the operator R_0 has the form (see (5_0)):

$$R_0y\equiv R_0(y_0(t)+\sum_{j=1}^{n+2}y_j(t)e^{\tau_j})=e^{\tau_{n+2}}\int_0^t K(t,s)y_{n+2}(s)ds.$$

Let us prove the following statement.

Theorem 1. Let conditions 1) and 2a) be satisfied and the right-hand side $H(t,\tau)=H_0(t)+\ +\sum_{j=1}^{n+2}H_j(t)e^{\tau_j}$ of system (8) belongs to the space U. Then, for the solvability of system (8) in the space U, it is necessary and sufficient that the identities

$$<H(t,\tau),\chi_k(t)e^{\tau_k}>\equiv 0,\ k=\overline{1,n},\ \forall t\in[0,T], \qquad (9)$$

hold, where $\chi_k(t)$ are the eigenvectors of the adjoint matrix $A^*(t)$, corresponding to the eigenvalues $\overline{\lambda_k}(t), k=\overline{1,n}$.

If identity (9) holds, then under conditions 1) and 2a) system (8) has the following solution in the space U :

$$y(t,\tau)=y_0(t)+\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k(t)\varphi_k(t)+\sum_{s=1,s\ne k}^{n}\frac{(H_k(t),\chi_s(t))}{\lambda_k(t)-\lambda_s(t)}\varphi_s(t)\right]e^{\tau_k}+$$
$$+[\lambda_{n+1}(t)I-A(t)]^{-1}H_{n+1}(t)e^{\tau_{n+1}}+y_{n+2}(t)e^{\tau_{n+2}}$$

where $\alpha_k(t) \in C^\infty([0,T], \mathbf{C}^n)$ are arbitrary functions, $k = \overline{1,n}$, $y_0(t) = -A^{-1}(t)H_0(t)$, $y_{n+2}(t)$ is the solution to the integral system:

$$y_{n+2}(t) = \int_0^t \left([\lambda_{n+2}(t)I - A(t)]^{-1} K(t,s) \right) y_{n+2}(s)ds - [\lambda_{n+2}(t)I - A(t)]^{-1} H_{n+2}(t).$$

Applying Theorem 1 to iterative problems (7_k), we find uniquely their solutions in the space U and construct series (5). Just as in [1], we prove the following statement.

Theorem 2. Let conditions 1) - 2) be satisfied for system (1). Then, for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > > 0$ is sufficiently small), system (1) has a unique solution $y(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^1([0,T], \mathbf{C}^n)$; in this case, the estimate

$$||y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)||_{C[0,T]} \le c_N \varepsilon^{N+1}, N = 0, 1, 2, \ldots$$

holds. Here $y_{\varepsilon N}(t)$ is the restriction (at $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$) of the $N-$th partial sum of the series (5) (with coefficients $y_k(t,\tau) \in U$, satisfying the iterative problems (7_k)), and the constant $c_N > 0$ does not depend on ε at $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

References

1. **Lomov S.A.** *Introduction to general theory of singular perturbations.* American Math. Soc. Providence. - 1992. - 400 p.

UDK 517.95

A Problem with integral condition for a hyperbolic equation

Jurayeva D. U.[1], Usmonov D. A.[2]
[1] Fergana State Technical University, Fergana, Uzbekistan;
diljora587@gmail.com
[2] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
usmonov-doniyor@inbox.ru

Let us denote by D the domain bounded by lines $t - x = 0$, $t + x = 1$ and $t = 0$. Let us consider the following string vibration equation in the domain D:

$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0. \tag{1}$$

For this equation, we consider the following non-local problem:

Problem I_1. Find a function $u(t,x)$ with the following properties:

1) It satisfies equation (1) in the domain D; 2) $u(t,x) \in C\left(\overline{D}\right)$, $u_t(t,x) \in C\left(\overline{D}\right)$, $u_{tt}(t,x)$, $u_{xx}(t,x) \in C(D)$;

3) It satisfies the following conditions:

$$u(x/2,\, x/2) + \alpha \int_0^x u(0,\, 1-\xi)\, d\xi = \varphi(x), \; 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u_t(0,x) = \nu(x), \; 0 \le x \le 1,$$

where $\varphi(x)$, $\nu(x)$ are given functions, α - is a given nonzero real number.

Theorem. If $\varphi(x) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$, $\nu(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$, $f(t,x) \in C(D) \cap L_1(D)$, $\alpha \neq \pi/4 + (\pi n)/2$, $n \in Z$, then the solution to the problem I_1 exists and is unique, and it is represented as

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\tau(x-t) + \tau(x+t)] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \nu(z)\,dz$$

and

$$\tau(x) = \frac{\varphi(0)}{\cos 2\alpha}(\cos(2\alpha - 2\alpha x) - \sin(2\alpha x)) +$$

$$+\frac{\cos(2\alpha - 2\alpha x) - \sin(2\alpha x)}{\cos 2\alpha}\int\limits_0^1 \cos(2\alpha s)[2\varphi'(s) - \nu(s)]\,ds -$$

$$-\int\limits_x^1 \frac{\cos(2\alpha - 2\alpha x)\cos(2\alpha s) - \sin(2\alpha - 2\alpha s)\sin(2\alpha x)}{\cos 2\alpha}[2\varphi'(s) - \nu(s)]\,ds +$$

$$+\int\limits_{1-x}^1 \frac{\sin(2\alpha x)\cos(2\alpha s) - \cos(2\alpha - 2\alpha x)\sin(2\alpha - 2\alpha s)}{\cos 2\alpha}[2\varphi'(s) - \nu(s)]\,ds.$$

is determined by the formulas.

If in condition (2) $\alpha = 0$, then problem I_1 becomes the Darboux problem for the equation (1). The solution of the Darboux problem for equation (1) has the form [1] :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\tau(x-t) + \tau(x+t)] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \nu(z)\,dz, \quad \tau(x) = 2\varphi(x) - \int\limits_0^x \nu(z)dz.$$

References

1. **Tikhonov A.N., Samarskii A.A.** *Equations of Mathematical Physics.* Moscow: Nauka, 1972. 737 p.

UDK 517.923

Ikkita buzilish nuqtalariga ega bo‘lgan oddiy differensial tenglama uchun spektral masala

Karimov K.T.[1,2], Azimova T.E.[3]

[1] Farg‘ona davlat universireti, Farg‘ona, O‘zbekiston;

[2] O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti; karimovk80@mail.ru

[3] Qo‘qon universiteti, Qo‘qon, O‘zbekiston; azimovatoyibaxon@gmail.com

Mazkur ishda uchta maxsus nuqtalarga ega bo‘lgan oddiy differensial tenglama uchun ikki nuqtali spektral masala tadqiq qilingan. Masalaning xos qiymatlari va ularga mos xos funksiyalari topilgan. Topilgan xos funksiyalar sistemasini kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar fazosida to‘la sistema tashkil qilinishi isbotlangan.

D_λ masala. λ parametrning shunday qiymatlari topilsinki,

$$x(1-x)X''(x)+\left[\frac{1}{2}+\alpha-(1+2\alpha)x\right]X'(x)+\lambda X(x)=0,\ \ x\in(0,1), \qquad (1)$$

tenglamaning

$$X(0)=0,\ \ X(1)=0 \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lsin, bu yerda $\alpha\in(0,1/2)$.

(1) tenglama gipergeometrik tenglama [1] bo'lib, uning umumiy yechimi

$$X(x)=c_1F(\alpha+\omega,\alpha-\omega;1/2+\alpha;x)+c_2x^{1/2-\alpha}F(1/2+\omega,1/2-\omega;3/2-\alpha;x) \qquad (3)$$

ko'rinishga ega, bu yerda $\omega=\sqrt{\alpha^2+\lambda}$, c_1 va c_2- ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(3) funksiyani $\alpha\in(0,1/2)$ ekanligini hisobga olib (2) shartning birinchisiga bo'ysundiramiz. Natijada $c_1=0$ kelib chiqadi. Ya'ni (1) tenglamaning (2) shartning birinchisini qanoatlantiruvchi yechimi

$$X(x)=c_2x^{1/2-\alpha}F(1/2+\omega,1/2-\omega;3/2-\alpha;x) \qquad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(4) funksiyani (2) shartning ikkinchisiga bo'ysundiramiz va ma'lum bo'lgan [2]

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\ \ c-a-b>0$$

formulani e'tiborga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$c_2F(1/2+\omega,1/2-\omega;3/2-\alpha;1)=c_2\frac{\Gamma(3/2-\alpha)\Gamma(1/2-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-\omega)\Gamma(1-\alpha+\omega)}=0.$$

$c_2\neq0$ deb hisoblab va Gamma funksiyaning xossalaridan foydalangan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$1-\alpha-\omega=-n,\ \ n=0,1,2,3,\ldots,$$

yoki

$$\omega_n=n-\alpha,\ \ n\in N.$$

Topilgan ω_n ning qiymatlarini inobatga olib, $\omega=\sqrt{\alpha^2+\lambda}$ tenglikdan qo'yilgan D_λ masalaning xos qiymatlarini

$$\lambda_n=n(n-2\alpha),\ \ n\in N$$

ko'rinishda hosil qilamiz.

Bu xos qiymatlarga mos xos funksiyalar esa

$$X_n(x)=c_{2n}x^{1/2-\alpha}F(1/2+\omega_n,1/2-\omega_n;3/2-\alpha;x) \qquad (5)$$

formula yordamida aniqlanadi.

(5) da ishtirok etayotgan Gaussning gipergeometrik funksiyasini

$$P_\nu^\mu(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-x}{2}\right),\ \ -1<x<1$$

ma'lum [1] formulaga asosan Lejandr funksiyasi orqali ifodalab olamiz:

$$X_n(x) = c_{2n}\Gamma\left(3/2-\alpha\right)\left[x\left(1-x\right)\right]^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}} P^{\alpha-1/2}_{-\omega_n-1/2}(1-2x). \tag{6}$$

Bu tenglikning o'ng tomonida $1-2x=\cos\theta$ almashtirish bajaramiz va Lejandr funksiyasi uchun o'rinli bo'lgan $P^{\mu}_{-\nu-1}(x) = P^{\mu}_{\nu}(x)$ formuladan foydalanadigan bo'lsak, (6) ni quyidagicha yozishimiz mumkin bo'ladi:

$$X_n(x) = c_{2n}\Gamma\left(3/2-\alpha\right)2^{\alpha-1/2}\left(\sin\theta\right)^{1/2-\alpha} P^{\alpha-1/2}_{\omega_n-1/2}(\cos\theta), \tag{7}$$

bu yerda $x=\sin^2\left(\theta/2\right)$.

Quyidagi tasdiqning o'rinliligi [2] ishda isbotlangan:

Agar $\beta_0 \geq 0,\ 0<\alpha_0<\min\left\{1, \beta_0/2+3/4\right\}$ bo'lsa, u holda

$$\left\{\left(\sin\theta\right)^{1-\alpha_0} P^{\alpha_0-1}_{k-(\beta_0+1)/2}\left(\cos\theta\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$$

funksiyalar sistemasi $L_2\left(0,\pi\right)$ fazoda to'la bo'ladi.

Bu tasdiqqa asosan (7) funksiyalar sistemasining $L_2(0,1)$ fazoda to'laligi kelib chiqadi.

Adabiyotlar

1. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции.* Функции Лежандра. -М.: Наука. –1973. –296 с.

2. **Мамедов Я.Н.** *О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа.* Дифференциальные уравнения. -1990. -Т.26. -№1. -С.163-167.

MSC 35M13, 35R25

Conditional correctness of the boundary value problem for a non-homogeneous mixed-type equation

Khajiev I. O.[1], Shobdarov E. B.[2]

[1]National University of Uzbekistan, Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan; kh.ikrom04@gmail.com

[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; e.b.shobdarov@gmail.com

Differential equations of mixed type have important practical applications in such areas as gas dynamics problems, the theory of infinitesimal bending of surfaces, momentless shell theory, magnetohydrodynamics, electron scattering theory, groundwater level prediction, mathematical biology and others. Therefore, the development of methods for solving boundary value problems for equations of mixed type is one of the important problems of the modern theory of differential equations.

Consider a differential equation

$$k(x)u_{tt}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)u_x(x,t)\right) = f(x,t) \tag{1}$$

in the region Ω, where $\Omega = \{-l<x<l,\ x\neq 0,\ 0<t<T\}$, $k(x) = \begin{cases} \alpha(x),\ x>0, \\ -\beta(x),\ x<0, \end{cases}$ $\alpha(x)>0$, $\beta(x)>0$, $p(x)>p_0>0$.

Problem. Find the function $u(x,t)$ satisfying equation (1) in the region Ω and the initial

$$u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), -l\le x\le l, \tag{2}$$

boundary

$$u_x(-l,t)=u_x(l,t)=0, 0\le t\le T, \tag{3}$$

and gluing

$$u(-0,t)=u(+0,t), \beta(0)u_x(-0,t)=-\alpha(0)u_x(+0,t), 0\le t\le T, \tag{4}$$

conditions, where $\varphi(x)$, $f(x,t)$ are sufficiently smoothly given functions.

In this paper, we study the initial-boundary value problem (1)-(4) for a mixed-type equation. The problem under study belongs to the class of ill-posed problems of mathematical physics in the sense of Hadamard. An a priori estimate for solution of the problem is obtained, and theorems of uniqueness and conditional stability in the correctness set are proved. Ill-posed problems for similar equations were considered in the works of H.A. Levine, K.S. Fayazov, I.O. Khajiev, Ya.K. Khudaiberganov and others.

References

1. **Fayazov K.S.** *Boundary-value problems for a second-order differential equation with self-adjoint operator coefficients.* Siber. Math. J., 1996. Vol. 37, Issue 6, pp. 1228-1236.
2. **Fayazov K.S., Khajiev I.O.** *Conditional correctness of the initial-boundary value problem for a system of high-order mixed-type equations.* Russian Math. (Iz. VUZ), 2022. Vol 66, Issue 2, pp. 53–63.
3. **Khajiev I.O.** *Conditional Correctness and Approximate Solution of Boundary Value Problem for the System of Second Order Mixed-type Equations.* Journal of Siberian Federal University-Mathematics & Physics, 2018. Volume 11, Issue 2, pp. 231-241.
4. **Pyatkov S.G.** *On properties of eigenfunctions of a certain spectral problem and their applications, in: Correct boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics.* Collect. sci. Works, Novosibirsk, 1984. pp 115-130.

Anti-periodic boundary value problem for a second-order partial differential equation with disruption

Kadiraliyev A. [1],
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
qodiraliyevasadbek20@gmail.com

In the rectangular domain $\Omega=\{(x,t): 0<x<1,\ 0<t<T\}$, we consider the following equation

$$ {}^{C}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)-\left[x^{\beta}u_x(x,t)\right]_x=f(x,t) \tag{1}$$

where $u(x,t)$ is the unknown function, $f(x,t)$ is a given function, and ${}^{C}D_{0t}^{\alpha}$ is the Caputo fractional derivative operator α order [1], defined as

$$ {}^{C}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t\frac{u_{zz}(x,z)}{(t-z)^{\alpha-1}}\,dz,$$

where, α,β,T are real numbers, such that $0<\beta<1,\quad 1<\alpha\le 2,\quad T>0$.

Problem. Show the existence and uniqueness of the pair of functions $u(x,t)$ with the following properties:

1. $u(x,t)$, $x^\beta u_x(x,t)$, $u_{tt}(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, $\left[x^\beta u_x(x,t)\right]_x$, ${}^C D^\alpha_{0t} u(x,t) \in C(\Omega)$;

2. Equation (1) is satisfied in the domain Ω;

3. On the boundary of Ω, the following conditions hold:

$$u(0,t) = -u(1,t), \quad \lim_{x\to 0}\left[x^\beta u_x(x,t)\right] = -u_t(1,t), \quad t \in [0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u(x,t)_{t=0} = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1]; \tag{3}$$

where $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ are given functions that satisfy the initial and boundary conditions.

We seek a solution of the homogeneous equation corresponding to equation (1) satisfying the condition (3) in the form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Then, we obtain the following spectral problem for defining the function $X(x)$

$$MX(x) \equiv -\left[x^\beta X'(x)\right]' = \lambda X(x) \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

with boundary conditions:

$$X(0) = -X(1), \quad \lim_{x\to 0} x^\beta X'(x) = -X'(1) \tag{5}$$

Using the theory of integral equations, we prove that the spectral problem $\{(4),(5)\}$ has a countable set of eigenvalues:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots, \quad \lambda_n \to +\infty \quad \text{as} \quad n \to +\infty.$$

Lemma 1. If a function $g(x)$ satisfies the following conditions: $g(x)$, $x^\beta g'(x) \in C[0,1]$, $x^\beta g'(x) \in L_2(0,1)$, $g(0) = -g(1)$, $\lim_{x\to 0} x^\beta g'(x) = -g'(1)$, then the function $g(x)$ can be expanded into an absolutely and uniformly convergent series on the interval $[0,1]$ with respect to the system $\{X_k(x)\}_{k=1}^\infty$.

Lemma 2. On the interval $[0,1]$, the following series are uniformly convergent:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left[x^\beta X_k'(x)\right]^2}{\lambda_k^2}.$$

Lemma 3. Let $f(x) \in C[0,1]$, $x^{\beta/2} f'(x) \in L_2(0,1)$, and suppose the equality $f(0) = -f(1)$ holds. In that case, the inequality

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k f_k^2 \le \int_0^1 x^\beta \left[f'(x)\right]^2 dx$$

is valid, where f_k is the Fourier coefficient of the function $f(x)$ with respect to the system of eigenfunctions $\{X_k(x)\}$, defined as

$$f_k = \int_0^1 f(x) X_k(x)\, dx.$$

Lemma 4. Let the functions $f(x)$, $f'(x)$, and $x^\alpha f'(x)$ be continuous on $[0,1]$, and let the conditions $f(0) = -f(1)$, $\lim_{x\to 0} x^\beta f'(x) = -f'(1)$ be satisfied.

Additionally, suppose that $\left[x^\beta f'(x)\right]' \in L_2(0,1)$. In that case, the following inequality of the Bessel type holds:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \le \int_0^1 \left[x^\beta f'(x)\right]'^2 dx.$$

Lemma 5. Let the functions $f(x)$, $f'(x)$, $x^\alpha f'(x)$, and $[x^\alpha f'(x)]'$ be continuous on $[0,1]$, and let the conditions $f(0) = -f(1)$, $\lim_{x\to 0} x^\beta f'(x) = -f'(1)$, and $\lim_{x\to 0}\left[x^\beta f'(x)\right]' = -f''(1)$ be satisfied. Suppose also that $x^{\beta/2}\left[x^\beta f'(x)\right]'' \in L_2(0,1)$. In that case, the following inequality holds:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 f_k^2 \le \int_0^1 x^\beta \left(\left[x^\beta f'(x)\right]''\right)^2 dx.$$

Theorem 1. If $\varphi_j(x)$, $x^\beta\varphi_j'(x)$, and $\left[x^\beta\varphi_j'(x)\right]' \in C[0,1]$, $x^{\beta/2}\left[x^\beta\varphi_j'(x)\right]' \in L_2(0,1)$, $\varphi_j(0) = -\varphi_j(1)$, $x^\beta\varphi_j'(x)\big|_{x=0} = -\varphi_j'(1)$, $\left[x^\beta\varphi_j'(x)\right]'\Big|_{x=0} = -\left[x^\beta\varphi_j'(x)\right]'\Big|_{x=1}$, $f(x,t)$, $x^\beta f_x(x,t)$, $\left[x^\beta f_x(x,t)\right]_x \in C[0,1]$, $x^{\beta/2}\left[x^\beta f_x(x,t)\right]_{xx} \in L_2(0,1)$, $f(0,t) = -f(1,t)$, $x^\beta f_x(x,t)\big|_{x=0} =$
$= -x^\beta f_x(1,t)\big|_{x=1}$, then the solution of problem exists and is unique.

References

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* 2006. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier.

Direct and inverse source problems non-local boundary conditions for a time-fractional space degenerate diffusion equation

Mamanazarov A.[1], Khalilov K.[2], Kodiraliyev A.[3]
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
mamanazarovaz1992@gmail.com
[2]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; qsxalilov@gmail.com
[3]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
qodiraliyevasadbek20@gmail.com

1. Direct problem.

In the present work in a rectangular domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation

$$t^b {}_C D_{0t}^\gamma u - \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x\right]_x = f, \tag{1}$$

with three lines of degeneracy, where $u(x,t)$ is the unknown function, f is a given function and

$${}_C D_{0t}^\gamma u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\partial u(x,z)/\partial z}{(t-z)^\gamma}\, dz$$

is the Caputo fractional derivative of order γ of $u(x,t)$ with respect to t [1]; b, α, β, γ are given real numbers such that $0 \le b < \gamma$, $0 < \gamma < 1$, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$ [1].

We study the following initial-boundary value problem for equation (1):

Direct problem. Find a function $u(x,t)$ with following properties:
1) $u(x,t) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x$, ${}^{t}_{C}D^{\gamma}_{0t}u(x,t) \in C(\Omega)$;
2) It satisfies equation (1) in the domain Ω;
3) On the boundary of the domain Ω, it satisfies the following initial and boundary conditions:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$p_1 u(0,t) = q_1 u(1,t), \quad t \in [0,T], \quad q_1 \lim_{x\to 0}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right] =$$

$$= p_1 \lim_{x\to 1}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right], t \in [0,T], \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ is a given function such that $p_1\varphi(0) = q_1\varphi(1)$, $q_1 \lim\limits_{x\to 0}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\varphi'(x)\right] =$ $= p_1 \lim\limits_{x\to 1}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\varphi'(x)\right]$, and p_1, q_1 are given real numbers such that $p_1^2 + q_1^2 \neq 0$, $\Gamma(\cdot)$ is the Euler's gamma function.

Kilbas-Saigo Function [2]. Let $\alpha > 0, \quad m > 0$ and $l > -1/\alpha$. Then the Kilbas-Saigo function is an entire function with three parameters, represented by the following convergent power series:

$$E_{\alpha,m,l}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(1+\alpha((k+1)m+l))}{\Gamma(1+\alpha((k-1)m)+l+1)}\right)x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 1. For every $\alpha \in [0,1], m > 0$ and $x \geq 0$, one has

$$\frac{1}{1+\Gamma(1-\alpha)x} \leq E_{\alpha,m,m-1}(-x) \leq \frac{1}{1+\frac{\Gamma(1+\alpha(m-1))}{\Gamma(1+\alpha m)}x}.$$

Theorem 1. Let $p_1 \neq q_1$. Then, the direct problem can not have more than one solution.

Lemma 2. Let the following conditions be met: $h(x) \in C[0,1]$, $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}h'(x) \in L_2(0,1)$; and $p_1h(0) = q_1h(1)$. Then the following Bessel-type inequality holds

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[h'(x)\right]^2 dx.$$

Lemma 3. If the conditions $h(x)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\right]$, $\mathrm{M}\,h(x) \in C[0,1]$, $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}Mh(x) \in L_2(0,1)$, and $p_1h(0) = q_1h(1)$, $q_1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\right]_{x=0} = p_1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\right]_{x=1}$,
$p_1\,\mathrm{M}\,h(x)|_{x=0} = q_1\,\mathrm{M}\,h(x)|_{x=1}$, then the following inequality holds:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3 h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left\{[Mh(x)]'\right\}^2 dx.$$

Theorem 2. If $p_1 \neq q_1$ and the function $\varphi(x)$ satisfies to the condition of Lemma 3, and $f(x)$ satisfies to the conditions of Lemma 2, then the solution of the problem exists.

2. The Inverse source problem.

In the domain Ω, we will study the existence and uniqueness of the solution of the following inverse source problem for the equation (1):

Inverse problem. Show the existence and uniqueness of a pair of functions $\{u(x,t), f(x)\}$ with the following properties:

1) $u(x,t) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, ${}^{b}_{C}D^{\gamma}_{0t}u(x,t)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x \in C(\Omega)$, $f \in C(0,1)$;

2) They satisfy equation (1);

3) $u(x,t)$ satisfies the initial condition (2), the boundary condition (3), and the following over-determination condition

$$u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

where $\psi(x)$ is a given function.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1 - E_{\gamma,1-b/\gamma,-b/\gamma}\left(-\lambda_k t^{\gamma-b}\right)}{1 - E_{\gamma,1-b/\gamma,-b/\gamma}\left(-\lambda_k T^{\gamma-b}\right)} \left(\psi_k - \varphi_k\right) + \varphi_k \right] v_k(x), \tag{5}$$

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \left\{ \varphi_k + \frac{\psi_k - \varphi_k}{1 - E_{\gamma,1-b/\gamma,-b/\gamma}\left(-\lambda_k T^{\gamma-b}\right)} \right\} v_k(x). \tag{6}$$

Theorem 3. Let the functions φ and ψ satisfy the conditions of Lemma 3. Then, the series defined by (5) and (6) will be the solution to the inverse source problem.

References

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* 2006. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier.

2. **Boudabsa, L., Simon, T.:** *Some properties of the kilbas-saigo function. Mathematics*: 9(217) (2021) *MSC 2020:35K57, 35K65, 35R30*

An inverse source problem for a time-fractional space degenerate subdiffusion equation

Mamanazarov A. O.[1], Mahmudjonova Sh. B.[2]

[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
mamanazarovaz1992@gmail.com

[2] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shohsanamatamjonova@gmail.com

In the rectangular domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, we consider the following equation

$${}_{C}D^{\alpha}_{0t}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x), \tag{1}$$

where $u(x,t), f(x)$ are the unknown functions, and ${}_{C}D^{\alpha}_{0t}$ is Caputo fractional differential operator α order, α, β are given real numbers, such that $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

We study the following inverse source problem for equation (1).

Problem I. Show the existence and uniqueness of the pair of functions $\{u, f\}$ with the following properties:

1. They satisfy equation (1) in Ω;

2. $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, ${}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \in C(\Omega)$, $f(x) \in C(0,1)$;

3. $u(x,t)$ satisfies the following initial

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{2}$$

and the nonlocal boundary conditions:

$$pu(0,t) = qu(1,t),\ q\left[x^{\beta}u_x\right]\big|_{x=0} = p\left[x^{\beta}u_x\right]\big|_{x=1}, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

and also the following over-determination condition:

$$u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

where $\varphi(x), \psi(x)$ are given functions such that $p\varphi(0) = q\psi(1)$, $q\left[x^{\beta}\varphi'(x)\right]\big|_{x=0} = p\left[x^{\beta}\varphi'(x)\right]\big|_{x=1}$ and p, q are given real numbers such that $p^2 + q^2 \neq 0$.

We will seek a solution of the homogeneous equation corresponding to equation (1) satisfying the condition (3) in the form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Then, we have the following spectral problem for defining the function $X(x)$:

$$LX \equiv -\left[x^{\beta}X'(x)\right]' = \lambda X(x), \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

$$pX(0) = qX(1),\ q\left[x^{\beta}X'(x)\right]\big|_{x=0} = p\left[x^{\beta}X'(x)\right]\big|_{x=1}. \tag{6}$$

Using the theory of integral equations, we proved that the spectral problem $\{(5),(6)\}$, has a countable set of eigenvalues:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n \ldots, \lambda_n \to +\infty$$

and the corresponding eigenfunctions $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_n(x), \ldots$ form an orthonormal system in $L_2(0,1)$.

Our main result are as follows:

Lemma 1. If the function $\omega(x)$ satisfies the conditions: $\omega(x)$, $x^{\beta}\omega'(x) \in C[0,1]$, $\mathrm{L}\omega(x) \in L_2(0,1)$,

$$p\omega(0) = q\omega(1), \quad qx^{\beta}\omega'(x)\big|_{x=0} = px^{\beta}\omega'(x)\big|_{x=1}.$$

Then it can be expanded into an absolutely and uniformly convergent series in terms of the system of eigenfunctions $\{X_n(x)\}|_{n=1}^{+\infty}$ on $[0,1]$.

Lemma 2. The following series converges uniformly on the segment $[0,1]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{X_n^2(x)}{\lambda_n}, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{X_n'^2(x)}{\lambda_n}, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left\{\left[x^{\alpha}X_n'(x)\right]'\right\}^2}{\lambda_n^2}.$$

Lemma 3. Let the following conditions be fulfilled:

$$\omega(x), x^{\beta}\omega'(x), \left[x^{\beta}\omega'(x)\right]' \in C[0,1], \mathrm{L}\omega(x) \in L_2(0,1);\ \text{and}\ p\omega(0) = q\omega(1)$$

Then the following inequality holds

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\omega_n^2 \le \int_0^1 x^{\beta}\left[\omega'(x)\right]^2 dx.$$

Lemma 4. If the conditions $\omega(x), x^{\beta}\omega'(x), \left[x^{\beta}\omega'(x)\right]', \mathrm{L}\omega(x) \in C[0,1], x^{\beta/2}[\ \mathrm{L}\omega(x)]' \in L_2(0,1)$ hold, and if $p\omega(0) = q\omega(1), qx^{\beta}\omega'(x)\big|_{x=0} = px^{\beta}\omega'(x)\big|_{x=1}$, then the following inequality holds:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 \omega_n^2 \leq \int_0^1 x^{\beta} \left\{[L\omega(x)]'\right\}^2 dx.$$

The formal solution to the inverse source problem is given by

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n t^{\alpha}\right)}{1 - E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)} \left(\varphi_n - \psi_n\right) + \varphi_n \right) X_n(x), \tag{7}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\varphi_n \lambda_n - \frac{\lambda_n \left(\varphi_n - \psi_n\right)}{1 - E_{\alpha,1}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)} \right) X_n(x), \tag{8}$$

Theorem 1. Let the functions φ and ψ satisfy the conditions Lemma 4. Then, the functions $u(x,t)$ and $f(x)$ defined by (7) and (8) will be the unique solution to the inverse source problem.

Where $E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha})$ is two-parameter Mittag-Leffler function.

References

1. **Mikhlin S. G,** *Lektsii po Lineynym Integralьnym Uravneniyam [Lectures on Linear Integral Equations]* , Fizmatlit, Moscow (1959).
2. **Podlubniy I,** *Fractional differential equations*, Academic press (1999).

UDK 517.95

Unique solvability of an inverse problem for a fourth order degenerate partial differential equation

Mamanazarov A. O.[1], Mirzagiyosova S. M.[2]
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
mamanazarovaz1992@gmail.com
[2] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
sevinchbonumirzagiyosova@gmail.com

In the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation

$$_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) + \left[x^{\beta} u_{xx}(x,t)\right]_{xx} = f(x), \tag{1}$$

where $_C D_{0t}^{\alpha}$ is Caputo fractional differential operator α order [1]

$$_C D_{0t}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{g'(z)\,dz}{(t-z)^{\gamma}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0,$$

α, β, T are given real numbers, such that $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $T > 0$; $f(x)$ is an unknown function on $(0,1)$.

We study the following inverse source problem for equation (1).

Problem I. Show the existence and uniqueness of a pair of functions $\{u(x,t),\ f(x)\}$ with the following properties:

1. 1. $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, ${}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t)$, $\left[x^{\beta} u_{xx}(x,t)\right]_{xx} \in C(\Omega)$, $f(x) \in C(0,1)$;
2. 2. They satisfy equation (1);
3. 3. Satisfies the following initial condition, the boundary condition and the over-determination condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1] \tag{2}$$

$$u(1,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{3}$$

and the following over-determination condition

$$u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

where $\varphi(x)$ is a given function continuous on $[0,1]$, such that $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \left[x^{\beta} \varphi''(x)\right]' = 0$, $\psi(x)$ is a given function.

We will seek a solution of the homogeneous equation corresponding to equation (1), satisfying the conditions (3) in the form $u(x,t) = v(x) T(t)$. Then, with respect to the function $\nu(x)$, we obtain the following spectral problem:

$$Lv \equiv \left[x^{\beta} v''(x)\right]'' = \lambda v(x), \quad x \in (0,1); \tag{5}$$

$$v(1) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v'(1) = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{d}{dx}\left(x^{\beta} \frac{d^2 v}{dx^2}\right) = 0. \tag{6}$$

We proved that the spectral problem $\{(5),(6)\}$ has a countable set of eigenvalues $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdot$, and corresponding eigenfucntions $v_1(x)$, $v_2(x)$, ... form an orthonormal system in $L_2(0,1)$.

Moreover, we proved the following lemmas which will be used to show the existence and uniqueness of the solution of the main problem:

Lemma 1. Suppose the following conditions hold:

$$f(x), \quad f'(x) \in C[0,1], \quad x^{\beta/2} f''(x) \in L_2[0,1], \quad f(1) = f'(1) = f'(0) = 0.$$

Then the following Bessel type equality is valid:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k^2 \leq \int_0^1 x^{\beta} [f''(x)]^2 dx \tag{7}$$

Particularly, it is possible to assert convergence of the series in (7).

Here in after f_k denotes Fourier coefficient of the function $f(x)$ by the system of eigenfunctions $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$.

Lemma 2. Suppose that the following conditions hold: $f(x)$, $f'(x)$, $x^{\beta} f''(x)$, $\left[x^{\beta} f''(x)\right]' \in C[0,1]$, $\left[x^{\beta} f''(x)\right]'' \in L_2[0,1]$, $f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{d}{dx}\left(x^{\beta} \dfrac{d^2 f}{dx^2}\right) = 0$.

Then the following Bessel type equality is valid:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \leq \int_0^1 \left[\left(x^{\beta} f''(x)\right)''\right]^2 dx. \tag{8}$$

Particularly, it is possible to assert convergence of the series in (8).

The formal solution to the inverse source problem is given by

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1-E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^{\alpha})}{1-E_{\alpha,1}(-\lambda_k T^{\alpha})}(\varphi_k-\psi_k)+\varphi_k\right]v_k(x), \tag{9}$$

$$f=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\lambda_k\varphi_k-\frac{\lambda_k(\varphi_k-\psi_k)}{1-E_{\alpha,1}(-\lambda_k T^{\alpha})}\right]v_k(x), \tag{10}$$

where $E_{\alpha,\beta}(z)$ is two-parameter Mittag-Leffler function [1] defined by

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.$$

Our main result is as follows:

Theorem 1. Let the functions φ and ψ satisfy the conditions of Lemma 1 and Lemma 2. Then, the series defined by (9) and (10) will solve the inverse source problem.

REFERENCES

1. **Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.** *Integrals and derivatives of the fractional order and some of their applications.* Minsk. Science and technology, 1987.

UDK 517.983.37

Uchinchi tartibli psevdogiperbolik tenglama uchun Gursa masalasi

Mo‘ydinov I.M.

Farg‘ona davlat texnika universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston

ilhomjonmuydinov887@gmail.com

Uchinchi tartibli psevdogiperbolik tenglamalar matematik fizikaning muhim masalalaridan biri bo‘Ҷlib, turli fizik jarayonlarni modellashtirishda (masalan dispersive to‘lqinlar, issiqlik o‘tkazuvchanlikning noan’anaviy shakllari) qo‘llaniladi [1]. Bu tenglamalarning yechimlarini

o‘rganishda chegara masalalari, xususan Gursa masalasi, alohida ahamiyatga ega, chunki u yechimning mavjudligi va yagonaligini aniqlash uchun asos bo‘lib xizmat qiladi [2].

Tekislikda $\Omega=\{(x,t);\ 0<x<l,\ 0<t<h\}$ sohada quyidagi tenglamani qaraylik.

$$L(u)=u_{xxt}+u_{xx}-u_{tt}=f(x,t), \tag{1}$$

bu yerda $f(x,t)$ berilgan funksiya. $u(x,t)$ noma’lum funksiya bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\begin{aligned} u(0,t)&=\varphi_1(t), \quad u_x(0,t)=\varphi_2(t), \quad 0\le t\le h,\\ u(x,0)&=\psi_1(x), \quad u_y(x,0,)=\psi_2(x), \quad 0\le x\le l. \end{aligned} \tag{2}$$

(1) tenglamani ikkala tomonini v funksiyaga ko‘paytirib divirgent holga keltiramiz

$$vL(u)=vu_{xxt}+vu_{xx}-vu_{tt}=\nu f(x,t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(vu_{xt}+v_{xt}u+vu_x-v_xu\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(v_tu-\nu u_t-v_xu_x\right),$$

$$vL\left(u\right)-uM\left(v\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{4}$$

$$P=vu_{xt}+v_{xt}u+vu_x-v_xu, Q=v_tu-\nu u_t-v_xu_x, \tag{5}$$

$$M\left(v\right)=-v_{xxt}+v_{xx}-v_{tt} \tag{6}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Bu yerda (6) tenglama (1) tenglamaga qo‘shma tenglama deb ataladi. Qo‘shma tenglamani Ω_0 soha bo‘yicha integrallab quyidagi munosabatlarni olamiz.

$$\begin{cases} v\left(x_0,t\right)=0 \\ v_x\left(x_0,t\right)=e^{t-t_0} \\ v_{xx}\left(x,t_0\right)+v_t\left(x,t_0\right)=0 \\ v\left(x,t_0\right)=0 \end{cases} \tag{7}$$

Bu yerda $v=v\left(x_0,t_0;x,t\right)$ (4), (5) tenglamani yechimi [3].

Bu yerda soha $\Omega_0=\left\{(x,t);\ x_0<x<t_0,\ \ x_0<t<t_0\right\}$ ko‘rinishda вовГЧlib (4) tenglikga Grin formulasini qo‘llab $u\left(x_0,t_0\right)$ tenglamani yechimini topamiz.

$$\iint\limits_{\Omega_0}\left[vL\left(u\right)-uM\left(v\right)\right]dxdt=\iint\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}\right)dxdt=\int\limits_{\partial\Omega_0}-Qdx+Pdt$$

$$u\left(x_0,t_0\right)=\varphi_1\left(t_0\right)v_x\left(0,t_0\right)-\int\limits_0^{x_0}\left[\psi_1\left(x\right)\nu_t\left(x,0\right)-\psi_2\left(x\right)\nu\left(x,0\right)-\psi_1^{'}\left(x\right)\nu_x\left(x,0\right)\right]dx-$$

$$-\int\limits_0^{t_0}\left[\varphi_2^{'}\left(t\right)\nu\left(0,t\right)+\varphi_1\left(t\right)\nu_{xt}\left(0,t\right)+\varphi_2\left(t\right)\nu\left(0,t\right)-\varphi_1\left(t\right)\nu_x\left(0,t\right)\right]dt-\int\limits_0^{x_0}\int\limits_0^{t_0}\nu\left(x,t\right)f\left(x,t\right)dxdt$$

Adabiyotlar

1. **Kozhanov A.I.** *Composite Type Equations and Inverse Problems.* - Utrecht: VSP 1999.

2. **Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д.** *Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа.* -М.: Физматлит, 2007.

3. **Зикиров О. С.** *Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка.* Современная математика и ее приложения. Том 68 (2011). С. 101-120.

4. **Каримов Ш.Т, Юлбарсов Х.А.** *Аналог задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка.* кАктуальные проблемы стахостика анализь Тошкент. 2021. 309-311с

0 *UDK 517.956.6*

To‘g‘ri to‘rtburchakda ikkita tip o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi

Nishonova Sh. T.[1], Akbarova O. M.[2]
[1]Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekistan;
shahnozanishonova910@gmail.com
[2] Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekistan;
oydinoyakbarova69@gmail.com

[1] ishda A.V.Bitsadze tomonidan Lavrentev-Bitsadze tenglamasi uchun Dirixle masalasining nokorrekt qo‘yilganligi isbotlangan. Keyinchalik aralash tipdagi tenglamalar uchun Dirixle masalasi ko‘plab tatqiqotchilarning e’tiborini tortgan [2], [3]. Ushbu ishda ikkita perpendikulyar ichki tip o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash elliptiko-giperbolik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi ko‘Чrilgan. Masala yechimining yagonaligi masalaga mos bir jinsli masalaning xos funksiyalarining L_2 fazoda to‘laligiga asosan isbotlangan. Masala yechimi qator ko‘rinishda qurilgan. Yechimni qator yig‘indisi ko‘rinishida qurishda "kichik maxrajlar"muammosi paydo bo‘ladi va maxrajning doimo noldan farqli bo‘lishini ta’minlaydigan shartlar keltirib chiqarilgan.

Quyidagi

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

tenglamani $\Omega = \{(x,y) : x \in (-1,1), y \in (-\alpha,\beta)\}$ sohada qaraymiz, bu yerda $\lambda \in C$, $\alpha, \beta \in R^+$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}, \Omega_2 = \Omega \cap \{x > 0, y < 0\}$,$\Omega_3 = \Omega \cap \{x < 0, y < 0\}, \Omega_4 = \Omega \cap \{x < 0, y > 0\}$.

(1) tenglama Ω sohada aralash tipga tegishli bo‘lib, jumladan Ω_1 va Ω_3 sohalarda elliptik tipga tegishli, Ω_2 va Ω_4 sohalarda giperbolik tipga tegishli hisoblanadi. $x = 0$ va $y = 0$ chiziqlar esa (1) tenglama uchun tip o‘zgarish chiziqlari hisoblanadi va ular perpendikulyar holatda joylashgan.

Mazkur ishda (1) tenglama uchun Ω sohada quyidagi masala spektral analiz usuli bilan tadqiq qilingan.

Dirixle-Neyman masalasi. Shunday $u(x,y)$ funksiya topilsinki, u quyidagi shartlarni
qanoatlantirsin:

$$u(x,y) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^{2,2}_{x,y}\left(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4\right), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) = 0, (x,y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{x=1} = 0, \quad u(x,y)|_{x=-1} = 0, \quad y \in [-\alpha,\beta], \tag{4}$$

$$u_y(x,y)|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad u_y(x,y)|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad x \in [-1,1], \tag{5}$$

bu yerda $\psi(x)$ va $\varphi(x)$-berilgan funksiyalar вовГЧ lib, $\varphi(\pm 1) = \psi(\pm) = 0$.

Ushbu ishda quyidagi teoremalar isbotlangan.

1-teorema. $\psi(x)$ va $\varphi(x)$ berilgan funksiyalar uchun

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = \varphi''(-1) = \varphi''(1) = 0, \;\; \varphi''(0+0) = -\varphi''(0-0), \varphi'''(0+0) = -\varphi'''(0-0)$$
$$\psi(-1) = \psi(1) = \psi''(-1) = \psi''(1) = 0, \;\; \psi''(0+0) = -\psi''(0-0), \psi'''(0+0) = -\psi'''(0-0)$$

shartlar bajarilsin.

1) Agar barcha $k \in N$ lar uchun

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta) = \cos\left(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\right)\operatorname{sh}\left(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\right) + \sin\left(\alpha\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\right)\operatorname{ch}\left(\beta\sqrt{\mu_k^2-\lambda}\right) \neq 0,$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta) = \operatorname{ch}\left(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda}\right)\sin\left(\beta\sqrt{\mu_k^2+\lambda}\right) + \operatorname{sh}\left(\alpha\sqrt{\mu_k^2+\lambda}\right)\cos\left(\beta\sqrt{\mu_k^2+\lambda}\right) \neq 0$$

shartlar bajarilsa, u holda masala yechimi yagona bo‘ladi,

2) Agar $\Delta_k^{(1)} = 0, \Delta_k^{(2)} = 0$ bo‘lsa, u holda $\int_{-1}^{1} u(x,y)Z_k^{(j)}(x)dx = 0$ shartning bajarilishi hisobiga masala yechimga ega bo‘Чladi, bu yerda μ_k sonlar $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{th}\mu$ tenglamaning ildizlari hisoblanadi,

$$Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{-\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x>0, \\ \frac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x<0, \end{cases} \quad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{-\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x>0, \\ \frac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x<0. \end{cases}$$

References

1. **Бицадзе А.В.** *Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа.* ДАН СССР,1953. т.122. N2. С.167-170.
2. **Уринов А.К., Каримов К.Т.** *Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами.* Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.мат. науки, 2017, Т. 21, N 4. С. 665Ц683.
3. **Каримов К.Т.** *Задача типа Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде.* Бюллетень Института математики. 2020. N 2, С. 68-82.

UDK 517.957

Asymptotics of self-similar solutions of the heat conduction problem in an inhomogeneous medium with a source

Rakhmonov Z. R.[1], **Yarmetova D. I.**[2]
[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; e-mail z.rahmonov@nuu.uz
[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; e-mail saidovadilafruz1996@gmail.com

We study a nonlinear diffusion problem with a source specified by nonlinear boundary conditions in $Q = \{(x,\ t)\,|\ x \in R_+^N,\ \ t>0\}$

$$u_t = \nabla\left(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m\right) + u^\beta, \qquad x \in R_+^N,\ \ t>0, \tag{1}$$

with nonlinear boundary flow and initial condition

$$-|\nabla u^m|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x_1} = u^q, \quad x_1 = 0,\ \ t>0, \tag{2}$$

$$u\,(x,0) = u_0\,(x)\,, \tag{3}$$

where $R_+^N = \{(x_1,x')\,|x' \in R^{N-1},\ x_1>0\}$ $m>1$, $p>1+1/m$, $q>0$.- are given numerical parameters and $u_0\,(x)$is a non-negative bounded and continuous function in

R_N. Here we mean by a solution, a function $u(x,t)$ is nonnegative and continuous in $Q\ (0,0)$, satisfying (1)-(3) in the distribution sense.
Let us replace problem (1)- (3) by using the balance method, implicit difference scheme [1] and obtain the difference problem with error $\mathrm{O}\left({h_x}^2+h_t\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1}-y_i^j}{h_t} = \left[a_{i+1}\left(y^{j+1}\right)\left(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}\right)-a_i\left(y^{j+1}\right)\left(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}\right)\right]+\varphi_i^j;\ i=\overline{1,n-1}; \\ \qquad\qquad j=\overline{0,m-1} \\ y_i^0=u_0\left(x_i\right),\ i=\overline{1,n};\ y_0^j=\theta_1\ \left(t_j\right),\ j=\overline{1,m};\ y_n^j=\theta_2\ \left(t_j\right),\ j=\overline{1,m} \end{cases}, \tag{4}$$

For calculating $a_i\left(y^j\right),\theta_1\ \left(t_j\right),\theta_2\ \left(t_j\right),\varphi_{\ i}^{\ j}$ following formulas are used

$$a_i\left(y^j\right)=\left(y_i^{j+1}\right)^m\left|\frac{\left(y_i^{j+1}\right)^m-\left(y_{i-1}^{j+1}\right)^m}{h_x}\right|^{p-2}$$

$$\theta_1\ \left(t_j\right)=\left(Aw_0\bar{v}\right)^{\frac{1}{1-q}},\ \theta_2\ \left(t_j\right)=\left(Aw_0\bar{v}\left(a-\left(b\tau^{\frac{-1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{\gamma}\right)^{\frac{1}{1-q}},\ \varphi_{\ i}^{\ j}=\left(y_{\ i}^{\ j}\right)^{\beta}$$

Where $A,a,b,w_0,\bar{v}$ -are parameters of self-similar solution To solve the system of nonlinear equations, we apply iterative methods and obtained

$$\left[a_{i+1}\left(\overset{s}{y}^{j+1}\right)\left(\overset{s+1}{y}_{i+1}^{j+1}-\overset{s+1}{y}_i^{j+1}\right)-a_i\left(\overset{s}{y}^{j+1}\right)\left(\overset{s+1}{y}_{i+1}^{j+1}-\overset{s+1}{y}_i^{j+1}\right)\right]+\overset{s}{\varphi}_i^j;\quad i=\overline{1,n-1};\ j=\overline{1,m-1}, \tag{5}$$

where $s=0,1,2...$.

In (5) we introduce the following notation

$$\overset{s}{A}_i=\frac{\tau}{h_x^2}\ a_{i+1}\left(\overset{s}{y}^{j+1}\right),\ \overset{s}{C}_i=\frac{\tau}{h_x^2}\ a_i\left(\overset{s}{y}^{j+1}\right);\ \overset{s}{B}_i=\overset{s}{A}_i+\overset{s}{C}_i+1,\ \overset{s}{F}_i^j=h_t\ \overset{s}{\varphi}_i^j-\overset{s}{y}_i^j$$

Now difference equation (5) could be written as

$$\overset{s}{A}_i\,\overset{s+1}{y}_{i+1}^{j+1}-\overset{s}{B}_i\,\overset{s+1}{y}_i^{j+1}+\overset{s}{C}_i\,\overset{s+1}{y}_{i-1}^{j+1}=-\overset{s}{F}_i^j,\ i=\overline{1,\ n-1}, \tag{6}$$

For the numerical solution of equation (6) is used three-diagonal matrix algorithm [2]. From the boundary conditions (6), we have $y_0^{j+1}=\theta_1\left(t_{j+1}\right),y_n^{j+1}=\theta_2\left(t_{j+1}\right)$. Let,

$$y_i^{j+1}=\lambda_i y_{i+1}^{j+1}+\chi_i, \tag{7}$$

Where $\lambda_i=\frac{A_i}{B_i-\lambda_{i-1}C_i},\ \chi_i=\frac{B_i\chi_{i-1}+F_i}{B_i-\lambda_{i-1}C_{\ i}},\ i=\overline{2,n}$.
The values could be found from (6)- (7) at $i=1$

$$\lambda_1=\frac{A_1}{B_1},\ \chi_1=\frac{C_1\theta_1+F_1}{B_1}, \tag{8}$$

The solution of system (4) is determined by on the recursive formula (7). The values y_n^{j+1}

we obtain from the boundary condition (4)

$$\begin{cases} y_n^{j+1} = \theta_2 \\ y_{n-1}^{j+1} = \lambda_{n-1} y_n^{j+1} + \chi_{n-1} \\ \vdots \\ y_i^{j+1} = \lambda_i y_{i+1}^{j+1} + \chi_i \\ \vdots \end{cases}$$

References

1. **A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhailov** *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations* .: Walter de Gruyter, Berlin, 1995
2. **F. A. M. El-Mikkawy** *Algorithms for solving linear systems of equations of three-diagonal type via transformations* . :Applied Mathematics 5, 413–422 (2014).
3. **M. Aripov, M. Bobokandov, M. Mamatkulova** *To numerical solution of the non-divergent diffusion equation in non-homogeneous medium with source or absorption.*:AIP Conference Proceedings ,2024 DOI:10.1063/5.0194632 *UDK 517.95*

On an inverse problem for the string vibration equation

Rasulova K. M.1, Azizov M. S.1
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
muzaffar.azizov.1988@mail.ru

In a rectangle $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\ 0 < t < T\}$, we consider the following

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2 u_{xx} = Q(t) f(x), \tag{1}$$

where p and T are given positive real numbers, $Q(t) \neq 0$ is a known function from the class $C(0,T) \cap L(0,T)$, $u = u(x,t)$ and $f(x)$ are unknown functions. We study the following problem for equation (1) in the domain Ω.

Problem A. Find a pair of functions $u(x,t), f(x)$ with the following properties: 1) $u(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,2}_{x,t}(\Omega)$, $f(x) \in C(0,p) \cap L[0,T]$ 2) they satisfy the equation (1) in the domain Ω; 3) $u(x,t)$ satisfies the following initial and boundary conditions:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad u(x,T) = \varphi_3(x), \quad 0 \le x \le p;$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(p,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

where $\varphi_i(x)$, $i = 1,2,3$ are known functions.

Let us introduce the following notation: $\lambda_n \int_0^T Q(\tau) \sin a\lambda_n (T-\tau)\, d\tau \ge \delta_0$.

Theorem 1. *Let $\delta_0 \neq 0$ for $\forall n \in \mathbb{N}$, then the Problem A can not have more than one solution.*

Theorem 2. *Let $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x) \in C^2[0,p] \cap C^3(0,p)$, $\varphi_1^{(2)}(x)$, $\varphi_3^{(3)}(x) \in L_2(0,p)$, $\varphi_1^{(2i)}(0) = \varphi_1^{(2i)}(p) = 0$, $\varphi_3^{(2i)}(0) = \varphi_3^{(2i)}(p) = 0$, $i = \overline{0,2}$ $\varphi_2(x) \in C^1[0,p] \cap C^2(0,p)$, $\varphi_2^{(3)}(x) \in L_2(0,p)$, $\varphi_2^{(2i)}(0) = \varphi_2^{(2i)}(p) = 0$, $i = \overline{0,1}$ Then the solution to the problem A is unique, exists, and is given by the following formula:*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t + \frac{f_n}{a\lambda_n} \int_0^t Q(\tau) \sin a\lambda_n (t-\tau) d\tau \right\} X_n(x),$$

where a_n, b_n and f_n are Fourier coefficient

$$a_n = \int_0^p \varphi_1(x) X_n(x)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{a\lambda_n}\int_0^p \varphi_2(x) X_n(x)\,dx, \quad c_n = \int_0^p \varphi_3(x) X_n(x)\,dx,$$

$$f_n = \frac{a\lambda_n^2 [c_n - a_n \cos a\lambda_n T - b_n a \sin \lambda_n T]}{\lambda_n \int_0^T Q(\tau) \sin a\lambda_n (T-\tau) d\tau}, \quad n = 1, 2, ...,$$

$X_n(x)$ and λ_n are the eigenfunctions and eigenvalues the following spectral problem:

$$X(x) + \lambda X(x), \quad x \in (0, p); \quad X(0) = 0, \quad X(p) = 0.$$

References

1. **C. I. Kabanihin** *Inverse and Incorrect Problems.* Sib. Nauch. Izdat., Novosibirsk, 2009.

2. **A. K. Urinov and M. S. Azizov** *Boundary Value Problems for a Fourth Order Partial Differential Equation with an Unknown Right-hand Part.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 632–640.

MSC 35J15, 35J25, 35J70, 35J75

A nonlocal boundary value problem for the Holmgren equation with singular coefficient and spectral parameter

Ruziev M. Kh.[1], Kazakbaeva K. B.[2]

[1,2] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; [1]ruzievmkh@gmail.com , [2]qalligul96@gmail.com

Consider the equation

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y - \lambda^2 y^m u = 0, \tag{1}$$

where $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, $\lambda \in \mathrm{R}$ in the vertical half-strip $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0\}$.

Let $\overline{D} = D \cup \overline{I_0} \cup \overline{OB} \cup \overline{I_1}$, where $O(0,0)$, $B(1,0)$, $I_0 = \{(x, y) : x = 0, y > 0\}$, $I_1 = \{(x, y) : x = 1, y > 0\}$.

In domain D we study the following non-local boundary value problem.

Problem. Find a function $u(x, y)$ with the following properties:

(i) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C(D \cup I_0) \cap C^2(D)$ and satisfies equation (1) in the domain D;

(ii) we have the decay condition

$$\lim_{y \to +\infty} u(x, y) = 0 \quad x \in [0, 1]; \tag{2}$$

(iii) $u(x, y)$ satisfies the boundary conditions

$$u(0, y) - u(1, y) = \varphi_1(y), \quad y \geq 0, \tag{3}$$

$$u_x(0,y)=\varphi_2(y),\quad y>0, \tag{4}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{5}$$

where $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\tau(x)$ are given functions, and $\varphi_1(0)=\tau(0)=0$.

Theorem 1. Let $\varphi_1(y)\equiv 0$, $\varphi_2(y)\equiv 0$, $\tau(x)\equiv 0$. Then the problem cannot have more than one solution.

Theorem 2. Let $\varphi_i(y)\in C[0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi_i(y)\in L(0,\infty)$ functions $\varphi_i(y)$ vanish as $y\to+\infty$, $i=1,2$, $\tau(x)\in C^2[0,1]$ and on $[0,1]$ has a piecewise continuous third-order derivative, and $\tau'(0)=\tau'(1)$. Then the solution of the problem exists.

Proof. We seek the solution of equation (1) in the domain D that satisfying conditions (2)–(5), in the form of the sum of two functions $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$, where $u_1(x,y)$ and $u_2(x,y)$ are solutions of (1), satisfying the following boundary conditions:

$$u_1(0,y)-u_1(1,y)=\varphi_1(y),\quad y\ge 0, \tag{6}$$

$$u_{1x}(0,y)=\varphi_2(y),\quad y>0, \tag{7}$$

$$\lim_{y\to+\infty}u_k(x,y)=0,\quad k=1,2,\quad x\in[0,1], \tag{8}$$

$$\lim_{y\to+0}u_1(x,y)=0,\quad x\in[0,1], \tag{9}$$

$$u_2(0,y)-u_2(1,y)=0, y\ge 0, \tag{10}$$

$$u_{2x}(0,y)=0,\quad y>0, \tag{11}$$

$$\lim_{y\to+0}u_2(x,y)=\tau(x),\quad x\in[0,1]. \tag{12}$$

We seek the function $u_1(x,y)$ in the form

$$u_1(x,y)=y^{\frac{1-\beta_0}{2}}\int_0^\infty\Big[a_1(s)e^{x\sqrt{\lambda^2+s^2}}+a_2(s)e^{-x\sqrt{\lambda^2+s^2}}\Big]J_{\frac{1-2\beta}{2}}\Big(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\Big)ds, \tag{13}$$

where $a_1(s)$ and $a_2(s)$ are unknown functions, $J_\nu(z)$ is the Bessel function of the first kind [1], $\beta=\frac{2\beta_0+m}{2(m+2)}$.

Straight-forward computations show that it is a solution to equation (1) and satisfies conditions (8).

Using conditions (6) and (7) we have

$$\varphi_1(y)=y^{\frac{1-\beta_0}{2}}\int_0^\infty\Big[(1-e^{\sqrt{\lambda^2+s^2}})a_1(s)+(1-e^{-\sqrt{\lambda^2+s^2}})a_2(s)\Big]J_{\frac{1-2\beta}{2}}\Big(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\Big)ds, \tag{14}$$

$$\varphi_2(y)=y^{\frac{1-\beta_0}{2}}\int_0^\infty\Big[a_1(s)\sqrt{\lambda^2+s^2}-a_2(s)\sqrt{\lambda^2+s^2}\Big]J_{\frac{1-2\beta}{2}}\Big(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\Big)ds. \tag{15}$$

Using the fact that the Hankel transformation $g(y)=\int_0^\infty f(x)J_\nu(xy)\sqrt{xy}dx$ [2] is reconversion to itself, from equality (14) and (15), we obtain

$$u_1(x,y)=\frac{2y^{\frac{1-\beta_0}{2}}}{m+2}\int_0^\infty\frac{sch(x\sqrt{\lambda^2+s^2})}{1-ch(\sqrt{\lambda^2+s^2})}J_{\frac{1-2\beta}{2}}\Big(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\Big)ds$$

$$\times\int_0^\infty\varphi_1(y)y^{\frac{2m+\beta_0+1}{2}}J_{\frac{1-2\beta}{2}}\Big(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\Big)dy$$

$$+\frac{2}{m+2}y^{\frac{1-\beta_0}{2}}\int_0^\infty \frac{sh(x\sqrt{\lambda^2+s^2})+sh((1-x)\sqrt{\lambda^2+s^2})}{1-ch(\sqrt{\lambda^2+s^2})}\frac{s}{\sqrt{\lambda^2+s^2}}J_{\frac{1-2\beta}{2}}\Big(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\Big)ds$$

$$\times\int_0^\infty \varphi_2(y)y^{\frac{2m+\beta_0+1}{2}}J_{\frac{1-2\beta}{2}}(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2})dy$$

We find the function $u_2(x,y)$ using the Fourier method (separation of variables).

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n y^{\frac{1-\beta_0}{2}}K_{\frac{1-2\beta}{2}}\Big(\frac{2\sqrt{\lambda^2+(2\pi n)^2}}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\Big)\cos(2\pi nx)$$

the coefficients of which we select so that $u(x,y)$ satisfies conditions (10)–(12).

Note that the local boundary value problem for equation (1) in the domain D was studied in [3].

References

1. **Bateman G., Erdelyi A.** *Vysshie transtsendentnye funktsii.* Nauka, Moscow 1974.
2. **Olver F.** *Asymptotics and special functions.* Elsevier Science, Amsterdam 2014.
3. **Ruziev M.Kh.** *A boundary value problem for the degenerated elliptic equation with singular coefficient and spectral parameter.* Journal of Partial Differential Equations, 2018. 31, No 3, 214–223.

UDK 517.928.2

On a singularly perturbed problem with unstable spectrum

Sadieva A. S.[1], Tursunov D. A.[2], **Orozov M. O.**
[1] Osh State University, Osh, Kyrgyzstan; dtursunov@oshsu.kg
[2] Osh State University, Osh, Kyrgyzstan; sadieva@oshsu.kg

One of the main results in the theory of singularly perturbed equations is the theorem of A.N. Tikhonov on the passage to the limit. He formulated sufficient conditions under which the solution to the perturbed problem and the solution to the unperturbed system are asymptotically close. Further, these sufficient conditions came to be called stability conditions. The first work, when the stability conditions are violated on a certain segment, but the passage to the limit is performed, is the work of M.A. Shishkova [1]-[3], student of L.S. Pontryagin.

Consider the Cauchy problem

$$\varepsilon X'(t,\varepsilon)=A(t)X(t,\varepsilon)+F(t),\ t\in[t_0,T], \tag{1}$$

$$X(t_0,\varepsilon)=X^0, \tag{2}$$

where $0<\epsilon$ is a small parameter, $A(t)$ is a second-order square matrix function with elements $a_{jk}(t)$, $F(t)=colon(f_1(t),f_2(t))$, the elements $a_{jk}(t), f_k(t)$ are analytical functions in the region under consideration, $X^0=colon(x_1^0,x_2^0)$ is a constant vector.

Let the following conditions be met:

Cond 1. The matrix function $A(t)$ has complex conjugate eigenvalues:
$\lambda_1(t)=\alpha(t)+i\beta(t)$, $\lambda_2(t)=\alpha(t)-i\beta(t)$ and $\alpha(t)<0$, for $t_0\le t<0$;
$\alpha(t)>0$, for $0<t\le T$; $\alpha(0)=0$ but $\beta(0)\neq 0$.

From the theory of ordinary differential equations it follows that the Cauchy problem is correct, i.e. a solution to the Cauchy problem exists, is unique and is stable even if stability is lost [3,4,5,6].

Our task is to construct an asymptotic expansion of the solution to the Cauchy problem (1)-(2) during loss of stability with any degree of accuracy in terms of the degree of the small parameter ε.

As usual, we will seek for an external solution in the form, [4]-[5]:

$$U(t,\varepsilon) = U_0(t) + \varepsilon U_1(t) + \ldots + \varepsilon^n U_n(t) + \ldots \tag{3}$$

Substituting relation (3) into equation (1) we have:

$$\varepsilon U_0'(t) + \varepsilon^2 U_1'(t) + \ldots + \varepsilon^{n+1} U_n'(t) + \ldots = A(t)(U_0(t) + \varepsilon U_1(t) + \ldots + \varepsilon^n U_n(t) + \ldots) + F(t)$$

equating the coefficients at the same powers of the small parameter we obtain:

$$A(t)U_0(t) + F(t) = 0 \ \Rightarrow U_0(t) = -A^{-1}(t)F(t),$$

$$U_{n-1}'(t) = A(t)U_n(t) \ \Rightarrow U_n(t) = A^{-1}(t)U_{n-1}'(t), \ n \in N.$$

Thus, we have recurrently defined all terms of series (3):

$$U_0(t) = -A^{-1}(t)F(t), \ U_1(t) = -A^{-1}(t)U_0'(t), \ \ldots, \ U_n(t) = -A^{-1}(t)U_{n-1}'(t), \ldots$$

Note that if in the region under consideration, then series (3) will be a smooth external asymptotic solution of the Cauchy problem in the region under consideration. And if at some points of the region the matrix function A(t) becomes zero, then the external solution will not be smooth and problem (1)-(2) becomes bisingular [4]-[5]. For example,

Cond 2. Let $Re(u_1(t_1^*, t_2^*) - u_1(t_0, 0)) = 0$, where (t_1^*, t_2^*) is the only simple root of the eigenvalue $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ in the domain D, where $D = \{(t_1, t_2) | t = t_1 + it_2, Re(u_k(t) - u_k(t_0)) \leq 0, \ k = 1, 2\}$, $i = \sqrt{-1}$, $u_k(t) = \int \lambda_k(t)dt$, $k = 1, 2$.

When condition Cond 2 is satisfied, series (3) in the region D, namely at points $t = t_1^* \pm it_2^*$ has a singularity, since the eigenvalues of the matrix function $A(t)$ at these points vanish. Note that $[t_0, T] \subset D$, for $t_2 = 0 : [t_0, T] \equiv D$.

For example, if the eigenvalues $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ have simple zeros in the region under consideration, then the growing singularity has the form :

$$U_k(t) = O\Big(((t - t^*)(t + t^*))^{-1-2k}\Big), \ k = 0, 1, 2, \ldots, (\lambda_1(t^*) = 0, \ \lambda_2(-t^*) = 0).$$

And if the eigenvalues $\lambda_1(t)$ and $\lambda_2(t)$ have n fold zero in the region under consideration, then the growing singularity has the form:

$$U_k(t) = O\Big(((t - t^*)(t + t^*))^{-n-(n+1)k}\Big), \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

We will study the Cauchy problem (1)-(2) in domain D under conditions Cond 1 and Cond 2. Let the inequality $detB_0(t) \neq 0$ be satisfied in domain D.

References

1. **Nikolsky M.S., Grigorenko N.L., Dmitriev V.I.** *Selected works of L. S. Pontryagin.* Moscow: MAX Press. - 2004. - 551 p.

2. **Shishkova M.A.** *Examination of a system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **(209)3**, 576–579 (1973).

3. **Neishtadt A.I., Treschev D.V.** *Dynamical phenomena connected with stability loss of equilibria and periodic trajectories.* Russian Math. Surveys, **76(5)**, 883–926 (2021).
4. **Tursunov D.A.** *Asymptotics of the solution of the Cauchy problem in the case of a change in the stability of a stationary point in the plane of "Rapid motions".* Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Matematika i Mekhanika **54**, 46–57 (2018).
DOI: 10.17223/19988621/54/4
5. **Tursunov D. A., Sadieva A.S.** *Asymptotics of the solution of the Cauchy problem with an unstable spectrum and prolonging loss of stability.* Lobachevskii Journal of Mathematics, **45**(3), 1309–1317 (2024) *UDK 517.95*

Unique solvability of an inverse problem for a fourth order degenerate partial differential equation

Sobirjonova M. Q.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
mohinurqahramonovna1@gmail.com

In the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation

$$t^{\gamma}{}_{C}D_{0t}^{\alpha}u\,(x,t) + \left[x^{\beta}u_{xx}\,(x,t)\right]_{xx} = f\,(x)\,, \tag{1}$$

where ${}_{C}D_{0t}^{\alpha}$ is Caputo fractional differential operator α order [1]

$${}_{C}D_{0t}^{\alpha}g\,(t) = \frac{1}{\Gamma\,(1-\alpha)}\int\limits_{0}^{t}\frac{g'\,(z)\,dz}{(t-z)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0,$$

α, β, T are given real numbers, such that $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $T > 0$; $f\,(x)$ is an unknown function on $(0,1)$.

We study the following inverse source problem for equation (1).

Problem I. Show the existence and uniqueness of a pair of functions $\{u(x,t),\ f(x)\}$ with the following properties: 1.) $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $t^{\gamma}{}_{C}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)$, $\left[x^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx} \in C(\Omega)$, $f(x) \in C(0,1)$;

2.) They satisfy equation (1);

3.) Satisfies the following initial condition, the boundary condition and the over-determination condition

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,, \quad x \in [0,1] \tag{2}$$

$$u\,(0,t) = 0, \quad u\,(1,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\,(1,t) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\left(x^{\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{3}$$

and the following over-determination condition

$$u(x,T) = \psi(x), \ \ x \in [0,1], \tag{4}$$

where $\varphi\,(x)$ is a given function continuous on $[0,1]$, such that $\varphi\,(0) = 0$, $\varphi\,(1) = 0$, $\varphi'\,(1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^{\beta}\varphi''\,(x)\right] = 0$, $\psi(x)$ is a given function.

We will seek a solution of the homogeneous equation corresponding to equation (1), satisfying the conditions (3) in the form $u\,(x,t) = v\,(x)\,T\,(t)$. Then, with respect to the function $\nu\,(x)$, we obtain the following spectral problem:

$$Lv \equiv \left[x^{\beta}v''\,(x)\right]'' = \lambda v\,(x)\,, \quad x \in (0,1)\,; \tag{5}$$

$$v(0)=0, \quad v(1)=0, \quad v'(1)=0, \quad \lim_{x\to 0}\left(x^{\beta}\frac{d^2v}{dx^2}\right)=0. \tag{6}$$

We proved that the spectral problem {(5),(6)} has a countable set of eigenvalues $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdot$, and corresponding eigenfunctions $v_1(x)$, $v_2(x)$,... form an orthonormal system in $L_2(0,1)$.

Moreover, we proved the following lemmas which will be used to show the existence and uniqueness of the solution of the main problem:

Lemma 1. Suppose the following conditions hold:

$$f(x), \quad f'(x)\in C[0,1], \quad x^{\beta/2}f''(x)\in L_2[0,1], \quad f(0)=f(1)=f'(1)=0.$$

Then the following Bessel type inequality is valid:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k f_k^2\leq\int_0^1 x^{\beta}[f''(x)]^2dx \tag{7}$$

Particularly, it is possible to assert convergence of the series in (7).

Here in after f_k denotes Fourier coefficient of the function $f(x)$ by the system of eigenfunctions $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$.

Lemma 2. Suppose that the following conditions hold: $f(x)$, $f'(x)$, $x^{\beta}f''(x)$, $\left[x^{\beta}f''(x)\right]'\in C[0,1]$, $\left[x^{\beta}f''(x)\right]''\in L_2[0,1]$, $f(0)=f(1)=f'(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\beta}\dfrac{d^2f}{dx^2}\right)=0$.

Then the following Bessel-type inequality is valid:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 f_k^2\leq\int_0^1\left[\left(x^{\beta}f''(x)\right)''\right]^2dx. \tag{8}$$

Particularly, it is possible to assert convergence of the series in (8).

The formal solution to the inverse source problem is given by

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1-E_{\alpha,1-\gamma/\alpha,-\gamma/\alpha}(-\lambda_k t^{\alpha-\gamma})}{1-E_{\alpha,1-\gamma/\alpha,-\gamma/\alpha}(-\lambda_k T^{\alpha-\gamma})}(\psi_k-\varphi_k)+\varphi_k\right]v_k(x) \tag{9}$$

$$f=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\left(\varphi_k+\frac{\psi_k-\varphi_k}{1-E_{\alpha,1-\gamma/\alpha,-\gamma/\alpha}(-\lambda_k T^{\alpha-\gamma})}\right)v_k(x) \tag{10}$$

where $E_{\alpha,m,l}(x)$ is three-parameter Kilbas-Saigo function [2] defined by

$$E_{\alpha,m,l}(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(1+\alpha((k+1)m+l))}{\Gamma(1+\alpha((k-1)m+l+1))}\right)x^n, x\in\mathbb{R}.$$

for $\alpha>0$, $m>0$, $l>1/\alpha$.

Our main result is as follows:

Theorem 1. Let the functions φ and ψ satisfy the conditions of Lemma 1 and Lemma 2. Then, the series defined by (9) and (10) will solve the inverse source problem.

REFERENCES

1. **Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.** *Integrals and derivatives of the fractional order and some of their applications.* Minsk. Science and technology, 1987.
2. **Boudabsa L., Simon T.** *Some properties of Kilbas-Saigo function.* Mathematics, 2021.

УДК 517.95

Movement of the piston in a reacting mix of gases

Toktorbaev A.M.[1], Toktomuratova Zh.E.[2],
[1] Osh State University, Osh, Kyrgyzstan; ain7@list.ru
[2] Osh State University, Osh, Kyrgyzstan; erkinbaevnajanara@gmail.com

A one-dimensional motion of the piston mass "m" in a tube filled with a mixture of reacting gases. The piston moves through the voltage difference, the piston friction on the walls is neglected. We will investigate the challenge in the mass Lagrangian variables. We assume for simplicity that the ends of the tube are $x = 1$, the point $x = 0$ is the initial position of the piston. The system of differential equations describing one-dimensional nonstationary flow of a reacting gas mixture in porous medium is considered [1]. Cauchy problem with discontinuity initial data corresponding to contact discontinuity is under study..

Introduce the notation:

$$\Omega_1 = (-1, 0),\ \Omega_2 = (1, 0),\ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,\ Q_i = \Omega_1 \times (0, T),\ i = 1, 2,$$
$$\Gamma = \{(0, t) | 0 < t < T\},\ 0 < T < \infty,$$

$v = \rho^{-1}, \sigma = \mu\rho u_x - p,\ F = \lambda_1\rho\theta,\ H = \lambda_1\rho\theta\theta_x,\ G = \chi\rho c_x,\ p = R\rho\theta, [f] = f(+0, t) - f(-0, t)-$ jump of function f.

The system of the equations describing a condition of gas looks like:

$$v_t = u_x, \quad c_t = G_x - cg, \quad u_t = \sigma_x, \tag{1}$$
$$\theta_t = F_x + H_x + u_x\sigma + \delta cg,$$
$$(x, t) \in (\Omega_1 \times (0, T)) \cup (\Omega_2 \times (0, T)),$$

The movement piston is defined(determined) by the second law of Newton:

$$mU_t = [\sigma],\ U = u(0, t),\ t \in (0, T). \tag{2}$$

On a line $x = 0$ the conditions are carried out:

$$[u] = [\theta] = [c] = [H] = [F] = [G] = 0. \tag{3}$$

The system (1)-(3) becomes isolated by addition of the boundary and initial data:

$$u = F = G = 0 \quad on \quad x = -1, x = 1, \quad t \in (0, T) \tag{4}$$

$$u = u_0,\ v = v_0, \theta = \theta_0,\ c = c_0 \quad on \quad t = 0 \tag{5}$$

and the conditions of the coordination are executed.

The functions are assumed smooth at $x \neq 0$ and satisfying to conditions (2)-(3) at $x = 0$.

We proved an existence of a unique generalized solution of problem (1) - (5) by a method of a priori estimates. Our aim is to find global a priori bounds, in which the constants depend only on the data and the length of the time interval, but not on the interval of existence of the local solution. These estimates permit us to extend the local solution [1-2] to the whole-time interval.

Литература

1. **Iskenderova D.A.** *Motion with a contact discontinuity in a reacting mixture of gases* // Reports of National Academy of Science of Kazakhstan Republic. - 1998. - є 1. - P.49-54.
2. **Iskenderova D.A., Toktorbaev A.M.** *Solvability of Equations with Reacting Gas Mixture in Unrestricted Domain* // Proceedings of the VI Meeting of Russian-Kazakhstan Group on Computer and Information Technologies. - 2009. - P.183-190. *UDK 517.95*

Yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarning yechilishini tadqiq qilish

Tolipov N.I.[1]
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
tolipovnodirjon23098@gmail.com

Quyidagi tenglama ko‘rib chiqamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x^\alpha \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

bu yerda $u = u(x,t)$ noma’lum funksiya, $f(x,t)$-berilgan uzluksiz funksiya, $0 < \alpha < n$, α butun emas va $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, $\alpha_0 = [\alpha]$.

Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar.

Boshlang‘ich shartlarni quyidagicha kiritamiz:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,T) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

Chegaraviy shartlar:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} u\,(0,t) = 0,\ j = \overline{0, n-\alpha_0-1},\ \left|\lim_{x\to 0} \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right| < \infty\, j = \overline{n-\alpha_0,\ n-1},\ t \in [0,T]\,;$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} u\,(1,t) = 0,\ j = \overline{n-\alpha_0, n-1},\ \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \frac{\partial^n}{\partial x^n} u\,(x,t)\right)\Big|_{x=1} = 0,\ \ j = \overline{\alpha_0, n-1},\ t \in [0,T]\,, \tag{3}$$

[1] da $0 < \alpha < 1$ bo‘lganda masala qo‘yib o‘rganilgan.

Yechimning mavjudligi va yagonaligi. $u(x,t)$ yechimi mavjud bo‘lishi uchun u Sobolev fazosining quyidagi sinfiga tegishli bo‘lishi talab qilinadi:

$$u(x,t) \in W_2^{2k,2}(\Omega)$$

Normasi esa quyidagicha ifodalanadi:

$$\|u\|^2_{W_2^{2n,2}(\Omega)} = \sum_{m=0}^{2n} \left\| x^{\alpha/2} \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{2} \left\| \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{m=2}^{n+1} \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1} \partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Turg‘unligi. Yechimning turg‘unligi quyidagi baho orqali aniqlanadi:

$$\|u\|_{W_2^{2k,2}(\Omega)} \le C_1 \|Lu\|_{L_2(\Omega)},$$

bu yerda L - tenglamadagi differensial operator, C_1 - o‘zgarmas son.

References

1. **A. K. Urinov, D. D. Oripov.***On the solvability of an initial boundary problem for a high even order degenerate equation* Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 27:4 (2023) . 621-644. doi: 10.14498/vsgtu2023
2. **Urinov A. K., Azizov M. S.** *A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order.* Lobachevskii J. Math., 42:3 (2021), 621-631.
3. **Urinov A. K., Azizov M. S.** *Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part.* Lobachevskii J. Math., 42:3 (2021), 632-640.
4. **Amanov D. J., Yuldasheva A. V.** *Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order.* Malays. J. Math. Sci., 3:2 (2009), 227- 248.
5. **Amanov D., Ashyralyev A.***Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order.* AIP Conf. Proc., 1470:1 (2012), 3-7 *UDC 517.95*

An inverse source problem for a time-fractional mixed equation in a cylindrical domain

Toshpulatov M.
Andijan State University, Andijan, Uzbekistan;
muzaffar.toshpulatov89@gmail.com

We investigate the unique solvability of an inverse source problem for the time-fractional wave-diffusion-wave equation in a cylindrical domain, subject to initial, final time, boundary, and transmission conditions. This problem can model the flow of gas in a tube where, due to a defect, the wave process temporarily transitions into a diffusion process before returning to a wave process. To obtain a series representation of the solution, we employ the Fourier-Bessel series and bivariate Mittag-Leffler-type functions. The final time measurement of the gas concentration necessitates an additional condition on the given data, which we determine in our analysis.

We consider the following mixed equation:

$$f(x,y)=\begin{cases} {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u\left(t,x,y\right)-\Delta u\left(t,x,y\right),\ (t,x,y)\in\Omega_1,\\ {}^{PC}D_{T_1t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u\left(t,x,y\right)-\Delta u\left(t,x,y\right),\ (t,x,y)\in\Omega_2,\\ {}^{PC}D_{T_2t}^{\alpha,\beta_3,\gamma,\delta}u\left(t,x,y\right)-\Delta u\left(t,x,y\right),\ (t,x,y)\in\Omega_3 \end{cases} \tag{1}$$

in a cylindrical domain $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup J_1\cup J_2$, where
$J_1=\{(t,x,y):t=T_1,0<r<1\}$, $J_2=\{(t,x,y):t=T_2,0<r<1\}$,
$\Omega_1=\{(t,x):0<r<1,0<t<T_1\}$, $\Omega_2=\{(t,x):0<r<1,T_1<t<T_2\}$,
$\Omega_3=\{(t,x):0<r<1,T_2<t<T\}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $T_1,T_2,T,\alpha,\gamma,\delta,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$ such that
$0<T_1<T_2<T$, $1<\beta_1\leq 2$, $0<\beta_2\leq 1$, $1<\beta_3\leq 2$, $\Delta u(t,x,y)$ is the Laplacian, which can be written in polar coordinates as $\Delta u(t,x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$.

$${}^{PC}D_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y(x)={}^{P}I_{ax}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta}\frac{d^m}{dx^m}y(x)$$

is a regularized Prabhakar derivative of order β,

$$ {}^{P}I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} f(x) = \int_a^x (x-\xi)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\delta(x-\xi)^{\alpha}) f(\xi) d\xi, x > a $$

is the Prabhakar fractional integral of order β and $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ is the Prabhakar function [1]

$$ E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_i}{\Gamma(\alpha i + \beta)} \frac{z^i}{i!} $$

Forward problem. To find a *regular solution* of equation (1) in Ω, satisfying initial condition

$$ u(0,r) = \varphi(r), \ 0 \le r \le 1, \tag{2} $$

boundary condition

$$ \left[r \frac{\partial u(t,r)}{\partial r} \right] |_{r=0} = 0, \ u(t,r)|_{r=1} = 0, \ 0 \le t \le T, \tag{3} $$

and transmitting conditions

$$ \lim_{t \to T_1 + 0} {}^{PC}D_{T_1 t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta} u(t,r) = \lim_{t \to T_1 - 0} u_t(t,r), \ 0 < r < 1, \tag{4} $$

$$ \lim_{t \to T_2 + 0} u_t(t,r) = \lim_{t \to T_2 - 0} {}^{PC}D_{T_1 t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta} u(t,r), \ 0 < r < 1. \tag{5} $$

Here $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ are given functions.

If $f(x,y)$ is unknown, we could formulate inverse problem on finding this function, imposing additional condition in time-variable.

Inverse source problem. To find a pair of functions $\{u(t,x,y), f(x,y)\}$, satisfying (1)-(5) together with the final-time measurement

$$ u(T,r) = \psi(r), \ 0 \le r \le 1, \tag{6} $$

where $\psi(x,y)$ is a given function. Similar problems was studied for a mixed wave-diffusion equation involving the regularized Prabhakar fractional derivative in [2],[3],[4].

References

1. **Prabhakar T.R.** *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Yokohama Math Journal, 1971. Vol 19.

2. **Karimov E.T., Hasanov A.** *On a boundary-value problem in a bounded domain for a time- fractional diffusion equation with the Prabhakar fractional derivative.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2023. 111, No 3.

3. **Karimov E., Tokmagambetov N., Toshpulatov M.** *On a Mixed Equation Involving Prabhakar Fractional Order Integral-Differential Operators.* Trends in Mathematics, 2024. Vol 2.

4. **Toshpulatov M.** *Initial-boundary problem for time-fractional mixed equation with space-variable coefficients.* Bull. Inst. Math., 2024. 7, No 3. *UDK 517.95*

Giperbolik tenglamasida spektral parametr qatnashgan aralash tipdagi tenglama uchun integral shartli bir masala haqida

Xalilov Q.S[1], Ne'matjonova M.R[1]
[1]Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston;
qsxalilov@gmail.com, muattarxonnematjonova1210@gmail.com

xOy tekislikning $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ тоВГ ЧгВГ Чri chiziqlar hamda tor tebranish tenglamasining $x + y = 0$, $x - y = 0$ xarakteristikalari bilan chegaralangan chekli sohani D bilan belgilaylik.

Ushbu

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = 0, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 u = 0, & (x,y) \in D_2 \end{cases} \tag{1}$$

tenglama uchun D sohada quyidagi masalani qaraylik.

Masala. Shunday $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^2_{x,y}(D_2)$ funksiya topilsinki, u D_1 va D_2 sohalarda (1) tenglamaning regulyar yechimi bo'lib, ushbu

$$\int_0^1 u(x,y)dx = \int_0^y u(0,t)dt + \mu_1(y), \ 0 \le y \le 1; \tag{2}$$

$$u(1,y) = \mu_2(y), \ 0 \le y \le 1; \tag{3}$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \ 0 \le x \le (1/2); \tag{4}$$

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y), \ 0 < x < 1 \tag{5}$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ - berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Masalaning bir qiymatli yechilishini tadqiq qilishda quyidagi belgilash va farazlarni kiritaylik:

$$\begin{aligned} &u(x,+0) = u(x,+0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad \tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1); \\ &\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad \nu(x) \in C^1(0,1) \cap L[0,1]. \end{aligned} \tag{6}$$

Ma'lumki, D_2 sohada $u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 u = 0$ tenglama uchun qo'yilgan Koshi masalasining yechimi

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau(x+y) + \tau(x-y)] +$$

$$\frac{1}{2}\lambda \int_{x-y}^{x+y} \nu(t) J_0\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2 - y^2}\right]dt + \frac{1}{4}\lambda^2 y \int_{x-y}^{x+y} \tau(t) \bar{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2 - y^2}\right]dt \tag{7}$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $J_0(x)$, $J_1(x)$ - 1-tur Bessel funksiyasilari, $\bar{J}_1(x) = (2/x)J_1(x)$ - Bessel-Klifford funksiyasi.

Koshi masalasi yechimi ko'rinishi (7) ni (4) shartga bo'ysundirib, almashtirish hamda hisoblashlashlarni bajarib, $\tau(x)$ va $\nu(x)$ noma'lum funksiyalar orasidagi

$$\nu(x) = \tau'(x) + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^x \tau(t) \bar{J}_1[\lambda(x-t)]\,dt - \psi_1(x), \quad 0 < x < 1 \tag{8}$$

asosiy funksional munosabatga ega bo‘lamiz, bu yerda

$$\psi_1(x) = A_{0x}^{1,\lambda_2}\left[\psi'(x/2)\right] = \psi'\left(\frac{x}{2}\right) - \int_0^x \psi'\left(\frac{t}{2}\right)\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda_2\sqrt{x(x-t)}\right]dt,$$

$$A_{0x}^{1,\lambda}\left[f(x)\right] \equiv f(x) - \int_0^x f(t)\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{x(x-t)}\right]dt$$

D_1 sohada $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$ va $u_y(x,y) \in C(D)$ ekanligini e’tiborga olib, (1) tenglama va (2), (3) chegaraviy shartlarda $y \to +0$ limitga o‘tsak,

$$\tau''(x) - \nu(x) = 0, \quad 0 < x < 1; \tag{9}$$

$$\int_0^1 \tau(x)dx = \mu_1(0), \;\; \tau(1) = \mu_2(0) \tag{10}$$

hosil bo‘ladi.

Agar (9), (10) va (11) munosabatlardan foydalanib, $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ va $\nu(x) \in C^1(0,1) \cap L[0,1]$ nomaвГЄlum funksiyalar bir qiymatli topilsa, u holda qo‘yilgan masalaning yechimi D_2 sohada (7) formula bilan topiladi. Shu maqsadda, (6) belgilashlarni eвГЄtiborga olgan holda $\nu(x)$ funksiyaning (8) ifodasini (9) tenglamaga qovГЧyib,

$$\tau''(x) - \tau'(x) - \frac{1}{2}\lambda^2\int_0^x \tau(t)\bar{J}_1\left[\lambda(x-t)\right]dt = \psi_1(x), \quad x \in (0,1). \tag{11}$$

oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Natijada oddiy differensial tenglama uchun $\{(10),(11)\}$ masala hosil bo‘ladi. Oddiy differensial tenglamalar nazariyasidagi maвГЄlum usullardan foydalanib, $\{(10),(11)\}$ masalani bir qiymatli yechish mumkin. Buning natijasida qo‘yilgan masala D_1 sohada quyidagi masalaga ekvivalent keltiriladi.

$1'$-masala. D_1 sohada $u_{xx} - u_y = 0$ tenglamaning (2), (3) va $u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\tau(x)$ funksiya $\{(10),(11)\}$ masalaning yechimi.

Hosil bo‘lgan $1'$-masala avvalgi [1], [2], [3] ishlarda o‘rganilgan masalalarga o‘xshash bir qiymatli yechilishi tadqiq qilinadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Уринов А.К., Халилов К.С.** *Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения.* Доклады АН РУз, 2014. є5.Ц С.6-9

2. **Уринов А.К., Халилов К.С.** *Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения.* Доклады Академии наук Республики Узбекистан. ЦТашкент. 2014. є2. Ц С. 6-9.

3. **Khalilov K.S., Ne’matjonova M.R.** *Ikkinchi tartibli parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun integral shartli masala*, American journal of education and learning. 2024. Volume-4. -pp.12-18.

УДК 517.951

О некоторых современных задачах по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям

Муравник А. Б. Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы , Москва, Россия;
amuravnik@yandex.ru

Половинкин И. П. Воронежский государственный университет , Воронеж, Россия;
polovinkin@yandex.ru

Ситник С. М. Белгородский государственный национальный исследовательский университет **НИУ БелГУ Белгород, Россия."**
sitnik@bsuedu.ru

Доклад посвящается памяти замечательного математика и человека — Ахмаджона Кушаковича Уринова, а также его 75–летию.

В докладе будут изложены некоторые современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Рассматриваются определ҆нные типы дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, основное внимание уделяется дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2}u(x) + \frac{\nu}{x}\frac{d}{dx}u(x). \tag{1}$$

Такие уравнения относятся к сингулярным или вырождающимся, к ним также сводятся многие важные уравнения смешанного типа. Задачи для таких дифференциальных уравнений, включая уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, рассматривались в работах М.С. Салахитдинова и А.К. Уринова, см. монографии [1]–[3], а также научно–методической работе [4].

В докладе современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям рассматриваются на основе ряда последних публикаций по этой тематике, см. [5]–[8].

Как указано в [5], теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и е҆ приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова (1949Ц2010), ученика Ивана Александровича Киприянова. К числу важных результатов В. В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования. Им также совместно с И. А. Киприяновым были введены и изучены уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые определялись через преобразование Ханкеля при помощи операторов преобразования Сонина и Пуассона. последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области.

Монография В.В. Катрахова и С.М. Ситника [5] составлена из результатов, вошедших в докторские диссертации В. В. Катрахова (1989 г.) и С. М. Ситника (2016 г.). Результаты второго автора (ученика) развивают результаты первого автора (учителя). Эта книга способствует более широкой известности результатов В. В. Катрахова, которые представляют существенный интерес для теории вырождающихся и

сингулярных дифференциальных уравнений, а также их разработке в русле идей и методов теории операторов преобразования. Кроме того, в книге достаточно полно отражҷн вклад Ивана Александровича Киприянова и созданной им Воронежской математической школы по сингулярным и вырождающимся дифференциальным уравнениям в развитие теории дифференциальных уравнений и теории функций, включая теорию интегральных преобразований и специальных функций.

Многие исследования по современной теории дифференциальных уравнений были опубликованы в двух специальных выпусках журнала Mathematics издательства MDPI [9–11], при этом первый сборник [9] был также выпущен MDPI в виде отдельной книги со вступительной статьҷй редактора сборника [11]. Также недавно были опубликованы два специальных выпуска журнала Lobachevskii Journal of Mathematics [12–13]. Специальный номер журнала [12] был посвящен 100–летию Ивана Александровича Киприянова, а специальный выпуск [13] — 75–летию Валерия Вячеславовича Катрахова.

Таким образом, теория операторов преобразования является живой и активной ветвью как теоретической математики, так и многочисленных приложений. Операторам преобразования посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся монографий и сборников.

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Уринов А.К.** *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром.* Ташкент: изд. "ФАН"Академии наук республики Узбекистан. - 1997. - 166 с.
2. **Салахитдинов М.С., Уринов А.К.** *К спектральной теории уравнений смешанного типа.* Т.: Mumtoz so'z. - 2010. - 356 с.
3. **Уринов А.К.** *К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу.* Фергана: изд. "Фергана". - 2015. - 216 с.
4. **Уринов А.К., Ситник С.М., Шишкина Э.Л., Каримов Ш.Т.** *Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения).* Учебно–методическое издание. Фергана: изд. "Фергана". - 2022. - 192 с.
5. **Катрахов В.В., Ситник С.М.** *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64, є 2. С. 211–426.
6. **Ситник С.М., Шишкина Э.Л.** *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.* М.: Физматлит. - 2019. - 224 с.
7. **Shishkina E.L., Sitnik S.M.** *Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics.* Elsevier. - 2020. - 595 p. (In press).
8. **Editors: Kravchenko V.V., Sitnik S.M.** *Transmutation Operators and Applications.* Springer, Birkhauser. - 2020. - 546 p.
9. **Analytical and Computational Methods in Differential Equations, Special Functions, Transmutations and Integral Transforms.** eds. S.M. Sitnik, Guest editor, MDPI, Basel, Switzerland, 2023 , 26 papers.
10. **Analytical and Computational Methods in Differential Equations, Special Functions, Transmutations and Integral Transforms.** 2nd Edition, eds. S.M. Sitnik, Guest editor, MDPI, Basel, Switzerland, 2024 , 13 papers.
11. **Sitnik Sergei.** *Editorial to the special issue Analytical and Computational Methods in Differential Equations, Special Functions, Transmutations and Integral Transforms.* This book is a reprint of the Special Issue Analytical and Computational Methods in Differential Equations, Special Functions, Transmutations and Integral Transforms that was published in Mathematics, MDPI., eds. Sergei Sitnik, MDPI, Basel, Switzerland,

2023.
12. **Special issue: I. A. Kipriyanov and His Mathematics: to the Centennial Birthday Anniversary.** Lobachevskii Journal of Mathematics, Volume 44, Issue 8, August 2023. Part 2. 42 research papers., eds. L. N. Lyakhov, A. B. Muravnik, and S. M. Sitnik., Springer, 2023.
13. **Special issue: To the 75th Anniversary of V.V. Katrakhov.** Lobachevskii Journal of Mathematics, Volume 45, Issue 9, Part 2., eds. I. P. Polovinkin and S. M. Sitnik, Springer Nature, 2024 , approx. 200 pp.

UDK 517.956.6

Трехмерный аналог задачи Трикоми для уравнения параболо - гиперболического типа дробного порядка в бесконечной призматической области

Исломов Б. И.
Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан,
e-mail: islomovbozor@yandex.com

Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов второго порядка в трехмерной области были исследованы в работах А.В. Бицадзе [1-3].

Насколько нам известно, краевые задачи для нагруженных уравнений параболо-гипер-болического типов в бесконечных призматических областях изучены в работах [4-6]. а трехмерный аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешаного типа, когда нагруженная часть содержит оператор дробного порядка ранее не были исследованы.

Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию аналога задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа в бесконечной приз-матической области, когда нагруженная часть содержит оператор дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля.

Пусть Ω - область трехмерного пространства (x, y, z), ограниченная поверхностями

$$\Gamma_0 : x = 0, \ \ 0 \le y \le h, \ \ z \in R = (-\infty, +\infty), \quad \Gamma_1 : x = 1, \ \ 0 \le y \le h, \ \ z \in R,$$

$$\Gamma_2 : y = h, \ \ 0 \le x \le 1, \ \ z \in R, \quad S_0 : \ x + y = 0, \ \ y \le 0, \ \ 0 \le x \le \frac{1}{2}, \ \ z \in R,$$

$$S_1 : \ x - y = 1, \ \ y \le 0, \ \ \frac{1}{2} \le x \le 1, \ \ z \in R, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \left(\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2\right),$$

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y + U_{zz} - \mu_1 D_{0x}^{-\alpha_1} U(x, 0, z), & (x, y, z) \in \Omega_1, \\ U_{xx} - U_{yy} + U_{zz} - \mu_2 D_{0\xi}^{\alpha_2} U(\xi, 0, z), & (x, y, z) \in \Omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, где $\xi = x + y$ и $\alpha_j, \ \ \mu_j \ (j = 1, 2)$ − заданные действительные числа, причем

$$\mu_j \ge 0, \qquad 0 \le \alpha_j < 1, \ \ (j = 1, 2), \tag{2}$$

а $D_{0x}^{c}[\bullet]$ −оператор интегро-дифференцирования дробного порядка c, $(0 \le c < 1)$ в смысле Римана-Лиувилл [7].

Введчм обозначения: $A(0,0,z) = \overline{\Gamma}_0 \cap \bar{S}_0$, $C\left(\frac{1}{2},0,z\right) = \bar{S}_0 \cap \bar{S}_1$, $B(1,0,z) = \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{S}_1$,

$$\Omega_1 = \Omega \bigcap \{\ (x,y,z) : x > 0,\ \ y > 0,\ \ z \in R\}\,, \quad \Omega_2 = \Delta ABC,$$

$$I = \{(x,y,z) :\ \ 0 < x < 1,\ \ y = 0,\ z \in R\}\,,\ \ D = \Omega\ \cap\ \{z = 0\}\,,$$

$D_j = \Omega_j \cap \{z = 0\}\,, \gamma_j = \Gamma_j \cap \{z = 0\}\,,\ \ \sigma_j = S_j \cap \{z = 0\}\,,\ \ (j = 0,1),\ \ J = I \cap\ \{z = 0\}\,.$

Определение 1. *Через $AC^n(V)$, где $n = 1,2,\ldots,V-$ отрезок, обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на V до порядка $n-1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC(V)$ и $AC^1(V) = AC(V)-$ класс абсолютно непрерывных функций*[7, стр. 21; лемма 2.4, §2, стр.46].

Определение 2. *Пусть $0 \le c < 1$ и $f(x) \in AC([0,1])$, тогда $D^c_{0x} f\,(x)$ существует почти всюду на $(0,1)$ и может быть представлена в виде*[7,стр.46]:

$$D^c_{0x} f\,(x) = \frac{1}{\Gamma(1-c)} \left[f(0) x^{-c} + \int\limits_0^x (x-t)^{-c} f'\,(t)\,dt \right].$$

Определение 3. $L\,(R)-$множество функций $\mathrm{H}(x,y,z)$, определенных в Ω и абсолютно интегрируемых по переменному z в интервале R.

Определение 4. Функция $U(x,y,z)$ называется регулярным решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $U(x,y,z) \in C(\overline{\Omega}) \cap L(R)$, $U(x,0,z) \in C[0,1]$ *для* $\forall x \in [0,1], z \in R$;

2) $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}) \cap L(R)$, кроме того, функции $U_x\,(x,y,z)$ и $U_y\,(x,y,z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линиях $A(0,0,z)$ и $B(1,0,z)$;

3) $U(x,y,z) \in C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$, $U_{xx}(x,y,z)$, $U_{yy}(x,y,z)$, $U_{zz}(x,y,z) \in L(R)$ и удовлетворяет уравнению (1).

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача A_α. Требуется найти регулярное в области Ω решение $U(x,y,z)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$U|_{\Gamma_0} = \Phi_0(y,z), \qquad U|_{\Gamma_1} = \Phi_1(y,z),\ , \qquad 0 \le y \le h, \qquad z \in R, \tag{3}$$

$$U(x,y,z)|_{S_0} = \Psi(x,z), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}\,, \quad z \in R, \tag{4}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} U\,(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_x\,(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_y\,(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_z\,(x,y,z) = 0, \tag{5}$$

где $\Phi_0(y,z)$, $\Phi_1(y,z)$, $\Psi(x,z)-$заданные функции, причем $\Phi_0(0,z) = \Psi(0,z) = 0$,

$$\Phi_j(y,z) \in C\,([0;h] \times R) \cap L(R),\ \ \Phi'_{j\,y}(y,z) \in C\,((0;h) \times R) \cap L(R),\ \ (j = 0,1 \tag{6}$$

$$\Psi(x,z) \in C^2\left(\left[0,\frac{1}{2}\right] \times R\right) \cap C^3\left(\left(0,\frac{1}{2}\right) \times R\right) \cap L(R), \tag{7}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \Phi_j(y,z) = 0, \quad \forall y \in [0,h]\,,\ (j = 0,1), \lim_{|z|\to\infty} \Psi(x,z) = 0, \quad \forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]. \tag{8}$$

Решение задачи A_α будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,y;\lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda. \tag{9}$$

На основании (9), уравнения (1) сведем к следующему уравнению

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda^2 u - \mu_1 \, D_{0x}^{-\alpha_1} u(x,0,\lambda), & (x,y) \in D_1, \quad \lambda \in R, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u - \mu_2 \, D_{0x}^{\alpha_2} \, u(x,0,\lambda), & (x,y) \in D_2. \end{cases} \tag{10}$$

В силу (9), задача A_α эквивалентно сводится к следующей задаче.

Задача A_α^λ. Определить функцию $u(x,y,\lambda)$ такую, что 1) $u(x,y,\lambda) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$, причем $u_y(x,y,\lambda)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в концах интервала J; 2) $u(x,0,\lambda) \in AC[0,1]$ *для* $\forall x \in [0,1], \lambda \in R$; 3) $u(x,y,\lambda)$ является регулярным решением уравнения (10) в областях D_j, $(j=1,2)$; 4) $u(x,y,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$u|_{\gamma_0} = \varphi_0(y,\lambda), \qquad u|_{\gamma_1} = \varphi_1(y,\lambda), \qquad 0 \le y \le h, \quad \lambda \in R,$$

$$u|_{\sigma_0} = \psi_1(x,\lambda), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \lambda \in R,$$

где $\psi(x,\lambda)$, $\varphi_j(y,\lambda)\,(j=0,1)$ −заданные функции, причем $\varphi_0(0,\lambda) = \psi(0,\lambda) = 0$,

$$\varphi_j(y,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j(y,z) e^{i\lambda z} dz, \quad (j=0,1), \; \psi(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,z) e^{i\lambda z} dz,$$

$$\varphi_j(y,\lambda) \in C\,[0;h] \cap C^1(0,h), \; (j=0,1), \psi(x,\lambda) \in C^2\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{11}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия (2) и (11), то решение задачи* A_α^λ *для уравнения (10) в области* D *существует и единственно.*

Теорема 2. *Пусть решение* $u(x,y,\lambda)$ *плоской задачи* A_α^λ *для уравнения (10) существует и дается формулой* $u(x,y;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x,y,z) e^{i\lambda z} dz$, *причем при больших значениях* $|\lambda|$ *допускает оценку* $u\,(x,y,\lambda) = O\left(1 \Big/ |\lambda|^\delta\right)$, $\delta > 3$. *Тогда в области* Ω *решение задачи* A_α *для уравнения (1) единственно, существует и находится формулой (9).*

Теорема 1-2 доказываются с использованием свойства преобразований Фурье и леммы Римана[7].

Литература

1. **Бицадзе А.В.** Об уравнениях смешанного типа в трҷхмерных областях. // "Доклады АН СССР". 1962. Т.143. С. 1017-1919.

2. **Нахушев А.М.** Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта. // Дифференциальные уравнения. 1968. **4** (1). С. 52-62.

3. **Салахитдинов М.С., Исломов Б.** О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа. //Доклады АН СССР. 1990. **311** (4). С. 797-801.

4. **Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М.** Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: "Фан". 1986. 220 с.

5. **Islomov B.I., Alikulov E.K.**Analogues of the Cauchy-Goursat problem for a loaded third-order hyperbolic type equation in an infinite three-dimensional domain.//Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. **18** (1). P.72-85.

6. **Islomov B.I., Alikulov Y.K.** Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain. // International journal of applied mathematics. 2021. **34** (2). P.158-170.
7. **Самко С.Г., Килбас А.А.** Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. 1987. 688 с.

UDK 517.956.6

Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа второго и высокого порядков

Джамалов С.З.
Институт Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
siroj63@mail.ru

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными и обратными задачами. Отметим, что интерес к исследованию обратных задач для уравнений математической физики обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики [1]. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов [1]. В работе [2] изучены обратные задачи для модельных уравнений смешанного типа в плоскости. В работе [3] предложены и изучены корректности некоторые прямые и линейные обратные задачи (связанные с поиском решения уравнения и элемента правой части) для уравнений смешанного типа второго порядка как первого, так и второго рода в ограниченных и неограниченных областях в пространствах Соболева.

Как нам известно,коэффициентные (нелинейные) обратные задачи (связанные с поиском решения, коэффициента и элемента правой части уравнения) для уравнения смешанного типа второго порядка, и обратные задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка в ограниченных и неограниченных областях практически не исследованы.

С этой целью в данной работе предлагаются новые методы, для исследования корректности обратных задач для уравнения смешанного типа высокого порядка, которые позволяют доказать однозначные разрешимости некоторых линейных и нелинейных обратных задач для уравнения смешанного типа второго и высокого порядков.

Работы выполнены при финансовой поддержке научного гранта Министерстве инновации Республики Узбекистан (номер гранта. Ф-ФА-2021-424).

Литература

1. **Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г.** *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.* Наука. Т.: Новосибирск. — 1969.
2. **Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В.** *Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа.* Изв.вузов. Математика. 2011. No.2. с.71-85.
3. **С. З. Джамалов.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* Монография. Т.: Fan Ziyosi. — 2021.

UDK 517.956.6

Об одной коэффициентной обратной задаче с нелокальными граничными условиями периодического типа для трехмерного уравнения Трикоми в параллелепипеде

Джамалов С.З.[1], Шакиров А.А.[2]
[1,2] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
[1]siroj63@mail.ru, [2]shokirov.abduvosiq96@gmail.com

В области

$$G=(-1,1)\times(0,T)\times(0,\ell)=Q\times(0,\ell)=\{(x,t,y)|\ -1<x<1,\ 0<t<T,\ 0<y<\ell\}$$

рассматриваем трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu=xu_{tt}-au_{xx}-u_{yy}+\alpha(x,t)u_t=c(x,t)u+\psi(x,t,y), \tag{1}$$

где $\psi(x,t,y)=g(x,t,y)+h(x,t)\cdot f(x,t,y)$, $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)-$ заданные функции, а функции $h(x,t)$ и $c(x,t)$ подлежат определению.

Постановка задачи. Найти функции $\{u(x,t,y),\ h(x,t),\ c(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области G, такие, что $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

1) нелокальные граничные условия периодического типа:

$$\gamma D_t^p u|_{t=0}=D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$D_x^p u|_{x=-1}=D_x^p u|_{x=1},\quad p=0,1 \tag{3}$$

$$u|_{y=0}=u|_{y=l}=0, \tag{4}$$

где $\gamma-$ некоторое постоянное число, отличное от нуля;

2) дополнительные условия

$$u(x,t,\ell_1)=\varphi_1(x,t), \tag{5}$$

$$u(x,t,\ell_2)=\varphi_2(x,t), 0<\ell_1<\ell_2<\ell<+\infty \tag{6}$$

и вместе с функциями $h(x,t)$, $c(x,t)$ принадлежат классу

$$U=\left\{(u,\ h,\ c)|\ u\in W_2^{2,3}(G),\ h\in W_2^2(Q),\ c\in W_2^2(Q)\right\},$$

здесь $W_2^{2,3}(G)-$ анизотропное пространство Соболева с нормой

$$|||u|||^2_{W_2^{2,3}(G)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\lambda_k^2\right)^3\|u_k\|^2_{W_2^2(Q)},$$

где $u_k(x,t)$ обозначают коэффициенты разложения Фурье функций $u(x,t,y)$ по системе $Y_k(y)=\left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\lambda_k y\right\}$, $\lambda_k=\frac{\pi k}{\ell}$, $k=1,2,3,...$; $W_2^2(Q)$ пространство Соболева с нормой $\|u\|^2_{W_2^2(Q)}=\|u\|_2^2=\sum\limits_{|\alpha|\le 2}\int\limits_Q(D^\alpha u)^2dxdt$, где $D^\alpha-$ обобщенная производная по переменным x и t.

Определим шар $B_R(G)$ как

$$B_R(G)=\left\{(u,h,c):\max\left(\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)},\|h\|^2_{W_2^2(Q)},\|c\|^2_{W_2^2(Q)}\right)<R\right\}.$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1) – (6) будем называть функции $\{u, h, c\} \in B_R(G)$ из класса U, удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области G, с условиями (2) – (6).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями в области Q и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части уравнения (1) и заданных функций $\varphi_i(x,t)$, $i = 1, 2$:

Условия 1:

коэффициентные условия: $2\alpha(x,t) + \mu x > \delta_1 > 0$,

нелокальные условия:

$$\alpha(x,0) = \alpha(x,T),\ \alpha(-1,t) = \alpha(1,t);$$
$$\gamma g(x,0,y) = g(x,T,y),\ \gamma f(x,0,y) = f(x,T,y);$$

гладкость: $f(x,t,l_i) = f_i(x,t) \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $g(x,t,l_i) = g_i(x,t) \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $|H| = |\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1| \geq \eta > 0$, $f \in W_2^{2,3}(G)$, $g \in W_2^{2,3}(G)$.

Условия 2:

Функции $\varphi_i \in W_2^3(Q)$, $i = 1, 2$ являются решением следующей задачи:

$$L_i\varphi_i = g_i,$$

$$\gamma D_t^p \varphi_i|_{t=0} = D_t^p \varphi_i|_{t=T},$$
$$D_x^p \varphi_i|_{x=-1} = D_x^p \varphi_i|_{x=1}, p = 0, 1$$

где $L_i\varphi_i = x\varphi_{itt} - a\varphi_{ixx} + \alpha\varphi_{it}$.

Теорема. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены указанные выше Условия 1 и 2. Тогда существует единственное решение задачи (1)-(6) из шара $B_R(G)$ класса U.

Литература

1. **С. З. Джамалов.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* Т.: Fan Ziyosi. - 2021.

УДК 517.95

Об одной прямой и обратной задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа четвёртого порядка

Кадиркулов Б. Ж.[1], Узакбаева Д. Е.[2]

[1]Университет Альфраганус, Ташкент, Узбекистан; b.kadirkulov@afu.uz

[1,2]Институт Математики имени В.И.Романовского АнРУ, Ташкент, Узбекистан; uzaqbaevadilfuza1606@gmail.com

В прямоугольной области $\Omega = \{(x,t)\,|0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение смешанного типа четвчртого порядка со степенным вырождением вида

$$Lu = F(x,t) \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_t + t^n u_{xxxx} + bt^n u, \\ u_{tt} + u_{xxxx} + bu, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), t < 0, \end{cases}$$

n, α, β - заданные положительные действительные числа, b-заданное действительное число, $f_i(x), i = 1, 2$,-известные функции.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{t < 0\}$. Для уравнения (1) в области Ω исследуем следующие задачи:

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^{3,1}_{x,t}(\bar{\Omega}) \cap C^2_t(\Omega_2) \cap C^4_x(\Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), (x,t) \in (\Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{3}$$

$$u(1,t) = 0, u_x(0,t) + u_x(1,t) = 0, u_{xx}(0,t) = 0, u_{xxx}(0,t) + u_{xxx}(1,t) = 0, \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = 0, 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $F(x,t)$ -заданная функция.

Задача 2. Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям (2)-(5) и

$$g_1(t) \in C[0,\beta], \tag{6}$$

$$u(x_0,t) = h_1(t), 0 < x_0 < 1, 0 \le t \le \beta, \tag{7}$$

где $f_i(x), i = 1, 2, g_2(t), h_1(t)$ - заданные функции, x_0 - заданная точка из интервала $(0,1)$.

В данной работе для вырождающегося уравнения смешанного типа четвчртого порядка в прямоугольнике изучены прямые и обратные задачи с нелокальными граничными условиями типа Самарского-Ионкина относительно пространственной переменной. На основе спектрального метода, а также теории интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решения этих задач. Отметим, что аналогичные задачи для параболо-гиперболического уравнения с вырожденной параболической частью в зависимости от времени изучены в работе [1].

Литература

1. **С.Н. Сидоров.** Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью. Т.: Сибирские электронные математические известия, 2019, том 16, стр. 144-157

УДК 517.956.6

Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с интегральным условием склеивания

Кожобеков К. Г.,[1], Сопуев А. А.,[2]
[1]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан;
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
[2]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан; sopuevv@gmail.com

Постановка и исследование разрешимости краевых задач с интегральными и нелокальными условиями в настоящее время стали одними из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Классификация нелокальных задач для уравнений в частных производных приведена в работе [1]. Обзор прямых и обратных задач для уравнений смешанного

параболо-гиперболического типа рассмотрены в работах [2], [3].

В области $D = \{(x,y) : -\ell_1 < x < \ell, 0 < y < h\}(\ell, \ell_1, h > 0)$, рассмотрим уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_{xy} = 0, (x,y) \in D_1 = D \cap (x > 0), \\ u_{xxy} + au_x + bu_y + cu = 0, (x,y) \in D_2 = D \cap (x < 0), \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c - заданные функции.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,y)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{3,1}(D_1) \cup C^{2,1}(D_2)]$, удовлетворяющую уравнение (1) в области D_1 и краевые условия

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), 0 \le y \le h, u_{xx}(\ell, y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le h, u(x,0) = \psi_1(x), 0 \le x \le \ell,$$

удовлетворяющую уравнение (2) в области D_2, краевые условия

$$u(-\ell_1, y) = \varphi_3(y), 0 \le y \le h, u(x,0) = \psi_2(x), -\ell_1 \le x \le 0,$$

и условия склеивания

$$u(-0,y) = u(+0,y), u_x(-0,y) = \int_0^y \alpha(\eta) u_x(+0,\eta) d\eta, \quad (2)$$

где $\varphi_1(y)$,$\varphi_2(y)$,$\varphi_3(y)$,$\psi_1(y)$,$\psi_2(y)$, $\alpha(y)$ - заданные функции.

Условия склеивания вида (2) использована в работе Я.С. Уфлянда при изучении распространения электрических колебаний в составных линиях [4].

В работе доказаны существование и единственность решения задачи 1 для уравнения смешанного параболо-гиперболический типа с интегральным условием склеивания вида (2).

Литература

1. **Нахушев А.М.** *Уравнения математической биологии.* - М.: Высш. шк., 1995. - 301 с.
2. **Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* - Ташкент: Фан, 1986. - 144 с.
3. **Сабитов К.Б.** *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.* - М.: Наука, 2016. - 272 с.
4. **Уфлянд Я.С.** *К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях.* - Инженерно-физический журнал, 1964. - т. VII, №1. - С. 89-92.

УДК 517.956.6

Задача Франкля с нелокальным условием на несимметричном, относительно начало координат, отрезке оси $x = 0$.

Мирсабуров М.,[1] Амонов Б.Б.,[1] Утаёрова С.Н.[1]
[1] Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
mirsaburov@mail.ru amonovbobur91@mail.ru

1.Постановка задачи F_K.

Пусть D- область ограниченная дугой AB нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = a^2, \quad x \ge 0$ лежашей в первой четверти с концами в точках

$A(0,y_2)$, $B(a,0)$, где $a>0$, $y_2=(a(m+2)/2)^{2/(m+2)}$; отрезком $A'A$ оси $x=0$, где $A'=A'(0,y_1)$, $y_1<0, -y_1<y_2$; отрезком CB оси $y=0$, $a_1\le x\le a$, $a_1>0$, $C=C(a_1,0)$; и характеристикой CA' уравнения

$$G(u)=\begin{cases} y^l u_{xx}+u_{yy}+\frac{\delta_0}{y}u_y=0, & \text{если } y>0;\\ -(-y)^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\beta_0}{y}u_y=0, & \text{если } y<0. \end{cases} \tag{1}$$

здесь постоянные $l>0$, $m>0$, $\delta_0\in(-l/2,1)$, $\beta_0\in(-m/2,1)$, причем $l\ne m$, $l>0$, $m>0$.

Пусть $D_1=D\cap\{y>0\}$: OP-часть характеристики уравнения (1) исходяшей из точки $O=O(0,0)$ до пересечения с $A'C$ в точке P; D_2 область, ограниченная кривыми OP, PC и OC; D_3- область, ограниченная кривыми OA', $A'P$ и PO.

2. Постановка задачи с несимметричным условием Франкля.

Задача F_K. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям.

$$u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D\cup OA\cup OA'\setminus(OP\cup OC))\cap C^2(D_1\cup D_2\cup D_3) \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\delta_0}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

$$G(u)=0,\quad (x,y)\in D_1\cup D_2\cup D_3; \tag{4}$$

$$u(x,y)=\varphi_1(x,y),\quad (x,y)\in\sigma_0, \tag{5}$$

$$u(x,0)=\varphi_2(x),\quad a_1\le x\le a \tag{6}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\qquad y_1<y<y_2 \tag{7}$$

$$u(0,y)-\mu u(0,-ky)=f(y),\qquad 0\le y\le y_2 \tag{8}$$

где $k=-y_1/y_2$, φ_1, φ_2, f- заданные гладкие функции, причем $\varphi_2(a)=\varphi_1(a,0)$, $f(0)=0$.

Заметим, что если в уравнение (1) $m=l, \delta_0=\beta_0$, а в условиях задачи F_K $y_1=-y_2(k=1), \mu=1$ тогда из задачи F_K следует задача Франкля [1],[2],[3],[4].

2. Единственность решения задачи F_K.

Единственность решения задачи F_K доказывается методом вспомогательных функций.

Теорема 1. Задача F_K при выполнении условий

$$\varphi_1(x,y)\equiv 0,\quad \varphi_2(x)\equiv 0,\quad f(y)=0,\quad k^{\delta+l+\beta_0}<\mu, \tag{8}$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство теоремы 1 идентичен работе [2].

Здесь с учетом младших членов с особыми коэффициентами уравнения (1), в качестве вспомогательной функции $F(x,y)$ берется функция

$$F(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left[2uvdx+(|y|^{\gamma_0}K(y)u^2-|y|^{-\gamma_0}v^2)dy\right]$$

где $K(y)=y^l$, $\gamma_0=\delta_0$ при $y>0$, $K(y)=-(-y)^m$, $\gamma_0=\beta_0$ при $y<0$.

3. Существование решения задачи F_K.

Теорема 2. *Задача F_K при выполнении условий (8) и $\beta<\delta$ однозначно разрешима.* Доказательство теоремы 2 проводиться методом работы [3].

Литература

1. **Франкль Ф.И.** *Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной оканчивающейся прямым скачком уплотнения.* ПММ., 1956. 20(2), 196-202.
2. **Сабитов К.Б.** *К теории уравнений смешанного типа.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. с304.
4. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

УДК 517.956.6

Задача с непольным условием Трикоми и аналогом условия Франкля на частях граничных характеристик для уравнения смешанного типа

Мирсабуров М.[1], Маматмуминов Д.[2],
[1] Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
mirsaburov@mail.ru
[2] Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
dilshod310797mdt@mail.ru

1. **Постановка задачи Трикоми-Франкля** (TF).

Пусть $D-$ ограниченная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0\,(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0),\ B(1,0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \tag{1}$$

где $m-$ положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через A_1 и A_2 точку пересечения характеристики AC с характеристиками уравнения (1), выходящими из точек $E(c,0)$ и $E_1(c_1,0)$, где $-1 < c < c_1 < 1$. На отрезке $[c,c_1]$ введем линейную функцию $\omega(x) = b - ax$ которая отображает отрезок $[c,c_1]$ на отрезок $[-1,c]$, где $\omega(c) = c,\ \omega(c_1) = -1,\ a = (c+1)/(c_1-c),\ b = c(c_1+1)/(c_1-c)$.

В данной работе исследуется корректность задачи, где на куски AA_1 и A_1A_2 характеристики AC задается условие Франкля, а на куске BC_1 характеристике BC задается условие Трикоми.

Задача TF. Требуется найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\bar{D})$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2) функция $u(x,y)$ является в области D^- обобщенным решением класса R_1 уравнения (1) ($u(x,y) \in R_1$, если в формуле Дарбу $\tau(x),\ \nu(x) \in H$;

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in (-1,1)/\{c,c_1\}, \tag{2}$$

причем эти приделы при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\mid_{\sigma_0}=\varphi(x),\qquad x\in[-1,1], \tag{3}$$

$$u(x,y)\mid_{BC_1}=\psi(x),\qquad x\in[(c_1+1)/2,1], \tag{4}$$

$$a_0(1+x)^{\beta}D^{1-\beta}_{-1x}u\left[\theta(x)\right]-b_0(c_1-x)^{\beta}D^{1-\beta}_{xc_1}u\left[\theta\left(\omega(x)\right)\right]=f_0(x),\qquad x\in[c,c_1], \tag{5}$$

$$u(x,0)-u\left(\omega(x),0\right)=u(c,0)+f(x),\qquad x\in[c,c_1], \tag{6}$$

Заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f_0(x)$, $f(x)-$ непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $\varphi(x)=(1-x^2)\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x)\in C^1[-1,1]$, $f(c)=0$, $f(c_1)=0$. $a_0>0$, $b_0<0$.

Заметим, что условия (5) и (6) являются аналогами условия Франкля [2] соответственно на кусках AA_1 и A_1A_2 характеристики AC и на сегментах AE и EE_1 отрезка AB оси $y=0$. Из условия (6) при $x=c$, с учетом $f(c)=0$, имеем $u(c,0)=0$, тогда условие (6) при обозначение $u(x,0)=\tau(x)$ примет вид

$$\tau(x)-\tau\left(\omega(x)\right)=f(x),\qquad x\in[c,c_1]. \tag{6*}$$

В силу формулы Дарбу[2], с учетом (4) и (5) нетрудно вычислить, что

$$\nu(x)=\gamma D^{1-2\beta}_{x,1}\tau(x)+F_0(x),\ x\in[c_1,1]. \tag{7}$$

$$a_0\nu(x)-b_0a^{1-2\beta}\nu(\omega(x))=$$

$$\gamma a_0D^{1-2\beta}_{-1,x}\tau(x)-\gamma b_0D^{1-2\beta}_{x,c_1}\tau(x)+F(x)\quad x\in[c,c_1] \tag{8}$$

Отметим, что соотношения (7) и (8) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенными на интервалы $(c_1,1)$ и (c,c_1) из области D^-.

Теорема 1. *Задача TF однозначно разрешима.*

Доказательство теоремы 1.

При доказательсве теоремы 2 используем решение задачи Дирихле в области D^+. Стандартными методами [1],[2] легко вычислить;

$$\nu\left(x\right)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left[\int\limits_{-1}^{1}\frac{(x-t)\,\tau^{'}\left(t\right)dt}{(x-t)^{2-2\beta}}-(2\beta-1)\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau\left(t\right)dt}{(1-xt)^{2-2\beta}}\right]+\Phi\left(x\right),\ x\in[-1,1].$$

Из соотношении (7) и (8), исключая $\nu(x)$ и $\nu(\omega(x))$, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tau_0(x)=\tau(x)$, $x\in(c,c_1)$; $\tau_1(x)=\tau(x)$, $x\in(c_1,1)$.

$$\tau_0(x)+\lambda\int_c^{c_1}\left(\frac{c_1-x}{c_1-t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{\mu}{1-(ax-b)(at-b)}\right)\tau_0(t)=$$

$$=\lambda_1\int_c^{c_1}\left(\frac{c_1-x}{c_1-\omega(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_0(t)dt}{x-\omega(t)}+\lambda_2\int_c^{c_1}\left(\frac{c_1-x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_0(t)dt}{t-\omega(x)}+$$

$$+R(\tau_0)+N(\tau_1)+F_3(x)\quad x\in(c,c_1) \tag{9}$$

$$\tau_1(x)+\lambda\int_{c_1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau_1(t)dt=$$

$$=-\lambda\int_c^{c_1}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_0(t)dt}{t-x}+T(\tau_0)+\Phi(x)\quad x\in(c_1,1). \tag{10}$$

Литература

1. **Мирсабуров М.** *Задача с аналогом условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.* Дифференциальные уравнения. 2017, 53(6), С.778-788.
2. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

УДК 517.956.6

Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения 4-го порядка с линией изменения типа $x = 0$

Сопуев А. [1], Абдумиталип уулу К. [2]
[1]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан; sopuev@mail.ru
[2]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан; kuba@oshsu.kg

В области D, ограниченная отрезками прямых $AB : y = 0, BB_0 : x = \ell, B_0A_0 : y = h, A_0C : x - y = -h, CA : x + y = 0, (\ell, h > 0)$ рассмотрим уравнение

$$L_1L_2u = 0, \tag{1}$$

где $L_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y}, & x > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, & x < 0, \end{cases}$ $L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Пусть $D = D_1 \cup I \cup D_2, D_1 = D \cap (x > 0), D_2 = D \cap (x < 0), I = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < h\}$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}), u_{yy}(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{2+1}(D) \cup C^{2+2}(D)]$, удовлетворяющая уравнения (1), краевым условиям:

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), 0 \le y \le h,$$

$$u(x, 0) = \chi_1(x), u_y(x, 0) = \chi_2(x), u_{yy}(x, 0) = \chi_3(x), 0 \le x \le \ell,$$

$$u(-y, y) = \psi_1(y), u_y(-y, y) = \psi_2(y), u_{yy}(-y, y) = \psi_3(y), 0 \le y \le \frac{h}{2}$$

и условиям склеивания

$$u(-0, y) = u(+0, y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y), 0 \le y \le h,$$

где $\varphi_1(y), \chi_i(x), \psi_i(x) (i = \overline{1, 3})$ – заданные гладкие функции, причем

$$\varphi(y) \in C^2[0, h], \chi_i(x) \in C^2[0, \ell] (i = \overline{1, 3}), \psi_j(x) \in C^2[-\frac{h}{2}, 0] (j = \overline{1, 3})$$

$$\psi_1(0) = \chi_1(0), \psi_2(0) = \chi_2(\ell), \psi_3(0) = \chi_3(\ell).$$

Отметим, что краевые задачи для уравнения $L_1u = 0$ изучена в работах [1, 2], а для уравнения $L_2L_1u = 0$ в работах [3, 4].

Доказаны теоремы существования и единственности решений краевой задачи 1 для уравнения (1), когда смешанный параболо-гиперболический оператор применяется к дифференциальному оператору второго порядка по y.

Литература

1. **Джураев Т.Д.** *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* - Ташкент: Фан, 1979. - 240 с.
2. **Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* - Ташкент: Фан, 1986. - 220 с.
3. **Джураев Т.Д., Сопуев А.** *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.* - Ташкент: Фан, 2000. - 144 с.
4. **Абдумиталип уулу К.** *Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с младшими членами* - Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета, 2022. - Т.22 №12 - С. 3-11. - DOI 10.36979/1694-500X-2022-22-12-3-11. - EDN EHVCFX. *УДК 517.956.6*

О краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка

Сопуев А.[1], Жээнбаев Н. А.,[2]

[1]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан; sopuev@mail.ru

[2]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан; njeenbaev@rambler.ru

В области $D = (x, y) : -\ell_1 < x < \ell, 0 < y < h(\ell, \ell_1, h > 0)$ рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxxx} + u_y, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xxxy} + cu, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где $D_1 = D \cap (x > 0), D_2 = D \cap (x < 0), c = const.$

По классификации работы [1] уравнение (1) в области D_1 имеет 4-х кратную характеристику $y = const$ и принадлежит параболическому типу, а в области D_2 уравнение (1) имеет 4 действительных характеристик: прямая $y = const$ является 3-х кратной, прямая $x = const$ является простой действительной характеристикой, а уравнение принадлежит гиперболическому типу. Поэтому уравнение (1) является уравнением смешанного параболо-гиперболического типа четвертого порядка с линией изменения типа $x = 0$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ из класса $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D), u_{xxxx} \in C(D_1), u_{xxxy} \in C(D_2)$, удовлетворяющее уравнению (1) в области $D \backslash (x = 0)$ и краевым условиям:

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y), u(-\ell_1, y) = \varphi_2(y), u_x(\ell, y) = \varphi_3(y), u_x(-\ell_1, y) = \varphi_4(y), 0 \le y \le h,$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), 0 \le x \le \ell, u(x, 0) = \psi_2(x), -\ell_1 \le x \le 0,$$

где $\varphi_i(y)(i = \overline{1, 4}), \psi_j(x)(j = \overline{1, 2})$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(\ell), \varphi_2(0) = \psi_2(-\ell_1), \varphi_3(0) = \psi_1'(\ell), \varphi_4(0) = \psi_2'(-\ell_1).$$

Из постановки задачи 1 следует, что на линии $x = 0$ выполняется условия склеивания

$$u(-0, y) = u(+0, y) = \tau(y), u_x(-0, y) = u_x(+0, y) = \nu(y),$$

$$u_{xx}(-0, y) = u_{xx}(+0, y) = \mu(y), \quad 0 \le y \le h,$$

где $\tau(y), \nu(y), \mu(y)$ - функции, подлежащие определению.

Методом функции Грина, Римана и интегральных уравнений доказана существование и единственность решения задачи 1.

Различные прямые и обратные краевые задачи для уравнения вида (1) изучены в работах [1] - [4].

Литература

1. **Джураев Т.Д., Сопуев А.** *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.* - Ташкент: Фан, 2000. - 144 с.
2. **Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* - Ташкент: Фан, 1986. - 220 с.
3. **Сабитов К.Б.** *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо - гиперболического типа.* - М.: Наука, 2016. - 272 с.
4. **Сопуев А., Апаков Ю.П., Мирзаев О.М.** *Решение второй краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками* - Вестник ОшГУ. 2022. №1. - С. 136-148. DOI: 10.52754/16947452-2022-1-136. *УДК 517.983.34*

Обобщенные операторы дробного интегрирования с ядром гипергеометрической функций Гаусса

Хасанов А.
Институт математики им. Романовского, Ташкент, Узбекистан;
anvarhasanov@yahoo.com

Рассматривается право и лево сторонние обобщенные операторы интегрирования в пространстве Шварца,

$$F_{0x}^{-c}(a,b;c)\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int_0^x\varphi(t)(x-t)^{c-1}F\left(a,b;c;\frac{x-t}{x}\right)dt,\quad c>0, \tag{1}$$

$$F_{x\infty}^{-c}(a,b;c)\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int_x^\infty\varphi(t)(t-x)^{c-1}F\left(a,b;c;\frac{x-t}{x}\right)dt,\quad c>0, \tag{2}$$

$$F(a,b;c;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!}x^m,$$

$$(a)_m=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}=a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1),$$

$F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ - гипергеометрическая функция Гаусса и $(a)_m$ - обозначения Похгаммера и $x\in(0,\infty),\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, причем $\mathrm{Re}(\gamma)\neq 0,-1,-2,\ldots,\varphi(x)\subset S\left(R_+\right)$ пространство Шварца.

Находится суперпозиция указанных операторов, определяются обратные операторы и связь между право и лево сторонними обобщенными операторами, решается однородное уравнения Вольтерра второго рода в ядре которого находится гипергеометрическая функция Гаусса.

Литература

1. **Jet Wimp.** *Two integral transform pairs involving hypergeometric functions.* Proc. Glasgow Math. Assoc., 1965. 7, 42-44.
2. **Love E.R.** *Some integral equations involving hypergeometric functions.* Proc. Edinburgh. Math. Soc., 1967. 15, No 3, 169-198.
3. **McBride Adam C.** *Solution of hypergeometric integral equations involving generalized functions.* Proc. Edinburgh. Math. Soc., 1975. 19, No 3, 265-285.
4. **Saigo M.** *A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions.*

Math. Rep. Kyushu Univ., 1978. 11, No 2, 135-143.
5. **Saigo M.** *A certain boundary problem for the Euler-Darboux equation.* Math. Japon, 1979. 24, No 4, 377-385.
6. **Хасанов А.** *Об одной смешанной задаче для уравнения* $\operatorname{signy}|y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$. Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 1982. No 2, 28-32.
7. **Салахитдинов М.С, Хасанов А.** *Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения.* Дифференциальные уравнения, 1983. 19, No 1, 110-119.
8. **Samko S.G, Kilbas A.A, Marichev O.I.** *Fractional intearals and derivatives: theorv and applications.* Gordon and Breach Science Publishers, USA, 1993.

УДК 517.95

Задача Неймана для многомерного уравнения Гельмгольца в гипероктанте

Аббасова М.О.
Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан;
abbasovamunira21@gmail.com

Начиная с работы И.Н. Векуа [1, гл.1] исследуются краевые задачи для уравнения Гельмгольца $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$, где λ – вообще комплексная постоянная. Это уравнение встречается во многих разделах математической физики (теория упругости, теория электромагнитных волн и др.); его иногда называют метагармоническим уравнением, а его решения – метагармоническими функциями; постоянную λ называют параметром метагармонической функции.

Пусть $\mathbb{R}_n$ – n-мерное евклидово пространство $(n \geq 2)$, $x := (x_1, ..., x_n)$ – произвольная точка в нём. 2^n-ую часть евклидова пространства $\mathbb{R}_n$ (гипероктант) определим следующим образом: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}_n : x_i > 0,\ i = 1, ..., n\}$.

Рассмотрим в области Ω многомерное уравнение Гельмгольца

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \lambda^2 u = 0,\ -\infty < \lambda < +\infty. \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$S_k = \{x : x_1 > 0, ..., x_{k-1} > 0,\ x_k = 0,\ x_{k+1} > 0, ..., x_n > 0\},$$

$$\tilde{x}_k := (x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n) \in S_k \subset \mathbb{R}_{n-1};\ R^2 = x_1^2 + ... + x_n^2.$$

Задача Неймана. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) из класса функций $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{x_k=0} = \nu_k(\tilde{x}_k), \quad \tilde{x}_k \in S_k,\ \lim_{R\to\infty} u(x) = 0,$$

где $\nu_k(\tilde{x}_k)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Пусть $x := (x_1, ..., x_n)$ и $\xi := (\xi_1, ..., \xi_n)$ – две точки n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}_n$. Функция

$$q(x;\xi) = \frac{e^{-\lambda r}}{r^{n-2}},\ r = |x - \xi| = \sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^{n} (x_k - \xi_k)^2},\ n > 2$$

называется сингулярным (фундаментальным) решением уравнения Гельмгольца (1).

В настоящем сообщении, используя фундаментальное решение $q(x,\xi)$, единственное решение задачи Неймана для уравнения (1) строится в явном виде.

Отметим, что в работе [2] решения задач Неймана для трехмерного уравнения Гельмгольца в полупространстве, в четверти пространства и октанте построены в явных формах.

Литература

1. **Векуа И.Н.** *Новые методы решения эллиптических уравнений.* Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1948. 296 с.

2. **Arzikulov Z.O.** *Boundary value problems for the three-dimensional Helmholtz equation in the unbounded octant, square and half space.* Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024, 48(3). P. 7 – 19.

О разрешимости задачи с нелокальными условиями для эллиптико-параболического уравнения смешанного типа

Акбарова М., Х., Акбарова С.Х.[2]

[1] Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан; margubaakbarova66@gmail.com

[2] Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан; akbarovasx1969@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$y^{m_i}u_{xx}+\frac{1-signx}{2}|x|^{n_i}u_{yy}-\frac{1+signx}{2}|x|^{n_i}u_y=0 \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками OA, AB, BB_0 прямых $y=0$, $x=h_1$, $y=h$ при $x>0$, $y>0$ и гладкой кривой

$$\sigma:\frac{1}{q_2^2}(-x)^{2q_2}+\frac{1}{p_2^2}y^{2q_2}=1$$

с концами в точках $A_0(-h_2,0)$, $B_0(0,h)$ и отрезкой A_0O прямой $y=0$ при $x<0$, $y>0$, где $O=O(0,0)$, $h_1=(2q_1)^{\frac{1}{q_1}}$, $h_2=q_2^{\frac{1}{q_1}}$, $h=p_2^{\frac{1}{p_2}}$, $2q_1=n_1+2$, $2q_2=n_2+2$, $2p_2=m_2+2$. Здесь $m_i,n_i=const(i=1,2)$, и $i=1$ при $x>0$, $i=2$ при $x<0$.

Пусть $I=\{(x,y):x=h_1,0<y<h\}$, $I_1=\{(x,y):0<x<h_1,y=0\}$, $I_2=\{(x,y):-h_2<x<0,y=0\}$, $x=x_i(y)$, $i=\overline{1,n+1}$ - заданные функции из класса $C^1[0,h]$, причем $0\le x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}\le h_1$, где $0\le n<\infty$.

З а д а ч а I. Определить функцию $u(x,y)$, со следующими свойствами:

1)$u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$;

2)$u(x,y)$ - является регулярным в области Ω решением уравнения (1);

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0)+\theta(x)u(x,h)=\varphi(x),\ x\in\overline{I_1}, \tag{2}$$

$$u(h_1,y)+\sum_{i=1}^{n}\theta_i(y)\int_{x_i(y)}^{x_{i+1}(y)}u(x,y)dx=\mu(y),\quad y\in\overline{I}, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_\sigma = \psi(x,y), (x,y) \in \overline{\sigma}, \tag{4}$$

$$u_y|_{y=0} = \nu(x), x \in I_2, \tag{5}$$

где $\varphi(x),\ \theta(x),\ \mu(y),\ \theta_i,\ i = \overline{1,n},\ \psi(x,y), \nu(x)$ - заданные функции, причем

$$\varphi(x), \theta(x) \in C(\overline{I_1}) \cap C^2(I_1), \quad \mu(y), \theta_i(y) \in C(\overline{I}) \cap C^2(I),$$

$$\psi(x,y) = xy\overline{\psi}(x,y),\ \overline{\psi}(x,y) \in C(\overline{\sigma}), \quad \nu(x) \in C^1(I_2).$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть

$$|\theta(x)| \le 1, \qquad \theta(0) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\theta_i(y)||x_{i+1}(y) - x_i(y)| \le 1, \qquad \theta_i(0) = \mu(0) = \varphi(0) = 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи I.

Отметим, что краевые задачи с нелокальными условиями для вырождающихся уравнений смешанного типов изучены в работах [1-3].

Литература:

1. **Салахитдинов М.С., Исломов Б.И.** Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Т.: MUMTOZ SOЎZ.-2009. -264 с.
2. **Уринов А.К.** Параболик - гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Т.: Навруз.-2016. -216 бет.
3. **Akbarova M. X., Akbarova S. X.** A problem of Bitsadze-Samarskiy type for a degenerate parabolic equation of mixed type. Samarkand-Uzbekistan. Abstracts of VIII International Scientific Conferece, September 25-26, 2023.170p.

УДК 517.956.6

Задача со смещением на внутренних характеристиках для одного класса уравнений

Аллакова Ш.[1], Эсанова Д.[2]
[1] Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
shaxnoza.allakova@mail.ru
[2] Университет экономики и сервиса Термеза, Термез, Узбекистан;
dilyaesonova@gmail.com

Пусть $D-$ конечная односвязная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси $y = 0$, характеристиками AC и BC уравнения

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m > 0, A = A(-1,0), B = B(1,0)$.

На отрезке AB рассмотрим точку $E = E(c, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)-$ интервал оси $y = 0$, а через C_1 и C_2 точку пересечения характеристики AC и BC с характеристиками уравнения (1). Выходящими из точек $E(c, 0)$ и введем две линейные функции, $y = p(x) = ax-b$, и $y = q(x) = a-bx$ отображающее отрезок $[-1.1]$ на отрезок $[-1, c]$ и $[c, 1]$, где $a = (1+c)/2, b = (1-c)/2$, причем $p(-1) = -1,\ p(1) = c,\ q(-1) = c,\ q(1) = 1$.

Введем обозначения

$$\theta_0(p(x)) = \frac{p(x)-1}{2} - i\left[\frac{(p(x)+1)(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_k^*(p(x)) = \frac{p(x)+kc}{1+k} - i\left[\frac{(c-p(x))(m+2)}{2(k+1)}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_0^*(q(x)) = \frac{q(x)+c}{2} - i\left[\frac{(q(x)-c)(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_1(q(x)) = \frac{q(x)+1}{2} - i\left[\frac{(1-q(x))(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

аффикс точки пересечения характеристики AC и BC , где $1 < k < +\infty$.

Задача F. В области D найти регулярное решение $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x),\ x \in [-1, 1], \tag{2}$$

$$\nu(q(x)) = \mu\nu(p(x)) + f_0(x),\ x \in (-1, 1), \tag{3}$$

$$a_0 u[\theta_0(p(x))] + b_0 u[\theta_k^*(p(x))] = c_0 u[\theta_0^*(q(x))] + d_0 u[\theta_1(q(x))] + f_1(x),\ x \in [-1, 1], \tag{4}$$

где $1 < k < +\infty$, μ, a_0, b_0, c_0, $d_0, -$ некоторая положительная постоянная, $\tau(x),\ f_0(x), f_1(x) \in C^2(\bar{I})-$ заданные функции.

Заметим, что условия (3) и (4) являются аналогами условия Франкля [3] соответственно на кусках AC_1 и BC_2 характеристики AC и BC на сегментах AE и EB отрезка AB оси $y = 0$.

Новизна этой задачи заключается в том, что k имеет сдвиг и связывает значения неизвестной функции во внутренней характеристике со значениями в граничной характеристике, которая является А.М. Нахушев [1] и Салахитдинов М., Мирсабуров М.[2] обобщение их работ.

Теорема. Задача F при выполнении условия

$$|\lambda| = \left|\frac{2b_0 a}{b\mu(k+1)\left(a_0 a + (c_0 - d_0)\right)}\right| < 1,$$

однозначна разрешима.

В доказательстве используется метод работы Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. [2],[3].

Литература

1. **Нахушев А.М.** *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа.* Дифференц. уравнения 5(1),-1969. С.44-59.

2. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на границе.* Известия академии наук УзССР. -1980, С.16-21.

3. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005. "Университет" - 224 с.

UDK 517.956

Конфлюэнтные гипергеометрические функции и их применение к решению задачи Дирихле-Неймана для уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

Арзикулов З. О.[1], Хасанов А.[2], Эргашев Т. Г.[3]
[1] Ферганский государственный технический университет, Фергана, Узбекистан; zafarbekarzikulov1984@gmail.com
[2] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Узбекистана, Ташкент, Узбекистан; anvarhasanov@yahoo.com
[3] Национальный исследовательский университет Ташкентский институт инженеров ирригации и мелиорации сельского хозяйства (ТИИИМСХ), Ташкент, Узбекистан; ergashev.tukhtasin@gmail.com

В области $\Omega = \{(x, y, z) : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$ рассмотрим обобщенное трехмерное уравнение Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z - \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

где α, β, γ и λ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1$.

Задача Дирихле-Неймана D^2N^1. Найти регулярное решение $u(x, y, z)$ уравнения Гельмгольца (1) в классе функций $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ и $x^{2\alpha}u_x \in C(\Omega_{yz})$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad 0 \le x, y < \infty,\ u(x, 0, z) = \tau_2(x, z), \quad 0 \le x, z < \infty,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} = \nu_3(y, z), \quad 0 < y, z < \infty,\ \lim_{R\to\infty} u(x, y, z) = 0,\ \ R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $\tau_{1,2}(t, s), \nu_3(t, s)$ –заданные функции.

Задача Дирихле-Неймана D^1N^2. Найти регулярное решение $u(x, y, z)$ уравнения Гельмгольца (1) в классе функций $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ и $y^{2\beta}u_y \in C(\Omega_{xz})$, $x^{2\alpha}u_x \in C(\Omega_{yz})$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad 0 \le x, y < \infty,\ \lim_{y\to 0} y^{2\beta}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu_2(x, z), \quad 0 < x, z < \infty,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} = \nu_3(y, z), \quad 0 < y, z < \infty, \lim_{R\to\infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $\tau_1(t, s), \nu_{2,3}(t, s)$ – заданные функции.

Единственность решения поставленных задач доказывается методом интегралов энергии.

Воспользовавшись известными фундаментальными решениями уравнения (1)

$$q_{23} = x^{2\alpha}yz\eta^{1-2\beta}\zeta^{1-2\gamma}r^{4\beta+4\gamma-2a-4}\mathrm{H}_A^{(3,1)}\left[\begin{matrix} a+2-2\beta-2\gamma, \alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X\right]$$

и

$$q_{13}=x^{2\alpha}y^{2\beta}z\zeta^{1-2\gamma}r^{4\gamma-2a-2}\mathrm{H}_A^{(3,1)}\left[\begin{array}{c} a+1-2\gamma,\alpha,\beta,1-\gamma;\\ 2\alpha,2\beta,2-2\gamma; \end{array} X\right],$$

где

$$\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{array}{c} a,b_1,...,b_n;\\ c_1,...,c_n; \end{array} x_1,...,x_n;y\right]=\sum_{k_1,...,k_n,l=0}^{\infty}(a)_{k_1+...+k_n-l}\prod_{j=1}^{n}\frac{(b_j)_{k_j}}{(c_j)_{k_j}}\frac{x_j^{k_j}}{k_j!}\cdot\frac{y^l}{l!},\ \sum_{j=1}^{n}|x_j|<1,$$

,

$$X=\left(-\frac{4x\xi}{r^2},-\frac{4y\eta}{r^2},-\frac{4z\zeta}{r^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r^2\right),r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

решения задач Дирихле – Неймана выпишем в явном виде

$u(x,y,z)=$

$$=(1-2\gamma)k_2y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\tau_1(t,s)\,t^{2\alpha}s^{2\beta}}{r_1^{2\delta_3}}A_2\left[\begin{array}{c} \delta_3,\ \alpha,1-\beta;\\ 2\alpha,\ 2-2\beta; \end{array} -\frac{4xt}{r_1^2},-\frac{4ys}{r_1^2},\frac{1}{4}\lambda^2r_1^2\right]dtds$$

$$+(1-2\gamma)k_2y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\tau_2(t,s)\,t^{2\beta}s^{2\gamma}}{r_2^{2\delta_3}}A_2\left[\begin{array}{c} \delta_3,\ \alpha,1-\gamma;\\ 2\alpha,\ 2-2\gamma; \end{array} -\frac{4xt}{r_2^2},-\frac{4zs}{r_2^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r_2^2\right]dtds$$

$$-k_2y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\nu_3(t,s)\,ts}{r_3^{2\delta_3}}A_2\left[\begin{array}{c} \delta_3,\ 1-\beta,1-\gamma;\\ 2-2\beta,\ 2-2\gamma; \end{array} -\frac{4yt}{r_3^2},-\frac{4zs}{r_3^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r_3^2\right]dtds,$$

$u(x,y,z)=$

$$=(1-2\gamma)k_1z^{1-2\gamma}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\tau_1(t,s)\,t^{2\alpha}s^{2\beta}}{r_1^{2\delta_4}}A_2\left[\begin{array}{c} \delta_4,\ \alpha,\beta;\\ 2\alpha,\ 2\beta; \end{array} -\frac{4xt}{r_1^2},-\frac{4ys}{r_1^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r_1^2\right]dtds$$

$$-k_1z^{1-2\gamma}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\nu_2(t,s)\,t^{2\alpha}s}{r_2^{2\delta_4}}A_2\left[\begin{array}{c} \delta_4,\ \alpha,\gamma;\\ 2\alpha,\ 2\gamma; \end{array} -\frac{4xt}{r_2^2},-\frac{4zs}{r_2^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r_2^2\right]dtds$$

$$-k_1z^{1-2\gamma}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\nu_3(t,s)\,t^{2\beta}s}{r_3^{2\delta_4}}A_2\left[\begin{array}{c} \delta_4,\ \beta,1-\gamma;\\ 2\beta,\ 2\gamma; \end{array} -\frac{4yt}{r_3^2},-\frac{4zs}{r_3^2},-\frac{1}{4}\lambda^2r_3^2\right]dtds,$$

где

$$\delta_3=5/2+\alpha-\beta-\gamma,\delta_4=3/2+\alpha+\beta-\gamma,r_1^2=(x-t)^2+(y-s)^2+z^2,$$

$$r_2^2=(x-t)^2+y^2+(z-s)^2,\quad r_3^2=x^2+(y-t)^2+(z-s)^2,$$

$$\mathrm{A}_2\left[\begin{array}{c} a,b_1,b_2;\\ c_1,c_2; \end{array} x,y,z\right]=\sum_{m,n,k=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n-k}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^k}{k!},\ |x|+|y|<1.$$

Отметим, что конфлюэнтные гипергеометрические функции A_2 и $\mathrm{H}_A^{(3,1)}$ являясь трех– и четырехмерными аналогами конфлюэнтной функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$, впервые введены и исследованы в работах [1] и [2], соответственно.

Литература

1. **Ergashev T.G.** *Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables.*Lobachevskii Journal of Mathematics, - 2020. 41(1), -p. 15 – 26.
2. **Hasanov A.** *Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation.* Complex Variables and Elliptic Equations, - 2007. 52(8), -p. 673 – 683.

УДК 517.95

Главный член асимптотики решение сингулярно возмущенной дифференциальной системы с быстро осциллирующими компонентами

Бегайдаров М. У.[1], Калимбетов Б. Т.[2], Сапаков Д. А.[1]
[1]Южно-Казахстанский университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан;
mr.0909@mail.ru, sapakov1986@mail.ru
[2]Университет Дружбы народов им. А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан;
bkalimbetov@mail.ru

Рассматривается начальная задача для сингулярно возмущенной дифференциальной системы

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} - A(t)y - \varepsilon g(t)cos\frac{\beta(t)}{\varepsilon}By = h(t)e^{\frac{i\delta(t)}{\varepsilon}},\ y(0,\varepsilon) = y^0,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

где $y = \{y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon)\}$−неизвестная вектор-функция, $h(t) = \{h_1(t), h_2(t)\}$, $\beta(t)$, $g(t), \delta'(t) > > 0$ $(\forall t \in [0,T])$ −скалярные функции, $A(t)$, B матрицы размерности (2×2), $A(t) = = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\omega(t) > 0$, $\forall t \in [0,T]$, $y^0 = \{y_1^0, y_2^0\}$−постоянные векторы из класса $\mathbb{C}^2$, $\varepsilon > 0$−малый параметр, $T > 0$−заданное число. Введем обозначение: $\lambda_1(t) = -i\omega(t)$, $\lambda_2(t) = +i\omega(t)$, $\lambda_3(t) = -i\beta'(t)$, $\lambda_4(t) = +i\beta'(t)$, $\lambda_5(t) = i\delta'(t)$. Построим регуляризованную асимптотику [1] решение задачи (1) при $\varepsilon \to +0$.

Задачу (1) будем рассматривать при выполнении следующих предположений:

1) $\omega(t)$, $\beta(t)$, $g(t)$, $\delta(t) \in C^\infty([0,T], \mathbb{C}^2)$, $A(t) \in C^\infty([0,T], \mathbb{C}^{2\times 2})$;

2) для всех $t \in [0,T]$ и $n_3 \neq n_4$ неравенства: $n_3\lambda_3(t) + n_4\lambda_4(t) \neq \lambda_j(t)$, $\lambda_k(t) + n_3\lambda_3(t) + n_4\lambda_4(t) \neq \lambda_j(t)$, $k \neq j$, $k, j = 1, 2, 5$, выполняется для мультииндекса $n = (n_3, n_4)$ с $|n| \equiv \equiv n_3 + n_4 \geq 1$ (n_3 и n_4 положительные целые числа).

Обозначим через $\sigma_j = \sigma_j(\varepsilon)$ постоянные, $\sigma_1 = \exp\{-\frac{i}{\varepsilon}\beta'(0)\}$, $\sigma_2 = \exp\{+\frac{i}{\varepsilon}\beta'(0)\}$, $\sigma_3 = = \exp\{\frac{i}{\varepsilon}\delta'(0)\}$, и запишем задачу (1) в следующем виде:

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} - A(t)y - \varepsilon\frac{g(t)}{2}(e^{-\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^t \beta'(\theta)d\theta}\sigma_1 + e^{+\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^t \beta'(\theta)d\theta}\sigma_2)By = h(t)e^{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^t \delta'(\theta)d\theta}\sigma_3,\quad y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

Введем регуляризирующие переменные (см. [1]): $\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_j(\theta)d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1,5}$, и вместо задачи (2) рассмотрим следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + \sum\nolimits_{j=1}^{5} \lambda_j(t)\frac{\partial u}{\partial \tau_j} - A(t)u - \varepsilon\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1 + e^{\tau_4}\sigma_2\right)Bu = h(t)e^{\tau_5}\sigma_3,\ u(t,\tau,\varepsilon)|_{t=0,\tau=0} = y^0, \tag{3}$$

для функции $u(t,\tau,\varepsilon)$, где обозначено $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_5)$, $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_5)$.

Решение задачи (3) ищем в виде классического ряда

$$u(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(t,\tau),\ \ u_k(t,\tau)\in C^{\infty}([0,T],\mathbb{C}^2). \tag{4}$$

Подставляя (4) в задачу (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи для определения коэффициентов ряда (4):

$$L_0u_0(t,\tau)\equiv\sum\nolimits_{j=1}^{5}\lambda_j(t)\frac{\partial u_0}{\partial\tau_j}-A(t)=h(t)e^{\tau_5}\sigma_3,\quad u_0(0,0)=y^0; \tag{5_0}$$

$$L_0u_1(t,\tau)=-\frac{\partial u_0}{\partial t}+\frac{g(t)}{2}(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2)Bu_0,\qquad u_1(0,0)=0; \tag{5_1}$$

. . . . . .

$$L_0u_k(t,\tau)=-\frac{\partial u_{k-1}}{\partial t}+\frac{g(t)}{2}\left(e^{\tau_3}\sigma_1+e^{\tau_4}\sigma_2\right)Bu_{k-1},\quad u_k(0,0)=0,\quad k\geq 1. \tag{5_k}$$

Решение итерационных задач определим в следующем пространстве функций:

$$\begin{aligned}&U=u(t,\tau)=u_0(t)+\textstyle\sum_{j=1}^{5}u_j(t)e^{\tau_j}+\sum\limits_{2\leq|m|\leq N_u}^{*}u^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}+\\&+\sum_{i=1}^{2}\sum_{1\leq|m|\leq N_u}^{*}u^{e_i+m}(t)e^{(e_i+m_i\tau)},\quad m=(0,0,m_3,m_4,0),\ u_j(t),\ u^m(t),\\&u^{e_i+m}(t)\in C^{\infty}([0,T],\mathbb{C}^2),1\leq|m|\leq m_3+m_4\leq N_u,\ j=\overline{0,5},\ i=1,2.\end{aligned} \tag{6}$$

Каждую итерационную задачу (5_k) напишем в виде

$$Lu(t,\tau)\equiv\sum\nolimits_{j=1}^{5}\lambda_j(t)\frac{\partial u}{\partial\tau_j}-A(t)u=H(t,\tau),\quad u(0,0)=y^*, \tag{7}$$

где $H(t,\tau)=H_0(t)+\sum_{j=1}^{5}H_j(t)e^{\tau_j}$−известная вектор функция пространства U, y^*−известный постоянный вектор комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1) - 2) и правая часть $H(t,\tau)=H_0(t)+\sum_{j=1}^{5}H_j(t)e^{\tau_j}$ системы (7) принадлежит пространству U. Тогда для разрешимости системы (7) в пространстве U необходимо и достаточно выполняться тождества

$$\langle H_k(t,\tau),\ \ d_k(t)e^{\tau_k}\rangle\equiv 0\quad\forall t\in[0,T],\quad k=\overline{1,5}. \tag{8}$$

Замечание 1. Если выполнены условия (8), и 1) - 2), тогда система (7) имеет следующее решение в пространстве U:

$$\begin{aligned}&u(t,\tau)=-A^{-1}(t)H_0(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k(t)_k(t)e^{\tau_k}+\tfrac{(H_1(t),d_2(t))}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}{}_1(t)e^{\tau_2}+\tfrac{(H_1(t),d_2(t))}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}{}_2(t)e^{\tau_2}+\\&+\sum_{j=3}^{5}\left[\lambda_j(t)I-A(t)\right]^{-1}H_j(t)e^{\tau_j}+\sum_{2\leq|m|\leq N_u}^{*}\left[(m,\lambda(t)I-A(t))\right]^{-1}H^m(t)e^{(m,\tau)}+\\&+\left[\left(m^k,\lambda(t)\right)I-A(t)\right]^{-1}H^{m^k}(t)e^{(m^k,\tau)},\end{aligned}$$

где $\alpha_k(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^2)$ −произвольные функции. $k=1,2$, $m=(0,0,m_3,m_4,0)$, $m_3 \neq m_4$, $|m| = m_3+m_4 \geq 1$.

Применяя теорему 1 к первой итерационной задачи (5_0), найдем главный член асимптотики решение задачи (1):

$$y_{\varepsilon 0}(t) = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k(0) \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int\limits_0^t (c'_k(\theta), d_k(\theta))d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_k(\theta)d\theta} + [\lambda_5(t)I - A(t)]^{-1} h(t) \mathrm{e}^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_5(\theta)d\theta},$$

где $\alpha_k(0) = \frac{1}{2}\left(y^0 + [\lambda_5(0)I - A(0)]^{-1} h(0)\sigma_3,\ d_k(0)\right),\ k=1,2.$

Литература

1. **Ломов С.А.** *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* М.: Наука. - 1981. - 400 с.

УДК 517.956.22

Обыкновенное дифференциальное уравнение с целой и дробной степенью оператора Бесселя

Бойназаров А.Н., Юлбарсов Х.А.
Ферганский государственный университет, Узбекистан, Фергана.
ahror010185@gmail.com

1. Постановка задачи.

Рассмотрим оператор

$$A_{\gamma,\lambda} \equiv B_\gamma + \lambda^2, \gamma, \lambda \in R, \quad \gamma > 0 \tag{1}$$

где $B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}$ - оператор Бесселя. При $\lambda = 0$ получим $A_{\gamma,0} = B_\gamma$ и при $\gamma = 0,\ \lambda = 0$, имеем $A_{0,0} = \frac{d^2}{dx^2}$.

Сначала рассмотрим уравнение с целой степенью оператора (1):

$$A^m_{2\alpha,\lambda} y(x) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{d}{dx} + \lambda^2\right)^m y(x) + by(x) = f(x), \quad x > 0 \tag{2}$$

где $x, \lambda \in R, \quad m \in N,\ f(x) -$ заданная функция.

Задача Коши.

В области $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$ требуется найти решение $y(x) \in C^{2m}(R^+)$ уравнение (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(j)}(0) = 0,\ j = \overline{0, 2m-1} \tag{3}$$

Заметим, что при $\lambda = 0$ задача Коши для уравнение (2) на отрезке [0,1] с начальными условиями $y^{(j)}(1) = 0,\ j = \overline{0, 2m-1}$ исследована в работе [1].

Для решение поставленной задачи применим метод операторов преобразования [2, 3]. В качестве оператора преобразования используем обобщенный оператор Эрдейи-Кобера дробного порядка [3, 4].

Если решение уравнения (2) при $b = 0$ приведено в статье [4], то при $\lambda = 0$ оно приведено в статье [3].

Предположим, что решение задачи (2), (3) существует. Это решение будем искать в виде

$$y(x) = J_\lambda(0,\alpha)\, z(x) = \frac{2x^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right) z(t)\, dt \qquad (4)$$

где $z(x)$ - достаточно дифференцируемая неизвестная функция. Таким образом, имеем

$$z(x) = I_{0+}^{2m} F(x) = I_{0+}^{2m} J_\lambda^{-1}(0,\alpha)\, f(x)$$

Подставляя последнее равенство в (4), получим

$$y(x) = J_\lambda(0,\alpha)\, z(x) = J_\lambda(0,\alpha)\, I_{0+}^{2m} J_\lambda^{-1}(0,\alpha)\, f(x).$$

Вычислив композицию, получим решение искомой задачи (2)-(3).

Литература

1. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* - Мн.: Наука и техника, 1987. -688 с.
2. **Уринов А.К., Ситник С.М., Шишкина Э.Л., Каримов Ш.Т.** *Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения): учебное пособие; учебно-методическое издание; на русском языке; А.Уринов и др.* Фергана: изд. ҮФаргонаҮ, 2022.-192 с.
3. **Sprinkhuizen-Kuyper, I. G.** *A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator.* J. Math. Analysis and Applications. – 1979. – V. 72. – P. 674Ц702.
4. **Дзарахохов А.В, Шишкина Э.Л.** *Задача для смешанного уравнения с дробной степенью оператора Бесселя. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. N1. С. 37-57. ISSN 2079-6641.

УДК 517.956

Постановка задачи Бицадзе-Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

Чориева С.Т.[1], Тошмуродова М.Д.[2]
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
sanamchoriyeva3@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \qquad (1)$$

где постоянная $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Пусть D конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченной при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^2 y^{m+2} = 1$ концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$ а при $y < 0$ характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{2}{m+2}} = -1,$$

уравнения (1). Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие, соответственно, в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 точку пересечении характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)$ -интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) \in C^1[-1, c]$-отображает множество точек отрезка $[-1, c]$ на множество точек отрезка $[c, 1]$, причем $p'(x) < 0,\ p(-1) = 1,\ p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1 - c)/(1 + c), \delta = 2c/(1 + c)$.

В работе [1] для уравнения Геллерстедта была исследована задача, где условие Бицадзе-Самарского связывает значения дробной производной искомого решения на характеристике AC со значениями искомого решения на линии параболического вырождения.

Настоящая работа отличается от работы [1] тем, что здесь характеристика AC произвольным образом разбита на два куска: AC_0, C_0C и на куске AC_0 задается условие Бицадзе-Самарского, а C_0C освобожден от краевого условия и это недостающее условие Бицадзе-Самарского заменено аналогом условия Франкля [2] на отрезке вырождения AB. Для удобства, эту задачу коротко обозначим A.

Постановка задачи A Требуется найти в области D функцию $D(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $u(x, y) \in C(\overline{D})$;
2. $u(x, y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3. $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1,[3, c.35] в области D^-;
4. на интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x \in I \setminus c, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = x_0$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = \frac{(m+2\beta_0)}{2(m+2)}$.

5. Выполнено

$$u(x, y)\big|_{y=0} = \varphi(x), -1 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$D^{\beta}_{x_0,x}(1 + x)^{2\beta-1}u(\beta(x)) = a(x)u(x, 0) + b(x), -1 < x < c, \tag{4}$$

$$u(x, 0) - \mu u(\rho(x)) = f(x),\quad -1 \le x \le c, \tag{5}$$

где

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - \left\lfloor \frac{m + 2}{4}(1 + x_0)\right\rfloor^{\frac{2}{m+2}},$$

$\mu = const, b(c) = 0, a(c) = 0, f(c) = 0, a(x), b(x), f(x) \in C^{1,\alpha}[-1, c], b(-1) = 0, f(-1) = 0$, $a(x)$ - неположительная невозрастающая функция, $\phi(x) \in C[-1, 1] \cup C^1((-1, 1))$, причем $\phi(x) = (1 - x^2)\tilde{\phi}(x)$, где $\tilde{\phi}(x) \in C[-1, 1] \cup C^1((-1, 1))$.

Условие (5) является аналогом условия Франкля на линии вырождения AB, в силу обозначения $u(x, y) = \tau(x)$, условие (5) перепишем в виде

$$\tau(x) = \mu\tau(\rho(x)) + f(x),\quad x \in [-1, c]. \tag{6}$$

Литература

1. **Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа.** М.: Наука, 1985. 304 с.
2. **Мирсабуров М., Чориева С.Т.** *Задача с условием Франкля на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа.* Дифференц. уравнения, 2015. Т. 51, No 1, С. 136-140.
3. **Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.** *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент 2005. Universitet. Yangiyo'l poliyrafservis. –224 с. *UDK 517.956*

Обратная задача для одного частного случая уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

Исмоилов А. И.[1]
[1] Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
ismoilovaxrorjon@yandex.com

Многие вырождающиеся уравнения и уравнения с сингулярными коэффициентами гиперболического типа заменой независимых переменных сводятся к уравнению Эйлера - Пуассона - Дарбу

$$L(u) = u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\xi-\eta}u_\xi + \frac{\alpha}{\xi-\eta}u_\eta = 0,$$

где α и β - заданные действительные числа. Поэтому при исследовании краевых и начальных задач для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами гиперболического типа опираются на соответствующие задачи для уравнения $L(u) = 0$.

Уравнения $L(u) = 0$ и $L(u) = -\gamma(\xi-\eta)^{-1}u$ впервые изучены Эйлером при $\alpha = \beta = m$, $\gamma = n$, $n \in N$ [1]. Этими уравнениями занимались также Дарбу [2], Пуассон [3] и Риман [4]. Формулы общего уравнения $L(u) = 0$ получены в случаях $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$; $\alpha = \beta$ и $\alpha + \beta = 1/2$, например, в [5],[8], а для других значений α и β - найдены в [9].

В работе [8], пользуясь общим решением уравнения $L(u) = 0$ выписано решение задачи Коши с начальными данными на линии $\eta = \xi$ в случаях $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in (0,1)$ и $\alpha + \beta = 1$, а для других значений α и β - в [10]. Задачи Дарбу и Коши - Гурса для уравнения $L(u) = 0$ в характеристическом треугольнике при $\alpha = \beta \in (0, 1/2)$ исследованы Геллерстедом [11]. Им построены функции Римана - Адамара задач Дарбу и Коши - Гурса, с помощью чего решения этих задач выписаны в явном виде. Они были исследованы в случае $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in (0,1)$ в [12], [13] и построены соответствующие функции Римана-Адамара, с помощью которых решение задач записывалось в явном виде. В работе [14] изучены различные краевые задачи для уравнения $L(u) = f(x,y)$ в характеристическом треугольнике и четырехугольнике.

Постановка задачи.

Пусть Δ - область плоскости $\xi O\eta$, ограниченная отрезками $\overline{OA} = \{(\xi,\eta) : \eta = \xi, 0 \le \xi \le 1\}$, $\overline{CA} = \{(\xi,1) : 0 \le \xi \le 1\}$, $\overline{OC} = \{(0,\eta) : 0 \le \eta \le 1\}$. В области Δ рассмотрим уравнение

$$L(u) = u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\xi-\eta}(u_\xi - u_\eta) = f(\xi)g(\eta), \tag{1}$$

где $0 < \beta < 1/2$, $u(\xi,\eta)$, $f(\xi)$ неизвестные функции а $g(\eta)$ заданная непрерывная функция.

Задача D. Найти $f(\xi)$, $u(\xi,\eta) \in C\left(\overline{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(\xi,\xi) = 0, \quad 0 \le \xi \le 1; \qquad u(0,\eta) = 0, \quad 0 \le \eta \le 1, \tag{2}$$

$$u(\xi,1) = w(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1 \tag{3}$$

где $w(\xi)$ Ц заданные непрерывные функции.

Приняв функцию $f(\xi)$ за известную, решим эту задачу методом Римана и запишем решение в следующем виде [2]:

$$u(\xi,\eta) = \int_0^{\xi} f(t)\,dt \int_t^{\eta} g(z) H(t,z;\xi,\eta)\,dz, \tag{4}$$

где $H(x,y;\xi,\eta)$ Римана-Адамара для уравнения (1) [6].

Подчиним (4) условию (3). Затем, выполнив некоторые вычисления, мы получим интегральное уравнение в следующем виде:

$$f(\xi) + \frac{1+\beta}{1-\xi}\int_0^{\xi} f(t)\,dt \int_t^{1} \frac{\partial}{\partial\xi} H(t,z;\xi,1)\,dz = \frac{1+\beta}{1-\xi} w'(\xi), \tag{5}$$

Если интегральное уравнение (5) имеет решение, то и задача D также будет иметь решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эйлер Л.** *Интегральное исчисление.* Т.3. -М.: ГИФМЛ, 1958.
2. **Darboux G.** *Lecons sur la theorle des surfaces.* Part 2. -Paris: Cauthier-Villers et Fils, 1889. 525 s.
3. **Poisson S.D.** *Memoire sur integration des equations lineaires aux derivees partieeles Jaurnal Ecole Roy.* Polytechnique, 1823, T. 12, № 19. -Pp. 215-248.
4. **Риман Б.** *О распространении волн конечной амплитуды.* Сочинения. -М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
5. **Трикоми Ф.** *Лекции по уравнениям в частных производных.* -М.: Ин.лит., 1957. -445с.
6. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* -М.: Наука, 1985. с.
7. **Хайруллин Р. С.** *К теории уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу Известия высших учебных заведений.* є 11 (378) 1993. -с. 69-76.
8. **Хайруллин Р.С.** *Задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.* -Казань: Издательство Казанского университета, 2014. -276 с.
9. **Gellerstedt S.** *Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte.* Thesis, Uppsala, 1935.
10. **Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я.** *Краевые задачи для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.* Куйбышев: КГПИ, 1984, 80 с.
11. **Уринов А.К., Исмоилов А.И.** *Задачи Дарбу и принцип абсолютного экстремума для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.* Доклады АН РУз.. -2011, є 5, -С. 20-23.
12. **Уринов А.К., Исмоилов А.И.** *Задачи и принцип абсолютного экстремума для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.* Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2011. №5. -С.20-23.

13. **Уринов А. К. , Исмоилов А. И.** *Задача Коши-Гурса для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и свойства ечֺ решения.* Узбекский математический журнал, 2012, №2, -с.130-139.
14. **Исмоилов А.И.** *Задача Дарбу для неоднородного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу.* Бюллетень Института математики. 2022-г.-Vol. 5, N 1,ЦС. 56-65.

UDK 517.95

Кратные операторы Эрдейи-Кобера дробного порядка и их свойства

Исмоилов М.Х., Каримов Ш.Т.
Ферганский государственный университет, город Фергана, Узбекистан
shaxkarimov@gmail.com

В работах A. Erdeliy, H. Kober (см. [1; стр. 246]) вводится следуюшая модификация дробного интегрирования

$$I_{\eta,\alpha}\varphi(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1}t^{2\eta+1}\varphi(t)dt, \tag{1}$$

$$K_{\eta,\alpha}\varphi(x)=\frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty\left(t^2-x^2\right)^{\alpha-1}t^{1-2\alpha-2\eta}\varphi(t)dt, \tag{2}$$

что оказалось очень полезным в приложениях к нитегральным операторам, интегральным уравнениям и к другим разделам математики. Операторы (1), (2) и их обобщения получили название операторов Эрдейи-Кобера.

В работах A. Erdeliy [2, 3], глубоко изучена композиция операторов (1) и (2) с дифференциальным оператором Бесселя

$$B_\eta^x=x^{-2\eta-1}\frac{d}{dx}x^{2\eta+1}\frac{d}{dx}=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\eta+1}{x}\frac{d}{dx}. \tag{3}$$

Результаты A. Erdeliy обобщены в работе J.S.Lowndes [5]. Им были введены и исследованы обобщенные операторы Эрдейи-Кобера вида

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{-2\alpha-2\eta}\times$$

$$\times\int_0^x t^{2\eta+1}\left(x^2-t^2\right)^{(\alpha-1)/2}J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)dt, \tag{4}$$

$$R_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{2\eta}\times$$

$$\times\int_x^{+\infty}t^{1-2\alpha-2\eta}\left(t^2-x^2\right)^{(\alpha-1)/2}J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)f(t)dt, \tag{5}$$

где $\eta,\alpha,\lambda\in R$, причем $\alpha>0,\eta\geq-1/2,J_v(z)$ - функция Бесселя первого рода.

Интегралы Эрдейн-Кобера обладают свойством оператора преобразования. Поэтому вкратце остановимся на определении оператора преобразования и его применения.

Определение 1.6 ([6; стр. 70], [7; стр. 223]). Пусть дана пара операторов (A,B). Ненулевой оператор T называется оператором преобразования (ОП, Transmutation), если выполняется соотношение

$$TA = BT.$$

Для того, чтобы (6) было строгим определением, необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A, B, и, следовательно, Т. Изложению теории ОП и их приложениям посвящены монографии [6-9]

Оператор (4) также является оператором преобразования. Справедливость этого факта следует из следующей теоремы [1; Лемма 40.2], [4], [9]:

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0, f(x) \in C^2(0,b), b > 0$, функиия $x^{2\eta+1}f(x)$ интегрируема в нуле $u \lim_{x\to 0} x^{2\eta+1}f'(x) = 0$. Тогда имеет место рвенство $\left(B^x_{\eta+\alpha} + \lambda^2\right) J_\lambda(\eta,\alpha)f(x) = J_\lambda(\eta,\alpha)B^x_\eta f(x)$, в частности, если $\lambda = 0$, тогда $B^x_{\eta+\alpha}I_{\eta,\alpha}f(x) = I_{\eta,\alpha}B^x_\eta f(x)$.

Какже обычно применяются операторы преобразования? Пусть, например, изучается уже известны для более простого оператора B. Тогда, если существует ОП (6), то часто удачтся перенести свойства оператора B и на оператор A. Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах. В конкретных реализациях операторы A и B обычно являются дифференциальными, а T - линейный интегральный оператор.

В данной работе мы рассматриваем двухпараметрический двукратный оператор Эрдейи-Кобера вида

$$I^{\eta_1,\alpha_1}_{\eta_2,\alpha_2}f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\times$$

$$\times \int_0^1 \left(1-\sigma_1^2\right)^{\alpha_1-1} \sigma_1^{2\eta_1+1} \left[\int_0^1 \left(1-\sigma_2^2\right)^{\alpha_2-1} \sigma_2^{2\eta_2+1} f(x\sigma_1\sigma_2)\, d\sigma_2\right] d\sigma_1. \qquad (6)$$

В работе доказана, что оператор (6) обладает свойством оператора преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* -Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. **Erdelyi A.** *Some applications of fractional integration.* Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note. -Oxford, 1963. -є 316. -23 p.

3. **Erdelyi A.** *An application of fractional integrals.* J. Analyse Math. -Oxford (UK), 1965. -v 14. -P. 113-126.

4. **Lowndes J. S.** *A generalization of the Erdelyi - Kober operators.* Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. - Cambridge(UK), 1970. -v. 17. -є 2. - P. 139-148.

5. **Lowndes J. S.** *An application of some fractional integrals.* //Glasgow Math. J. Cambridge(UK), 1979. -v. 20. -є 1. -P. 35-41.

6. **Carroll R.** *Transmutation and Operator Differential Equations.* -North Holland, 1979. - 245 p.

7. **Катрахов В. В., Ситник С. М.** *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.* Современная математика. Фундаментальные направления. -Москва, 2018, -т. 64. -є 2. -С. 211-426.

8. **Ситник С. М., Шишкина Э. Л.** *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.* -М.: Физматлит, 2018.

9. **Уринов А.К., Каримов Ш.Т.** *Операторы Эрдейи-Кобераи их приложенння к дифференциальным уравнениям в частных производных.* Фергана-2021. с 221.

УДК 517.95

Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка

Jalilov M. A.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
alimuhammad9978@mail.ru

Пусть $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, где a, b – положительные действительные числа. В области Ω рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача А. Требуется найти функцию $u(x,t)$, из класса

$$u_x \in C(\bar{\Omega}_1), {}_C D_{0t}^{\alpha} u, u_{xx} \in C(\Omega_1), u \in C^1(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{2,2}(\Omega_2),$$

удовлетворяющее в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ уравнению

$$0 = \begin{cases} {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) - u_{xx}(x,t), t > 0, \\ u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t), t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

краевым условиям

$$u(0,t) = 0, u_x(1,t) = u_x(x_0,t), -a \le t \le b,$$

$$u(x,-a) = h \cdot u(x,b) + \varphi(x), \ 0 \le x \le 1,$$

а также условию склеивания

$$\lim_{t \to +0} {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \lim_{t \to -0} u_t(x,t).$$

Здесь $\varphi(x)$ - заданная функция, h - заданное действительное число, $x_0 = p/q$ - заданное рациональное число, причем $0 < p/q < 1$, $q - p > 2$, ${}_C D_{0t}^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$ - оператор Капуто [1].

В данной работе для параболического уравнения дробного порядка с оператором Капуто изучается нелокальная обратная задача типа Бицадзе-Самарского [2]. Для решения задачи используется спектральный метод, с помощью которого рассматриваемая задача сводится к исследованию спектральной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно пространственной переменной.

Литература

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.,** *Theory and applications of fractional differential equations.*, North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam. – 2006. 523 p.

2. **Бицадзе А.В., Самарский А.А.,** *"О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач."*, Докл. АН СССР., 1969. Т. 185. N 4. - С. 739–740.

УДК 517.3

Распространение тепла в бесконечном цилиндре с источником мгновенного воздействия

Жиенбаева Г.А.
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан; gulayimjienbaeva@gmail.com

Рассмотрена задача о радиальном распространении тепла в бесконечном круговом цилиндре радиуса R, находящегося под воздействием источников тепла, способных мгновенно изменить температуру цилиндра в точке (t, r) на величину $I_p(r)$, $p = 1, 2, ...$ в некоторые фиксированные моменты времени t_p , $p = 1, 2, ...$ соответственно. При этом считается, что на боковой поверхности цилиндра поддерживается постоянная (равная нулю) температура.

Эта задача приводит к интегрированию уравнения

$$u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), \quad t \neq t_p, \qquad 0 < r \leq R \tag{1}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta u(t, r)|_{t=t_p} = I_p(r), \qquad 0 < r \leq R, \quad p = 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

при граничном условии

$$u(t, r)|_{r=R} = 0, \qquad t \in [0, +\infty)$$

и при начальном условии

$$u(0, r) = \phi(r), \qquad 0 < r \leq R.$$

Решение задачи (1)-(2) построена в виде ряда

$$u(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(r)$$

где $X_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)$ $n = 1, 2, \ldots$ $J_0(r)$ - функции Бесселя нулевого порядка первого рода. μ_n, $n = 1, 2, \ldots$-положительные корни уравнения; а функции $T_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ - непрерывно дифференцируемые при $t \neq t_p$, $p = 1, 2, \ldots$ и отличные от нуля функции, определяемые уравнения с импульсным воздействием вида:

$$T'_n(t) + (a\lambda_n)^2 T_n(t) = 0 \qquad t \neq t_p,$$

$$\Delta T_n(t)|_{t=t_p} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r I_p(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr$$

при начальном условии

$$T_n(0) = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu)} \int_0^R r\phi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr,$$

где $n, p = 1, 2, \cdots$.

Явная форма решении рассматриваемой задачи имеет вид:

$$u(t,r) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu)}\left[\int_0^R r\phi(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\exp\left(-\left(\frac{a^2\mu_n^2)}{R^2}\right)t\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{k}\int_0^R rI_p(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\exp\left(-\left(\frac{a^2\mu_n^2)}{R^2}\right)(t-t_p)\right)\Bigg]J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$$

где $t \in [t_k; t_{k+1}),\ \ k = 1, 2, ...$ причем $t_0 = 0$.

Рассмотрен также случай, когда на поверхности цилиндра происходит теплообмен с окружающей средой. Показано, что в таком случае задача сводится к решению уравнения (1) с импульсным воздействием (2) при начальном условии

$$u(0,r) = \phi(r), \qquad 0 < r \le R$$

и при граничном условии

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)|_{r=R} = 0.$$

Решение рассмотренной задачи в данном случае имеет вид:

$$u(t,r) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2+\alpha^2)J_0^2(\mu_n)}\left[\int_0^R r\phi(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\exp\left(-\frac{a^2\mu_n^2)}{R^2}t\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{k}\int_0^R rI_p(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\exp\left(-\frac{a^2\mu_n^2)}{R^2}(t-t_p)\right)\right]J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Литература

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.* -М.: Наука, -2004. 792 с.

2. **Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.** *Impulsive differential equations.* World Scientific Series on Non-Linear Sciences. Ser. A. V.14. -Singapore: World Scientific. -1995. 462 p.

3. **Samoilenko V.Hr., Yelgondyev K.K.** *On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects* Jorn. Facta Universitatis / Series: Mechanics, automatic control and robotics, 1998. No 2(2). P.635-639.

4. **Елгондиев К.К.** *Распространение тепла в однородном шаре по действием импульсных источников.* Докл. АН Руз. 2003, No 1. -С.18-20.

УДК 517.956.6

Нелокальная краевая задача в полубесконечном параллелепипеде для трехмерного уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами

Каримов К. Т.[1,2], Олимова Д. С.[3],

[1] Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
[2] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан;
[3] Ферганский военно-академический лицей Министерства обороны школа Темурбеков, Фергана, Узбекистан;
karimovk80@mail.ru, dilfuza.olimova.76@bk.ru

В данной работе рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения

$$u_{xx} + (\mathrm{sgn} y)\, u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0 \tag{1}$$

в неограниченной области $\Omega^\infty = \{(x,y,z) : x \in (0,a),\, y \in (-b,+\infty),\, z \in (0,c)\}$, где $a,b,c \in R^+$, $\beta,\gamma \in (0,1/2)$. Уравнение (1) в области Ω^∞ принадлежит смешанному типу, а именно в области $\Omega^\infty_+ = \Omega^\infty \cap \{y>0\}$ принадлежит эллиптическому типу, а в области $\Omega_- = \Omega^\infty \cap \{y<0\}$ – гиперболическому типу. Плоскости $y=0$ и $z=0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения. Среди них $y=0$– плоскость изменения типа уравнения.

Для уравнения (1) в области Ω^∞ исследуется следующая задача.

Задача $\mathbf{A}^\infty$. Найти функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую в области $\Omega^\infty_+ \cup \Omega_-$ уравнению (1) и условиям

$$u(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}^\infty\right) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\left(\Omega^\infty_+ \cup \Omega_-\right),\ \ u_x,\ z^{2\gamma} u_z \in C\left(\bar{\Omega}^\infty\right),$$

$$u(0,y,z) = u(a,y,z),\ \ u_x(0,y,z) = u_x(a,y,z),\ \ y \in [0,b],\ z \in [0,c],$$

$$u(x,y,0) = 0,\quad u(x,y,c) = 0,\ \ x \in [0,a],\ \ y \in [0,b],$$

$$u(x,0,z) = \tau(x,z),\ \ \lim_{y\to+\infty} u(x,y,z) = 0,\ \ x \in [0,a],\ \ z \in [0,c],$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y\to-0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y,z) = \lim_{y\to+0} y^{2\beta} u_y(x,y,z),\ \ x \in (0,a),\ \ z \in (0,c),$$

где $\tau(x,z)$ – заданная функция.

Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами в трехмерных областях изучены в работах [1], [2], [3], [4], а такие задачи для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в трехмерных областях методом спектрального анализа является малоизученными.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $\tau(x,z)$ удовлетворяют условиям

I. $\tau(x,z) \in C^{4,5}_{x,z}\left(\bar{\Pi}\right)$, $l = \overline{1,2}$, $\Pi = \{(x,z) : x \in (0,a),\, z \in (0,c)\}$;

II. $\left(\partial^j/\partial x^j\right)\tau(x,z)\big|_{x=0} = \left(\partial^j/\partial x^j\right)\tau(x,z)\big|_{x=a}$, $j = \overline{0,3}$;

III. $\left(\partial^j/\partial z^j\right)\tau(x,z)\big|_{z=0} = 0,\quad \left(\partial^j/\partial z^j\right)\tau(x,z)\big|_{z=c} = 0,\ j = \overline{0,4}$

и выполнена оценка $|\Delta_{nm}(b)| \geq C_0,\ C_0 = const > 0$ при $n > n_0,\ m > m_0$. Тогда

1) если $\Delta_{nm}(b) \neq 0$ при всех $n = 1,2,...,n_0,\ m = 1,2,...,m_0$, то существует единственное решение задачи A^∞;

2) если $\Delta_{nm}(b) = 0$ при некоторых $n = s_1, s_2, ..., s_j \leq n_0,\ m = t_1, t_2, ..., t_i \leq m_0$ и выполняются условия

$$\int_0^c \int_0^a \tau(x,z)\, x^{2\alpha} X_l(x)\, z^{2\gamma} Z_k(z)\, dxdz = 0,$$

то решение задачи A^{∞} существует; где $\Delta_{nm}(b) = \bar{Y}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)$,

$$\bar{Y}_{1/2-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right] = \frac{\pi}{2\cos\beta\pi}\left\{J_{1/2-\beta}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right] + J_{\beta-1/2}\left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right]\right\},$$

$$\tau_{nm} = d_m \int_0^c \int_0^a \tau(x,z) X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z)\, dxdz,\ d_m = \left[\|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)}\right]^{-2},$$

$$\|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)} = \left(\int_0^c q(z) Z_m^2(z)\, dz\right)^{1/2} = \left|cJ_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m})\right|/\sqrt{2},\quad q(z) = z^{2\gamma},$$

$J_\nu(x)-$ функция Бесселя первого рода порядка ν [5], $\lambda_{nm} = (2\pi n/a)^2 + (\sigma_{\gamma m}/c)^2$, $n+1$, $m \in N$, а $\sigma_{\gamma m}-$ m-ый положительный корень уравнения $J_{1/2-\gamma}(z) = 0$.

Литература

1. **Urinov A.K., Karimov K.T.** *Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped.* Siberian Electronic Mathematical Reports, –2020. –V.17. –P.161-178.
2. **Каримов К.Т.** *Нелокальная задача с интегральным условием для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами.* Бюллетень Института математики. –2018. –№6, –С.10-24.
3. **Karimov K.T.** *Nonlocal Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-infinite Parallelepiped.* Lobachevskii Journal of Mathematics. –2020. –V. 41, –No. 1. –P. 46-57.
4. **Karimov K.T.** *Nonlocal Problem for a Three-dimensional Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Rectangular Parallelepiped.* Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. –2020. –V.13, –No.5. –P. 533-546.
5. **Ватсон Г. Н.** *Теория бесселевых функций.* -М.:Т.1.Изд. ИЛ. –1949. –798 с.

УДК 517.956.6

Пространственная задача с условиями Франкля для уравнения с сингулярным коэффициентом

Каримов К. Т.[1,2], Шокиров А. М.[1]

[1] Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;

[2] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан;

karimovk80@mail.ru, asrorshokirov87@gmail.com

В работе уравнения

$$sign(x+y)\left[U_{xx} + signy \cdot U_{yy}\right] + U_{zz} + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \tag{1}$$

рассматриваются в области $D = \Omega \times (0,c)$, где $\Omega-$ конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная дугой $\bar{\sigma}_0 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, и отрезками $\overline{MM^*} = \{(x,y) : x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\}$, $\overline{M^*P} = \{(x,y) : x - y = 1,\ 0 \leq x \leq 1\}$.

Введем обозначения: $\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y) : y < 0,\ x + y > 0\}$,

$\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0,\, x + y < 0\}$, $D_j = \Omega_j \times (0, c)$, $j = \overline{0,2}$, $OP = \Omega \cap (y = 0)$, $OQ = \{(x, y) : x + y = 0,\, 0 < x < 1/2\}$, $OM = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}$, $OM^* = MM^* \backslash \overline{OM}$, $O(0,0)$, $M(0,1)$, $M^*(0,-1)$, причем здесь $\gamma = const \in R$, $0 < \gamma < 1/2$.

В области D уравнения (1) принадлежит смешанному типу, а именно: в области D_0- эллиптическому типу, а в областях D_1 и D_2- гиперболическому типу. Прямоугольник $OP \times (0, c)$ являются плоскостями изменения типа уравнения.

Заметим, что область D_0 удобнее определить в цилиндрических координатах (r, φ, z) в следующем виде: $D_0 = \{(r, \varphi, z) : r \in (0,1),\, \varphi \in (0, \pi/2),\, z \in (0, c)\}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arctg\,(y/x)$.

Для уравнения (1) в области D исследуем следующую задачу:

Задача $\mathbf{F}^{(2)}$. Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x, y, z) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\left(D_0 \cup D_1 \cup D_2\right),$$

$$U(x, y, z)|_{x=\cos\varphi,\, y=\sin\varphi} = f(\varphi, z), \quad \varphi \in (0, \pi/2), \quad z \in (0, c),$$

$$U(0, y, z) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad z \in [0, c],$$

$$U_x(x, y, z)|_{x=0} = U_x(x, -y, z)|_{x=0}, \quad y \in (0, 1), \quad z \in (0, c),$$

$$U(x, y, z)|_{z=0} = U(x, y, z)|_{z=c} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \to -0} U_y(x, y, z) = \lim_{y \to +0} U_y(x, y, z), \quad x \in (0, 1), \quad z \in (0, c),$$

где $f(\varphi, z)$ – заданная функция.

Подобные задача при $\gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$ исследованы в работах [1] и [2] соответственно.

Литература

1. **Moiseev E.I., Nefedov P.V.** *Frankl problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain.* Integral Transforms and Special Functions, 2013, Vol. 24, Issue 7. P. 554-560.

2. **Каримов К.Т., Шокиров А.М.** *Задача Франкля для уравнения с сингулярным коэффициентом в трехмерноой области.* Материалы международной научной конференции Уфимская осенняя математическая школа. 2-5 октября 2024 года, УФА, -с. 90-91.

UDK 517.95

Задача Дарбу для уравнения Буссинеска-Лява с оператором Бесселя

Каримов Ш. Т.[1], Орипов Ш. А.[1], **Орозов М. О.** [2],

[1] Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;

[2] Ошский государственный университет, Ош, Кыргызская Республика;

shaxkarimov@gmail.com

shoripov1991@gmail.com

При рассмотрении ряда практически важных физических задач возникают неклассические дифференциальные уравнения. Неклассическим называют те модели математической физики, чьи представление в виде уравнений или систем уравнений в частных производных не укладываются в рамках одного из классических типов - эллиптического, параболического или гиперболического. В частности, к неклассическим относятся модели, описывающие уравнением смешанного типа (уравнения Трикоми, Геллерстедт), вырождающимся уравнениями (например уравнение Келдыша) или уравнениями Соболевского типа (напр. уравнение Баренблата- Желтова-Кочиной).

Уравнение Соболевского типа, иначе уравнениями, неразрешҷнные относительно старшей производной, после известной работы Соболева [1] являются объектом исследования для многих авторов. Обзор этих работ можно найти в монографиях [2-4].

Важным классом уравнений Соболевского типа является уравнение Буссинеска-Лява четвертого порядка:

$$\Delta_x u_{yy}(x,y) - u_{yy} + \Delta_x u(x,y) = 0 \tag{1}$$

которое описывает процесс нестационарного движения вязкой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска, где Δ_x – многомерный оператор Лапласа. Исследованию задачи Коши, смешанных и обратных задач для уравнений Буссинеска-Лява посвящены работы С.А.Габова, А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова, А.Б.Альшина, Ю.Д. Плетнера, А.И.Кожанова, В.И.Жегалова, А.Н.Миронова, Е.А.Уткиной и других.

Данная работа посвящена изучению вопросов разрешимости в классическом смысле аналога задачи Дарбу для уравнения

$$L_\alpha(u) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

где $\alpha \in R$, причем $0 < \alpha < 1/2$.

Параметр α входящие в уравнение (2), определяет порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha = 0$ уравнение (2) переходит в одномерное уравнение Буссинеска-Лява (2), а при $\alpha = (m-1)/2$ получим осесимметричный случай уравнения (2), причем в последней случае переменное x выполняет роль переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2}$ в сферической системе координат.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы. Уравнение (2) по классификации работы [5], принадлежит гиперболическому типу. Прямые $x = const$, $y = const$ являются действительными двукратными характеристиками.

В треугольнике Ω, ограниченной отрезками AC иBC характеристик $x = 0$, $y = h$ $(h > 0)$ уравнения (2) и отрезками AB прямой $y = x$, рассмотрим задачу Дарбу.

Задача Дарбу. Найти в области Ω решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad u_x|_{AB} = \nu_1(x), \quad u_{xy}|_{AB} = \nu_2(x), \quad u_{xxy}|_{AB} = \nu_3(x)$$

где $\varphi(y)$, $\nu_k(x)$ $(k = \overline{1,3})$ - заданные гладкие функции.

Данная задача ранее не исследована. Исследованием различных задач для одномерного общего линейного уравнения типа (2) со старшей производной u_{xxyy} и с гладкими коэффициентами занимались А.П. Солдатов, М.Х.Шхануков, В.И.Жегалов, А.Н.Миронов, Е.А.Уткина, A.Maher и другие.

Литература

1. **Соболев С.Л.** *Об одной краевой задаче математической физики.* Известия АН СССР, Серия Матем. 1954, Т.18, No 4, С. 3-50.
2. **Kozhanov A.I.** *Composite Type Equations and Inverse Problems.* – Utrecht. 1999.
3. **Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.** *Неклассические дифференциальнооператорные уравнения.* – Новосибирск, Наука, 2000.
4. **Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д.** *Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа.* – М.: Физматлит, 2007.
5. **Джураев Т.Д., Сопуев А.** *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка.* – Ташкент: ФАН, 2000, С. 144.

УДК 517.95

Об одной краевои задаче для гиперболического уравнения второго рода, вырождающегося внутри характеристического четырехугольника

Комилова Н.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
nigora.komilova@bk.ru

Рассмотрим уравнение

$$x^n u_{xx} - |y|^m u_{yy} = 0, \;\; x \geq 0, \;\; 0 \leq n < m < 1, \tag{1}$$

где $m = m_1, \; n = n_1$ при $y > 0$ и $m = m_2, \; n = n_2$ при $y < 0$, в конечной области Ω, ограниченной характеристиками

$$AC : \frac{2}{2-n_1} x^{\frac{2-n_1}{2}} - \frac{2}{2-m_1} y^{\frac{2-m_1}{2}} = 0, \quad BC : \frac{2}{2-n_1} x^{\frac{2-n_1}{2}} + \frac{2}{2-m_1} y^{\frac{2-m_1}{2}} = 1,$$

$$AD : \frac{2}{2-n_2} x^{\frac{2-n_2}{2}} - \frac{2}{2-m_2} (-y)^{\frac{2-m_2}{2}} = 0, \quad BD : \frac{2}{2-n_2} x^{\frac{2-n_2}{2}} + \frac{2}{2-m_2} (-y)^{\frac{2-m_2}{2}} = 1$$

уравнения (1).

Пусть $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0), \; \Omega^- = \Omega \cap (y < 0), \; I$ – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$, а

$$u(x,y) = \begin{cases} u^+(x,y), & (x,y) \in \Omega^+ \\ u^-(x,y), & (x,y) \in \Omega^- \end{cases}$$

Известно, что решение задачи Коши для уравнения (1) в области $\Omega^{\pm}$ имеет вид [1]

$$u^{\pm}(x, \; y) = 2(1+2p)\gamma_1 x^{n/4} \int_0^1 z^p (1-z)^p t^q F(q, \, 1-p; \, p; \, \theta) \tau_{\pm}(t) \, dz$$

$$+\gamma_1 x^{n/4}\int_0^1 z^p\,(1-z)^p\,(1-2z)\,\frac{\partial}{\partial z}\left[t^q F\,(q,\,1-q;\,p;\,\theta)\,\tau_\pm\,(t)\right]dz$$

$$-\gamma_2 x^{n/4}|y|\int_0^1 z^{-p}\,(1-z)^{-p}\,t^q F\,(q,\,1-q;\,1-p;\,\theta)\,\nu_\pm\,(t)\,dz, \qquad (2)$$

где

$$\tau_\pm(x)=\lim_{y\to\pm 0}u^\pm(x,y),\;\;\nu_\pm(x)=\lim_{y\to\pm 0}u_y^\pm(x,y),$$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma\,(1+2p)}{2^{1-q}\Gamma^2(1+p)},\qquad \gamma_2=\frac{2^q\Gamma\,(2-2p)}{(1-2q)^q\Gamma^2(1-p)},$$

$$t=\frac{2}{2-n}x^{(2-n)/2}+\frac{2}{2-m}(\pm y)^{(2-m)/2}\,(2z-1)\,,\theta=\frac{2\,(2-n)}{(2-m)^2 t}x^{(n-2)/2}(\pm y)^{2-m}z\,(1-z)\,,$$

$$2q=\frac{n}{n-2},\quad 2p=\frac{m}{m-2},\quad -1<2p<2q\le 0.$$

Будем считать, что функция $u^\pm(x,y)$ есть обобщенное решение задачи Коши для уравнения (1) из класса R_2 [2], если можно представить в виде (2), где

$$\tau_\pm(x)=\tau_\pm(0)+x^{-q}\int\limits_0^x(x-t)^{-2p}F\left(q,\;1-q;1-p;\;-\frac{(x-t)^2}{4xt}\right)t^q T_\pm(t)dt,\;\;0\le x\le 1,$$

а $T_\pm(t)$ и $\nu_\pm(t)$ - непрерывны и интегрируемы в $(0,1)$.

Задача (Основная задача). Найти в области Ω решение уравнения (1) из класса R_2, удовлетворяющее краевым условиям

$$u^+\big|_{AC}=\psi_+(x),\qquad 0\le x\le\frac{1}{2}, \qquad (3)$$

$$u^-\big|_{AD}=\psi_-(x),\qquad 0\le x\le\frac{1}{2}$$

и условиям склеивания

$$\nu_+(x)=a(x)\nu_-(x)+\beta(x),\quad x\in I,$$

$$\tau_+(x)=\gamma(x)\tau_-(x)+\delta(x),\quad x\in\bar{I},$$

где $\psi_+(x),\;\psi_-(x),\;\alpha(x),\;\beta(x),\;\gamma(x),\;\delta(x)$ - заданные функции, причем $\alpha(x)\in C(\bar{I})\cap C^1(I),\;\;\beta(x)\in C(\bar{I})$ могут обращаться в бесконечность порядка ниже 1 и $-2p$ при $x=0$ и $x=1$ соответственно; $\gamma(x),\;\delta(x)\in C^1(\bar{I});\;\;\psi_+(x),\;\psi_-(x)\in C^1(\bar{I})\cap C^2(I),\;\psi_+''(x)$ и $\psi''(x)$ могут обращаться в бесконечность порядка ниже 1 при $x=0$ и $x=1$, соответственно.

Без ограничения общности можно считать, что $\tau_\pm(0)=0$.

Для решения поставленной задачи в каждой из областей Ω^+ и Ω^- решаем вспомогательную задачу.

Задача Коши-Гурса (Вспомогательная задача). Найти Ω^+ решение $u^+(x,y)$ уравнения (1) из класса R_2, удовлетворяющее краевому условию (3) и условию

$$\lim_{y\to+0}u_y^+(x,y)=\nu_+(x), \qquad (4)$$

где $\nu_+(x)$ – заданная (временно известная) функция.

Следуя работе [3], решение $u^+(x,y)\in R_2$ задачи Коши-Гурса для уравнения (1) найдем в явном виде, из которого нетрудно вывести функциональное соотношение

между $\tau^+(x) = u^+(x,0)$ и $\nu^+(x)$, принесенное на линию вырождения $y = 0$ из области Ω^+.

Аналогично исследуется вспомогательная задача Коши-Гурса для уравнения (1) в области Ω^-.

Далее, применяя формулу обращения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре, решение основной задачи эквивалентным образом сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре. Безусловная разрешимость интегрального уравнения Вольтерра второго рода обеспечивает однозначную разрешимость поставленной основной задачи для уравнения (1) в характеристическом четырехугольнике.

Литература

1. **Ergashev T.G., Komilova N.J.** *The Kampe de Feriet Series and the Regular Solution of the Cauchy Problem for Degenerating Hyperbolic Equation of the Second Kind.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, 43(11), P.3112–3124.
2. **Ergashev T.G., Komilova N.J.** *Generalized solution of the Cauchy problem for hyperbolic equation with two lines of degeneracy of second kind.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, 42(15), P. 3616–3625.
3. **Ergashev T.G., Komilova N.J.** *Volterra integral equations with Gaussian hypergeometric function in the kernel and their application to the boundary value problems.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, 44(8), P. 3256–3265.

УДК 517.9

Второй интеграл Сонина как оператор преобразования в дифференциальных уравнениях смешанного типа

Маковецкий В.И.
Сахалинский государственный университет,
Южно-Сахалинск, Россия; Makov-Viktor-Sakh@yandex.ru

Часто операторы преобразования используются для представления решений смешанных уравнений в частных производных (Уринов, Окбоев, 2024),(Уринов, Каримов, 2017). В настоящей заметке мы предлагаем опциональный подход, основанный на

Теорема 1. Пусть между решениями уравнений

$$\frac{d}{dx}\left(a_0(x)\frac{d\chi_0(x)}{dx}\right) + \frac{d\chi_0(x)}{dx}\left(b_0(x)\right) + c_0(x)\chi_0(x) = 0$$

$$a_1(x)\frac{d^2\chi_1(x)}{dx^2} + b_1(x)\frac{d\chi_1(x)}{dx} + c_1(x)\chi_1(x) = 0$$

существует оператор преобрахования

$$\chi_1(x) = \int_0^x K(x,y)\chi_0(y)dy$$

Тогда ядро $K(x,y)$ удовлетворяет равенству

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(a_0(y)\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right) - b_0(y)\frac{\partial K(x,y)}{\partial y} + c_0(y)K(x,y)\right] -$$

$$-\left[a_1(x)\frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial^2 x} + b_1(x)\frac{\partial K(x,y)}{\partial x} + c_1(x)K(x,y)\right] = 0;$$

и ряду дополнительных условий. Доказательство (см. Sitnik S. M., Makovetsky V. I., 2020). Если в качестве оператора преобразования взять второй интеграл Сонина в алгебраической форме (Уринов А. К. и др., 2022, раздел 3.2)

$$\int_0^x \left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^{\mu} J_{\mu}\left(b\sqrt{x^2-y^2}\right) y^{\nu+1} J_{\nu}(cy)\,dy =$$

$$= b^{\mu}c^{\nu}x^{\mu+\nu+1}\left(b^2+c^2\right)^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)} J_{\mu+\nu+1}\left(x\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

то относительно ядер

$$K_1(x,y) = \left(x^2-y^2\right)^{\mu/2} J_{\mu}\left(\beta\sqrt{x^2-y^2}\right);$$

$$K_2(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\mu/2} I_{\mu}\left(\beta\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

возникает система смешанных уравнений

$$\frac{\partial^2 K_1(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 K_1(x,y)}{\partial x^2} - \frac{1+2\nu}{y}\frac{\partial K_1(x,y)}{\partial y} - \frac{1+2\nu-2\mu}{x}\frac{\partial K_1(x,y)}{\partial x} - \beta^2 K_1(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 K_2(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_2(x,y)}{\partial x^2} - \frac{1+2\nu}{y}\frac{\partial K_2(x,y)}{\partial y} + \frac{1+2\nu-2\mu}{x}\frac{\partial K_2(x,y)}{\partial x} - \beta^2 K_2(x,y) = 0.$$

Заметим, что второй интеграл Сонина относят к обобщенным операторам Эрдейи - Кобера, хотя интеграл представлен в мемуарах Сонина Н. Я. в 1880 году (Гуссов В. В., 1953), а первое определение преобразований Векуа Ц Эрдейи Ц Лаундеса появилось в 1969 (Lowndes J. S., 1969).

Более интересными оказываются решения

$$K_-(x,y) = \frac{J_{\mu}\left(\beta\sqrt{x^2-y^2}\right)}{(x^2-y^2)^{\mu/2}};$$

$$K_+(x,y) = \frac{I_{\mu}\left(\beta\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\mu/2}};$$

для смешанного уравнения

$$\frac{\partial^2 K_{\mp}(x,y)}{\partial x^2} - sgn(y)\left[\frac{\partial^2 K_{\mp}(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2\mu}{y}\frac{\partial K_{\mp}(x,y)}{\partial y}\right] + \beta^2 K_{\mp}(x,y) = 0.$$

Для представленных решений возможны следующие начальные условия

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial K_{\mp}}{\partial y}(x,y) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} K_{\mp}(x,y) = \frac{\beta^{\mu}}{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)}.$$

Литература

1. **Уринов А. К.,Окбоев А. Б.** *Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - 2024, номер 1, 45Ц58.
2. **Уринов А. К., Каримов Ш. Т.** *Решение аналога задачи Коши для итерированного многомерного уравнения Клейна – Гордона – Фока с оператором Бесселя.* https://doi.org/
10.48550/arXiv.1711.00093, 2017.
3. **Sitnik S. M., Makovetsky V. I.** *Necessary Condition for the Existence of an Intertwining Operator and Classification of Transmutations on Its Basis,* in Kravchenko V. V., Sitnik S. M. Transmutation Operators and Applications,Springer Nature Switzerland AG - 2020, pp. 171 - 191.
4. **Уринов А. К., Ситник С. М., Шишкина Э. Л., Каримов Ш. Т.** *Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения).* Ц Фергана: изд. ҮФаргонаҮ, - 2022. Ц 192 стр.
5. **Гуссов В. В.** *Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР.* Историко-математические исследования, вып. VI, Гостехтеориздат, - 1953, стр. 355-475.
6. **Lowndes J. S.** *A generalisation of the Edelyi - Kober Operatots.* Published in Proceedings of the Edinburgh, 1969. 1 December 1970.

UDK 511.524

Задача с неполным условием типа условия Бицадзе-Самарского и аналогом условия Франкля для одного класса уравнений смешанного типа

Мирсабурова Д.М.[1], Рузиева З.Ф.[2], Бегимова Ш.Ч.[1]

[1] Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;

[2] Денауский институт предпринимательства и педагогики, Денау, Узбекистан;

dmirsaburova@mail.ru, zuxraruziyeva00@mail.ru, **shbegimova@mail.ru"**

Постановка задачи BSF (Бицадзе,Самарского,Франкля).

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$ прямой $y = 0$. J=(-1,1)-интервал оси $y = 0$. В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяюшие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах (1)[1]. На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^* B_0^* C_0^*$ ограниченный прямыми

$$A_0^* C_0^* : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2,\ B_0 C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2,\ A_0 B_0 \vdots \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta A_0^* B_0^* C_0^*$. Обозначим через C_0 и C_1точки пресечения граничних характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходяшими из точки $E(c, 0)$, где -некоторое число, принадлежашее интервалу J=(-1,1) оси $y = 0$ Пусть $p(x) \in C^1[-1, c]$-диффеоморфизм из множества точек отрезка $(-1, c)$ во множества точек отрезка $(c, 1)$,причем $p'(x)<0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примери такой функции приведем линейную функцию $p(x) = d-kx$, $k = \frac{1-c}{1+c}$,$d = \frac{2c}{1+c}$. В задачах типа задачи Бицадзе-Самарского [2] нелокальное условие связывает значения дробной производной искомий функции на характеристике AC со значением искомий функции на отрезке вырождения AB.В ностаяшей работе в неограниченной области D исследуется корректность задачи, где граничная характеристика AC произвольним оброзем делится на две части: AC_0 и AC и на первой части $AC_0 \subset C_0C$ и на части отрезка вырожления $AE_0 \subset AB$ видиется нелокальное условие типа условия Бицадзе-Самарского. Здесь вторая часть C_0C характеристики AC освобождени от краевах условий и это недостаюшее нелокальное условие заменаю аналогом условия Франкля [2] на отрезке вырождения AB

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R, 0)$, $B_R = B_R(R, 0)$,

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2, \ -R \le x \le R, \ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $J_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1, \ y = 0\}$, $J_2 = \{(x, y) : 1 < x < +\infty, \ y = 0\}$, $D_R = D_R^+ \cup D^- \cup J$, D_R-подобласть неограниченной области D, $C_0(C_1)$-точки пересечения характеристик $AC(BC)$ с характеристиками, исходяшей из точки $E(c, 0)$, где произволное фиксированное число $c \in J = (-1, 1)$-интервал оси $y = 0$.

Задача BSF. В неограниченной области D требуется найти функцию $u(x, y)$ удовлетворяюшим условиям:

1) функция $u(x, y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x, y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x, y)$ является обобшенным решением класса R_1 в области D^-;

4) на интервале вырождения J имеет место следуюшее условие сопряжения

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \ x \in J/\{c\} \tag{2}$$

причем эти пределы при $x \to \pm 1$, $x \to c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, где $\alpha = (m + 2(\beta_0 + \alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0))/(2(m+2)), \alpha > 0, \ \beta > 0, \ \alpha + \beta < 1$;

5) выполняется равенство

$$\lim_{R \to \infty} u(x, y) = 0, \tag{3}$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2}$;

6) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, -0) = \tau_1(x) \ \ x \in \overline{J}_1, u(x, +0) = \tau_2(x) \quad x \in \overline{J}_2 \tag{4}$$

$$D^{\alpha}_{-1,x} (1+x)^{\alpha+\beta-1} u\left[\theta_0((x))\right] = a(x) u(x, 0) + b(x) \ \ x \in (-1, c) \tag{5}$$

$$u\left(p(x),0\right)-\mu(x)u\left(x,+0\right)=f(x),\ x\in(-1,c), \tag{6}$$

где $D^{l}_{-1,x}$ - оператор дифференцирования дробного порядка[1].

$$\theta_0(x)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{(x_0+1)(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

$\theta_0(x)$-аффикс точки пересечения граничной характеристики AC с характеристикий исходяшей из точки $(x_0,0)$,$x\in(-1,c)$, где, $\tau_1(x),\tau_2(x)$, $a(x),b(x)$, $f(x)$ -заданные непрерывные функции,в замыкании множества их определение, причем $\lim\limits_{x\to-\infty}\tau_1(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_2(x)=0$. При определенных ограниченях на заданные функции задачи BSF исследуется аналогично работе [2].

Литература

1. **Мирсабурова Д.М.** *Задача с аналогом условия Франкля и смещения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коеффицентом.* Известия вузов. Математика, 2024. No 6, С.37-48.
2. **Смирнов М.М** *Уравнения смешанного типа.* М.-1985. с.304.

УДК 517.956.223

О единственности одной краевой задачи для уравнения с сингулярным коэффициентом в трехмерном пространстве

Муродова М.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
mxalimova2112@mail.ru

В работе исследовано задача типа Дирихле для трехмерное эллиптическое уравнение с сингулярным коэффициентом в трехмерном слое. Доказано единственность решения поставленной задачи.

1. Постановка задачи

В области $\Omega=\{(x,y,z):-\infty<x,y<+\infty,\ 0<z<l\}$ рассмотрим трехмерное уравнение эллиптического типа с сингулярным коэффициентом

$$Lu\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\gamma}{z}u_z=0, \tag{1}$$

где $u=u\left(x,y,z\right)$-неизвестная функция, а $l,\gamma\in R$, причем $0<\gamma<1/2$.

В данной работе для уравнения (1) в трехмерной области Ω поставлена и исследована следующая задача.

Задача D_∞**.** Найти функцию $u\left(x,y,z\right)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^2\left(\Omega\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u\left(x,y,0\right)=f_1\left(x,y\right),\quad (x,y)\in R^2, \tag{2}$$

$$u\left(x,y,l\right)=f_2\left(x,y\right),\quad (x,y)\in R^2, \tag{3}$$

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}u\left(x,y,z\right)=0,\quad z\in[0,l], \tag{4}$$

где f_1,f_2 заданные непрерывные функции и выполняются условия согласования

$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f_i(x,y)=0,\ \ i=\overline{1,2}.$

2. Единственность решения задачи D_∞.

Теорема. Задача D_∞ не имеют более одного решения.

Доказательство. Пусть задача D_∞ имеет два решения $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$, тогда $u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y,z)\equiv 0$ в $\Omega\cup\{z=0\}\cup\{z=l\}$.

В области Ω справедливо тождество

$$z^{2\gamma}uLu=\left(z^{2\gamma}uu_x\right)_x+\left(z^{2\gamma}uu_y\right)_y+\left(z^{2\gamma}uu_z\right)_z-z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)=0.$$

Интегрируя это тождество по области

$$\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\left\{(x,y,z):\ a<x<b,\ c<y<d,\ \varepsilon_1<z<l-\varepsilon_2\right\},$$

где a,b,c,d – конечное число, причем $a<b$, $c<d$, а $\varepsilon_1,\varepsilon_2$–достаточно малые положительные числа, имеем

$$\iiint\limits_{\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\left[\left(z^{2\gamma}uu_x\right)_x+\left(z^{2\gamma}uu_y\right)_y+\left(z^{2\gamma}uu_z\right)_z\right]dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\left[z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\right]dxdydz. \tag{5}$$

Если $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\to 0,\ a,c\to-\infty;\ b,d\to+\infty$, то $\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\to\Omega$.

Применяя формулу Гаусса-Остроградского [1] к левой стороны равенства (5) имеем

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{l-\varepsilon_2}\int\limits_{c}^{d}\left[u(b,y,z)\,u_x(b,y,z)-u(a,y,z)\,u_x(a,y,z)\right]z^{2\gamma}dydz+$$

$$+\int\limits_{\varepsilon_1}^{l-\varepsilon_2}\int\limits_{a}^{b}\left[u(x,d,z)\,u_y(x,d,z)-u(x,c,z)\,u_y(x,c,z)\right]z^{2\gamma}dxdz+$$

$$+z^{2\gamma}\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d}\left[u(x,y,l-\varepsilon_2)\,u_z(x,y,l-\varepsilon_2)-u(x,y,\varepsilon_1)\,u_z(x,y,\varepsilon_1)\right]dxdy=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\left[z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\right]dxdydz.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\to 0$, $a,c\to-\infty$, $b,d\to+\infty$, затем учитывая однородные краевые условия и свойства функции $u(x,y,z)$ при $x^2+y^2\to+\infty$, из последнего равенства получим

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\right]dxdydz=0$$

Следовательно, $u_x(x,y,z)\equiv u_y(x,y,z)\equiv u_z(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\Omega$. Тогда $u(x,y,z)\equiv const$, $(x,y,z)\in\Omega$. Так как $u(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ и $u(x,y,z)|_{z=0}\equiv 0$, то $u(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\bar{\Omega}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Литература

1. **Кудрявцев Л.Д.** *Курс математического анализа.* М.: Высшая школа. - 1981. - 584 с.

UDK 517.95

О задаче типа Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода

Окбоев А. Б.[1]

[1] Национальный исследовательский университет УТашкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйстваУ, Ташкент, Узбекистан; akmaljon12012@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$L_{n,\lambda}(u) \equiv u_{xx} + yu_{yy} - nu_y - \lambda^2 u = 0, y < 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области D, ограниченной его характеристиками $OB : x - 2\sqrt{-y} = 0$, $AB : x + 2\sqrt{-y} = 1$ и $OA : y = 0$, где λ - заданное число, $n \in N$, а $\lambda \in R$ или $i\lambda \in R$.

Отметим, что в работе [1] для уравнения (1) сформулирована видоизмененная задача Коши. В этой работе мы исследуем следующую начальную задачу для уравнения (1).

Начальная задача (типа Коши). Найти функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^{2,n}_{x,y}(D \cup I) \cap C^{2,n+1}_{x,y}(D)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и начальным условиям

$$u(x,0) = \tau(x), x \in [0,1]; \lim_{y \to -0} \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} u(x,y) = \nu(x), x \in (0,1), \tag{2}$$

где $I = \{(x,\ y) :\ 0 \le x \le 1,\ y = 0\}$, а $\tau(x)$ и $\nu(x)$ - заданные функции.

Теорема. *Если* $\tau(x) \in C^{2(n+1)}[0,1]$ *и* $\nu(x) \in C^2[0,1]$, *то функция*

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(4y)^k C^k_{n+1}}{(-n)_k (1/2)_k} \int_0^1 \Psi_k [\tau(\zeta), \lambda] [z(1-z)]^{k-1/2} \bar{J}_{k-1/2}(\sigma)\, dz +$$

$$+ \frac{2(4y)^{n+1}}{\pi(-n)_n (1/2)_{n+1}} \int_0^1 \Psi_{n+1} [\tau(\zeta), \lambda] [z(1-z)]^{n+1/2} \times$$

$$\times \left\{ ln\left[\sqrt{-y} z(1-z)\right] \bar{J}_{n+1/2}(\sigma) - \Omega_{n+1/2}(\sigma) \right\} dz -$$

$$- \gamma_1 (-y)^{n+1} \int_0^1 \nu(\zeta) [z(1-z)]^{n+1/2} \bar{J}_{n+1/2}(\sigma)\, dz$$

является единственным решением задачи $\{(1),(2)\}$, *где* $\gamma_1 = \Gamma(2n+3) / [(n+1)\Gamma^2(n+3/2)]$,

$$\Omega_\gamma(\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sigma/2)^{2m}}{m!(\gamma+1)_m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\gamma + j}, \quad \bar{J}_\gamma(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!(\gamma+1)_m}, \gamma \ne -1, -2, ...,$$

$\Gamma(x)$-гамма-функция Эйлера, $(a)_n$-символ Похгаммера, $\Psi[\psi(\xi),\lambda] = [\lambda^2 - (d^2/d\xi^2)\psi(\xi)]^k$, $\zeta = x - 2\sqrt{-y}(1-2z)$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$.

Литература

1. **Уринов А.К., Окбоев А.Б.** *Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода.* // Украинский математический журнал. 2020. -т. 72, - є 1. С. 100-118.

UDK 517.956

Исследование одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка

Орипов Д.Д.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистон;
dastonbekoripov94@gmail.com

В данной работе в прямоугольнике $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$ - неизвестная функция, $f(x,t)$ – заданная функция, а α – заданное действительное число, причем $0 < \alpha < 1$, $n \in N$.

Исследуем следующую начально-граничную задачу:

Задача Б. Найти функцию $u(x,t)$, которая:

1) u_t, $(\partial^j/\partial x^j)\,u$, $(\partial^j/\partial x^j)\left[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})\,u\right] \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $j = \overline{0,2n-1}$; $(\partial^{2n}/\partial x^{2n})\left[x^\alpha(\partial^{2n}/\partial x^{2n})\,u\right]$, $u_{tt} \in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) выполняются следующие начальные условия

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0,1], \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1]$$

и граничные условия

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{0,n-1}, \ \ t \in [0,T]; \\ \dfrac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}u(1,t) = 0, \ \ \dfrac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}u(x,t)\right)\Big|_{x=1} = 0, \ \ j = \overline{0,n-1}, \ \ t \in [0,T], \end{array}\right\}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$– заданные непрерывные функции.

Доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема. Пусть функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{c} {\varphi_1}^{(j)}(x), \ \ \left[x^\alpha {\varphi_1}^{(2n)}(x)\right]^{(j)}, \ [M\varphi_1(x)]^{(j)} \in C[0,1], \ j = \overline{0,2n-1}; \\ x^{\alpha/2}[M\varphi_1(x)]^{(2n)} \in C(0,1) \cap L_2(0,1); \\ {\varphi_1}^{(j)}(0) = 0, \quad {\varphi_1}^{(n+j)}(1) = 0, \\ \left[x^\alpha {\varphi_1}^{(2n)}(x)\right]^{(j)}\Big|_{x=0} = 0, \ \ \left[x^\alpha {\varphi_1}^{(2n)}(x)\right]^{(n+j)}\Big|_{x=1} = 0, \\ [M\varphi_1(x)]^{(j)}\Big|_{x=0} = 0, \ \ [M\varphi_1(x)]^{(n+j)}\Big|_{x=1} = 0, \ j = \overline{0,n-1}, \end{array}\right\}$$

функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{c} {\varphi_2}^{(j)}(x), \left[x^\alpha {\varphi_2}^{(2n)}(x)\right]^{(j)},\ j=\overline{0,2n-1};\ M\varphi_2(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1); \\ {\varphi_2}^{(j)}(0)=0,\ {\varphi_2}^{(n+j)}(1)=0, \\ \left[x^\alpha {\varphi_2}^{(2n)}(x)\right]^{(j)}\Big|_{x=0}=0,\ \left[x^\alpha {\varphi_2}^{(2n)}(x)\right]^{(n+j)}\Big|_{x=1}=0,\ j=\overline{0,2n-1}, \end{array}\right\} \quad (2)$$

а функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) по аргументу x равномерно по t, где $Mg(x)\equiv\left[x^\alpha g^{(2n)}(x)\right]^{(2n)}$. Тогда существует единственное решение задачи Б.

Отметим, что уравнение (1) при $n=1$, $\alpha=0$ совпадает с уравненем колебания балки [1]. Для этого частного случая уравнения (1) различные начально-граничные задачи сформулированы и изучены в работах [2,3]. На-чально-граничные задачи для уравнения (1) при $\forall n\in N$ и $\alpha\in(0,1)$ поставлены и изучены в работах [4,5].

Adabiyotlar

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.* М.: Наука. - 1966. - 724 с.
2. **Сабитов К.Б.** *К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок.* Диффер. уравн., 2017. Т.53, N 1. С. 89–100.
3. **Сабитов К.Б., Фадеева О.В.** *Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021. Т.25, N 1. С. 51–66.
4. **Уринов А.К., Орипов Д.Д.** *О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка* Вестн. Сам. гос. техн. унта. Сер. Физ.-мат. науки, 2023. Т.27, N 4. С. 621–644.
5. **Уринов А.К., Орипов Д.Д.** *Начально-граничная задача для одного вырождающегося уравнения высокого четного порядка* Bull. Inst. Math., 2024, Vol.7, No 3, pp. 133–145.

УДК 517.95

Задачи типа Бицадзе-Самарского для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

Рафиков А.Н.
Ферганский государственные университет, Фергана, Узбекистан;
rasulbekrafiqov@gmail.com

Рассмотрим обобщенное уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$L_{\alpha,\beta}(u)\equiv u_{\xi\eta}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_\xi+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_\eta+\gamma u=0, \quad (1)$$

в характеристическом треугольнике Δ : ограниченный прямыми $\xi=0$, $0\le\eta\le 1$; $\eta=1$, $0\le\xi\le\eta$; $\eta=\xi$ с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(0,1), B(1,1)$, где $0<2\alpha,2\beta<1, \lambda\in R$.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) в области Δ мы называем функцию $u(\xi,\eta)$, которая непрерывна в замкнутой области Δ и имеет непрерывные производные второго порядка в области Δ, и удовлетворяет обобщенному уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу (1).

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Δ, удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{\eta-\xi\to 0} u(\xi,\eta)=\tau(\xi), 0\le\xi\le 1 \tag{2}$$

и

$$\eta^{-1}\left(\bar{J}^{-}_{1+\mu-p,\lambda}\varphi\right)(\eta)= \\ =a_1(\eta)\lim_{\eta-\xi\to 0}(\eta-\xi)^{2\beta}(u_\eta-u_\xi)+b_1(\eta) \tag{3}$$

где $\varphi(\eta)=2^{\mu}\eta^{1-\alpha-\beta}\dfrac{d}{d\eta}\left[\eta^{1+\alpha+\beta}I^{-\alpha}_{0+;\eta^2}\eta^{2\alpha-1}u(0,\eta)\right]$, $\tau(\xi), a_1(\eta), b_1(\eta)-$ заданные функции, $\xi,\eta\in(0,1)$ и операторы [1]

$$\left(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}f\right)(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t(x-t)}\right)f(t)dt,$$

$$\left(\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda}f\right)(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\bar{I}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x(x-t)}\right)f(t)dt,$$

$$\bar{I}^{+}_{\alpha,\lambda}=\bar{J}^{+}_{\alpha,i\lambda},\quad \bar{J}^{-}_{\alpha,\lambda}=\bar{I}^{-}_{\alpha,i\lambda}.$$

$$I^{\alpha}_{0+;x^2}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)}{(x^2-t^2)^{1-\alpha}}2tdt,\quad \alpha>0,$$

Теорема 1. Если $\tau(\xi), a_1(\eta), b_1(\eta)\in C(\bar{J})\cap C^2(J)$ то решения задчи существует и единственно.

Литература

1. **Самко С.Г, Килбас А.А, Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* -Минск.: 1987. - 669 с.

УДК 517.95

О смешанной задаче для многомерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами

Тулакова З.Р.
Ферганский технический университет, Фергана, Узбекистан;
ziyodacoders@gmail.com

Пусть $\mathbb{R}_m$ – m-мерное евклидово пространство $(m\ge 2)$, $x:=(x_1,...,x_m)$ – произвольная точка в нём и n – натуральное число, причем $n\le m$. 2^n-ую часть евклидова пространства $\mathbb{R}_m$ определим следующим образом:

$$R^{n+}_m=\{x\in\mathbb{R}_m: x_i>0,\ i=1,...,n;\ -\infty<x_j<+\infty,\ j=n+1,...,m\}.$$

Рассмотрим обобщенное сингулярное эллиптическое уравнение

$$L^{(m,n)}_{\alpha,x}(u)\equiv\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0 \tag{1}$$

в R^{n+}_m, где $\alpha:=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, α_k – действительные числа, причем $0<2\alpha_k<1$ $(k=\overline{1,n})$.

В работе [1] доказано, что все фундаментальные решения уравнения (1) с n сингулярными коэффициентами выражаются через функцию Лауричелла от n переменных

$$F_A^{(n)}(a,b_1,...,b_n;c_1,...,c_n;x_1,...,x_n)=\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}(a)_{k_1+...+k_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(b_j)_{k_j}}{(c_j)_{k_j}}\frac{x_j^{k_j}}{k_j!},\ \sum_{j=1}^{n}|x_j|<1.$$

Пусть $x:=(x_1,...,x_m)\in\mathbb{R}_m$ и $\Omega\subset R_m^{n+}$ – первая 2^{-n}-ая часть m-мерного шара радиуса R с центром в начале координат:

$$\Omega:=\left\{x:\ x_1^2+...+x_m^2<R^2,\ x_1>0,\ ...,x_n>0,\right\}$$

а $S\subset R_m^{n+}$ – такая же часть соответствующей этому шару сферы:

$$S:=\left\{x:\ x_1^2+...+x_m^2=R^2,\ x_1>0,\ ...,x_n>0\right\}.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{x}_p=(x_1,...,x_{p-1},x_{p+1},...,x_m)\in\mathbb{R}_{m-1};$$

$$x^{(2\alpha)}=\prod_{k=1}^{n}x_k^{2\alpha};\ \tilde{x}_p^{(2\alpha)}=\prod_{k=1,\,k\neq p}^{n}x_k^{2\alpha_k};\ dx=\prod_{k=1}^{m}dx_k;\ d\tilde{x}_p=\prod_{k=1,\,k\neq p}^{m}dx_p;$$

$$D_p:=\left\{\begin{array}{l}x:\ x_1^2+...+x_{p-1}^2+x_{p+1}^2+...+x_m^2<R^2,\\ x_1>0,...,x_{p-1}>0,x_{p+1}>0,...,x_n>0\end{array}\right\};$$

$$S_p:=\left\{\begin{array}{l}x:\ x_1^2+...+x_{p-1}^2+x_{p+1}^2+...+x_m^2=R^2,\\ x_1>0,...,x_{p-1}>0,x_{p+1}>0,...,x_n>0\end{array}\right\};\ \ p=\overline{1,n}.$$

Смешанная задача $\mathbf{D^nM}$. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) из класса функций $C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям:

$$u|_{x_p=0}=\tau_p(\tilde{x}_p),\ \tilde{x}_p\in\overline{D}_p,\ p=\overline{1,n},\ \left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{N}}\right|_S=\varphi(x),\ x\in S,$$

где $\tau_p\in C\left(\overline{D}_p\right)$ и $\varphi\in C(S)$ – заданные функции, причем функции $\tau_p(\tilde{x}_p)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\tau_p(0,...,0)=\tau_k(0,...,0),\ \ \tau_k(\tilde{x}_k)|_{x_p=0}=\tau_p(\tilde{x}_p)|_{x_k=0},\ k\neq p\ (k,p=\overline{1,n}).$$

Здесь $\mathbf{N}$ – внешняя нормаль к S.

Повторяя рассуждения проведенные в [2], получим решение смешанной задачи в явном виде

$$u(\xi)=\gamma_n\prod_{j=1}^{n}\left[\xi_j^{1-2\alpha_j}\right]\sum_{k=1}^{n}(1-2\alpha_k)\int_{S_k}\tilde{x}_k^{(1)}\tau_k(\tilde{x}_k)\left[\frac{F_A^{(n-1)}(\sigma_{k0})}{X_k^{2\beta_n}}-\frac{F_A^{(n-1)}(\bar{\sigma}_{k0})}{Y_k^{2\beta_n}}\right]dS_k$$

$$+\int_S x^{(2\alpha)}\left[q_n(x;\xi)-\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2\beta_n}q_n\left(x;\bar{\xi}\right)\right]\varphi(x)dS,\ \ \tilde{x}_k^{(1)}=\prod_{j=1,j\neq k}^{n}x_j,$$

где

$$F_A^{(n-1)}(z)=F_A^{(n-1)}\left[\begin{array}{c}\beta_n,1-\alpha_1,...,1-\alpha_{k-1},1-\alpha_{k+1},...,1-\alpha_n;\\ 2-2\alpha_1,...,2-2\alpha_{k-1},2-2\alpha_{k+1},...,2-2\alpha_n;\end{array}z\right],$$

$$X_k^2 = \xi_k^2 + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} (\xi_i - x_i)^2,\ \sigma_p^0 = -\frac{4x_p\xi_p}{X_k^2},\quad \bar{\sigma}_p^0 = -\frac{R^2}{\rho^2}\frac{4x_p\xi_p}{Y_k^2},$$

$$Y_k^2 = \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \left(R - \frac{x_i\xi_i}{R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\sum_{i=1, i\neq k}^{m}\sum_{j=1, j\neq i}^{m} x_i^2\xi_j^2 - (m-2)\,R^2,$$

$$\sigma_{k0} := \left(\sigma_1^0, ..., \sigma_{k-1}^0, \sigma_{k+1}^0, ..., \sigma_n^0\right),\quad \bar{\sigma}_{k0} := \left(\bar{\sigma}_1^0, ..., \bar{\sigma}_{k-1}^0, \bar{\sigma}_{k+1}^0, ..., \bar{\sigma}_n^0\right),$$

$$R^2 = \sum_{j=1}^{m} x_j^2;\ \rho^2 = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2;\ \bar{\xi} = \left(\bar{\xi}_1, ..., \bar{\xi}_m\right),\ \bar{\xi}_j = \frac{R^2}{\rho^2}\xi_j,\ \ j = \overline{1, m},$$

$$\beta_n = \frac{m-2}{2} + n - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j,\ \ \gamma_n = 2^{2\beta_n - m}\frac{\Gamma(\beta_n)}{\pi^{m/2}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(1-\alpha_j)}{\Gamma(2-2\alpha_j)}.$$

Здесь $q_n(x;\xi)$ – фундаментальное решение уравнения (1)(см.[1]).

Литература

1. **Ergashev T.G.** *Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients.* Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2020, 13(1), P. 48 – 57.
2. **Ergashev T.G.** *The Dirichlet problem for with several singular coefficients.* Electronic Journal of Analysis and Applied Mathematics, 2018, 1, P .81 – 99.

УДК 511.52

Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом

Тураев Р. Н.[1], Мирзаев Ф. С.[2]
[1]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;
rasul.turaev@mail.ru1
[2]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;
fayzullamirzayev95@mail.com2

Постанавка задачи БSF (Битцадзе - Самарский, Франкль).

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$. Через C_0 и C_1 соответственно обозначим точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)-$ интервал оси $y = 0$.

В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлет- воряюшие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < \frac{m+2}{2}$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при

младших членах (1). На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^*B_0^*C_0^*$ ограниченный прямыми

$$A_0^*C_0^* : \beta_0 + \alpha_0 = -\frac{m}{2},\ B_0^*C_0^* : \beta_0 - \alpha_0 = -\frac{m}{2},\ A_0^*B_0^* : \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай когда $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta E_0^*C_0^*B_0^* \bigcup E_0^*C_0^*$, где $E_0^* = E_0^*(0,1)$.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R, 0),\ B_R = B_R(R, 0)$,

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = R^2,\ -R \le x \le R,\ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $I = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ y = 0\}$, $\overline{I}_1 = \{(x,y) : -\infty < x \le -1,\ y = 0\}$, $\overline{I}_2 = \{(x,y) : 1 \le x < +\infty,\ y = 0\}$, $D_R = D_R^+ \bigcup D^- \bigcup I$, D_R -подобласть неограниченной области D.

Введем линейные функции $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$, отображаюшие отрезок $[-1, 1]$ на отрезки $[-1, c]$ и $[c, 1]$ соответсвенно, причем $p(-1) = -1,\ p(1) = c,\ q(-1) = 1,\ q(1) = c,\ a = (1+c)/2,\ b = (1-c)/2$ [2].

Задача BSF. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти D_R неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1[1, с.104], в области D^-;

4) на интервале вырождения I имеет место следуюшее обшее условие сопряжения

$$u(x,-0) = a_1(x)u(x,+0) + a_2(x),\ x \in [-1,1], \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = b_1(x)\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} + b_2(x),\ x \in I, \tag{3}$$

причем пределы в (3) при $x = \pm 1$, могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, где $\alpha = (m + 2(\beta_0 + \alpha_0))/(2(m+2))$, $\beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0))/(2(m+2))$, $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1$;

5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0,$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0} = \varphi_i(x),\ \forall x \in \overline{I}_i,\ i = 1,2;$$

$$\mu_0(1+x)^\alpha D_{-1,x}^{1-\beta}u\left[\theta\left(p(x)\right)\right] = \mu_1(1-x)^\alpha D_{x,1}^{1-\beta}u\left[\theta^*\left(q(x)\right)\right] + \psi(x),\ x \in [-1,1];$$

$$u\left(p(x),-0\right) - u\left(q(x),+0\right) = f(x),\ x \in [-1,1],$$

где $\mu_0,\ \mu_1$– некоторые постоянные, причем $\mu_0^2 + \mu_1^2 \ne 0$, $D_{-1,x}^{1-\beta},\ D_{x,1}^{1-\beta}$– операторы дифферен- цирования дробного порядка [1,с.16].

$\theta(x_0)$-аффикс точки пересечения характеристики $AC_0 \subset AC$ с характеристикой исходяшей из точки $M_0(x_0, 0)$, $x_0 \in [-1, c]$;

$\theta^*(x_0)$-аффикс точки пересечения характеристики EC_1 с характеристикой исходяшей из точки $M_0(x_0, 0),\ x_0 \in [c, 1]$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ - заданные функции,

причем $\varphi_1(-1)=0$, $\varphi_2(1)=0$, $\varphi_1(-\infty)=0$, $\varphi_2(+\infty)=0$, $f(1)=0$, $\psi(x)\in C[-1,1]\bigcap C^1(-1,1)$, $f(x)\in C[-1,1]\bigcap C^1(-1,1)$, функции $\varphi_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на любых отрезках $[-N,-1]$, $[1,N]$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)|\le M|x|^{-\delta_0}$, δ_0 -положительная постоянная.

Каратопраклиев Г.Д. Об одном обобшении задачи Трикоми. // Докл. АН СССР, 1964. Т. 158, с. 271-274

Литература

1. **Мирсабуров М., Тураев Р. Н.** *Задача в неограниченной области с условием Бицадзе-Самарского на части граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристики для уравнения Геллерстедта с сингулярными коэффициентами.* Т.: Дифференциальные уравнения. - 2024. Т.60, є 8. С. 1074-1086.
2. **Каратопраклиев Г.Д.** *Об одном обобшении задачи Трикоми.* Т.: Докл. АН СССР. - 1964. - Т. 158, с. 271-274.

УДК 517.95

Спектральная задача для вырождающегося дифференциального уравнения эллиптического типа

Усмонов Д. А.[1], Турдиева К. О.[2]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
usmonov-doniyor@inbox.ru
[2]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
komilaxon84.84@gmail.com

В прямоугольнике $\Omega=\{(x,t):0<x<1;\ 0<y<1\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,y)\right]_x+u_{yy}(x,y)+\lambda u(x,y)=0, \tag{1}$$

где $u(x,y)$ - неизвестная функция; λ - числовой параметр, α,β - заданные действительные числа, причем $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$.

Задача DN_{λ}**.** Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y)$ обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,y)\right]$, $u_y(x,y)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$; $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,y)\right]_x$, $u_{yy}(x,y)\in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3)на границе области Ω выполняются следующие граничные условия:

$$u(x,0)=0,\quad \left[(1-x)^{\beta}u_x(x,y)\right]\big|_{x=1}=0,\quad x\in[0,1];$$

$$u(0,y)=0,\ u_y(1,y)=0,\ \ y\in[0,1].$$

Теорема 1. *Если $\lambda\le 0$, то задача D_{λ} имеет только тривиальное решение.*

Эта теорема была доказана методом интегральных энергий.

Теорема 2. *Если $\lambda>0$, то задача D_{λ} существует счетное число собственных значений λ_{nk} $(n,k\in N)$ задачи D_{λ}.*

Эта теорема была доказана методом разделения переменных и методом функций Грина.

Спектральные задачи для уравнения с сингулярными коэффициентами изучались в [1].

Литература

1. **Каримов К. Т.** *Спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами.* Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. N 2. с. 7-19.

УДК 517.956.6

О слабом обобщенном решение полунелокальной краевой задачи уравнении смешанного типа второго рода четвертого порядка

Халхаджаев Б.Б.
Ташкентский институт экономики и менеджмента, Ташкент, Узбекистан;
xalxadjaev@yandex.ru

В данной работе с использованием результатов работ [1-3] и с применением модифицированом метода Галеркина, априорных оценок изучается существование и единственность слабого обобщенного решения одной полунелакальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

В области $Q = (0,1) \times (0,T) = \{(x,t); 0 < x < 1;\ 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x,t) \tag{1}$$

Здесь $Pu = \sum\limits_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u; \quad Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}$ где $K_4(x,t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0; D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ $(i = 0,1,2,3,4)$, $D_t^0 u = u$, a, $b, c-$ некоторые положительные числа. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри отрезке $[0,T]$ не налагается никаких ограничений.

Полунелокальная краевая задача: найти обобщенное решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}, \quad p = 0,1,2; \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0; \tag{3}$$

$$u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0. \tag{4}$$

где $\gamma-$ величина, отличная от нуля, которая будет уточнена ниже.

Определим следующие билинейные формы:

$$a(u,\vartheta) = P(u,\vartheta) = (K_4 u_{tt}, \vartheta_{tt})_0 - ((K_3 - 2K_{4t})u_{tt}, \vartheta_t)_0 + \left(\sum_{i=0}^{2} b_i D_t^i u, \vartheta\right)_0, \tag{5}$$

где $b_i \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, причем: $b_2(x,t) = K_{4tt} - K_{3t} - K_2, \quad b_1 = K_1, \quad b_0 = K_0.$

$$m(u,\vartheta) = (Mu,\vartheta) = (au_{xx} - bu_{tt}, \vartheta_{xx})_0 - (cu_{xx}, \vartheta)_0. \tag{6}$$

Определение. Функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ называется *слабым обобщенным решением* задачи (1)-(4), если для любой функции

$$\vartheta(x,t) \in W_2^2(Q) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(Q),$$

удовлетворяющей условиям

$$\gamma D_t^q \vartheta|_{t=0} = D_t^q \vartheta|_{t=T}, \quad q = 0, 1,$$

выполняется интегральное тождество:

$$a\left(u, e^{-\lambda t}\vartheta\right) + m\left(u, e^{-\lambda t}\vartheta\right) = \left(f, e^{-\lambda t}\vartheta\right)_0. \tag{7}$$

Теорема. Пусть выполнены высшее перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), $K_1(x,t) > 0$ достаточно большая функция, кроме того пусть выполнены следующие условии для коэффициентов уравнения (1); $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$,$\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, для любых $(x,t) \in \overline{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, $K_{4t}(0) = K_{4t}(T)$, $K_3(x,0) = K_3(x,T)$; $K_2(x,0) = K_2(x,T)$; $K_0(x,0) = K_0(x,T)$ для всех $x \in [0,1]$. Тогда для любого $f(x,t) \in L_2(Q)$, существует единственное слабое обобщенное решение $u(x,t)$ задачи (1)-(4) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, и для нее справедливо следующая оценка.

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} \leq c\,\|f\|_0^2 \tag{8}$$

Литература

1. **Врагов В.Н.** *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: НГУ, 1983. 128 с.
2. **Джамалов С.З.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография.* Ташкент, 2000. 173 с.
3. **Ладыженская О.А.** *Краевые задачи математической физики.* - М.: Наука, 1973. 407 с.

УДК 517.95

Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода со спектральным параметром в области - эллиптическая часть которой вертикальная полуполоса

Худоёров А. А.[1], Зуннунов Р. Т.[2,3], Хайдаров И. У.[4]
[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
[2]Филиал РГУ Нефти и Газа (НИУ) имени И.М. Губкина в г. Ташкенте, Узбекистан;
[3]Nordic International University в г. Ташкенте, Узбекистан;
zunnunov@mail.ru
[4]Ферганский Государственный Университет, Фергана, Узбекистан;
ibrohimbek@mail.ru

Теория краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа является одним из основных разделов современной теории уравнений в частных производных целого порядка и встречается при решении многих вопросов прикладного характера. Интерес к изучению краевых задач для таких уравнений возрос после того, как обнаружилась их связь например, с задачами теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и без моментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

Известно, что наиболее полный обзор краевых задач для модельных уравнений смешанного типа первого рода можно найти в монографиях Ф. Трикоми, А.В Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Ю.М. Крикунова, М.М. Смирнова а также в работах многих ученых. Краевые задачи для уравнений смешанного (эллиптико-гиперболического) типа первого рода со спектральным параметром в ограниченных областях достаточно полно изучены, например в работах М.С. Салахитдинова и А.К. Уринова [1], а неограниченных областях в работах Х.А.Чиханова, Р.Т. Зуннунова [2].

Краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода со спектральным параметром в ограниченных и неограниченных областях остаются малоизученными и эта работа является продолжением исследований в этом направлении.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + signy|y|^m u_{yy} - \lambda^2 u = 0, \quad 0 < m < 1 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1,$ $0 < y < +\infty\}$, $l_0 = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками

$$AC:\ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0, \qquad BC:\ x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$. Введем обозначения $\beta = \frac{m}{2(m-2)}$, $-\frac{1}{2} < \beta < 0$, $l_1 = \{(x,y) : x = 0, 0 \leqslant y < +\infty\}$. $l_2 = \{(x,y) : x = 1, 0 \leqslant y < +\infty\}$.

Задача T^∞. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\Omega \cup \overline{l_1} \cup \overline{l_2} \cup AC \cup BC) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) первые производные непрерывны в областях Ω_1 и Ω_2 причем в точках A и B функция $u_y(x,y)$ может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка;

4) удовлетворяет условиям

$$u(0,y) = 0, \qquad u(1,y) = 0, \qquad 0 \leqslant y < +\infty,$$

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \qquad \text{равномерно по} \quad x \in [0,1],$$

$$u\,|_{AC} = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

где $\psi(x)$ - заданная функция, причем $\psi(0) = 0$, $\psi(x) \in C^3[0,1/2]$. На линии $y = 0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$$u(x,-0) = u(x,+0), \qquad u_y(x,-0) = -u_y(x,+0).$$

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом функций Грина и интегральных уравнений.

Литература

1. **Салахитдинов М.С., Уринов А.К.** *Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* -Ташкент. ФАН, 1997. - 166 с.

2. **Зуннунов Р.Т.** *Краевые задачи для уравнений смешанного типа в неограниченных и ограниченных областях.* Дис.... канд. физ.- мат. наук. - Ташкент, 2010. - 115 с.

УДК 517.95

Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода в области, эллиптическая часть которой- первая четверть плоскости

Бектошева Ш. А.[1], Шейдуллаева Т. Т.[2]
[1]Кокандский педагогический институт, Коканд, Узбекистан;
shohsanambektosheva5@gmail.com
[2]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
tahminan2101@gmail.com

Известно, что наиболее полный обзор краевых задач для уравнений смешанного типа можно найти в монографиях Ф. Трикоми, А.В Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, Ю.М. Крикунова, М.М. Смирнова а также в работах многих ученых. Краевые задачи для уравнений смешанного (эллиптико-гиперболического) типа первого рода в ограниченных и неограниченных областях достаточно полно изучены, а краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода в ограниченных областях изучены в работах, например Кароля И.Л., Смирнова М.М и других ученых. Краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода в неограниченных областях остаются малоизученными и эта работа является продолжением исследований в этом направлении.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y|y|^m u_{yy} = 0, \quad 0 < m < 1 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$, $l_0 = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками

$$AC:\ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0, \quad BC:\ x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$. Введем обозначения

$$\beta = \frac{m}{2\,(m-2)}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0,$$

$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left[\frac{1}{1-2\beta}\cdot\frac{x}{2}\right]^{1-2\beta}\right), \quad l_1 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty,\ y = 0\}.$$

Здесь, $\theta_0(x)$ - аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in AB$, с характеристикой AC.

Задача BS^{∞}. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\Omega \cup AC \cup BC \cup \overline{l_1}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) удовлетворяет условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 1 \leqslant x < +\infty, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), \quad 0 \leqslant y < +\infty, \tag{3}$$

$$u\left[\theta_0(x)\right] = a u(x,0) + \omega(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

где $a \leqslant 1$, а $\varphi(x)$, $\psi_1(y)$, $\omega(x)$ - заданные функции, причем $\omega(x) = x \cdot \omega^*(x)$, $\omega^*(x) \in C^1\left(\overline{l_0}\right) \cap C^2(l_0)$, $\varphi(x) \in C[1, +\infty)$, $\psi_1(y) \in C[0, +\infty)$. На линии $y = 0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$$u(x, -0) = u(x, +0), \qquad u_y(x, -0) = -u_y(x, +0). \tag{6}$$

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом функций Грина и интегральных уравнений.

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* - М.: Высшая школа, 1985. - 304 с.
2. **Флайшер Н.М.** *Краевые задачи для уравнений смешанного типа в случае неограниченных областей* // Revul. Roum. Math. Pures et. Appl. - Т. 5, №8. 1965. - С.34-45.
3. **Zunnunov R.T.** *A Problem with Shiff for Mixed-Type Equation in Domain, the Elliptical Part of Which Is a Horizontal Strip.* // Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 44. No. 10, 2023.P.4410-4417.
4. **Zunnunov R.T.** *Bitsadze-Samarskii type a Problem for a Mixed-Type Equation that Elliptic in the first quadrant of the plane.* // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274 No. 2, 2023.P.301-306.
5. **Кароль И.Л.** *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.*ДАН .СССР. том 88, №2, 1953, стр 197-200.
6. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* - М.: Наука, 1970. - 292 с.

УДК 517.95

Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода в области - эллиптическая часть которой прямоугольник

Эргашев А. А.[1], Зуннунов Р. Т.[2,3]
[1]Кокандский педагогический институт, Коканд, Узбекистан;
[2]Филиал РГУ Нефти и Газа (НИУ) имени И.М. Губкина в г. Ташкенте, Узбекистан; [3]Nordic International University в г. Ташкенте, Узбекистан;
zunnunov@mail.ru

Известно, что наиболее полный обзор краевых задач для уравнений смешанного типа можно найти в монографиях Ф. Трикоми, А.В Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, Ю.М. Крикунова, М.М. Смирнова а также в работах многих ученых. Краевые задачи для уравнений смешанного (эллиптико-гиперболического) типа первого рода в ограниченных и неограниченных областях достаточно полно изучены, например в работах [1-4] а краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода в ограниченных областях с гладкой границей изучены в работах, например Кароля И.Л. [5], Смирнова М.М [6] и других ученых. Краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода в ограниченных областях с кусочно-гладкой границей остаются малоизученными и эта работа является продолжением исследований в этом направлении.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y|y|^m u_{yy} = 0, \quad 0 < m < 1 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_0 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $l_0 = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками

$$AC: \ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0, \quad BC: \ x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$. Введем обозначения

$$\beta = \frac{m}{2\,(m-2)}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad \theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left[\frac{1}{1-2\beta}\cdot\frac{x}{2}\right]^{1-2\beta}\right).$$

Здесь, $\theta_0(x)$ - аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in AB$, с характеристикой AC.

Задача BS. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\Omega \cup AC \cup BC) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) удовлетворяет условиям

$$u(x,1) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad u(1,y) = \psi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{3}$$

$$u\left[\theta_0(x)\right] = au(x,0) + \omega(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

где $a \leqslant 1$, а $\varphi(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\omega(x)$ - заданные функции, причем $\omega(x) = x \cdot \omega^*(x)$, $\omega^*(x) \in C^1\left(\overline{l_0}\right) \cap C^2(l_0)$, $\varphi(x) \in C[0,1]$, $\psi_1(y) \in C[0,1]$, $\psi_2(y) \in C[0,1]$. На линии $y = 0$ параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$$u(x,-0) = u(x,+0), \quad u_y(x,-0) = -u_y(x,+0). \tag{6}$$

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом функций Грина и интегральных уравнений.

Литература

1. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* - М.: Высшая школа, 1985. - 304 с.

2. **Флайшер Н.М.** *Краевые задачи для уравнений смешанного типа в случае неограниченных областей* // Revul. Roum. Math. Pures et. Appl. - Т. 5, №8. 1965. - С.34-45.

3. **Zunnunov R.T.** *A Problem with Shiff for Mixed-Type Equation in Domain, the Elliptical Part of Which Is a Horizontal Strip.* // Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 44. No. 10, 2023.P.4410-4417.

4. **Zunnunov R.T.** *Bitsadze-Samarskii type a Problem for a Mixed-Type Equation that Elliptic in the first quadrant of the plane.* // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274 No. 2, 2023.P.301-306.

5. **Кароль И.Л.** *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.*ДАН .СССР. том 88, №2, 1953, стр 197-200.
6. **Смирнов М.М.** *Уравнения смешанного типа.* - М.: Наука, 1970. - 292 с.

UDK 517.95

On a problem with a discontinuous gluing condition for an elliptic-hyperbolic equation

Nishonova Sh.T.[1], Sodiqova M.S.[1]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shahnozanishonova910@gmail.com; sodiqovamohlaroyim11@gmail.com

Let $\Omega = \Omega_0 \cup AB \cup \Omega_1$, where $\Omega_0 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1, y > 0\}$, $AB = \{(x,y) : -1 < x < 1, y = 0\}$, $\Omega_1 = \{(x,y) : -1 < x < 1, -h < y < 0\}$, $h = const > 0$. In the domain Ω we consider the following equation

$$0 = \begin{cases} Lu \equiv u_{xx} + u_{yy}, & (x,y) \in \Omega_0, \\ Eu \equiv u_{xy} + \lambda u, & (x,y) \in \Omega_1, \end{cases} \tag{1}$$

where $u(x,y)$ is the unknown function, λ is a given real number.

The equation (1) in the domain Ω, belongs to the mixed type, more precisely it belongs to hyperbolic type in the domain Ω_1 and elliptic type in the domain Ω_0.

Problem D. Find a function $u(x,y)$ satisfying the following conditions:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xy} \in C(\Omega_1)$, u_{xx}, $u_{yy} \in C(\Omega_0)$;

2) It satisfies equation (1) in the domains Ω_0 and Ω_1;

3) It satisfies the following boundary conditions

$$u(-1,y) = \varphi(y), \quad u(x,y)\Big|_\sigma = \psi(x,y),$$

and the gluing conditions

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad u_y(x,+0) = -u_y(x,-0) + \beta(x),$$

where $\varphi(y)$, $\psi(x,y)$, $\beta(x)$ are given sufficiently smooth functions, $\sigma = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1, y \geq 0\}$.

Theorem 1. If $\lambda > 0$, then the problem A has at the most one solution.

References

1. **Салохиддинов М.С, Уринов А.К.** *Гиперболик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар.* - Фаргона: Фаргона Давлат университети нашриёти, 2005.
2. **Салохиддинов М.С, Уринов А.К.** *Аралаш типдаги дифференциал тенгламалар.* - Фаргона: Фаргона Давлат университети нашриёти, 2007.

2. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

MSC 35B51, 35D30, 35K45

Analysis of crosswise diffusion system with a time-dependent source

Aripov M.[1], Bobokandov M.[1,2]
[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
mirsaidaripov@mail.ru
[3] Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
bmahmudbey@gmail.com

In the domain $Q = \left\{(t,x) : t > t_0 > 0, x \in \mathbb{R}^N\right\}$, we consider the Cauchy problem to the double nonlinear parabolic system of equations with variable density, not in divergence form with time-dependent absorption

$$\begin{cases} \rho_1(x)u_t = v^{q_1}\nabla\left(\rho_2(x)u^{m_1-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u\right) - d_1\rho_1(x)t^{\lambda_1}u^{1+\alpha_1}v^{\alpha_2} \\ \rho_1(x)v_t = u^{q_2}\nabla\left(\rho_2(x)v^{m_2-1}\left|\nabla v^k\right|^{p-2}\nabla v\right) - d_2\rho_1(x)t^{\lambda_2}u^{1+\alpha_3}v^{\alpha_4} \end{cases}, \quad (t,x) \in Q \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(t,x)|_{t=t_0} = u_0(x) \geq 0, \\ v(t,x)|_{t=t_0} = v_0(x) \geq 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^N \qquad (2)$$

where $m_i \geq 1, p \geq 2, k > 0, q_i < 1, \rho_1 = |x|^l, \rho_2 = |x|^n$, d_i, α_j, $\left(i = 1,2,\ j = \overline{1,4}\right)$ and nonnegative $n_i, l_i, \beta_i, p_i, i = 1,2-$ are given numerical parameters.

System (1) is widely used in physics, chemistry, biology, and other fields. For example, system (1) describes such processes as heat dissipation, diffusion processes, filtering problems, image processing, and biological population [2]-[3], [5].

In [4], in the case $n = 0, d_1 = d_2 = -1$, the authors established an upper bound and asymptotic representation of the solution to the system (1).

Here, we provide a method of nonlinear splitting [1] for the construction of self-similar equations for the system (1). We look for the solutions $u(t,x)$, $v(t,x)$ in the form

$$\begin{cases} u(t,x) = \bar{u}_1(t)\, w_1(\tau(t), r), \\ v(t,x) = \bar{u}_2(t)\, w_2(\tau(t), r). \end{cases} \qquad (3)$$

Then, we obtain $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$ as $\bar{u}_i(t) = B_i t^{b_i}$, $(i = 1,2)$,
where $r = |x|$, $b_i = (-1)^i \dfrac{(1+\lambda_1)(1+\alpha_{5-i}) - (1+\lambda_2)\alpha_{3-i}}{\delta_b}$, $\delta_b = \alpha_1(\alpha_4 - 1) - \alpha_2(1+\alpha_3) \neq 0$, $B_i = \left[\left(\dfrac{b_1}{d_1}\right)^{(-1)^{i-1}\alpha_{5-i}-1}\left(\dfrac{b_2}{d_2}\right)^{(-1)^i\alpha_{3-i}}\right]^{\frac{1}{\delta_b}}$, $(i = 1,2)$.

From systems (3) and (1), we obtain the following system of equations:

$$r^l\frac{\partial w_i}{\partial\tau}=r^{1-N}w_{3-i}^{q_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1+n}w_i^{m_i-1}\left|\frac{\partial w_i^k}{\partial r}\right|^{p-2}\frac{\partial w_i}{\partial r}\right)-\frac{K_ir^l}{\tau}\left(w_1^{1+\alpha_{2i-1}}w_2^{\alpha_{2i}}+w_i\right),\ (i=1,2), \tag{4}$$

where $\tau(t)=\begin{cases}C_it^{c_i},\ c_i\neq 0,\\ D_i\ln t,\ c_i=0\end{cases},\ (i=1,2),$

$c_i=c_{3-i}=1+b_i\left[m_i+k(p-2)-1\right]+q_ib_{3-i}$, $D_i=D_{3-i}=B_{3-i}^{q_i}B_i^{m_i+k(p-2)-1}$, $C_i=\frac{D_i}{c_i}$, $K_i=\frac{d_iB_i^{\alpha_{2i}+\alpha_{2i-1}}}{c_i}$, $(c_i\neq 0,\ i=1,2)$.

Lemma 1. A weak solution of the problem (1)-(2) has the following asymptotics

$$u_A(t,x)\approx e_1A_1B_1t^{b_1}\left(a-C_1^{\frac{1}{p-1}}t^{\frac{c_1}{p-1}}r^{\frac{p+l-n}{p-1}}\right)_+^{\gamma_1},$$

$$v_A(t,x)\approx e_2A_2B_2t^{b_2}\left(a-C_2^{\frac{1}{p-1}}t^{\frac{c_2}{p-1}}r^{\frac{p+l-n}{p-1}}\right)_+^{\gamma_2},$$

at $|x|\to a^{1/\gamma}\tau^{-\frac{1}{p+l-n}}$, where $\gamma=\frac{p+l-n}{p-1}$, $\gamma_i=\frac{(p-1)[m_{3-i}+k(p-2)-1-q_i]}{\delta_\gamma}$, $\delta_\gamma=\left[m_1+k(p-2)-1\right]\left[m_2+k(p-2)-1\right]\neq 0$, $(b)_+=\max\{b,0\}$, e_i, A_i, $(i=1,2)$ - some constants.

References

1. **Aripov M., Sadullaeva S.** *Computer simulation of nonlinear diffusion processes.* National University of Uzbekistan Press, Tashkent (2020). [in Russian]
2. **Aripov M., Bobokandov M.** *Analysis of a double nonlinear parabolic system with a time-dependent source.* in international conference: Conference: Modern Methods of Mathematical Physics and Their Applications, 2025. pp. 238-239.
3. **Bobokandov M., Aripov M., Uralov N.** *Analysis of Double Nonlinear Parabolic Crosswise-Diffusion Systems with Time-Dependent Nonlinearity Absorption.*, ICTEA: International Conference on Thermal Engineering, 1, No 1, (2024).
4. **Bobokandov M.** *Global solutions for double nonlinear parabolic crosswise-diffusion systems with time-dependent nonlinearity absorption.* Acta NUUz (Exact Sciences Series), 2023. Vol. 1, No 1, pp. 226-235.
5. **Bobokandov M.** *Analysis of a double nonlinear parabolic crosswise-diffusion system.* in international conference: Modern Problems and Prospects of Applied Mathematics, 2024. pp. 75-78.

On the initial value problem for the Barenblatt-Zheltov-Kochina type fractional equation

Ashurov R. R.[1], Fayziyev Yu. E.[2], Khushvaktov N. Kh.[3]

[1] Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan; ashurovr@gmail.com

[2] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; fayziev.yusuf@mail.ru

[3] Tashkent International University of Financial Management and Technology (TIFT), Tashkent, Uzbekistan; nuriddinh@gmail.com

Let a separable Hilbert space H, $A : H \to H$ be a self-adjoint, positive, unbounded operator defined on the domain $D(A)$. We assume that A possesses a compact inverse A^{-1}. Denote by $\{v_k\}$ a complete orthonormal set of eigenfunctions and by $\{\lambda_k\}$ the associated set of positive eigenvalues. The eigenvalues can be ordered in a non-decreasing sequence, meaning $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \to +\infty$. Let the vector function (or simply function) $h(t)$ be defined on the interval $[0, +\infty)$ with values in the Hilbert space H. The Caputo fractional derivative of order $\rho \in (0, 1)$ is defined as follows (see, for example [1])

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int\limits_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0.$$

Let $\rho \in (0, 1)$ is a given constant. Let $C((a, b); H)$ stand for a set of continious functions $u(t)$ of $t \in (a, b)$ with values in H.

We consider the following problem:

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + A(1 + \gamma D_t^\rho)u(t) = f(t), \quad 0 < t < T; \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

here the parameter $\gamma > 0$. When $\rho \in (0, 1)$ the first equation in (1) is called to the Barenblatt-Zheltov-Kochina type fractional differential equation. These types of problems are also called *the forward problems*.

Definition. An absolutely continuous function $u(t) \in C([0, T]; H)$ that has the properties $D_t^\rho u(t)$, $A(D_t^\rho u(t))$, $Au(t) \in C((0, T); H)$ and satisfies the conditions in (1) is called the solution of the initial condition problem (1).

Theorem. Let $f(t) \in C([0, T]; H)$. Then, there is a unique solution to the problem (1), and it takes the following form:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 + \gamma\lambda_k} \int\limits_0^t \eta^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\mu_k \eta^\rho) f_k(t - \eta) d\eta \right] v_k.$$

References

1. **Lizama C.** *Abstract linear fractional evolution equations.* in Handbook of Fractional Calculus with Applications, Ed. by J. A. T.Marchado (De Gruyter, Berlin, 2019), Vol. 2, pp. 465–497.

Existence and uniqueness of the inverse problem for the fractional integro-differential telegraph equation in a bounded domain

Ashurov R., Saparbayev R.
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, University street 9, Tashkent 100174, Uzbekistan;
rajapboy1202@gmail.com

Consider the fractional telegraph equation in the domain $(0, \pi) \times (0, T]$,

$$(D_{0t}^\alpha \circ D_{0t}^\alpha)u(x, t) + 2aD_{0t}^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) = \int\limits_0^t k(\tau)u(x, t - \tau)d\tau, \tag{1}$$

with the initial conditions

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,0)=\varphi_0(x),\quad x\in[0,\pi], \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad x\in[0,\pi], \tag{3}$$

and the boundary conditions

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad 0<t\leq T, \tag{4}$$

where D_{0t}^{α} is the Caputo fractional derivative of order $0<\alpha<1$ in the time variable and $\varphi_0(x),\varphi_1(x),f(x,t)$ are given smooth functions. We call this problem the forward problem

Definition 1. (see, [1]) The Caputo fractional derivative of order $0<\alpha<1$ of the integrable function $u(x,t)$ is defined by

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\frac{d}{d\tau}u(x,\tau)d\tau.$$

We pose the inverse problem as follows: find the function $k(t)$ in (1), if the solution of the problem (1)-(4) satisfies

$$u_x(x,t)|_{x=0}=\psi(t),\quad 0\leq t\leq T, \tag{5}$$

$\psi(t)$, is a given function.

The additional condition (5) corresponds to a given heat flow at the left end of a rod of length.

Definition 2. Let the functions $\{u(x,t),k(t)\}$ satisfy the properties $(D_{0t}^{\alpha}\circ D_{0t}^{\alpha})u(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)\in C((0,\pi)\times(0,T])$, $u(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C([0,\pi]\times[0,T])$ and $k(t)\in C[0,T]$ and also satisfy the conditions (1)-(5), are called the solution of the inverse problem.

One of the first works studying the fractional-time telegraph equation is the fundamental paper by R. Cascaval et al.[2]. In the paper [3] this equation with the right-hand side $f(t)$ is considered and conditions for the initial functions and the right-hand side of the equation are found that guarantee both the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem. It should be emphasized that these conditions turned out to be less restrictive than was assumed in the paper by R. Cascaval et al. [2], where some restrictions on the spectrum of the operator A were also assumed. Work [4] is a continuation of the article [3], where the authors investigated the inverse problem of determining the right-hand side $f(t)$ of the equation.

In the present paper we first investigate the forward problem. By the separating variables method, the forward problem is reduced to equivalent integral equations. Then, using estimates of the Mittag-Lefer function an estimate for the solution of the forward problem is obtained in terms of the norm of the unknown functions. The inverse problem is reduced to the equivalent system of integral equations. For solving this system, the contracted mapping principle is applied.

It should be noted that the inverse problem we are considering is being studied for the first time for the fractional-order telegraph equation.

References

1. **Pskhu A.V.** *Partial Differential Equations of Fractional Order.* Moscow: Nauka, 2005, [in Russian].

2. **Cascaval R., Eckstein E., Frota C., Goldstein A.** *Fractional telegraph equations.* J. Math. Anal. Appl. 2002, 276(1), 145–159.
3. **Ashurov R., Saparbayev R.** *Fractional telegraph equation with the Caputo derivative.* Fractal Fract. 2023, 7(6), 1–17.
4. **Ashurov R., Saparbayev R.** *Time-dependent identification problem for a fractional telegraph equation with the Caputo derivative.* Fractional Calculus and Applied Analysis. 2024, 27, 652–676.

MSC 517.95

Monotonicity in the parameter of the Mittag-Leffler function and determining the fractional exponent of the subdiffusion equation

Ashurov R. R.[1], Sulaymonov I. A.[1]
[1]V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; ashurovr@gmail.com, ilyosxojasulaymonov@gmail.com

Let Ω be an arbitrary N - dimensional domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the following *Initial-boundary value problem*:

$$\begin{cases} D_t^\rho u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\varphi(x)$ is a continuous function, Δ is the Laplace operator, $\rho \in (0,1)$ and D_t^ρ is the fractional Caputo derivative defined as (see, for example, [1], p. 91):

$$D_t^\rho u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{u(x,\xi) - u(x,0)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0, \ x \in \Omega.$$

When modeling various processes, the order of the fractional derivative ρ is often unknown. Unfortunately, in the processes under consideration there is no device for measuring this parameter. One of the effective methods for finding the unknown order of the derivative is, by setting some additional conditions for a solution $u(x,t)$ of problem (1), to solve analytically the corresponding inverse problem.

In recent years, significant advances have been made in the study of this type of inverse problems (see Liu et al. [2] and references therein for a comprehensive review of the work published up to 2019). Moreover, numerous studies (e.g. [3]-[4]) published after 2019 have proposed additional conditions for efficiently treating and solving these inverse problems.

A very interesting paper [5] by G. Li, Z. Wang, X. Jia, Y. Zhang was recently published, in which the order of the fractional derivative ρ in the equation $D_t^\rho u(x,t) - c\Delta u(x,t) = 0$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1,2,3$ and c is a sufficiently small positive number) was reconstructed from information on the solution of the initial-boundary value problem at only one point of space-time (x_0, t_0) (see Theorem 2). However, in our opinion, this result is questionable in the sense that the conditions of this theorem are not sufficient to guarantee its assertion. Note also that the proof relies on the condition $d \le 3$. However, the paper contains an interesting auxiliary result (see Theorem 1): the authors proved that the function $g(\rho) = E_\rho(-ct^\rho)$ has a negative derivative, $g'(\rho) < 0$, if t is large enough and c is small enough.

Motivated by the results and interesting ideas of [5], we continued our research in this direction. We managed to find the missing condition in Theorem 2 and remove some restrictions mentioned in [5]. In particular:

1) we have proved that the Mittag-Leffler functions $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-t^{\rho})$ and $E_{\rho}(-t^{\rho})$ increase monotonically in parameter ρ for sufficiently small t. This is the main result of this work;

2) the requirement of a sufficiently small coefficient c was removed from the considered equation;

3) the restriction on the dimension of the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3$ was removed. Of course, the transition to the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, with $N \geq 1$, does not cause any particular difficulty, but we would like to draw the attention of readers to one fundamental work by V.A. Ilyin [6];

4) it is shown that the conditions of Theorem 2 of [5] is not complete and an updated version of this theorem with a proof is presented.

5) other applications of the monotonicity in parameter of Mittag-Leffler functions are given.

References

1. **Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* Elsevier, Amsterdam, 2006.

2. **Li Z., Liu Y., Yamamoto M.** *Inverse problems of determining parameters of the fractional partial differential equations.* Handbook of fractional calculus with applications, 2019. Vol 2, pp. 431-442.

3. **Ashurov R.R., Umarov S.R.** *Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations.* Fractional Calculus and Applied Analysis, 2020. Vol 23, Issue 6, pp. 1647-1662.

4. **Alimov S.A., Ashurov R.R.** *Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation.* Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2020. Vol 28, Issue 5, pp. 651-658.

5. **Li G., Wang Z., Jia X., Zhang Y.** *An inverse problem of determining the fractional order in the TFDE using the measurement at one space-time point.* Fractional Calculus and Applied Analysis, 2023. Vol 26, pp. 1770-1785.

6. **Ilyin V.A.** *On the solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations.* Russian Math. Surveys, 1960. Vol 15, Issue 2, pp. 97-154.

UDK 517.957

Integral manbali Liuvill tenglamasini davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida integrallash

Xasanov A.B.[1], Xudayorov U.O.[1,2]

[1]Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston; ahasanov2002@mail.ru

[2] Mirzo Ulug’bek nomidagi Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti, Samarqand, O‘zbekiston; xudayorov.2022@bk.ru

XIX asrning 70-yillaridan boshlab ushbu

$$u_{xt}(x,t) = Ke^{u(x,t)},\ K = const$$

tenglama Liuvill tenglamasi deb atala boshlandi [1]. 1976-yilda V.A. Andreyev sochilish nazariyasining teskari masalasi usulidan foydalanib, Liuvill tenglamasining soliton yechimini topishga muvaffaq bo‘ldi [2]. Davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida esa Liuvill tenglamasini integrallash algoritmi mualliflarning [3] maqolasida keltirilgan.

Mazkur ishda ushbu

$$q_{xt} = e^q + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)\left(\psi_1^+(x,\lambda,t)\psi_1^-(x,\lambda,t) - \psi_2^+(x,\lambda,t)\psi_2^-(x,\lambda,t)\right)d\lambda, \quad (1)$$

$x \in R, t > 0$ ko‘rinishdagi integral manbali Liuvill tenglamasining
quyidagicha kiritiladi

$$\begin{cases} q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), q_0(x+\pi) = q_0(x) \in \mathbb{C}^4(\mathbb{R}) \\ q(x,t)|_{x=0} = q_1(t), q_1(t) \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ |q_1(t)| < M,\ M > 0,\ q_1(0) = q_0(0) \end{cases} \quad (2)$$

shartlar bilan qaralgan aralash masalaning haqiqiy cheksiz zonali hamda

$$q(x+\pi,t) = q(x,t) \in C_{x,y}^{1,1}(t>0) \cap C(t \geq 0) \quad (3)$$

silliqlik shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish algoritmini keltiramiz. Bu yerda $\psi^{\pm}(x,\lambda,t) = \left(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t), \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t)\right)^T$ vektor-funksiya ushbu

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & q_x(x,t) \\ q_x(x,t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \quad (4)$$

Dirak tenglamalar sistemasining Floke yechimlari, $\beta(\lambda,t)$ funksiya $C(\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ fazoga qarashli bo‘lib, ushbu

$$\beta(\lambda,t) = O\left(\lambda^{-3}\right),\ |\lambda| \to \infty$$

asimptotikani qanoatlantiradi.

(4) tenglamalar sistemasida x ni τ ga siljitib

$$L(\tau,t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & q_x(x+\tau,t) \\ q_x(x+\tau,t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \quad (5)$$

siljigan argumentli Dirak operatorini tuzib olib, uning $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ va $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini $c(x,\lambda,\tau,t) = \left(c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t)\right)^T$ va $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ orqali belgilab olamiz. Bular orqali tuzilgan $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1((\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ funksiyaga $L(\tau,t)$ operatorning Lyapunov funksiyasi deyiladi.

$\lambda_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}$ sonlar orqali (5) tenglamaga qo‘yilgan davriy va yarimdavriy $(y_j(0,\tau,t) = \pm y_j(\pi,\tau,t)), j = 1,2$ chegaraviy masalaning xos qiymatlarini belgilasak,

ular $\Delta(\lambda,\tau,t)\mp 2=0$ tenglamaning ildizlari bilan usma-ust tushadi. $\xi_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ lar orqali esa (5) tenglamaga qo'yilgan Dirixle chegaraviy masalasining xos qiymatlarini belgilasak, ular $s_1(\pi,\lambda,t)=0$ tenglamaning ildizlari bilan usma-ust tushadi.

Teorema. Agar $q_0(x)$ va $q_1(t)$ funksiyalar (2) shartlarni qanoatlantirsa, u holda (1)-(3) aralash masalaning quyidagi

$$q(\tau,t)=q_1(t)+\int_0^{\tau}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}2(-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k(\xi(s,t))ds,$$

$$\psi^{\pm}(\tau,\lambda,t)=c(\tau,\lambda,t)+\frac{s_2(\pi,\lambda,t)-c_1(\pi,\lambda,t)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda,\tau,t)-4}}{2s_1(\pi,\lambda,t)}s(\tau,\lambda,t)$$

formulalar orqali aniqlangan yagona $\{q(\tau,t),\psi^{\pm}(\tau,\lambda,t)\},\tau\in\mathbb{R},t>0$ yechimi mavjud bo'ladi. Bu yerda

$$\xi=\xi(\tau,t)=(\ldots,\xi_{-1}(\tau,t),\xi_1(\tau,t),\ldots),$$

$$h_n(\xi(\tau,t))=\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1}(\tau,t))(\lambda_{2n}(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))}f_n(\xi(\tau,t)),$$

$$f_n(\xi(\tau,t))=\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}}.$$

Adabiyotlar

1. **Darboux G.** *Sur les equations aux derivees partielles du second ordre.* Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 1re serie. 1870. Vol. 7. P. 163-173.

2. **Андреев В.А.** *Применение метода обратной задачи рассеяния к уравнению* $\sigma_{xt}=e^{\sigma}$. Теоретическая и математическая физика. 1976. Том 29:2, С. 213–220.

3. **Khasanov A.B., Normurodov Kh.N., Khudayorov U.O.** *Cauchy problem for the nonlinear Liouville equation in the class of periodic infinite-gap functions.* Differ. Equ., 2023. Vol. 59, Issue 10, pp. 1413–1426.

On the spectral problem of the Bitsadze-Samarskii type for a second-order ordinary differential equation

Kadirkulov B. J.[1,2], Ergashev O. T.[2]

[1]Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan;

[2] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; b.kadirkulov@afu.uz, okiljonergashev@gmail.com

A nonlocal boundary value problem of a new type for a partial differential equation arising in plasma theory was formulated and investigated by A.V. Bitsadze and A.A. Samarskii in [1] and in scientific literature was called the Bitsadze-Samarskii (BS) problem (type). The BS problem differs from other problems in that the boundary values of the desired solution or its derivatives are repeated at the interior points of the region where it satisfies the equation. Hence, the spatial differential operator is non-self-adjoint, and

the corresponding system of eigenfunctions, in general, will be incomplete, and hence, problems arise in studying the completeness and basis property of such systems.

In this paper, the spectral properties of the Bitsadze-Samarskii type problem of the form

$$-X''(x) = \lambda X(x)\, 0 < x < 1,$$

$$X'(0) = 0,\ X(1) = X(x_0).$$

are studied, the eigenvalues are found, as well as the corresponding root functions, their completeness and basis property are proved, and the adjoint problem is also studied. It should be noted that similar works have been studied in the works of [2] and [3].

References

1. **Bitsadze A.V., Samarskii A.A.** *Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems.*, Russ. Sov. Math. Dokl., 1969. Vol. 10, pp. 398-400.
2. **Ashurov R., Kadirkulov B., Jalilov M.,** *On an inverse problem of the Bitsadze-Samarskii type for a parabolic equation of fractional order.* Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 2023. Vol. 29, Issue 70, pp. 104-115.
3. **Kadirkulov B., Ergashev O.** *On a problem of the Bitsadze-Samarskii type for a second-order ordinary differential equation.* Bull. Inst. Math., 2023. Vol. 6, Issue 4, pp. 113-121. (In Russian).

UDK 517.95

The estimation of the bivariate Mittag-Leffler type function and its application to inverse problems for a sub-diffusion equation

Karimov E. [1], **Tokmagambetov N.** [2]
[1] Ghent University, Ghent, Belgium, [2] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
[1]erkinjon.karimov@ugent.be, [2] niyaz.tokmagambetov@math.kz

We consider a bivariate Mittag-Leffler function $E_2(x, y)$ in a particular case, which appears as a key part of solutions to fractional-order differential equations involving the Prabhakar fractional derivative. We provide lower and upper estimates for the considered function. We apply the result to the inverse problems for the sub-diffusion equation with the regularized Prabhakar derivative in the time variable.

In [1], the following bivariate Mittag-Leffler type function

$$E_2\left(\begin{matrix}\gamma_1, \alpha_1, \beta_1; \gamma_2, \alpha_2 & |x \\ \delta_1, \alpha_3, \beta_2; \delta_2, \alpha_4; \delta_3, \beta_3 & |y\end{matrix}\right) =$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma_1 + \alpha_1 i + \beta_1 j)\Gamma(\gamma_2 + \alpha_2 i)}{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)\Gamma(\delta_1 + \alpha_3 i + \beta_2 j)} \frac{x^i}{\Gamma(\delta_2 + \alpha_4 i)} \frac{y^j}{\Gamma(\delta_3 + \beta_3 j)}.$$

However, it was not investigated in that work, and further investigations were done in [2].

Our main result is presented in the following statement:

Theorem. If $\alpha = 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma = \beta$ and $\delta > \beta$, then

$$E_2\left(\begin{array}{l|l} \gamma, \gamma, 1, 1, 0 & x \\ \delta, \beta, \alpha, \gamma, \gamma, 1, 1 & y \end{array}\right) = \frac{1}{\Gamma(\delta-\beta)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 \xi^{\beta-1}(1-\xi)^{\delta-\beta-1} E_{\beta,\beta}(x\xi^\beta) e^{y\xi} d\xi$$

holds. Moreover, if $\delta - \beta > 2$, $x < 0$ and $y < 0$, then

$$I_1(x,y) \le E_2\left(\begin{array}{l|l} \gamma, \gamma, 1, 1, 0 & x \\ \delta, \beta, \alpha, \gamma, \gamma, 1, 1 & y \end{array}\right) \le I_2(x,y).$$

Here $E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)}$, $\Re(a) > 0$, $b \in \mathbb{C}$ is a two parameter Mittag-Leffler function [3],

$$I_i(x,y) = \int\limits_0^1 \frac{(1-s^{1/\beta})^{\delta-\beta-1} e^{ys}}{(1+c_i x s)^2} ds, \quad i = 1,2, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\beta)}}, \; c_2 = \sqrt{\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)}}.$$

We will use the lower and upper estimates to study inverse-source and inverse-initial problems for the sub-diffusion equation involving the regularized Prabhakar derivative. We note that a direct problem for a similar equation was studied in [2].

References

1. **Garg M., Manohar P., and Kalla S.** *A Mittag- Leffler-type function of two variables.* Integral Transforms and Special Functions, 2013, 24(11), pp. 934–944.
2. **Karimov E.T., Hasanov A.** *On a boundary-value problem in a bounded domain for a time-fractional diffusion equation with the Prabhakar fractional derivative.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2023, 111(3), pp. 39–46.
3. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Math. Studies, 2006.

MSC 517.95

Nonlocal problem for a fractional differential equation of the Boussinesq type

Fayziev Yu. E.[1], Khudoykulova M. U.[1]
[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; fayziev.yusuf@mail.ru, muattarxudoyqulova2000@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space, and let $A : D(A) \subset H \to H$ be an arbitrary unbounded, positive self-adjoint operator, and we assume that A has a compact inverse A^{-1}, where $D(A)$ is the domain of A. Let λ_k and $\{v_k\}$ be the eigenvalues and corresponding eigenfunctions of A.

Let us introduce the Caputo fractional derivative D_t^α of order $\alpha \in (1,2)$ of a vector-valued function $h(t) \in H$ (see, for example [1], p. 91)

$$D_t^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{h''(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-1}} d\xi, \quad t > 0,$$

provided the right-hand side exists. Here $\Gamma(\alpha)$ is Euler's gamma function.

Let $1 < \alpha < 3/2$. The object of study of this work is the following fractional differential equation

$$D_t^\alpha u(t) + AD_t^\alpha u(t) + \nu^2 Au(t) = f(t), \quad 0 < t < T$$

with non-local conditions

$$u(0) = u(T),$$

and

$$u'(0) = u'(T),$$

where $\nu > 0$ is a fixed number and $f(t)$ are given function.

In this thesis, it was found that the solution for Boussinesq type fractional equation does not depend on T and ν.

References

1. **Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.,** *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier,Amsterdam(2006).

Boundary problem for partial mixed differential equation with Caputo fractional derivative

Abdulboqiyev X.
Fergana State university; abdulboqiyev.xurshidbek@gmail.com

In particular, the issues of liquid filtration in porous media, heat transfer in a heterogeneous medium, and moisture transfer in soils lead to modified diffusion equations, which are third-order hyperbolic partial differential equations.

Problem. In the domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, where $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < q\}$, is the domain bounded with $y = 0$, $y = -x$ and $y = x - 1$ lines. $q > 0$ and b are some fixed numbers. we consider the problem of determining the function $u(x, y)$ satisfying the equation and $u(x, y) \in C(\Omega)$, $u_y(x, y) \in C\left(\overline{\Omega_1}\right)$; $u_y(x, y)$, $u_x(x, y) \in C\left(\overline{\Omega_2}\right)$, $u_{xxy}(x, y)$, $u_{yyy}(x, y) \in C(\Omega_2)$

$$0 = \begin{cases} \left(\partial^2/\partial y^2\right) {}_C D_{0x}^\alpha u(x, y) + bu(x, y), (x, y) \in \Omega_1, \\ (\partial/\partial y)\left[\left(\partial^2/\partial x^2\right) - \left(\partial^2/\partial y^2\right)\right] u(x, y), (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

with boundary

$$u(0, y) = \varphi(y),$$

$$u(x, -x) = \psi_1(x),\ 0 \le x \le 1/2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\right|_{y=-x} = \psi_2(x), 0 \le x \le 1/2$$

and connectional

$$u_{yy}(x, -0) = u_{yy}(x, +0),\ 0 < x < 1$$

conditions. $\varphi(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ - are given functions, $(\partial u/\partial \overrightarrow{n})$- exterior normal derivative and where the Caputo fractional differential operator ${}_C D_{0x}^\alpha$ of the order $0 < \alpha < 1$ is defined by

$${}_C D_{0x}^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u_z(x, z)}{(t - z)^\alpha} dz$$

Theorem. If certain conditions $\varphi(y) \in C^2[0,q]$, $\psi_1(x) \in C^3\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\psi_2(y) \in C^2\left[0,\frac{1}{2}\right]$, and $\varphi(0) = \psi_1(0)$ then the solution to Problem is exists and unique.

References

1. **Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N.** *On the basic concepts of the theory of filtration in fractured media.* Prikl. Mat. Mekh., 1960. Vol. 24, Issue 5, pp. 58-73.
2. **Джураев Т.Д., Сопуев А.** *О краевых задачах для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа.* Краевые задачи механики сплошных сред. -Ташкент. Фан, 1982.- С. 72-86.

UDK 517.95

Kasr tartibli to‘lqin tarqalish tenglamasi uchun aralash masala

Abdumurodova Sh.A. [1], Abdiraimova Sh.T. [1]
[1] Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston;
abdiraimovashoxista1@gmail.com

Kasr hosilalarini o‘z ichiga olgan differentsial tenglamalarning simmetriya xususiyatlarini o‘rganish hozirgi vaqtda anomal kinetikaga ega bo‘lgan turli jarayonlarning matematik modellari kabi tenglamalarning tobora keng qo‘llanilishi bilan bog‘liq holda dolzarb muammo hisoblanadi. Bundan tashqari, klassik butun tartibli hosiladan farqli o‘laroq, kasr tartibli hosilalarning bir xil bo‘lmagan ko‘plab ta’riflari mavjud [1,2, 3, 4], bu turli xil kasr tartibli differensial tenglamalarga olib keladi, ular shaklida bir-biriga yaqin, lekin xususiyatlari jihatidan sezilarli darajada farq qiladi. Kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ko‘pgina matematik olimlar ilmiy ishlanishlar ilib borgan. Bu soha XVIII asr boshlaridan paydo bo‘lib, usha davrda J. Fure, J. Liuvull, B. Rimanlar tomonidan kiritilgan. Kasr tartibli xususiy hosilalali differensial tenglamalar fizika, biologiya, medisina, iqtisodiyot va moliya, kompyuter fanlari va sun’iy intelekt sohalarida keng tatbiq etiladi.

Aytaylik, $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ sohada

$$D_t^\alpha(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x), 0 < x < l, 0 < t < T \tag{1}$$

tenglamaning

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l \tag{2}$$

boshlang‘ich va

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimini topish masalasini qaraylik. Bu yerda $\varphi(x), \psi(x), f(x)$ berilgan funksiyalar, a o‘zgarmas son, $1 < \alpha < 2$.

Ta’rif. Agar $u(x,t) \in C([0,l]\times[0,T])$ va $f(x)$ funksiyalar uchun $D_t^\alpha u(x,t), u_{xx}(x,t) \in C([0,l]\times[0,T])$ bo‘lib, (1)-(3) masalaning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda $u(x,t)$ funksiyaga (1)-(3) aralash masalaning klassik yechimi deyiladi.

Teorema. Aytaylik, $\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0,l]$ va ikkinchi tartibli bo‘lakli-uzluksiz hosilaga ega, hamda $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ va $\psi(0) = \psi(l) = 0, \psi''(0) = \psi''(l) = 0$ bo‘lsin. U holda (1)-(3) aralash masalaning $u(x,t)$ yagona yechimi mavjud va quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_\alpha \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 x^\alpha \right) + \psi_n x E_{\alpha,2} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 x^\alpha \right) \right) \sin\frac{\pi n}{l} x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} f_n t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}\left(-(\frac{\pi n a}{l})^2 t^{\alpha}\right) \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Adabiyotlar

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M.** *Theory and Applications of Fractional Differential.* Equations, Elsevier (2006).
2. **Pskhu A.V.** *Integral transform and Its Applications, Special Functions and Analysis of Differntial Equations,* Comp. Appl. Math., 2020, p. 16.
3. **Umarov S., Hahn M., Kobayashi K.** *Beyond the triangle: Browian motion, Ito calculas, and Fokker-Plank equation-fractional generalizations.* World Scientifi. 2017.
4. **Ashurov R., Fayziyev Yu.** *On the nolocal boundary value problems for time-fractional equation.* Fractal and Fractional, 2022. Vol. 6, Issue 41. пњ»

UDK 517.95

Inverse-source problem for the subdiffusion equation with the Hadamard fractional derivative

[1]Alimov Z.S., [2]Sobirjonov T.Z.
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
[2] Kokand University, Fergana, Uzbekistan;
zuxridin08051975@gmail.com

We consider the following time-fractional diffusion equation

$$ {}_H D_{1t}^{\alpha} u(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

in a rectangular domain $\Omega = \{(t,x) : 0 < x < 1,\ 1 < t < T\}$. Here $f(t,x)$ is a given function, $T > 1$ is a positive real number and

$$ {}_H D_{1t}^{\alpha} g(t) = \left(t\frac{d}{dt}\right) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{-\alpha} \frac{g(s)}{s} ds \ \ (t > 1)$$

represents the Hadamard fractional derivative of order $\alpha\,(0 < \alpha \le 1)$, $\log(..) = \ln(..)$ [1].

Inverse-source problem. To find a pair of functions $\{u(t,x),\ h(x)\}$ satisfying

- the equation (1) with $f(t,x) = h(x)$ in Ω;
- regularity conditions $u(\cdot,x) \in C^{\alpha}_{\gamma,\log}[1,T]$, $u(t,\cdot) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$;
- boundary conditions
$$u(t,0) = u(t,1) = 0,\ 1 \le t \le T; \tag{2}$$
- initial condition
$$ {}_H I_{1t}^{\alpha-1} u(t,x)\big|_{t=1+} = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{3}$$
- over-determination condition $u(\xi,x) = \psi(x)$, $0 \le x \le 1$ for fixed $\xi \in (1,T]$.

Here $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given functions, ${}_HI_{1t}^{\beta}(\cdot)$ represents the Hadamard fractional integral of order $\beta > 0$ given

$$ {}_HI_{1t}^{\beta}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{g(s)}{s} ds, \;\; t > 1, $$

class of functions $C_{\delta,\gamma}^{\alpha}(..)$ with $0 < \gamma \leq 1$ is given by (see [1])

$$ C_{\delta,\gamma}^{n}[a,b] = \left\{ g : \; \|g\|_{C_{\delta,\gamma}^{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \|\delta^k g\|_C + \|\delta^n g\|_{C_{\gamma,\log}} \right\}, \; C_{\delta,\gamma}^{0}[a,b] = C_{\gamma,\log}[a,b], \; \delta = t\frac{d}{dt}. $$

$$ E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_m}{\Gamma(\alpha m + \beta)} \frac{z^m}{m!} $$

is two-parameter Mittag-Leffler function [1].

Solution of the problem (1)-(3) can be represented as [2]

$$ u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \varphi_k (t-1)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-(k\pi)^2 (\log t)^{\alpha}] + \int\limits_1^t \left(\log \tfrac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-(k\pi)^2 \left(\log \tfrac{t}{s}\right)^{\alpha}\right] f_k(s) \tfrac{ds}{s} \} \sin k\pi x, $$

where φ_k and $f_k(t)$ are the Fourier coefficients of functions $\varphi(x)$ and $f(t,x)$, correspondingly.

Considering $f(t,x) = h(x)$ and over-determination condition, we find unknown source $h(x)$ as follows

$$ h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\psi_k - \varphi_k (\xi-1)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-(k\pi)^2 (\log \xi)^{\alpha}\right]}{\int\limits_1^{\xi} \left(\log \tfrac{\xi}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[-(k\pi)^2 \left(\log \tfrac{\xi}{s}\right)^{\alpha}\right] \tfrac{ds}{s}} \right\} \sin k\pi x. $$

We will prove uniform convergence of infinite series imposing certain conditions to the given functions. The uniqueness of the solution will be proved using the completeness of the orthonormal system $\{\sin k\pi x\}_{k=1}^{\infty}$.

References

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Math. Studies, 2006.

2. **Alimov Z.S., Karimov E.T., Kerbal S.** *Inverse-initial problem for time-fractional diffusion equation involving the Hadamard derivative.* Abstracts of the international conference "Gibbs measures and the theory of dynamical systems". May 20-21, 2024, Tashkent, Uzbekistan, pp. 24-25.

UDC 517.95

A free boundary model for epidemiological spread with advection

Anvarjonov B. B., Pardayeva O. F.
V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; bunyodbek.anvarjonov@bk.ru

This thesis presents a free boundary problem modeling the spatial spread of an infectious disease across three components: infected humans ($u(t,x)$), infectious vectors ($v(t,x)$), and a potentially infectious reservoir ($w(t,x)$), within domains $Q_T = \{(t,x) : 0 < t \leq T, -l < x < l\}$ and $D_T = \{(t,x) : 0 < t \leq T, g(t) < x < h(t)\}$. The system incorporates disease transmission dynamics, vector-host interactions, advection terms for human and reservoir mobility, and Dirichlet boundary conditions for infected humans at fixed boundaries $x = \pm l$. The free boundaries $g(t)$ and $h(t)$, driven by the reservoir's spatial gradient, represent the evolving epidemic front. This study outlines the mathematical formulation, emphasizes the role of advection and boundary conditions, and discusses applications in epidemiological modeling.

Mathematical models of infectious disease spread are vital for understanding and controlling epidemics, particularly those involving spatial dynamics, such as vector-borne diseases like malaria or dengue. This study focuses on a free boundary problem describing the interactions between infected humans (u), infectious vectors (v, e.g., mosquitoes), and a reservoir (w, e.g., contaminated water or secondary hosts) with logistic growth and transmission dynamics. Advection terms $\gamma_1 u_x$ and $\gamma_2 w_x$ are included to model the spatial movement of humans (e.g., migration) and the reservoir (e.g., water flow), respectively. Dirichlet boundary conditions $u(t,-l) = u(t,l) = 0$ reflect the absence of infected humans at fixed spatial boundaries, such as quarantine zones or isolated regions [1]. These features make the model suitable for studying epidemic spread in spatially constrained and advective environments.

The modified system is given by:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - \gamma_1 u_x = au(1-bu) - \alpha_1 uw, \quad (t,x) \in Q_T, \\ v_t = ruw - \mu v - \beta_1 vw, \quad (t,x) \in D_T, \\ w_t - w_{xx} - \gamma_2 w_x = cw(1-dw) - \alpha_2 uw - \beta_2 vw, \quad (t,x) \in D_T, \\ v(t,x) = w(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \notin (g(t), h(t)), \\ u(t,-l) = u(t,l) = 0, \quad t > 0, \\ g'(t) = -\beta w_x(t, g(t)), \quad h'(t) = -\beta w_x(t, h(t)), \quad t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad -l \leq x \leq l, \\ v(0,x) = v_0(x), \quad w(0,x) = w_0(x), \quad -h_0 \leq x \leq h_0, \\ h(0) = -g(0) = h_0, \end{cases}$$

where $Q_T = \{(t,x) : 0 < t \leq T, -l < x < l\}$, $D_T = \{(t,x) : 0 < t \leq T, g(t) < x < h(t)\}$, and all coefficients $(a, b, \alpha_1, r, \mu, \beta_1, c, d, \alpha_2, \beta_2, \beta, \gamma_1, \gamma_2)$ are positive. The advection terms $\gamma_1 u_x$ and $\gamma_2 w_x$ model human migration and reservoir transport, while $u(t,-l) = u(t,l) = 0$ ensures no infected humans at the boundaries of Q_T.

The advection terms $\gamma_1 u_x$ and $\gamma_2 w_x$ capture the spatial spread of infection due to human mobility (e.g., travel across regions) or

environmental transport (e.g., contaminated water flow), which are critical in vector-borne disease dynamics [2]. These terms introduce directional movement to the diffusion of u and w, enhancing the model's ability to simulate realistic epidemic scenarios. The Dirichlet boundary conditions $u(t,-l) = u(t,l) = 0$ represent strict control measures, such as quarantine or isolation zones, where infected individuals are absent. The free boundaries $g(t)$ and $h(t)$, governed by the gradient of w, track the expanding or contracting epidemic front, reflecting the spatial progression of vectors and the reservoir.

This model is applicable to vector-borne diseases (e.g., malaria, dengue, or Zika), where human-vector-reservoir interactions drive epidemic spread in advective environments like riverine or urban settings. The advection terms enable the study of disease transmission under mobility-driven scenarios, while the Dirichlet conditions align with controlled environments like quarantined regions. Future research will involve numerical simulations to analyze the impact of advection on epidemic fronts, analytical studies to ensure solution positivity and boundedness, and the development of computational methods to accurately track the free boundaries $g(t)$ and $h(t)$ in the presence of spatial transport.

References

1. **Wang M., Zhao X.Q.** *A free boundary problem for a predator-prey model with a free boundary.* Journal of Differential Equations, 2019. Vol. 267, Issue 3, pp. 1715–1741.
2. **Lou, Y., Zhao, X.Q.** (2010). *A reaction-diffusion malaria model with incubation period in the vector population.* Journal of Mathematical Biology, 2010. Vol. 62, Issue 4, pp. 543–568.

UDK 517.95

Yuklangan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun bir chegaraviy masala yechimining yagonaligi haqida

Azizov M. S.[1], Orifjonova Q. M.[1]
[1] Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston;
muzaffar.azizov.1988@gmail.com, orifjonovaq@gmail.com

Yuklangan tenglamalar fizik va texnik jarayonlarga tadbiqlari muhim o‘rin egallagan [1-2]. Buni e'tiborga olgan holda biz quyidagi ishda yuklangan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun chegaraviy masalani bayon qilamiz va masala yechimining yagonaligini o‘rganamiz.

Ushbu $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ sohada quyidagi tenglamani qaraylik:

$$Lu \equiv u_t - a^2 u_{xx} = b u_t(x,t_0) + f(x,t) \tag{1}$$

bu yerda l, b va T berilgan haqiqiy sonlar, $u = u(x,t)$ - noma'lum funksiya, $b \neq 1$, $t_0 \in (0,T]$.

A **masala.** $\bar{\Omega}$ sohada shunday $u(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ funksiya aniqlansinki, u (1) tenglamani va quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni bajarsin:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) = 0, \quad u'_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

bu yerda $\varphi(x)$ - berilgan ma'lum funksiya.

Teorema. A masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

Isbot. Teskarisidan faraz qilamiz. A masala $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo‘lsin. U holda, ularning farqini $u_1(x,t)-u_2(x,t)=v(x,t)$, deb olsak, $v(x,t)$ funksiya

$$Lv \equiv v_t - a^2 v_{xx} = bv_t(x,t_0) \tag{4}$$

tenglamani hamda (2), (3) shartlarga mos bir jinsli shartlarni qanoatlantiradi.

Ma’lumki, $X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}, X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\lambda_n x, \lambda_n=\frac{n\pi}{l}, \quad n=1,2,...$ sistema $L_2(0,l)$ fazoda to‘la ortonormal sistemani tashkil qiladi.

Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$d_n(t)=\int_0^l v(x,t)X_n(x)\,dx, \quad n=0,1,2,... \tag{5}$$

(5) funksiyani

$$d_{n,\varepsilon}(t)=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} v(x,t)X_n(x)\,dx, \quad 0<\varepsilon<l, \quad (\varepsilon,l-\varepsilon)=\varnothing, \quad n=0,1,2,... \tag{6}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Aniqki, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} d_{n,\varepsilon}(t)=d_n(t)$, $t\in[0,T]$.

(6) tenglikni t bo‘yicha bir marta differensiallab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$d'_{n,\varepsilon}(t)=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} v_t(x,t)X_n(x)\,dx, \quad n=0,1,2,...$$

(4) tenglamadan foydalanib oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$d'_{n,\varepsilon}(t)=a^2\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} v_{xx}(x,t)X_n(x)\,dx+b\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} v_t(x,t_0)X_n(x)\,dx, \quad n=0,1,2,... \tag{7}$$

(7) tenglikning o‘ng tarafidagi birinchi integralni ikki marta bo‘laklab integrallab, so‘ngra undan $\varepsilon\to 0$ da limitga o‘tib, (3) bir jinsli chegaraviy shartlarni va $X_n(x)$ funksiyalarning xossalarini va (5) belgilashni hisobga olib, quyidagi oddiy differensial tenglamalarga ega bo‘lamiz:

$$d'_0(t)=bd'_0(t_0)\,n=0;\ d'_n(t)+\lambda_n^2a^2d_n(t)=bd'_n(t_0),\ n=1,2,... \tag{8}$$

(8) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$d_0(t)=bd'_0(t_0)t+C_0, \quad d_n(t)=C_ne^{-a^2\lambda_n^2t}+\frac{b}{a^2\lambda_n^2}\left(1-e^{-a^2\lambda_n^2t}\right)d'_n(t_0), \quad n=1,2,... \tag{9}$$

bu yerda C_n, $n=0,1,2,...$ - ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

Endi C_n va $d'_n(t_0)$ koeffitsiyentlarni aniqlaymiz. Buning uchun (9) umumiy yechimlarni (2) boshlang‘ich shartga mos bir jinsli shartlardan, (5) tenglikka asosan kelib chiquvchi, $d_n(0)=0, n=0,1,2,...$ shartga bo‘ysundiramiz. Bundan $C_n=0$, $n=0,1,2,...$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada (9) umumiy yechim quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$d_0(t)=bd'_0(t_0)t, \quad d_n(t)=\frac{b}{a^2\lambda_n^2}\left(1-e^{-a^2\lambda_n^2t}\right)d'_n(t_0), \quad n=1,2,... \tag{10}$$

Endi (10) tenglikdan $d'_0(t_0)(1-b)=0$, $d'_n(t_0)\left(1-e^{-a^2\lambda_n^2 t_0}\right)=0,\ n=1,2,...$ tengliklarni aniqlaymiz. Bu hosil bo'lgan tengliklarda $b\neq 1$, $1-e^{-a^2\lambda_n^2 t_0}\neq 0$, chunki $a>0$, $t_0>0$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n\in N$. U holda, $d'_n(t_0)=0,\ n=0,1,2,...$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagilarga asosan, (9) umumiy yechim $d_n(t)=0,\quad n=0,1,2,...$ ekanligi kelib chiqadi. U holda, (5) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_0^l v(x,t)\,X_n(x)\,dx=0,\quad n=0,1,2,...$$

Demak, $v(x,t)$ funksiya $X_n(x), n=0,1,..$ to'la sistemadagi barcha funksiyalar bilan ortogonal ekan. Bu esa Ω sohaning deyarli barcha nuqtalarida $v(x,t)=0$ ekanligini bildiradi. $u(x,t)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ ekanligidan $v(x,t)$ funksiya $\bar{\Omega}$ sohaning barcha nuqtalarida $v(x,t)\equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Buni e'tiborga olsak, farazimiz noto'g'ri ekanligi kelib chiqadi. Bu esa qo'yilgan A masala yechimga ega bo'lsa, u yagona bo'lishini bildiradi. Teorema isbotlandi.

Adabiyotlar

1. **Nakhushev A.M.** *Loaded Equations and their Applications.* Nauka, Moscow, 2012.
2. **Urinov A.K., Azizov M.S.** *A Boundary Problem for the Loaded Partial Differential Equations of Fourth Order.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021. Vol. 42, No. 3, pp. 621-631.

UDK 517

On the matrix negative order Korteweg-de Vries equation with a self -consistent source

Babadjanova A. K.[1,2], Aminova M. M.[1]
[1] Urganch State University, Urgench, Uzbekistan;
aygul.babadjanova1987@gmail.com, maxliyaaminova@gmail.com
[2] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;

There have been wide investigations on inverse spectral and scattering problems, which have important applications to the integration of nonlinear evolution equations. The inverse scattering theory for matrix Sturm-Liouville operators [1]-[2] has provided a viable path to study the matrix KdV equation without source and with self-consistent sources [3], [4]. We consider the matrix negative order Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source, which is given by the following system of equations

$$\begin{cases} Q_t(x,t)=W_x(x,t), \\ W_{xxx}(x,t)-3W_x(x,t)Q(x,t)-Q(x,t)W_x(x,t)- \\ -2W(x,t)Q_x(x,t)+Q_x(x,t)=-2\sum_{n=1}^{N}(\varphi_n\varphi_n^T)' \\ L\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\ \ n=1,2,\ldots,N, \end{cases} \tag{1}$$

under the initial condition

$$Q(x,0)=Q_0(x) \tag{2}$$

and the normalizing conditions

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^T(x,t)\varphi_n(x,t)dx = A_n(t)I_m, \quad n = 1,2,\ldots,N. \tag{3}$$

Here, $W(x,t)$ matrix function satisfies

$$\lim_{x\to\pm\infty} W(x,t) = 0, \tag{4}$$

$\varphi_n = \varphi_n(x,t)$, are $m \times m$ matrix functions, $A_n = A_n(t)$ are given continuous scalar functions, I_m- $m \times m$ unit matrix, $Q_0(x)$ is the Hermetian $m \times m$ real matrix function which has the following properties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|) \left\| \frac{\partial^j}{\partial x^j} Q_0(x) \right\| dx < \infty, 0 \le j \le 3 \tag{5}$$

and $L(0) := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q_0(x)$ operator has exactly N simple eigenvalues $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$.

A solution of the considering problem we denote by the collection

$$\{Q(x,t), W(x,t), \varphi_1(\lambda_1,x,t), \varphi_n(\lambda_2,x,t), \ldots, \varphi_n(\lambda_N,x,t)\}$$

satisfying the conditions:

1. For all $-\infty < x < \infty, t \ge 0$ with $T > 0$

$$\max_{t\in[0,T]} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|) \left\| \frac{\partial^j}{\partial x^j} Q(x,t) \right\| dx \right\} < \infty, 0 \le j \le 3,$$
$$\max_{t\in[0,T]} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|) \left\| \frac{\partial}{\partial t} Q(x,t) \right\| dx \right\} < \infty$$

2. $L(t) := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q(x,t)$ operator has exactly N simple eigenvalues $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_N(t)$.

3. The functions $Q(x,t)$,$W(x,t)$,φ_n, $n = \overline{1,N}$ matrices satisfy the system of equations (1).

4. The columns of the matrix φ_n, $n = \overline{1,N}$ belong to $L^2(R,R^m)$ and therefore $A_n(t) \neq 0$ for some $t \ge 0$ these columns are linearly independent eigenfunctions.

We assume that the collection exists in the sense described above. Our main aim is to obtain a representation for this solution via the inverse scattering transform method for the operator $L(t) := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q(x,t)$ and the triplet matrix technique.

References

1. **Agranovich Z.S., Marchenko V.A.** *The Inverse Problem of Scattering Theory.* KSU, Kharkov, 1960 (in Russian); English transl.: Gordon and Breach, New York, 1963.
2. **Bondarenko N.** *Spectral analysis for the matrix Sturm–Liouville operator on a finite interval.* Tamkang J. Math., 2011. Vol. 42, Issue 3, pp. 305–327.
3. **Goncharenko V.M.** *Multisoliton solutions of the matrix KdV equation.* Theor Math Phys 2001;126(1):81–91. translation from Teor. Mat. Fiz. 126, vol. 1, 102–114, 2001.
4. **Bondarenko N., Freiling G., Urazboev G.** *Integration of the matrix KdV equation with self- consistent source.* J. Chaos, Solitons\Fractals., 49 (2013), pp. 21–27.
5. **Verosky J. M.** *Negative powers of Olver recursion operators.* J. Math. Phys. 32, 1733-1736 (1991).

On the matrix negative order modified Korteweg-De Vries equation with a source

Babadjanova A. K.[1,2], Atanazarova. Sh. E.[2], Axmadjonov M.[1]
[1]Urgench State University, Urgench, Uzbekistan;
aygul.babadjanova1987@gmail.com, murodbekaxmadjonov7@gmail.com
[2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Urgench, Uzbekistan atanazarova94@gmail.com

We consider the negative-order modified Korteweg-de Vries equation[1,2] in the matrix case with a self-consistent source[3], which is given via the following system of equations

$$\begin{cases} \rho_{xx} = U^2, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{t} \geq 0, \\ U_{xt} + \alpha U + 2\rho_{xt} U = 2\int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi_1(x,\xi,t)\Phi_1^T(x,\xi,t) + \Phi_2(x,\xi,t)\Phi_2^T(x,\xi,t)\right] d\xi \\ -iJ\Phi' - V\Phi = \xi\Phi \end{cases} \tag{1}$$

under the initial condition

$$U(x,0) = U_0(x), x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

where $U(x,t)$ and $\rho(x,t)$ are $(m \times m)$ square matrices and α is real number. Here $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$, Φ_1 and Φ_2 are $m \times m$ matrix functions and satisfy the following asymptotics

$$\Phi(x,\xi,t) \sim \begin{pmatrix} p(\xi,t) I_m e^{i\xi x} & 0_m \\ 0_m & b(\xi,t) I_m e^{-i\xi x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ I_m \end{pmatrix}, \tag{3}$$

where $b(\xi,t) \in L^2(\mathbb{R})$ $(t \geq 0)$ is ahead given continuous real function and $p(\xi,t) = ib(-\xi,t)$; $U = U(x,t)$ is a real symmetric $m \times m$ matrix $U = U^T$; $J = \begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ 0_m & -I_m \end{bmatrix}$, I_m is the unit $m \times m$ matrix; the potential $V = \begin{bmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{bmatrix}$ is $2m \times 2m$ matrix. The matrix function $U_0(x)$ satisfy the following properties:

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} ||U_0(x)|| dx < \infty, \tag{4}$$
   where $\|X\| = \max\limits_i \sum_{k=1}^m |x_{jk}|$, $X = (x_{jk})_{j,k=1}^m$;

2. Operator $L(0) = -iJ\dfrac{d}{dx} - V(x)$ has finite number of eigenvalues, in particular $2N$ simple eigenvalues $\eta_1(0), \eta_2(0), ..., \eta_{2N}(0)$ which are symmetric upon reflection with respect to the real line if the potential $U(x)$ have entries in $L^1(\mathbb{R})$ and without spectral singularities.

Our aim is to find the solution $\{U(x,t), \rho(x,t), \Phi(x,\xi,t)\}$ of the problem (1)-(4) under the assumption that the solution of the problem (1)-(4) exists in the sense of the following description:

1. $$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)\,|U(x,t)|\,dx < \infty, \\ \rho_{xt}(x,t) \to 0,\ U_{xt}(x,t) \to 0, \quad x \to \pm\infty. \end{cases} \tag{5}$$

2. Operator $L(t) = -iJ\frac{d}{dx} - V(x,t)$ possess exactly 2N simple eigenvalues $\eta_1(t), \eta_2(t), ..., \eta_{2N}(t)$ which are symmetric upon reflection with respect to the real line if the potential $U(x,t)$ have entries in $L^1(\mathbb{R})$ and without spectral singularities;

The aim of this work is to derive the time evolution equations for the scattering data with which we will be able to find the solution of the problem (1)-(4) via inverse scattering method for $L(t)$.

References

1. **Qiao Z., Strampp W.** *Negative order MKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system.* Physica A., 2002. Vol. 313, pp. 365-380.
2. **Wazwaz A.M.** *Negative-order integrable modified KdV equations of higher order.* Nonlinear Dyn., 2018. Vol. 93, pp. 1371–1376.
3. **Urazboev G.U., Baltaeva I.I., Atanazarova S.E.** *Analysis of the solitary wave solutions of the negative order modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source.* Partial Differential Equations in Applied Mathematics., 2025. Vol. 13, pp. 101-108.
4. **Demontis F.** *Exact solutions of the modified Korteweg-de Vries equation.* Theor. Math. Phys., 2011. pp. 886-897.

MSC 34L25, 34M46, 35R30

On the Hirota-type equation with a self-consistent source in integral form

Eshbekov R. Kh.
Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan; rayxonbek@mail.ru

In this work, the Cauchy problem is proposed for the Hirota-type equation with a self-consistent source in integral form in the class of periodic infinite-gap functions.

In many scientific disciplines, including biology, plasma physics, fluid mechanics, chemical physics, optical fibers and others, nonlinear evolutionary equations are frequently employed as models to explain physical phenomena. In addition, integrating nonlinear partial differential equations using the method of inverse spectral problem is one of the greatest scientific discoveries of the last century and has many practical applications. The first breakthrough in this direction was made by Gardner, Green, Kruskal and Miura in 1976 [1]. They found a general solution to the Cauchy problem for the famous Korteweg-de Vries (KdV) equation using the inverse spectral problem method of scattering theory for the Sturm-Liouville operator.

In 1973, Hirota [2] obtained the exact $N-$ envelope-soliton solutions of the following equation, which is a combination of the complex mKdV(cmKdV) and NLS equations and was later called the Hirota equation:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + i3\alpha|\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + i\gamma\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \delta|\psi|^2\psi = 0,$$

where $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. The Hirota equation explains the behavior of nonlinear waves in some physical systems and is also used in the study of fiber optic systems and in the mechanics of telecommunications. In papers [3]-[5], the following convenient form of the Hirota equation is studied from various perspectives:

$$iu_t + \alpha(u_{xx} \pm 2|u|^2u) + i\beta(u_{xxx} \pm 6|u|^2u_x) = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

In this work, we consider the following Cauchy problem for a Hirota-type equation with a self-consistent source in integral form:

$$\begin{cases} p_t = a(t)\left[p_{xxx} - 6p_x\left(p^2+q^2\right)\right] + b(t)\left[-q_{xx} + 2q\left(p^2+q^2\right)\right] - \\ \qquad - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mu,t) s_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-\right) d\mu, \\ q_t = a(t)\left[q_{xxx} - 6q_x\left(p^2+q^2\right)\right] + b(t)\left[p_{xx} - 2p\left(p^2+q^2\right)\right] + \\ \qquad + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mu,t) s_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-\right) d\mu, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} p(x,t)|_{t=0} = p_0(x),\ p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \\ q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{9}$$

in the class of real infinite-gap π periodic functions in x :

$$\begin{cases} p(x+\pi,t) = p(x,t),\ q(x+\pi,t) = q(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ p(x,t), q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{cases} \tag{10}$$

Here $a(t), b(t) \in C([0;\infty))$ are given continuous bounded functions and $\delta(\mu,t)$ is a given real continuous function with the following uniform asymptotes

$$\delta(\mu,t) = O\left(\frac{1}{1+\mu^2}\right),\ \mu \to \pm\infty. \tag{11}$$

In addition, the function $\psi^{\pm}(x,\mu,t) = \left(\psi_1^{\pm}(x,\mu,t), \psi_2^{\pm}(x,\mu,t)\right)^T$ are Floquet solution, normalized by the condition $\psi_1^+(0,\mu,t)$, of the following Dirac equation

$$\mathcal{L}(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{12}$$

and defined as follows:

$$\psi(x,\mu,t) = c(x,\mu,t) + \frac{s_2(\pi,\mu,t) - c_1(\pi,\mu,t) \mp \sqrt{\Delta^2(\mu)-4}}{2s_1(\pi,\mu,t)} \cdot s(x,\mu,t), \tag{13}$$

where $c(x,\mu,t) = (c_1(x,\mu,t), c_2(x,\mu,t))^T$ and $s(x,\mu,t) = (s_1(x,\mu,t), s_2(x,\mu,t))^T$ are solutions of equation (12) with initial conditions $c(0,\mu,t) = (1,0)^T$ and $s(0,\mu,t) = (0,1)^T$ respectively, the function $\Delta(\mu,t) = c_1(\pi,\mu,t) + s_2(\pi,\mu,t)$ is called the Lyapunov function for equation (12).

The main result of this work is contained in the following theorem.

Theorem. If the initial functions $p_0(x)$ and $q_0(x)$ satisfy the conditions

$$p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),$$

then there exists a uniquely determined global solution $p(\tau,t), q(\tau,t)$ of the problem (1)-(3) belonging to the class $C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$, which are determined by the sum of the following series, respectively:

$$p(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t)\right),$$

$$q(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)).$$

References

1. **Gardner S., Green I., Kruskal M., Miura R.** *A method for solving the Korteweg-de Vries equation.* Physical Review Letters, 1967. Vol. 19, Issue 19, pp. 1095-1098.
2. **Hirota R.** *Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation.* Journal of Mathematical Physics., 1973. Vol. 14, pp. 805-809.
3. **Xi-Hu Wu, Yi-Tian Gao, Xin Yu.** *On a Hirota equation in oceanic fluid mechanics: Double-pole breather-to-soliton transitions.* Chaos, Solitons and Fractals., 2024. Vol. 183, 114874.
4. **Yaning Tang, Zaijun Liang, Meiling Zhou.** *New exact travelling solutions of the generalized Hirota equation.* Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 2021. Vol. 4, pp. 100-112.
5. **Khasanov A.B., Eshbekov R.Kh., Khasanov T.G.** *Integration of a Non-Linear Hirota Type Equation with Additional Terms.* Izvestiya: Mathematics, 2025. Vol. 89, Issue 1, pp. 196-219.

An inverse diffusion coefficient problem in generalized fractional diffusion equation

Jumaev J. J.

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Bukhara, Uzbekistan; jonibekjj@mail.ru

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, where $d \geq 1$, be a bounded domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the cylinder $Q = \Omega \times (0, T]$, where $T > 0$. In this context, the paper focuses on the following initial-boundary value problem involving a generalized fractional derivative and the Laplacian operator:

$$D_t^k u(x,t) + a(t)(-\Delta)u(x,t) = \int_0^t F(x,s,u(x,s))ds + f(x,t), \ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), \ x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$\mathbf{B}u(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{3}$$

where, the generalized Caputo fractional derivative of a function $u(x,t)$ is commonly represented in convolution form as:

$$D_t^k u(x,t) = \int_0^t k(t-\tau)u_\tau(x,\tau)d\tau = \Big(k * \partial_t u(x,.)\Big)(t), \quad t > 0.$$

Let $k(t)$ denote the generalized kernel of the fractional derivative, which satisfies the following conditions:

a) a singularity at $t = 0$ (i.e., they blow up at $t = 0$),

b) be nonnegative and monotonically decreasing for $t > 0$,

c) be integrable over a finite interval $(0, T)$, and their derivatives are locally integrable on $(0, T)$.

Here,

$$\mathbf{B}u(x,t) = \nabla u \cdot \nu,$$

where ν denotes the unit outward normal vector to $\partial\Omega$.

Δ is the Laplace differential operator with domain $D(-\Delta) = H^2(\Omega)$. We associate a bilinear form with the Laplace differential operator as follows

$$(-\Delta u, \varphi) = (\nabla u, \nabla \varphi) - (g, \varphi)_{\partial\Omega}, \ \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

The inverse problem consists in determining the unknown coefficient $a(t)$, $t > 0$, from the available additional data on the solution to the problem (1)-(3):

$$\int_\Omega u(x,t)dx = m(t), \ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

where $m(t)$ is the measured data given in advance.

This work addresses the inverse diffusion coefficient problem for the generalized fractional diffusion equation in a bounded domain. The time-dependent diffusion coefficient is determined from an additional integral measurement. The results are derived using Rothe's method [1], also known as the method of lines.

Initially, the original problem is approximated by a sequence of corresponding elliptic problems. The existence and uniqueness of the solution for these elliptic problems at each time step are established using the Lax-Milgram theorem. Next, a basic energy estimate for the unknown functions at each time step is provided [2]. Following this, piecewise linear Rothe's functions are introduced for the unknown functions (u, a) in time.

The well-posedness of both the direct and inverse problems is analyzed through Rothe's method, the Arzelá-Ascoli theorem, the coercivity of the fractional derivative, and Gronwall's inequality.

References

1. **Rothe E.,** *Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben*, Mathematische Annalen, Vol. 102 (1930), 650–670.
2. **Kačur J. ,** *"Method of Rothe in evolution equations"*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Vol. 1192 (1985), 23–34. *UDK 517.9*

About the Cauchy problems for the time-fractional diffusion equations with the Prabhakar fractional derivative

Karimov E. T.[1], Usmonov D. A.[2], Mirzaeva M. M.[2]
[1] Ghent University, Ghent, Belgium; erkinjon.karimov@ugent.be
[2] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
usmonov-doniyor@inbox.ru, maftuna.mirzaeva@outlook.com

Let us consider the following time-fractional diffusion equation

$${}^{PRL}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

in a domain $\Omega = \{(t,x) : \ 0 < t < T, \ -\infty < x < +\infty\}$. Here

$${}^{PRL}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = \frac{d^m}{dt^m} {}^{P}I_{0t}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta} y(t)$$

represents Prabhakar's fractional derivative of the Riemann-Liouville type [1] and

$${}^{P}I_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}[\delta(t-s)^{\alpha}] y(s)\, ds, \quad t > 0$$

represents Prabhakar's fractional integral [2], also

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}[z]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)\,k!}$$

represents a three-parameter Mittag-Leffler function [2]. We note that above-given definitions are valid for α, β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ such that $\alpha>0$ and $m-1<\beta<m$, $m\in\mathbb{N}$. We investigate the particular case, i.e. $0<\beta<1$.

We consider the following problem for the equation (1):

Problem 1. To find a solution to the equation (1) in Ω, satisfying the following initial condition:

$$\lim_{t\to 0}{}^{P}I_{0t}^{\alpha,1-\beta,-\gamma,\delta}u(t,x)=\tau(x). \tag{2}$$

Our results are as follows:

Theorem 1. If $\tau(x)\in C(\mathbb{R})$ and $x^{1-\beta}f(t,x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, then the solution to the Cauchy problem (1)-(2) exists and has a form:

$$u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tau(\xi)\,v(t,x;0,\xi)\,d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\eta,\xi)\,v(t,x;\eta,\xi)\,d\xi d\eta,$$

where

$$v(t,x;\eta,\xi)=\frac{(t-\eta)^{\beta_1-1}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{|x-\xi|}{(t-\eta)^{\beta_1}}\right)^{n}E_{\alpha,-\beta_1 n+\beta_1}^{\gamma_1 n+1}\left[\delta(t-\eta)^{\alpha}\right], \tag{3}$$

$\beta=2\beta_1$, $\gamma=-2\gamma_1$.

Now, let us see the following time-fractional diffusion equation

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u(t,x)-u_{xx}(t,x)=g(x,t) \tag{4}$$

in a domain Ω. Here

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y(t)={}^{P}I_{0t}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta}\frac{d^m}{dt^m}y(t)$$

represents regularized Prabhakar fractional derivative of the Caputo type [1].

Problem 2. To find a solution of the equation (4) in Ω, satisfying the following initial condition:

$$\lim_{t\to 0}u(t,x)=\psi(x). \tag{5}$$

Our results are as follows:

Theorem 2. If $0<\beta<1$, $\psi(x)\in C(\mathbb{R})$ and $x^{1-\beta}g(t,x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, then the following equality is a solution to the Cauchy problem (4)-(5):

$$u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\,\omega(t,x;0,\xi)\,d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\eta,\xi)\,v(t,x;\eta,\xi)\,d\xi d\eta$$

where

$$\omega(t,x;\eta,\xi)=\frac{(t-\eta)^{-\beta_1}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{|x-\xi|}{(t-\eta)^{\beta_1}}\right)^{n}E_{\alpha,-\beta_1 n+1-\beta_1}^{\gamma_1 n+1}\left[\delta(t-\eta)^{\alpha}\right]$$

also $v(t,x;\eta,\xi)$ represents the function above given by (3) and $\beta=2\beta_1$, $\gamma=-2\gamma_1$.

We note that there is additional conditions for the uniqueness if the solution will appear.

References

1. **D'Ovidio M., Polito F.** *Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions.* Theory Probab. Appl., 2018. Vol. 62, Issue 4, pp. 552-574.
2. **Prabhakar T.R.** *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Yokohama Math. J., 1971. Vol. 19, pp. 7-15.

UDK 517.923

Buziladigan oddiy differensial tenglama uchun nolokal shartli spektral masala

Karimov K.T.[1,2], Toshmatov M.M.[3]
[1] Farg'ona davlat universireti, Farg'ona, O'zbekiston;
[2] O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti; karimovk80@mail.ru
[3] Andijon davlat universiteti, Andijon, O'zbekiston; tmunosibjon@gmail.com

Nolokal masala. μ parametrning shunday qiymatlari topilsinki,

$$S''(\varphi) + 4\beta \operatorname{ctg}(2\varphi) S'(\varphi) + \mu S(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, \pi/2), \tag{1}$$

tenglamaning

$$S(\pi/2) = S(0), \qquad \lim_{\varphi \to \pi/2} (\cos\varphi)^{2\beta} S'(\varphi) = 0, \tag{2}$$

nolokal chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lsin, bu yerda $\beta \in (0, 1/2)$.

(1) tenglamaning umumiy yechimi [1] ishda topilgan bo'lib, u quyidagi ko'rinishga ega:

$$S(\varphi) = c_1 F\left(\beta - \omega/2, \beta + \omega/2; \beta + 1/2; \sin^2\varphi\right) +$$

$$+ c_2 (\sin^2\varphi)^{1/2-\beta} F\left(1/2 - \omega/2, 1/2 + \omega/2; 3/2 - \beta; \sin^2\varphi\right), \tag{3}$$

bu yerda c_1 va c_2– ixtiyoriy o'zgarmas sonlar, $F(...)$– Gaussning gipergeometrik funksiyasi [2], $\omega = \sqrt{\mu + 4\beta^2}$.

(3) funksiyani (2) shartning birinchisiga bo'ysundiramiz va ma'lum bo'lgan [2]

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c - a - b > 0$$

formulani e'tiborga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$c_1 = c_1 \frac{\Gamma\left(1/2 + \beta\right)\Gamma\left(1/2 - \beta\right)}{\Gamma\left((1-\omega)/2\right)\Gamma\left((1+\omega)/2\right)} + c_2 \frac{\Gamma\left(3/2 - \beta\right)\Gamma\left(1/2 - \beta\right)}{\Gamma\left(1 - \beta + \omega/2\right)\Gamma\left(1 - \beta - \omega/2\right)}. \tag{4}$$

Endi (3) funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$S'(\varphi) = -c_1 \frac{\mu}{2\beta + 1} \sin\varphi \cos\varphi F\left(1 + \beta - \frac{\omega}{2}, 1 + \beta + \frac{\omega}{2}; \beta + \frac{3}{2}; \sin^2\varphi\right) +$$

$$+ c_2 (1 - 2\beta)(\sin^{-2\beta}\varphi)\cos\varphi F\left(\frac{1-\omega}{2}, \frac{1+\omega}{2}; \frac{1}{2} - \beta; \sin^2\varphi\right),$$

yoki $F(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;x)$ avtotransformatsiya formulasini [2] qo‘llab, oxirgi ifodani

$$S'(\varphi) = -c_1\frac{\mu}{2\beta+1}\sin\varphi(\cos\varphi)^{-2\beta}F\left(\frac{1+\omega}{2},\frac{1-\omega}{2};\beta+\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)+$$

$$+c_2(1-2\beta)(\sin\varphi)^{-2\beta}(\cos\varphi)^{-2\beta}F\left(\frac{\omega}{2}-\beta,-\frac{\omega}{2}-\beta;\frac{1}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right) \qquad (5)$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin bo‘ladi.

(5) ni (2) shartning ikkinchisiga bo‘ysundirib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$c_1\frac{\mu}{2\beta+1}\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(1+\beta+\frac{\omega}{2}\right)\Gamma\left(1+\beta-\frac{\omega}{2}\right)}-c_2(1-2\beta)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\omega}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\omega}{2}\right)}=0. \qquad (6)$$

Natijada bizda c_1 va c_2 ga nisbatan $\{(4),(6)\}$ tenglamalar sistemasi hosil bo‘ldi. Algebra kursida ma’lumki bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lishi uchun uning asosiy determinanti nolga teng bo‘lishi lozim bo‘ladi. Shu maqsadda $\{(4),(6)\}$ bir jinsli tenglamalar sistemasining asosiy determinantini nolga tenglab, soddalashtirib, so‘ngra quyidagi

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

ma’lum formuladan [2] foydalanganimizda

$$\sin\frac{\left(\beta+\frac{\omega}{2}\right)\pi}{2}=0$$

trigonometrik tenglama paydo bo‘ladi.

Bu trigonometrik tenglamani yechib, $\omega=\omega_n=2(2n-\beta), n\in\mathbb{N}$ ni hosil qilamiz. So‘ngra $\omega=\sqrt{\mu+4\beta^2}$ formuladan foydalanib, qo‘yilgan nolokal masalaning xos qiymatlarini

$$\mu_n=\omega_n^2-4\beta^2=16n^2-16\beta n,\ \ n\in\mathbb{N}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. ω_n ning ko‘rinishini inobatga olib, μ_n xos qiymatlarga mos xos funksiyalarni quyidagi ko‘rinishda hosil qilamiz:

$$S_n(\varphi)=c_1F\left(2\beta-2n,2n;\beta+\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right)+$$

$$+c_2(\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}-\beta}F\left(\frac{1}{2}+2\beta-2n,\frac{1}{2}-2\beta+2n;\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right).$$

Adabiyotlar

1. **Салахитдинов М.С., Уринов А.К.** *К спектральной теории уравнений смешанного типа.* Ташкент: Mumtoz So’z.–2010. –355 с.

2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции.* Функции Лежандра. -М.: Наука. –1973. –296 с.

UDK 517.95

Uchinchi tartibli giperbolik tenglama uchun teskari masala

Karimov Sh.T.[1], Abdumo‘minova Sh.A.[1]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shaxkarimov@gmail.com, shaxloabdumominova03@gmail.com

Ushbu

$$L_q u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + I\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u + q(x)\, u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in R \times [0,T] \quad (1)$$

tenglamaning quyidagi boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), u_{tt}(x,0) = u_2(x),\ x \in R \quad (2)$$

va $x = x_0, t \geq 0$, x bo‘yicha hosilasi bilan quyidagi qiymatlarni qabul qiluvchi

$$u(x_0,t) = h_1(t), u_x(x_0,t) = h_2(t), t \geq 0. \quad (3)$$

$u(x,t)$ va $q(x)$ funksiyalar juftini topish talab etiladi, bu yerda $f(x,t)$, $u_j(x)$, $j = 0,1,2$ va $h_i(t)$, $i = 1,2$ - berilgan funksiyalar.

(1)- (3) teskari masalalar uchun muvofiqlik shartlari quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{aligned} &u_0(x_0) = h_1(0), \quad u_1(x_0) = h_1(0), \quad u_2(x_0) = h_1''(0) \\ &u_0'(x_0) = h_2(0), \quad u_1'(x_0) = h_2'(0), \quad u_2'(x_0) = h_2''(0) \end{aligned} \quad (4)$$

Teorema 1. Agar qandaydir $t > 0$ uchun u_0, u_1, u_2, funksiyalar (4) shartlar $h_1 \in C^3([0,t_0])$, $h_2 \in C^2([0,t_0])$ va $|u_0(x)| \geq \alpha > 0$, $x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ bajarilsa u holda yetarlicha kichik $h > 0$ uchun $[x_0 - h, x_0 + h]$ oraliqda teskari masalaning yechimi mavjud, yagona va $C[x_0 - h, x_0 + h]$ sinfga tegishli bo‘ladi.

Ushbu teorema (1)-(3) masalani unga teng kuchli bo‘lgan quyidagi

$$u_t(x,t) + u(x,t) = v_0(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t-|x-\xi|}\ \int\limits_{0}^{\xi} q(\xi)\, u(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, (x,t) \in \Delta(x_0,t_0) \quad (5)$$

(5) Volterra integral tenglamasiga keltirib, tadqiq etiladi. Bu yerda $v_0(x,t)$ quyidagi masalaning yechimidir:

$$v_{0tt}(x,t) - v_{0xx}(x,t) = f(x,t), v_0(x,0) = u_1(x) + u_0(x), v_{0t}(x,0) = u_2(x) + u_1(x)$$

$v_0 \in C^2(\Delta(x_0,t_0))$ shartdan (5) dagi ifoda x, t bo‘yicha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga egaligidan foydalanib u_t, u_{tt}, q, u funksiyalarga nisbatan Volterra ikkinchi tur integral tenglamalarini yopiq sistemasini tashkil qiladi. Bu sistemani V.G.Romanov [1] metodi yordamida (1)-(3) masalaning yagona lokal yechimga ega ekanligi isbotlanadi.

Adabiyotlar

1. **Романов В. Г.** *Обратные задачи математической физики.* Ч М.: Наука, 1974. – 304 с.

2. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишацкий С. П.** *Обратные задачи математической физики.* – Новосибирск: Наука, 1980. – 287 с.

UDK 517.95

The Cauchy problem for the degenerate plate vibration equation

Karimov Sh. T.[1], Tulasheva Y. I.[2]
[1]Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; shaxkarimov@gmail.com
[2] Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
yorqinoytulasheva@gmail.com

Let $x = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – point n – dimensional Euclidean space R^n, $\Omega = \{(x,t) : x \in R^n,\ t > 0\}$. Let's consider the problem of finding in the area Ω classic solution $u(x,t) \in C^{2,4}_{t,x}(\Omega)$ to the equation

$$u_{tt} + t^p \Delta^2 u + \lambda^2 t^p u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

satisfying the initial conditions

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R^n, \tag{2}$$

where $f(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ - given sufficiently smooth functions, $p, \lambda \in R$, $p > 0$, $\Delta \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ - multidimensional Laplace operator, $\Delta^2 = \Delta\Delta-$ biharmonic operator.

In the problem (1), (2) we make the change of variables $y = [2/(p+2)]t^{(p+2)/2}$. Then Equation (1) with the initial conditions (2) take the form

$$A^{\beta}_{n,\lambda}(u) \equiv u_{yy} + \frac{2\beta}{y} u_y + \Delta^2 u + \lambda^2 u = f_0(x,y), \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \lim_{y \to +0} y^{2\beta} u_y(x,y) = \psi_0(x),\ x \in R^n, \tag{4}$$

where $f_0(x,y) = (1-2\beta)^{4\beta} y^{-4\beta} f(x,y)$, $\psi_0(x) = (1-2\beta)^{2\beta}\psi(x)$, $2\beta = p/(p+2)$, and $0 < 2\beta < 1$ at $p > 0$. Due to the linearity of equation (3), we first construct a solution, satisfying the semi-homogeneous initial conditions

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = 0,\ x \in R^n. \tag{5}$$

To construct a solution to the Cauchy problem (3), (5) we use the Generalized Erdélyi-Kober Operator[1]:

$$J_\lambda(\eta,\alpha) f(x) = \frac{2^\alpha \lambda^{1-\alpha}}{x^{2\alpha+2\eta}} \int\limits_0^x \frac{J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{(x^2-t^2)^{(1-\alpha)/2}} t^{2\eta+1} f(t)dt, \tag{6}$$

where $\alpha, \eta, \lambda \in R, \alpha > 0, \eta \geq -(1/2)$, $J_\nu(z)$ is the Bessel function of the first kind of order ν.

Assume that $\alpha > 0, \eta \geq -(1/2)$, $f(x) \in C^{2\ell}(0,b)$, $b > 0$, the functions $x^{2\eta+1}[B^x_\eta]^k f(x)$ are integrable at zero and

$$\lim_{x \to 0} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} [B^x_\eta]^k f(x) = 0, \quad k = \overline{0, \ell-1}.$$

Then

$$[B^x_{\eta+\alpha} + \lambda^2]^\ell J_\lambda(\eta,\alpha) f(x) = J_\lambda(\eta,\alpha)[B^x_\eta]^\ell f(x). \tag{7}$$

where $B_\eta^{(x)} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x}\frac{d}{dx}$ - Bessel operator. We assume that a solution to the problem (3), (5) exists. We look for it in the form of the generalized Erdélyi-Kober operator (6):

$$u(x,y) = J_\lambda^{(y)}(-1/2,\beta)\upsilon(x,y), \tag{8}$$

where $\upsilon(x,y)$ is an unknown twice continuously differentiable function.

Substituting (8) into (3) and (5), using Equation (7) with $l=1$, $\alpha=\beta$, $\eta=-1/2$ we obtain the following problem: Find a solution $\upsilon(x,y)$ to the equation

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\eta^2} + \Delta^2\upsilon = F_0(x,\eta), \quad (x,\eta)\in\Omega, \tag{9}$$

satisfying the initial conditions

$$\upsilon(x,0) = k_0\varphi(x), \quad \upsilon_\eta(x,0) = 0, \quad x\in R^n, \tag{10}$$

where

$$k_0 = \Gamma(\beta+1/2)/\sqrt{\pi},$$

$$F_0(x,\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_0^\eta (\eta^2-s^2)^{-\beta}\overline{I}_\beta(\lambda\sqrt{\eta^2-s^2})s^{2\beta}f_0(x,s)ds,$$

If $\varphi(x)\in C^{n+3}(R^n), |x|^{n+5}|\varphi(x)| \le M$, $|x|^{n+1}|D^\alpha\varphi(x)| \le M$, $|\alpha| \le n+3$, where $|x| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}$, $D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$,

α- multi-index, $M = const > 0$, then the solution to the problem (9), (10) has the form[2]

$$\upsilon(x,\eta) = \frac{k_0}{\left(2\sqrt{\pi\eta}\right)^n}\int\limits_{R^n}\varphi(\xi)\cos\left(\frac{|x-\xi|^2}{4\eta} - \frac{\pi n}{4}\right)d\xi, \tag{11}$$

Substituting (11) into (8), replacing the integration variable, we have

$$u(x,y) = \frac{k_0 y^{-n/2}}{2(2\sqrt{\pi})^n}\int\limits_{R^n}\varphi(\xi)\,G(x,y,\xi)d\xi \tag{12}$$

where

$$G(x,y;\xi) = \frac{\Gamma\left(-\frac{n-2}{4}\right)}{\Gamma\left(\beta-\frac{n-2}{4}\right)}\cos\frac{\pi n}{4}K_1\left(\beta-\frac{n-2}{4};\ \frac{n+2}{4},\ \frac{1}{2};\ -\frac{\lambda^2}{4}y^2,\ \frac{1}{4}\left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{y}}\right)^4\right) +$$

$$+\frac{\Gamma(-n/4)}{\Gamma(\beta-(n/4))}\left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{y}}\right)^2\sin\frac{\pi n}{4}K_1\left(\beta-\frac{n}{4};\ \frac{n+4}{4},\ \frac{3}{2};\ -\frac{\lambda^2}{4}y^2,\ \frac{1}{4}\left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{y}}\right)^4\right) \tag{13}$$

where

$$K_1(a,b,c;x,y) = \sum_{m=0}^\infty \frac{y^m}{(a)_m m!}{}_1F_2(1-a-m;b,c;x)$$

and ${}_1F_2(a;b,c;z)$ is the generalized hypergeometric function.

References

1. **Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.** *Fractional Integrals and Derivatives.* Theory and Applications, Gordon and Breach, New York, 1993.
2. **Polianin A.D.** *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.* Chapman and Hall/CRC Press:, Boca Raton, FL, USA, 2002.

UDC 517.984.64

Teskari spektral masalalarni almashtirish operatorlari usulida ishlash

Karimov Sh. T.[1], Xalilov M. K.[1]
[1]Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston;
shaxkarimov@gmail.com, muhammadyusuoficellf@gmail.com

Ta'rif. (A, B) operatorlar juftligi berilgan bo'lsin, agar

$$TA = BT. \tag{1}$$

Munosabat o'rinli bo'lsa T operator -almashtirish operatori deyiladi.

Almashtirish operatori A va B operatorlarini o'zaro bog'laydi yoki o'zaro bog'lovchi operator hisoblanadi. (1) ni qat'iy ta'rifga aylantirish uchun A, va B shuningdek T operatorlari aniqlangan fazolar yoki funktsiyalar to'plamlarni ko'rsatish kerak.

(1) xossaga ega bo'lgan operatoridan foydalanishga asoslangan masalalarni yechish usuli **almashtirish operatorlari** usuli deb ataladi.

1-ta'rifiga ko'ra barcha klassik integral almashtirishlari maxsus hollar bo'lib, Furye, Petsval (Laplas), Mellin, Xankel, Veyershtrass, Kontorovich-Lebedev, Meyer, Stankovich, Obrechkoff, chekli Grinberg va boshqalar shular jumlasidandir.

Almashtirishlar odatda qanday ishlaydi? Faraz qilaylik, biz ancha murakkab A operatorining xossalarini o'rganamiz. Lekin, biz oddiyroq operator B modeli uchun mos xossalarni bilamiz va (1) almashtirish osongina mavjud bo'lsin. Keyin biz odatda B model operatori natijalarini murakkabroq operator A uchun mos keladigan natijalarga o'tkazishimiz mumkin. Bu qisqacha almashtirishning asosiy g'oyasi.

Masalan, $Au{=}f$ tenglamani ko'rib chiqaylik. Keyin unga (1) xossaga ega bo'lgan almashtirishni qo'llash orqali biz yangi $Bv{=}g$ tenglamani ko'rib chiqamiz, $v{=}Tu$, $g{=}Tf$. Shunday qilib, oddiyroq $Bv{=}g$ tenglamani yecha olsak, u holda boshlang'ich tenglama ham yechilgan va $u = T^{-1}v$ yechimga ega bo'ladi. Albatta, teskari operator mavjud va uning aniq shakli ma'lum deb taxmin qilinadi. Bu almashtirishlar metodining oddiy va qisman differensial tenglamalar yechimlari formulalarini topish va isbotlash uchun oddiy qo'llanilishi hisoblanadi.

Keling, eng oddiy Shturm-Lyuvil operatorini o'zaro bog'laydigan turli xil almashtirishlarni qurish muammosini ko'rib chiqaylik.

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = (L_0 y)(x). \tag{3}$$

umumiy ko'rinishdagi Shturm-Liuvil operatori bilan

$$y''(x) + q(x)\, y(x) + \lambda^2 y(x) = (L_q y)(x). \tag{3}$$

(3) dagi $q(x)$ funksiya potensial funksiya deyiladi. Mos funksiyalar murakkab bo'lishi mumkin, $\lambda \in C$, $x \in \mathbb{R}$. Biz mos $f(x)$ funksiyalar bo'yicha (1) shartni qanoatlantiradigan almashtirishni qidirmoqdamiz

$$SLf = L_0 Sf. \tag{4}$$

Almashtirish operatorlarida S ni chiziqli deb olamiz. (2) va (3) almashtirilgandan keyin S ning chiziqliligiga bo‘lgan talab (4) da λ ga bog‘liq bo‘lmagan munosabatga olib keladi.

$$S\left(D^2+q\left(x\right)\right)f=D^2Sf, \tag{5}$$

bu yerda $D=d/dx$. S ning teskarilanishi tabiiy ravishda uni integral operator sifatida izlashga olib keladi

$$\left(Sf\right)\left(x\right)=\int\limits_{a(x)}^{b(x)}K\left(x,t\right)f\left(t\right)dt \tag{6}$$

va yadro $K\left(x,t\right)$ umumiy holatda taqsimot (umumlashgan funksiya) ham bo‘lishi mumkin (misol, $K\left(x,t\right)=\delta\left(x-t\right)+G\left(x,t\right)$, G - silliq funksiya). (6) formulada - $a\left(x\right)$, $b\left(x\right)$ berilgan funksiyalar.

Almashtirish operatorini yaratishda ikkita biroz boshqacha yondashuv mavjud. Odatda, ikkinchi yondashuv faqat (2) va (3) operatorlari bilan tenglamalarning yechimlariga asoslanadi. Bunday usul almashtirish operatorlari bo‘yicha ilg‘or klassik ishlarda qo‘llanilgan. Mazkur tezisda biz aynan shu usuldan foydalanib $K\left(x,t\right)$ yadroga nisbatan masala hosil qilamiz va bu masalani yechib almashtirish operatorini topamiz.

Adabiyotlar

1. **Hasanov A.B.** *Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasi.* Toshkent: Fan, 2016. - 280 bet.
2. **Marchenko V.A.** *Sturm-Liouville Operators and Applications.* Birkhauser, 1986.
3. **Levitan B.M.** *Inverse Sturm-Liouville problems.* VNU Science Press, Utrecht, 1987.

Parabolik tenglamalar uchun teskari koeffitsientli masalalarni teskari spektral masalalarga keltirish

Karimov Sh. T.[1], Yo‘ldoshaliyeva X. H.[1]
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shaxkarimov@gmail.com, yoldashaliyevaxonzoda@gmail.com

Parabolik tenglamalar uchun teskari koeffitsientli masalalarni berilgan va qidirilayotgan funksiyalarga ma’lum bir shartlar bajarilganda teskari spektral Shturm-Liuvill masalasiga keltirish mumkin[1,2].

$u(x,t)$ funksiyani ushbu

$$u_t=u_{xx}-q(x)u,\quad x\in(0,\pi),\quad t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=0,\quad x\in(0,\pi), \tag{2}$$

$$u_t(0,t)=0,\quad t>0, \tag{3}$$

$$u_x(\pi,t)=g(t),\quad t>0, \tag{4}$$

munosabatlarni topishdan iborat bo‘lgan to‘g‘ri boshlang‘ich-chegaraviy masalani ko‘rib chiqamiz, bu yerda $q(x)$ va $g(t)$ - berilgan funksiyalar.

Faraz qilaylik, $u(x,t)$ funksiya yetarli darajada silliq, ya’ni $u,u_x\in\mathrm{C}([0,\pi]*[0,\infty)),u_t,$ $u_{xx}\in\mathrm{C},q(x)$ funksiya $[0,\pi]$ oraliqda qat’iy musbat va uzluksiz; $g(x)$ funksiya esa quyidagi

shartlarni qanoatlantiradi. $g \in C^2[0,\infty)$, $g(+0) = g'(+0); g(t) = 0$ uchun $t \in [t_0;\infty)$, $t_0 > 0$, $g(t) \neq 0$.

$\psi(x) = u(x,t_0)$ funksiyasini kiritamiz. E'tibor bering, $g(x)$ funksiya $t \geq t_0$ va $g(x) \neq 0$ da yo'qolib ketishi tufayli $\psi(x)$ funksiya $C^1[0,\pi]$ sinfiga kiradi va 3-, 4-shartlarni qanoatlantiradi. Demak, agar $q(x), u(x,t)$ (1)-(4) ni qanoatlantirsa, $t \geq t_0$ funksiyaga to'g'ri masala yechim bo'ladi.

$$u_t = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in (0,\pi), t > t_0 \tag{5}$$

$$u(x,t_0) = \psi(x), \quad x \in [0,\pi] \tag{6}$$

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq t_o \tag{7}$$

λ_n o'sish tartibida tartiblangan xos qiymatlar va $y_n(x)$

$$y' - q(x)y = -\lambda y, \quad x \in (o,\pi), \quad y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{8}$$

Shturm-Liuvill masalasining xos funksiyalari bo'lsin. O'zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida $(5) - (7)$ masala yechimini quyidagicha yozamiz:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_k e^{-\lambda(t-t_0)} y_n(x) \tag{9}$$

bu yerda $\psi_k = \int\limits_0^{\pi} \psi(\xi) y_n(\xi) d\xi$.

$g(x)$ va $q(x)$ funksiyalarning xossalaridan foydalanib, biz yuqorida $\lambda_0 > 0$ ekanligini ko'rsatishimiz mumkin (bu keyingi barcha λ_n lar qat'iy musbat ekanligini bildiradi. Demak, (8) ga binoan $u(x,t), u_t(x,t), u_{xx}(x,t)$ funksiyalari $x \in [0,\pi]$ bo'ylab bir xilda $t \to 0$ o'rinda nolga intiladi. $u(x,t)$ ga Laplas almashtirishini qo'llaymiz:

$$\nu(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x,t) dt. \tag{10}$$

$(1) - (4)$ ga ko'ra kompleks p uchun shunday $Re(p) > 0, \nu(x,p)$ chegaraviy masala yechimi bo'ladi.

$$\nu''(x) - q(x)\nu(x) = p\nu \tag{11}$$

$$\nu'(o,p) = 0 \tag{12}$$

$$\nu'(\pi,p) = v(p) \tag{13}$$

bu yerda $\nu(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt$. Koshi masalasining yechimini ko'rib chiqamiz:

$$\omega'' - q(x)\omega = p\omega, \tag{14}$$

$$\omega(0,p) = 1, \quad \omega'(0,p) = 0 \tag{15}$$

$\nu'(o,p) = \omega(0,p) = 0$ bo'lgani uchun $\nu(x,p)$ va $\omega(x,p$ chiziqli bog'liq va shuning uchun $\nu(x,p) = c(p)\omega(x,p)$, $c(p)$ ni (13) shartdan topish mumkin: $c(p) = \nu(p)/\omega(\pi,p)$. Shuning uchun

$$\nu(x,p) = \nu(p)\omega(x,p)/\omega(\pi,p) \tag{16}$$

Koshi masalasining (13)-(14) $\omega(x,p)$ yechimini bilib, tegishli Shturm-Liuvill masalalarining xos qiymatlarini aniqlashimiz mumkinligi quyidagi lemmalardan ko'rinib turibdi:

Lemma 1. Agar p_0 - $\omega(\pi, p)$ funksiyaning noli bo'lsa, Shturm-Liuvill masalasining xos qiymati $\lambda = -p_0$ bo'ladi:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \tag{17}$$

Lemma 2. Agar p_0 - $\omega'(\pi, p)$ funksiyaning noli bo'lsa, u holda $\mu = -p_0$ masalaning xos qiymati $\lambda = -p_0$ bo'ladi:

$$-y'' + q(x)y = \mu y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \tag{18}$$

1- va 2- lemmalarning isbotlari shundan iboratki, agar $\omega(x, p)$-(14) tenglamani qanoatlantirsa, u holda $y(x) = \omega(x, p_0$ funksiya $-y'' + q(x)y = -p_0 y$ tenglamani qanoatlantiradi.

Shunday qilib, $\omega(\pi, p)$ funksiyaning nollari va masalaning xos qiymatlari (16) o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilishi mumkin. $\omega'(\pi, p)$ funksiyaning nollari va masalaning xos qiymatlari (18) xuddi shunday bog'langan.

Adabiyotlar

1. **Денисов А. М.** *Введение в теорию обратных задач.* – М.: МГУ, 1994. – 112 с.
2. **Кабанихин С. И.** *Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов высших учебных заведений.* Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. – 457 с.

The Cauchy problem for a differential equation involving the ψ-Prabhakar fractional derivative and a priory estimate

Khasanov Sh.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shohzodbekxasanov@gmail.com

Let us find a solution to the ordinary fractional order differential equation

$$^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{ax;\psi}u(x) - \lambda\, u(x) = f(x), \tag{1}$$

in the domain $\Omega = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ 0 \leq a < b\}$ that satisfies regularity conditions

$$^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{ax;\psi}u(x) \in C\,(a, b)\,,\ u^{(n-1)}(x) \in C\,[a, b] \tag{2}$$

and initial conditions

$$u^{(k)}(a) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^k u(x)\bigg|_{x=a} = A_k\ ,\ \ k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{3}$$

Here, $\alpha > 0$, $n-1 < \beta \leqslant n$, $n = [\beta] + 1$,$\gamma, \delta, \lambda, A_k \in \mathbb{R}$ and $f(x)$ is a given real function. In addition, the fractional derivative $\psi-$ Prabhakar-Caputo $^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{ax;\psi}$ is determined as follows:

$$^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{ax;\psi}u(x) = {}^{P}I^{\alpha,n-\beta,-\gamma,\delta}_{ax;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n u(x) =$$

$$\int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{n-1-\beta} E^{-\gamma}_{\alpha,n-\beta}\left(\delta(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha}\right)\psi'(t)\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n u\,(t)\,dt,\ x > a\,.$$

Here, β is an order of the fractional derivative and $\psi \in C[a,b]$ also, $\psi(x)$ is an increasing function and $\psi'(x) \neq 0$ for all $x \in [a,b]$ [1],[2]. In addition, $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(x)$ is the three parametric Mittag-Leffler function [3]. By considering the problem (1),(2),(3) we have obtained the following result.

Lemma 1. If $f(x) \in C^1[a,b]$, the Cauchy problem has a unique solution represented as follows:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{\Gamma(k+1)} (\psi(x)-\psi(a))^k + \lambda\Gamma(\gamma) \sum_{k=0}^{n-1} A_k (\psi(x)-\psi(a))^k (\psi(x)-\psi(a))^{\beta}$$

$$\times E_2 \left(\begin{matrix} \gamma,\gamma,1;1,0 \\ \beta+k+1,\beta,\alpha;\gamma,\gamma;1,1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda(\psi(x)-\psi(a))^{\beta} \\ \delta(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha} \end{matrix} \right) +$$

$$\int_a^x (\psi(x)-\psi(a))^{\beta-1} \Gamma(\gamma) E_2 \left(\begin{matrix} \gamma,\gamma,1;1,0 \\ \beta,\beta,\alpha;\gamma,\gamma;1,1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda(\psi(x)-\psi(a))^{\beta} \\ \delta(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha} \end{matrix} \right) \psi'(t) f(t) dt \,.$$

Here

$$E_2(x,y) = E_2 \left(\begin{matrix} \gamma_1,\alpha_1,\beta_1;\gamma_2,\alpha_2 \\ \delta_1,\alpha_3,\beta_2;\delta_2,\alpha_4;\delta_3,\beta_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) =$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m+\beta_1 n} (\gamma_2)_{\alpha_2 m}}{\Gamma(\delta_1+\alpha_3 m+\beta_2 n)} \frac{x^m}{\Gamma(\delta_2+\alpha_4 m)} \frac{y^n}{\Gamma(\delta_3+\beta_3 n)}$$

is a bivariate Mittag-Leffler function [4].

We also present the following statement linked with the ψ-Prabhakar fractional derivative:

Lemma 2. If the function $u(x)$ is absolutely continuous on $[a,b]$, and $0 < \alpha \leqslant 1$, $\delta < 0$, $0 < \beta < 1$, $\gamma < 0$ are valid, then the following inequality holds:

$$u(x)\, {}^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{ax;\psi} u(x) \geqslant \frac{1}{2}\, {}^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{ax;\psi} u^2(x).$$

References

1. **Olivera D.S.** *Properties of ψ-Mittag-Leffler fractional integrals.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series, 2022. **2**(71), 233-246.

2. **Fernandes A., Restrepo J.E., Suragan D.** *Prabhakar-type linear differential equations with variable coefficients.* arXiv **2**205.13062v1 [math.CA] 25 May, 2022.

3. **Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V.** *Mittag-Leffler Functions, Related Topics, and Applications.* Springer Monographs in Mathematics, Berlin, 2014.

4. **Garg M., Manohar P., Kalla S.L.** *A Mittag-Leffler-type function of two variables* Integral Transf. Special Funct. **24**(11), 934-944. 2013.

Furyening integral almashtirishi va uning boshlang‘ich chegaraviy masalalarni yechishga tatbiqi

Rafiqov A.N., Mahamadaminova Sh. V.
Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston;
mahamadaminovashahina@gmail.com

Chegaralanmagan sohada tor tebranish tenglamasi uchun boshlang‘ich chegaraviy masalaning yechimi Furye almashtirishi yordamida topilgan. Bunda qo‘yilgan masala ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun boshlang‘ich masalaga keltirilgan hamda bu masalaning yechimidan foydalanga holda qo‘yilgan masalaning yechimi topilgan.

Masala: $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < +\infty,\ 0 < t < +\infty\}$ sohada

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \tag{1}$$

tenglamaning quyidagi

$$U_x(0,t) = 0, \quad 0 \le t < +\infty \tag{2}$$

$$U(x,0) = f(x), \quad U_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x < +\infty \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Masalani yechishda Furyening kosinus almashtirishi [1] qo‘llaniladi, ya’ni

$$\tilde{U}(\lambda,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(x,t)\cos\lambda x\, d\lambda. \tag{4}$$

bu yerda $U(x,t)$ - tor tebranish tenglamasi yechimi. $\tilde{U}(\lambda,t)$ esa yechimning Furye almashtirishi [2]. (4) ifodadan x va t o‘zgaruvchilar bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilalar hisoblanadi va (1), (2), (3) lardan foydalanib, quyidagi:

$$\tilde{U}_{tt}(\lambda,t) + \lambda^2 a^2 \tilde{U}(\lambda,t) = 0,$$

$$\tilde{U}(\lambda,0) = f(\lambda), \quad \tilde{U}_t(\lambda,0) = g(\lambda), \tag{5}$$

ikkinchi taribli oddiy differensial tenglama uchun boshlang‘ich masalaga olib kelinadi. Bu yerda $f(\lambda)$ va $g(\lambda)$ - (3) chegaraviy shartlarning Furye almashtirishi.

$$f(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(\lambda,0)\cos(\lambda x)\, d\lambda; \quad g(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(\lambda,0)\cos(\lambda x)\, d\lambda.$$

(5) differensial tenglamaning yechimi topilib, Furyening teskari almashtirishini qo‘llanilsa, qo‘yilgan masalaning yechimi:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} g(s)\, ds - \operatorname{sgn}(x-at)\int_0^{|x-at|} g(s)\, ds\right]$$

formula yordamida topiladi.

Adabiyotlar

1. **Пикулин В.П., Похожаев С.И.** *Практический курс по уравнениям математической физики.* Москва, 2004.
2. **Alimov Sh.O., Ashurov R.R.** *Matematik tahlil 2-qism.* Toshkent, 2017.

The Cauchy problem for biharmonic equation of Helmholz type

Makhmudov K. O., Makhmudov O. I., Niyozov I. E.
Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan; komil.84@mail.ru, makhmudovo@rambler.ru, iqboln@mail.ru

The problem of analytical continuation of the solution of the biharmonic equation Helmholtz type in a domain in both two and three dimensions is considered, based on its values and the values of its stresses on part of the boundary of this region, i.e. the Cauchy problem.

At present, well-studied correct problems posed for elliptic equations and in particular for the Helmholtz equation are well studied.

However, in many real problems, part of the boundary is inaccessible for measuring either displacements or stresses, or only some integral characteristics are known. In experimental studies of the stress-strain state of natural structures, measurements can only be made on accessible areas of the surface.

The concept of correctness (correctness) of the statement of a problem in mathematical physics was formulated at the beginning of the 20th century by the famous French mathematician J. Hadamard. A problem in mathematical physics is called correctly stated if the following conditions are met: 1) a solution to the problem exists; 2) a solution to the problem is unique; 3) a solution to the problem continuously depends on the data of the problem. Having formulated the concept of correctness, J. Hadamard gave an example [1] of an ill-posed Cauchy problem for the Laplace equation.

In this paper, based on the Carleman function method, a regularized solution of the Cauchy problem for the Helmholtz-type biharmonic equation for domains of a special type is constructed. Let D be a bounded simply connected domain in $E^d (d = 2, 3)$, a real Euclidean space.

Cauchy problem. Let $y = (y_1, \ldots, y_d) \in D$, $D-$ be a bounded simply connected domain in E^d, with boundary ∂D consisting of a part Σ of the hyperplane $y_d = 0$ and a smooth surface S lying in the half-space $y_d > 0$, i.e. $D-$ is a domain of "cap type". In the case of the plane $\Sigma-$ is a part of the plane $y_2 = 0$ and S is a smooth curve lying in the upper half-plane.

Let us consider the problem: it is required to find a regular function, i.e., $u(x) \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$, satisfying the condition

$$\Delta^2 u(x) - \lambda^4 u(x) = 0, \ x \in D, \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(y) = f_0(y), & y \in S, \\ \frac{\partial u(y)}{\partial n} = \varphi_0(y), & y \in S, \\ \Delta u(y) = f_1(y), & y \in S, \\ \frac{\partial}{\partial n}\Delta u(y) = \varphi_1(y), & y \in S \end{cases} \tag{2}$$

where $\lambda-$ is a positive number, $f_0, f_1, \varphi_0, \varphi_1-$ are given functions on S.

Since the problem is ill-posed, this makes standard calculus of Fourier integral operators inapplicable. If the Cauchy data carrier is real, analytic, then the Cauchy-Kovalevskaya theorem is used to guarantee the existence of a local solution. We use a special structure to derive explicit conditions for global solvability and an approximate solution. In this case, the Carleman formula gives a formula for an approximate solution of the Cauchy problem.

Using the results of works [2], [3] on the Cauchy problem for the Laplace equation, we constructed the Carleman function in explicit form and, on its basis, a regularized solution to the Cauchy problem for "cap"and cone-type domains. This result is useful for practice, since the Carleman functions are constructed in explicit form using elementary and special functions. The Cauchy problem for systems of elasticity theory is considered in the works [4], [5].

In this paper, a family of functions $u\left(x, f_{k\delta}, \varphi_{k\delta}\right) = u_{\sigma\delta}(x)$ is constructed, depending on the parameter σ, and it is proved that under certain conditions and a special choice of the parameter $\sigma(\delta)$ for $\delta \to 0$, the family $u_{\sigma\delta}(x)$ converges in the usual sense to the solution $u(x)$ of the problem (1), (2).

The obtained estimate of conditional stability explicitly expresses the relationship between the boundary conditions in the correctness class of the problem.

References

1. **Агранович М. С., Вишик М. И.** *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. УМН.* 1964. Т. 19, No 3. С. 53–161.
2. **Лаврентьев М. М.** *О некоторых некорректных задачах математической физики.* Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1962.
3. **Ярмухамедов Ш. Я.** *О задаче Коши для уравнения Лапласа. ДАН СССР.* 1977. Т. 235, No 2. С. 281–283.
4. **Махмудов О. И., Ничзов И. Э.** *О задаче Коши для системы динамических уравнений теории упругости. Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56, No 9. С. 1164–1173.
5. **Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.** *The Cauchy problem of couple-stress elasticity. Contemp. Math.* 2008. Vol. 455. P. 297–310.

UKD 517.957

On the integration of the mKdV equation with a source in the class of finite density functions, in the case of simple eigenvalues

Mamedov K. P.[1], Jumaniyazov N. P.[2], Azamatov A. P.[3]
[1]Mamun University, Khiva, Uzbekistan;
mqudrat1969@gmail.com, [2]nizomjon.jumaniyazov@yahoo.com,
[3]azizbek.shavkatovich@gmail.com

In this paper, we show the possibility of applying the method of the inverse scattering problem for integrating the mKdV equation with a self-consistent source in the class of functions of finite density, in the case of simple eigenvalues of the corresponding spectral problem.

Modified Korteweg-de Vries equation (mKdF)

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

is found in solving some problems of plasma physics. In [1], this equation was integrated by the inverse scattering method for the Dirac system. The method of the inverse scattering problem originates from [2], in which it is presented as a method for solving the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation.

In connection with the application to specific physical problems, it became necessary to consider nonlinear evolutionary equations not only in the class of "rapidly decreasing"functions, but in the class of functions of a special form, namely, periodic,

stepwise, having a finite density, etc. It should be noted that in [3] the mKdV equation with a self-consistent source in the class of periodic functions was integrated, and the N-soliton solution of the mKdV equation in the case of a finite density, ie, when $u(x,t) \to c$ at $|x| \to \infty$, $c \in R$ was found in [4], [5].

We consider the following system of equations

$$\begin{cases} u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = \sum\limits_{k=1}^{2N}(\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2), \\ L\Phi_k = \xi_k\Phi_k,\ k = 1, 2, \ldots, 2N, \end{cases} \tag{1}$$

with an initial condition

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R, \tag{2}$$

where $u(x) \to c$ at $x \to \pm\infty$, $c \in R$. Here function $u_0(x)$ possesses the conditions below: 1)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1 + |x|)|u_0(x) - c|dx < \infty; \tag{3}$$

2) Operator $L(0)$ has exactly $2N$ simple eigenvalues $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_{2N}$.

In the considered problem $\Phi_k = (\Phi_{k1}, \Phi_{k2})^T$ is vector-eigenfunction for the operator $L(t)$ corresponding to the eigenvalue ξ_k such that

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_{k1}\Phi_{k2}dx = A_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, 2N. \tag{4}$$

Here $A_k(t)$ is a given, continuous, nonzero function that satisfies the condition

$$A_k(t) = A_n(t), \text{ when } \xi_k = -\xi_n. \tag{5}$$

We assume that function $u(x,t)$ is smooth enough and tends to its limit fast enough at $x \to \pm\infty$ that's.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big((1 + |x|)|u_0(x) - c| + \sum_{k=1}^{3}\Big|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\Big|\Big)dx < \infty. \tag{6}$$

In the present paper the following theorem is proved.

Theorem. If functions $u(x,t)$, $\Phi_{k1}(x,t)$, $\Phi_{k2}(x,t)$, $k = 1, 2, ..., N$, are the solution to problem (1)-(5) in the class of functions (6), the data scattering operator $L(t)$ with the potential $u(x,t)$ change in t as follows

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(8ip^3 - 12c^2ip\right)r^+, (Im\xi = 0),$$

$$\frac{dC_n}{dt} = \left(8ip_n^3 - 12c^2ip_n + 2A_n(t)\right)C_n, \quad n = 1, 2, ..., N.$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 0, \quad n = 1, 2, ..., N.$$

The obtained equalities completely determine the evolution of the scattering data, which makes it possible to apply the method of the inverse scattering problem to solve the Cauchy problem (1)-(5) in the class of functions (6).

The results obtained can be used in the spectral theory of linear operators, in mathematical physics when integrating nonlinear equations and in solving some problems in plasma physics.

References

1. **Wadati M.** *The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation.* J. Phys. Soc. – 1972. no. 32. – pp. 1681.
2. **Gardner P.S., Green I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.** *Method for solving the Korteweg-de Vries equation.* Phys. Rev. Lett. – 1967. no. 19. – pp. 1095-1097.
3. **Yakhshimuratov A. B., Khasanov M. M.** *Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions.* Diff. uravneniya.– 2014, no. 50(4). – pp. 536-543. (In Russian)
4. **Romanova N.N.** *N-soliton solution "on the pedestal"of the modified Korteweg-de Vries equation,* Theory. and math. phys.– 1979. no. 39(2). – pp. 205-215. (In Russian)
5. **Mamedov K.A.***Integration of mKdV equation with a self-consistent source in the class of finite density functions in the case of moving eigenvalues.* Russ Math. – 2020. vol. 64. – pp. 66–78.

UDK 539.3

Izotropik fazo qattiq sharda ko‘ndalang yassi to‘lqin difraksiyasi

Musurmonov E. A.[1], Saliyev A. A.[2], Shukurova Z. U.[3], Shukurov A. M.[4]
[2] Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, Toshkent, O‘zbekiston
[1,3,4] Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston
elbekmusurmonov97@gmail.com, shukurovamon@yandex.ru

Tutash muhitlarda nostatsionar to‘lqinlarning tarqalishi va diffraksiyasi jarayonlarini matematik modellashtirish va o‘rganish fan va texnikaning geofizika, geologiya, foydali qazilmalarni seysmik qidiruvi, inshootlarning seysmik chidamliligi va boshqa ko‘plab sohalarda katta nazariy va amaliy ahamiyatga ega. Buni olingan ilmiy natijalarni yuqoridagi sohalarning amaliy muammolarini yechishga qo‘llash bilan asoslash mumkin.

Ushbu tadqiqot ishi izotropik fazosida joylashgan qattiq sharda nostatsionar yassi ko‘ndalang to‘lqin difraksiyasi jarayoni matematik ifodalanib, bu jarayonga mos boshlang‘ich-chegaraviy masalaning yechish algoritmi ishlab chiqilga bag‘ishlangan.

Aytaylik, chekzis chiziqli elastik izotropik fazoda R radiusli qattiq shar joylashgan bo‘lsin. Muhitning harakati boshlang‘ich nuqtasi qattiq shar markazida $(r,\ \theta,\ \vartheta)$ bo‘lgan sferik koordinata sistemasida qaraladi. Vaqtning boshlang‘ich $\tau = 0$ momentida qattiq shar sirtining old tomonida joylashgan nuqtasiga berilgan ψ_s potensial bilan nostatsionar yassi ko‘ndalang (S -to‘lqin) to‘lqin fronti kelib urinadi. Bu qattiq shar markazidan o‘tuvchi Ox o‘q atrofida muhitning aylanma hakatini yuzaga keltiradi:

$$\psi_s(r,\theta,\tau) = f[\tau + \gamma(r\cos\theta - R)]H[\tau + \gamma(r\cos\theta - R)]. \tag{1}$$

Bu yerda $f(\tau)$ - ixtiyoriy funksiya vaqt bo‘yicha potentsialning o‘zgarishini ifodalaydi; $H(\tau)$ - Xevisayd birlik funksiyasi.

Bu holatda ko‘chish vektorining w faqat bitta kompnenti noldan farqli va uning potentsial bilan bog‘liqligi, hamda kuchlanish tenzorining nol bo‘lmagan komponentalarining ko‘chish bilan bog‘liqligi

$$w = \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r},\quad \sigma_{r\vartheta} = \frac{1-\kappa}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right],\quad \sigma_{\theta\vartheta} = \frac{1-\kappa}{2r}\left[\frac{\partial w}{\partial\theta} - wctg\theta\right] \tag{2}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Qattiq shar sirtida ko‘chish nolga teng

$$(w + w_s)|_{r=R} = 0, \tag{3}$$

bu yerda w va w_s lar mos ravishda ψ va ψ_s potensiallar bilan aniqlanuvchi ko‘chish vektori komponentlari.

Masalaning o‘qsimmetrikligini e’tiborga olib, muhitning harakati elastik ψ potensialga nisbatan

$$\gamma^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2\theta}, \quad \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{4}$$

to‘lqin tenglamasi bilan tasvirlanadi.

Boshlang‘ich shartlar Ц bir jinsli

$$\psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}\Big|_{\tau=0} = 0. \tag{5}$$

Cheksizlikda to‘lqin so‘nadi

$$\lim_{r\to\infty} \psi = 0. \tag{6}$$

(1) - (6) boshlang‘ich-chegaraviy masala τ vaqt bo‘yicha Laplas integral almashtirishlarini va o‘zgaruvchilarni to‘liqsiz ajratish usulini qo‘llagan holda yechiladi [1]. Tasvirlar fazosida ψ^L potentsial, w^L ko‘chish vektorlari va $\sigma^L_{r\vartheta}$ kuchlanish tenzorini Gegenbauer ko‘phadlari $C^{3/2}_{n-1}(\cos\theta)$ [2] bo‘yicha cheksiz qatorlar ko‘rinishida tasvirlab, masalaning qatorlar koeffitsiyentlariga nisbatan ko‘rinishi olinadi. Tushuvchi to‘lqinning ψ_s potensiali (1) ga ham vaqt bo‘yicha Laplas integral almashtirishlarini qo‘llab, tasvirlar fazosida Bessel funksiyalari uchun [2, 4] qo‘shish teoremasidan foydalanib, qatorga yoyamiz va qator koeffitsiyentlari uchun ifodani olamiz. (3) chegaraviy shartni qanoatlantirib, noma’lum funksiyalar aniqlangandan so‘ng, Laplas integral almashtirishlarining tasvirlar fazosida ko‘chish vektori va kuchlanish tenzori komponentasi uchun ifodalar olinadi. Ularning originallari esa qoldiqlar nazariyasi yordamida topiladi [3]. Sonli eksperiment natijalari grafiklar ko‘rinishida keltirilgan.

Adabiyotlar

1. **Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.** *Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы.* – М: Наука, 1990. – 264 с.

2. **Кузнецов Д.С.** *Специальные функции.* – М.: Высшая школа, 1985. – 423 с.

3. **Лаврентев М.А., Шабат Б.В.** *Методы теории функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1987. – 688 с.

4. *Справочник по специальним функциям с формулами, графиками и таблицами.* Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Nonlocal boundary value problem for fourth-order partial differential equations with double characteristics

Nishonova Sh. T.[1] **Murodov S. X.**[1]**,**
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shahnozanishonova910@gmail.com, sarvarbekmurodov203@gmail.com

Let us denote by D the domain bounded by the lines $OA: y+x=0$, $AB: x-y=1$, $OB: y=0$ in the Oxy-plane.

Consider the fourth-order partial differential equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{1}$$

in the domain D, where $u(x,y)$ is the unknown function. It is not difficult to show that the lines $x+y=C_1$ and $x-y=C_2$ are the multiple characteristic curves of equation (1).

Problem I_1**.** Find a function $u(x,y)$ belonging to the class $C(\overline{D})\cap C^3(D\cup J)\cap C^4(D)$ that satisfies equation (1) along with the conditions

$$u(x,0)+\alpha_1\int\limits_0^x u(\xi,0)\,d\xi=\beta_1(x),\ 0\le x\le 1,\quad u_y(x,0)+\alpha_2\int\limits_0^x u_y(\xi,0)d\xi=\beta_2(x),\ 0\le x\le 1,$$

$$u_{yy}(x,0)=\tau_2(x),\ 0\le x\le 1,\quad u_{yyy}(x,0)=\tau_3(x),\ 0\le x\le 1.$$

Here, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$, $\tau_2(x)$ and $\tau_3(x)$ are given functions, $\alpha_1\,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $J=\{(x,y): 0\le x\le 1, y=0\}$.

Theorem. If certain conditions $\tau_i(x)\in C^3[0,1]\cap C^4(0,1), i=2,3$ and $\beta(x)\in C^4[0,1]\cap C^5(0,1)$ hold, then the solution to Problem I_1 exists and is unique.

UDK 517.95

A boundary value problem for a third-order homogeneous differential equation with a characteristic transition line

Oripov Sh. A.[1], Fozilov M. N.[1]
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan
shoripov1991@gmail.com
fozilovmuhammaddiyor@gmail.com

Let D be a domain in the xOy plane, bounded by the lines $x+y=0$, $x-y=p$, $x=0$, $x=p$, and $y=q$, where $p=\text{const}>0$ and $q=\text{const}>0$. Let us introduce the notations $D_1=D\cap\{y>0\}$ and $D_2=D\cap\{y<0\}$.

In the domain D, we consider the following equations:

$$\begin{cases} u_{xyy}+\gamma^2 u_x+\lambda u=0, & y>0,\\ u_{xxy}-u_{yyy}=0, & y<0, \end{cases} \tag{1}$$

where $u(x,y)$ is an unknown function, and γ,λ are given real numbers.

We study the following boundary value problem:

Problem T. Find a function $u(x,y)$ such that

$$u(x,y)\in C^1(\overline{D}),\quad u_{xxy}(x,y)\in C(D_1),\quad u_{xxy}(x,y),\ u_{yyy}(x,y)\in C(D_2),$$

and the following conditions are satisfied:

1. Equation (1) holds in the domains D_1 and D_2.
2. It satisfies the following matching condition on the line $y = 0$:

$$u_{yy}(x, -0) = u_{yy}(x, +0), \quad x \in (0, p).$$

3. It satisfies the boundary condition:

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad 0 \le y < q.$$

4. On the characteristic line $y = -x$, the function satisfies:

$$u(x, -x) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le p, \quad \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\bigg|_{y=-x} = \psi_2(x), \quad 0 < x < p.$$

Here, $\varphi(y)$, $\psi_1(x)$, and $\psi_2(x)$ are given functions, and $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\big|_{y=-x}$ denotes the outward normal derivative of u on the line $y = -x$.

Theorem 1. If $\psi_1(x) \in C^2[0, p] \cap C^3(0, p)$, $\psi_2(x) \in C^1[0, p] \cap C^2(0, p)$, $\varphi(y) \in C^1[0, q] \cap C^2(0, q)$, and the compatibility condition $\varphi(0) = \psi_1(0)$ holds, then Problem T has a unique solution.

Referens

1. **Т. Д. Джураев, Я. Попёлек.** *О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка, Дифференц.* уравнения, 1991, том 27, номер 10, 1734–1745.

Cheksiz yulduzsimon grafda berilgan kasr hosilali uchinchi tartbli tenglama uchun Koshi masalasi

O‘rolova Sh.
Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
shohsanamfizik@gmail.com

Yulduzsimon yopiq grafda boshlang‘ich-chegaraviy masalani ko‘rib chiqamiz. Uchta cheksiz yarim kesmalarning birinchisi $(-\infty, 0]$, ikkinchi va uchinchilari $[0, +\infty)$ koordinatali kesmalarga izometrik aksantirilgan bo‘lsin. Natijada uchta qirradan iborat yulduzsimon graf hosil bo‘lib, kesmalar garfning uchi deb nomlanuvchi bir nuqtada birlashadi. Γ grafning qirralarini $B_k (k = 1, 2, 3)$ orqali belgilaymiz.

Grafning har bir qirrasida kasr hosilali Eyri tenglamasining qaraymiz:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t) - \frac{\partial^3}{\partial^3 x} u(x, t) = f_j(x, t), \quad 0 < t < T, x \in B_j \ \left(j = \overline{1, 3}\right),$$

bu yerda ∂_{0t}^{α}—α tartibli Kaputo kasr hosilasi. Boshlang‘ich shartlar sifatida quyidagi shartlarni

$$u_j(x, 0) = \phi_j(x), x \in \bar{B}_j, j = \overline{1, 3},$$

talab qilamiz. Shuningdek graf qirralarining tutashgan nuqtalarida quyidagi ulanish shartlari bajarilsin:

$$u_1(0, t) = a_2 u_2(0, t) = a_3 u_3(0, t)$$

$$u_{2,x}(0,t) = b_2 u_{1,x}(0,t),$$
$$u_{3,x}(0,t) = b_3 u_{1,x}(0,t),$$
$$u_{1,xx}(0,t) = \frac{1}{a_2} u_{2,xx}(0,t) + \frac{1}{a_3} u_{3,xx}(0,t),$$

bu yerda $0 < t \leq T$.

Masalaning qo‘yilishi: Berilgan tenglamaning qo‘yilgan boshlang‘ich shartni hamda yuqoridagi ulanish shartlarini qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin. Qo‘yilgan masala yechimining yagonaligini isbotlash uchun uning yechimi ikkita deb faraz qilib, yechimlar ayirmasi bo‘lgan funksiya bir jinsli tenglamani nol boshlang’ich shartlar bilan qanoatlantirishini hisobga olgan holda aynan nolga teng ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $b_1^2 + b_2^2 < 1$ tengsizlik bajarilishi kerak. Masala yechimini esa quyidagi

$$u_j(x,t) = \int_0^t G_\alpha^{2\alpha/3}(x-0, t-\tau)\delta_j(\tau)d\tau + \int_0^t V_\alpha^{2\alpha/3}(x-0,t-\tau)\sigma_j(\tau)d\tau + F_j(x,t)\, j = \overline{1,3}$$

ko‘rinishda qidiramiz. Bu yerda

$$G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t) = \left\{ \begin{array}{cc} \phi(-\alpha/3, 2\alpha/3, x/t^{\alpha/3}) & x < 0, \\ -2\,\mathrm{Re}[e^{2\pi i/3}\phi(-\alpha/3, 2\alpha/3, e^{2\pi i/3}x/t^{\alpha/3})] & x > 0 \end{array} \right\}$$

va

$$V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t) = \frac{1}{3t^{t-\alpha/3}}\,\mathrm{Im}[e^{2\pi i/3}\phi(-\alpha/3, 2\alpha/3, e^{2\pi i/3}x/t^{\alpha/3})]$$

bo’lib, $\phi(\mu,\lambda,z)$ Rayt funksiyasi. Yuqoridagi funksiya boshlang‘ich shartni qanoatlantirishi [1] ishda ko‘rsatilgan. Masalanng yechimini topish uchun yuqoridagi funksiyadagi noma’lum funksiyalar — δ_j, σ_j $(j = \overline{1,3})$ larni aniqlash kerak. Buning uchun chegaraviy shartlardan foydanib chiziqli tenglamalar sistemasi tuzib olamiz. Natijalarni umumlashtirgan holda quyidagi teoremani yozishimiz mumkin:

Teorema. Agar $b_1^2 + b_2^2 < 1$ tengsizlik bajarilib, $\phi_j(x) \in C\left(\bar{B}_j\right)$, $f_j(x,t) \in C^{0,1}(B_j \times [0,T])$ $j = \overline{1,3}$, bo‘lsa qo‘yilgan masalaning yagona yechimi (1.4) ko‘rinishda yoziladi. Noma’lum funksiyalar $\delta_j(t)$, $\sigma_j(t)$, $j = \overline{1,3}$, ushbu

$$X = M^{-1}H$$

tenglamalar sistemasi orqali topiladi. Bu yerda

$$X = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 & 0 \\ 1 & 0 & -a_3 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & \frac{2}{a_2} & \frac{2}{3a_3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = 3\begin{pmatrix} D_{0t}^{2\alpha/3}(a_2F_2 - F_1) \\ D_{0t}^{2\alpha/3}(a_3F_3 - F_1) \\ D_{0t}^{2\alpha/3}(b_2F_1 - F_2) \\ D_{0t}^{2\alpha/3}(b_3F_1 - F_3) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{a_2}F_2(0,t) + \frac{1}{a_3}F_3(0,t) - F_1(0,t)) \end{pmatrix}.$$

Adabiyotlar

1. **Rakhimov K.U., Sobirov Z.A., Jabborov N.M.** *The time-fractional Airy equation on the metric graph.* Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, 2021, 14 (3), 376–388.
2. **Псху А.В.** *Фундаментальное решение уравнения третьего порядка с дробной производной.* Uzbek Mathematical Journal. — 2017. No.4. P.119–127. *UDK 517.95*

Ikkinchi tartibli to‘lqin tenglamalari uchun Koshi masalasini yechishda sistemadan foydalanish

Qurbanbaev O‘.O.[1], Djakaeva K.D.[2]
[1]Qaroqalpoq davlat universiteti, Nukus, O‘zbekiston; otebay58@mail.ru
[2] Nukus innovatsion instituti, Nukus, O’zbekiston; djakaeva71@mail.ru

Uchlaridan chegaralanmagan bir jinsli torning tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasini yechishning ko‘p qo‘llanadigan usullardan biri xarakteristikalar usuli bo‘lib, bu usul yordamida qaralayotgan Koshi masalasining yechimi Dalamber formulasi yordamida olinadi [1-3].

Bu maqolada bir jinsli torning tebranish tenglamasi uchun

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

Koshi masalasi qaralib, bunday masalalarni yechishda birinch tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasidan foydalanish masalasi bayon etiladi, bu yerda $f \in C^1(t \geq 0)$, $\varphi \in C^2(R^1)$, $\psi \in C^1(R^1)$.

(1) ga bir jinsli bo‘lgan tenglama uchun quyidagi sistemani qaraymiz:

$$u_t + a u_x = \vartheta(x,t), \tag{3}$$

$$\vartheta_t - a\vartheta_x = 0. \tag{4}$$

Aytaylik, bu sistemadan $\vartheta(x,t)$ funksiyasi $\vartheta(x,0) = \varphi'(x) + \psi(x)$ shartini, $u(x,t)$ funksiyasi $u(x,0) = \varphi(x)$ shartini qanoatlantiradiganday qilib olsak, u holda (4) dan

$$\vartheta(x,t) = a\varphi'(x+at) + \psi(x+at)$$

bo‘lib, (3) dan $u(x,t)$ funksiyasi uchun

$$u_t + a u_x = a\varphi'(x+at) + \psi(x+at)$$

tenglamasiga ega bo‘lamiz.

$u(x,0) = \varphi(x)$ shartini qanoatlantiradigan oxirgi tenglamaning yechimi

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\psi(x+a\tau) + \psi(x-a\tau)\right) d\tau$$

bo‘ladi. Bu yechimni turlantirib, Dalamberning

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

formulasini olishga bo‘ladi.

(1) tenglama uchun $\vartheta(x,0)=\varphi'(x)+\psi(x)$ shartini qanoatlantiradigan (4) dagi $\vartheta(x,t)$ funksiyasini

$$\vartheta_t - a\vartheta_x = f(x,t)$$

tenglamasidan aniqlaydigan bo‘lsak, u holda

$$\vartheta(x,t)=a\varphi'(x+at)+\psi(x+at)+\int\limits_0^t f(x+a(t-\tau),\tau)d\tau$$

bo‘lib, buni (3) dagi o‘rniga qo‘yish orqali $u(x,0)=\varphi(x)$ shartini qanoatlantiradigan

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_0^t(\psi(x+a\tau)+\psi(x-a\tau))\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^s(f(x+a(s-\tau),\tau)+f(x-a(s-\tau),\tau))d\tau ds$$

$u(x,t)$ funksiyasini, yoki uni turlantirish orqali Dalamberning

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau$$

formulasini olishga bo‘ladi.

Adabiyotlar

1. **Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И.** *Асимптотические методы исследования квази-волновых уравнений гиперболического типа.* Киев. Наук. думка, 1991. 232 с.

2. **Салохиддинов М.С.** *Математик физика тенгламалари.* Тошкент. Узбекистон, 2002. 448 б.

3. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.* М. Наука. 1977. 735с.

UDK 517.95

Boundary value problem for fourth-order a complex differential equation in a rectangular domain

Sharifjonova N.S.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
sharifjonovanozimaxon@gmail.com;

It is known that the study of complex mixed-type differential equations and the methods of their analysis have been the subject of extensive research, including significant contributions from scientists such as T.D. Djuraev [1], M.S. Salakhiddinov [2], and their students. This topic is also related to the study of higher-order differential equations.

In the domain $D = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$, we consider the following equation:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta U + c(x,y)U = f(x,y) \tag{14}$$

Where

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

is the Laplace operator, and $c(x,y)$,$f(x,y)$ are saffiaently smooth given functions.

Problem A. In the domain D, find a solution $U(x,y)$ of equation (1) with the following properties:

1) $U(x,y) \in C^4(D) \cap C^2(\overline{D})$;

2) $U(x,y)$ satisfies the following boundary conditions:

$$\begin{array}{ll} U(0,y) = \varphi_0(y), 0 \le y \le 1 & U(x,0) = \psi_0(x), 0 \le x \le 1 \\ U(1,y) = \varphi_1(y), 0 \le y \le 1 & U(x,1) = \psi_1(x), 0 \le x \le 1 \end{array} \tag{15}$$

$$U(x,-x+1) = \psi_2(x), 0 \le x \le 1 \tag{16}$$

$$U_{yy}(x,0) = \psi_3(x), 0 \le x \le 1 \tag{17}$$

Where $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $i = \overline{0,3}$ are given functions, such that:

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0)$$

$$\begin{array}{ll} \varphi_0(1) = \psi_1(0) = \psi_2(0) & \varphi_1(0) = \psi_0(1) = \psi_2(1) \\ \varphi_0''(0) = \psi_0''(0) = \psi_3(0) & \varphi_1''(0) = \psi_0''(1) = \psi_3(1) \end{array}$$

The uniqueness of the solution to this problem is proved using the integral energy method, and the existence of the solution is proved by the method of integral equations.

REFERENCES

1. **Джураев Т.Д.** *Краевые задачи для уравнения и смешанного и смешанно составного типов.* Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

2. **Салохитдинов М .С .** *Уравнения смешанно-составного типа.* Ташкент: Фан, 1974. - 156 с.

UDK 517.95

Kasr vektor tartibli parabolik tenglamalar sistemasi

Sulaymonov I. A.[1], Shamsiddinova K. Z.[1]
[1]O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
ilyosxojasulaymonov@gmail.com, kibriyoshamsidinova5@gmail.com

Ushbu tezisda kasr tartibli xususiy hosilali tenglamalar sistemasi uchun quyidagi Koshi masalasini ko‘rib chiqamiz:

$$\partial_t^{\mathcal{B}} U(t,x) + \mathbb{A}(D)U(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lim_{t \to 0} \partial_t^{\mathcal{B}-\infty} U(t,x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

bu yerda $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, $\beta_j \in (0,1], j = 1,2$, $\mathbb{A}(D) = \{A_{i,j}(D)\}$ esa o'lchami 2×2 bo'lgan elementlari psevdo-differensial operatorlardan tashkil topgan uchburchak matritsa,

$$\Phi(x) = \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle,$$

berilgan vektor-funksiya,

$$U(t,x) = \langle u_1(t,x), u_2(t,x) \rangle,$$

noma'lum vektor-funksiya va

$$\partial_t^{\mathcal{B}} U(t,x) = \langle \partial_t^{\beta_1} u_1(t,x), \partial_t^{\beta_2} u_2(t,x) \rangle,$$

tartibi $0 < \beta_j \leq 1, j = 1,2$ bo'lgan Riman-Liuvill ma'nosidagi kasr tartibli hosila va u ixtiyoriy uzluksiz $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ funksiyaga ta'siri quyidagicha aniqlanadi (misol uchun qarang [1], p. 70):

$$\partial_t^{\beta_j} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta_j)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\beta_j}} d\xi, \;\; t > 0,$$

o'ng tomoni $\mathbb{R}_+$ da aniqlangan.

Bu sistemaning asosiy o'ziga xos jihati shundaki, vektor-tartib $\mathcal{B}$ turli k omponentlarga ega: ya'ni $\beta_j \in (0,1]$, va ular majburiy ravishda ratsional sonlar bo'lishi shart emas. Biz klassik yechim mavjud bo'lishi uchun boshlang'ich funksiyaga qo'yilishi kerak bo'lgan yetarli (ba'zi hollarda zarur) shartlarni topdik. Shuni ta'kidlash joizki, kasr tartibli differensial tenglamalar sistemalari uchun klassik yechim mavjudligini avvalgi ishlarda ham o'rganilgan, biroq ularning barchasida kasr tartibi har bir tenglama uchun bir xil bo'lgan: ya'ni $\beta_j = \beta$, $j = 1,2$.

Adabiyotlar

1. **Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam, (2006).

UDK 517.95

Nonlocal problem for a generalized telegraph equation with the Prabhakar fractional derivative

Turdiev Kh. N.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; xurshidjon2801@gmail.com

We consider the following time-fractional generalized telegraph equation

$$\frac{\partial}{\partial x} {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t,x) - a \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) - b \, {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

in a domain $\Omega = \{(t,x) : 0 < t < q, 0 < x < p\}$. Here $f(t,x)$ is a given function and

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = {}^{P}I_{0t}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta} \frac{d^m}{dt^m} y(t)$$

represents the Caputo-Prabhakar fractional derivative [1] and

$$ {}^{P}I_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma} [\delta (t-\xi)^{\alpha}] y(\xi)\, d\xi, \quad t > 0 $$

represents the Prabhakar fractional integral [2]. We note that above-given definitions are valid for α, β, γ, δ, $a, b, q, p \in \mathbb{R}$ such that $\alpha > 0$ and $0 < \beta < 1$.

Here $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ is the Prabhakar function [2]:

$$ E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_m}{\Gamma(\alpha m + \beta)} \frac{z^m}{m!}. $$

Problem N. We are interested in finding a regular solution of the equation (1) with $0 < \beta < 1$ in Ω, satisfying the boundary condition

$$ u(t,0) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le q \tag{2} $$

and nonlocal condition

$$ u(0,x) - \int_0^q M(t) u(t,x) dt = \psi(x), \quad 0 \le x \le p, \tag{3} $$

where $\varphi(t)$, $\psi(x)$ and $M(t)$ are given functions ($M(t) \not\equiv 0$) such that $\varphi(0) - \int_0^q M(t)\varphi(t)dt = \psi(0)$.

To solve the problem N, we will use the following auxiliary problem:

Problem G. Find a regular solution to equation (1) in the domain Ω that satisfies the following initial-boundary conditions: (2) and

$$ u(0,x) = \tau(x), \quad 0 \le x \le p. \tag{4} $$

Theorem 1. [3] If $\varphi(0) = \tau(0)$, $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$ and $\varphi(t) \in C[0,q] \cap C^1(0,q)$, then the solution of Goursat problem generalized telegraph equation (1), that satisfies the initial condition (4) and boundary condition (2) will be represented as follows:

$$ u(t,x) = \tau(x) + (\varphi(t) - \varphi(0)) e^{bx} + a\Gamma(\gamma) t^{\beta} \tau(x) E_2 \left(\begin{matrix} \gamma, 1, \gamma; 0, 1; \\ \beta, \alpha, \beta+1; \gamma, \gamma; 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} at^{\beta} \\ \delta t^{\alpha} \end{matrix} \right) - $$

$$ - a\varphi(0) t^{\beta} \overline{F}_E^{(3)} \left(\begin{matrix} \gamma, 1, \gamma; 1, 1, 2; \\ \beta, \alpha, \beta+1; \gamma, \gamma; 1, 2; 1, 1; 1, 1; 1, 1; \end{matrix} \middle| at^{\beta}; bx; \delta t^{\alpha} \right) + $$

$$ + abt^{\beta} \int_0^x \tau(\xi) \overline{F}_E^{(3)} \left(\begin{matrix} \gamma, 1, \gamma; 1, 1, 2; \\ \beta, \alpha, \beta+1; \gamma, \gamma; 1, 1; 1, 1; 1, 1; 1, 2; \end{matrix} \middle| at^{\beta}; b(x-\xi); \delta t^{\alpha} \right) d\xi + $$

$$ + abx \int_0^t (t-\eta)^{\beta-1} \varphi(\eta) \overline{F}_E^{(3)} \left(\begin{matrix} \gamma, 1, \gamma; 1, 1, 2; \\ \beta, \alpha, \beta; \gamma, \gamma; 1, 2; 1, 1; 1, 1; 1, 2; \end{matrix} \middle| a(t-\eta)^{\beta}; bx; \delta(t-\eta)^{\alpha} \right) d\eta + $$

$$ + \int_0^t \int_0^x (t-\eta)^{\beta-1} f(\eta,\xi) \times $$

$$\times\overline{F}_E^{(3)}\left(\begin{matrix}\gamma,1,\gamma;1,1,1;\\ \beta,\alpha,\beta;\gamma,\gamma;1,1;1,1;1,1;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\, a(t-\eta)^{\beta};b\left(x-\xi\right);\delta(t-\eta)^{\alpha}\right)d\eta d\xi, \qquad (5)$$

where $E_2(\cdot)$ is the bivariate Mittag-Leffler type function [4] and $\overline{F}_E^{(3)}(\cdot)$ is the trivariate Mittag-Leffler type function [3]. The solution to the Goursat problem exists and is unique (see [3]).

By enforcing the solution (5) to satisfy the condition (4), we derive the following integral equation for the function $\tau(x)$:

$$\tau(x)-ab\int\limits_0^x\tau(\xi)M_2(\xi,x)d\xi=G(x),$$

where

$$M_2(\xi,x)=\frac{M_1(\xi,x)}{A},\quad G(x)=\frac{g(x)}{A},$$

$$A=\int\limits_0^q M(t)\left(1-a\Gamma(\gamma)t^{\beta}E_2\left(\begin{matrix}\gamma,1,\gamma;0,1;\\ \beta,\alpha,\beta+1;\gamma,\gamma;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}at^{\beta}\\ \delta t^{\alpha}\end{matrix}\right)\right)dt,$$

$$M_1(\xi,x)=\int\limits_0^q M(t)t^{\beta}\overline{F}_E^{(3)}\left(\begin{matrix}\gamma,1,\gamma;1,1,2;\\ \beta,\alpha,\beta+1;\gamma,\gamma;1,1;1,1;1,1;1,1;1,2;\end{matrix}\middle|\, at^{\beta};b\left(x-\xi\right);\delta t^{\alpha}\right)dt,$$

$$g(x)=\psi(x)+e^{bx}\int\limits_0^q M(t)\left(\varphi(t)-\varphi(0)\right)dt-$$

$$-a\varphi(0)\int\limits_0^q M(t)t^{\beta}\overline{F}_E^{(3)}\left(\begin{matrix}\gamma,1,\gamma;1,1,2;\\ \beta,\alpha,\beta+1;\gamma,\gamma;1,2;1,1;1,1;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\, at^{\beta};bx;\delta t^{\alpha}\right)dt+$$

$$+abx\int\limits_0^q\varphi(\eta)\int\limits_\eta^q M(t)(t-\eta)^{\beta-1}\times$$

$$\times\overline{F}_E^{(3)}\left(\begin{matrix}\gamma,1,\gamma;1,1,2;\\ \beta,\alpha,\beta;\gamma,\gamma;1,2;1,1;1,1;1,2;\end{matrix}\middle|\, a(t-\eta)^{\beta};bx;\delta(t-\eta)^{\alpha}\right)dtd\eta+$$

$$+\int\limits_0^q M(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^x(t-\eta)^{\beta-1}f\left(\eta,\xi\right)\times$$

$$\times\overline{F}_E^{(3)}\left(\begin{matrix}\gamma,1,\gamma;1,1,1;\\ \beta,\alpha,\beta;\gamma,\gamma;1,1;1,1;1,1;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\, a(t-\eta)^{\beta};b\left(x-\xi\right);\delta(t-\eta)^{\alpha}\right)d\eta d\xi dt.$$

Theorem 2. [5] Let $\alpha=1$, $0<\beta<1$, $a<0$, $b<0$, $\delta<0$, $\gamma=\beta$. If $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$, $\varphi(0)=G(0)$, $\varphi(t)\in C[0,q]\cap C^1(0,q)$, $\psi(x)\in C[0,q]\cap C^1(0,q)$, $M(t)\in C[0,q]$, $f\left(t,x\right)=t^{-\varepsilon_1}x^{-\varepsilon_2}\widetilde{f}_1\left(t,x\right)$, $\widetilde{f}_1\left(t,x\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ and $0\le\varepsilon_1<\beta$, $0\le\varepsilon_2<1$, then the solution to problem N exists and is unique and determined by formula (5).

Here, $G(0)=g(0)/A$,

$$g(0)=\varphi(0)-\varphi(0)\int\limits_0^q M(t)dt-a\Gamma(\gamma)\varphi(0)\int\limits_0^q M(t)t^{\beta}E_2\left(\begin{matrix}\gamma,1,\gamma;0,1;\\ \beta,\alpha,\beta+1;\gamma,\gamma;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}at^{\beta}\\ \delta t^{\alpha}\end{matrix}\right)dt.$$

Equations with the Prabhakar derivative were discussed in [6]–[7].

References

1. **D'Ovidio M., Polito F.** *Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions.* Theory Probab. Appl., 2018. Vol. 62, Issue 4, pp. 552–574.

2. **Prabhakar T.R.** *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Yokohama Math. J., 1971. Vol. 19, pp. 7–15.

3. **Karimov E.T., Turdiev Kh.N., Usmonov D.A.** *Generalized telegraph equation and bivariate, trivariate Mittag-Leffler type functions.* 2025. https://www.researchgate.net/publication/-388385788

4. **Karimov E.T., Hasanov A.** *On a boundary-value problem in a bounded domain for a time-fractional diffusion equation with the Prabhakar fractional derivative.* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2023. Vol. 111, Issue 3, pp. 39–46.

5. **Karimov E.T., Usmonov D.A., Turdiev Kh.N.** *Nonlocal problem for the time-fractional generalized telegraph equation with the Prabhakar fractional derivative.* 2025. arXiv:2503.08274

6. **Karimov E.T., Turdiev Kh.N., Usmonov D.A.** *Boundary-value problem for a telegraph equation of fractional order with the Prabhakar operator.* Proceedings of the International Conference "Differential Equations and their Application". Kazan, Moscow. 2024. pp. 62-63.

7. **Karimov E.T., Turdiev Kh.N.** *Inverse problem for the time-fractional generalized telegraph equation.* 2025. DOI: 10.13140/RG.2.2.18122.89285

MSC 517.956

Partial differential equations, third order equation with multiple characteristics, boundary value problem

Umarov R. A.
Andijan Institute of Agriculture and Agrotechnology, Andijan, Uzbekistan;
r.umarov1975@mail.ru

In the domain $D = \{(x,y): \ 0 < x < p, \ 0 < y < q\}$, consider the following third-order equation of the form

$$U_{xxx} - U_{yy} + A_1(x)U_{xx} + A_2(x)U_x + A_3(x)U + A_4U_y = g_1(x,y), \tag{1}$$

where $p, \ q, A_4 \in R$, $A_i(x)$, $i = \overline{1,3}$, $g_1(x,y)$ are given sufficiently smooth functions in $\overline{D}$.

Replacement

$$U(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{3}\int\limits_0^x A_1(\xi)\,d\xi + \frac{A_4}{2}y\right)u(x,y),$$

equation (1) can be reduced to the form

$$L(u) = u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x)\,u_x + a_2(x)\,u = g(x,y), \tag{2}$$

where

$$a_1(x) = -A_1'(x) - \frac{1}{3}A_1{}^2(x) + A_2(x),$$

$$a_2(x) = -\frac{1}{3}A_1''(x) + \frac{2}{27}A_1{}^3(x) - \frac{1}{3}A_1(x)\,A_2(x) + A_3(x) + \frac{A_4^2}{4},$$

$$g(x,y) = \exp\left(\frac{1}{3}\int_0^x A_1(\xi)\,d\xi - \frac{A_4}{2}y\right) g_1(x,y),$$

$$a_1(x),\ a_2(x) \in C^1[0,p],\ g_{xyy}(x,y) \in C\left(\bar{D}\right).$$

Problem 1. Find function $u(x,y)$ from class $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$ that satisfies equation (2) and the following boundary conditions:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p, \tag{3}$$

$$u_{xx}(0,y) = \psi_1(y), \quad u(p,y) = \psi_2(y), \quad u_x(p,y) = \psi_3(y), \quad 0 \le y \le q, \tag{4}$$

where $\psi_i(y),\ x \in [0,p],\ i = \overline{1,3}$ are given sufficiently smooth functions.

Theorem 1. If problem 1 has a solution, then if conditions $a_1(0) \le 0,\ a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \ge 0$ are met, it is unique.

Theorem 1 is proved by the method of energy integrals.

Theorem 2. If the following conditions are met:

$$1)\ \psi_i(y) \in C^3[0,q],\ i = \overline{1,3}, \quad \psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0,\ i = \overline{1,3};$$

$$2)\ g(x,0) = g(x,q) = 0;$$

$$3)\ 0 \le C < \frac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)};$$

$$4)\ a_1(p) = 0;$$

then a solution to Problem exists. Here

$$C = \max\left\{|a_1(x)|, |a_1'(x) - a_2(x)|, x \in [0,p]\right\},$$

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{q}\right)^2},\ K = \frac{4}{3}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right)\right)^{-1}.$$

The proof of Theorem 2 was carried out by the method of separation of variables; the eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem were found for the variable y, and the problem with the variable x is solved by constructing the Green function and reducing it to the Fredholm integral equation of the second kind.

References

1. **Apakov Y. P., Umarov R. A.** *Construction of the Solution of a Boundary-Value Problem for the Third-Order Equation with Lower Terms with the Help of the Green Function*, Journal of Mathematical Sciences, 2023. Vol. 274, Issue 6, pp. 807-821.

2. **Apakov Y. P., Umarov R. A.** *On the third boundary problem for a nonhomogeneous third order equation with multiple characteristics*, Uzbek Mathematical Journal, 2023. Vol. 1, Issue 67, pp. 4-14. *UDK 517.95*

Initial-boundary value problem with nonlocal initial conditions for a partial differential equation containing an integro-differential operator with a Bessel function in the kernel

Usmonov D. A.[1], Tokhirjonov U. R.[1]
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
usmonov-doniyor@inbox.ru, tokhirjonovumidjon2105@gmail.com

In a rectangular domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation:

$$ {}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma} u(x,t) - u_{xx} = 0, \tag{1}$$

where $u(x,t)$ is the unknown function, α, γ, T are given real numbers, such that $1 < \alpha < 2$, $T > 0$ and the operator ${}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma}$ is defined as follows:

$$ {}_CD_{at}^{\alpha,\gamma} f(t) = I_{at}^{2-\alpha,\gamma} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right) f(t) =$$

$$ = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^t (t-y)^{1-\alpha} \bar{J}_{(1-\alpha)/2}[\gamma(t-y)] \left(\frac{d^2}{dy^2} + \gamma^2 \right) f(y) dy, \quad t > a, $$

that operator is referred to as the left-sided and generalized Caputo fractional derivatives of order α for the function $f(t)$ [1],

$$ \bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k}, $$

$(z)_k = \Gamma(z+k)/\Gamma(z)$ is the Pochhammer symbol [2], $\Gamma(x)$ is the Euler's gamma–function [2], $J_\nu(x)$ is the Bessel function of the first kind of order ν [3].

Problem Ap. Find a function $u(x,t)$ satisfying the following conditions:

1) $u(x,t) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right), \quad u_{xx}(x,t), \ {}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma} u(x,t) \in C(\Omega)$;

2) It satisfies equation (1) in the domain Ω;

3) It satisfies the following initial and boundary conditions:

$$ u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1]; $$

$$ u(0,t) = -u(1,t), \quad u_x(0,t) = -u_x(1,t), \quad t \in [0,T], $$

where $\varphi_k(x)$, $k = 1,2$ are given continuous functions.

Theorem 1. Let $\varphi_k(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi'''_k(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$, $\varphi_k(0) = -\varphi_k(1)$, $\varphi'_k(0) = -\varphi'_k(1)$, $\varphi''_k(0) = -\varphi''_k(1)$, $k = 1,2$. Then the solution to the problem Ap is unique, exists, and is given by the following formula:

$$ u(x,t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{1n} \mathbb{E}_{\alpha,1,(-\frac{1}{2})} \left[-(\pi + 2\pi n)^2 t^\alpha, \gamma t \right] \sin\left((\pi + 2\pi n) x + \frac{\pi}{4} \right) + $$

$$ + \sqrt{2} t \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{2n} \mathbb{E}_{\alpha,2,\frac{1}{2}} \left[-(\pi + 2\pi n)^2 t^\alpha, \gamma t \right] \sin\left((\pi + 2\pi n) x + \frac{\pi}{4} \right), $$

where

$$ \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[x;y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \bar{J}_{\alpha n/2+\theta}(y) \tag{2}$$

that (2) is a function similar to the Mittag-Leffler function [1].

References

1. **Urinov A., Usmonov D.** *On the Cauchy problem for an ordinary differential equation containing integro differential operator with function Bessel in the kernel.* Bull. Inst. Math., 2023, Vol.6, No 1, pp. 138–153.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* Москва: Наука, 1966.
3. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены.* Москва: Наука, 1966.

UDK 517.9

A Cauchy problem for two-term Prabhakar fractional operators

Usmonov D. A.[1], Tursunova E. G.[1]
[1] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
usmonov-doniyor@inbox.ru, tursunovaergashoy3@gmail.com

We consider the following differential equation in $(0,p)$:

$$ {}^{PC}D_{0x}^{\alpha_x,\beta_1,\gamma_1,\delta}y(x) - a\,{}^{PC}D_{0x}^{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\delta}y(x) - by(x) = f(x), \tag{1}$$

where $y(x)$ is unknown function, $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta, a, b, p$ are given real numbers, such that, $\alpha > 0$, $1 < \beta_1 < 2$, $0 < \beta_2 < 1$, ${}^{PC}D_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma\delta}y(x)$ represents Caputo-Prabhakar fractional derivative [1]

$$ {}^{PC}D_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma,\bar{\delta}}y(x) = {}^{P}I_{0x}^{\alpha,m-\beta-\gamma,\bar{\delta}}\frac{d^m}{dx^m}y(x),$$

and ${}^{P}I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y(x)$ represents Prabhakar fractional integral [2]:

$$ {}^{P}I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y(x) = \int_0^x (x-z)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[\delta(x-z)^{\alpha}\right]y(z)dz,$$

$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x)$ is the generalized Mittag-Leffler function defined by [2]:

$$ E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\gamma)_k x^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)},$$

$(\gamma)_k$ is the Pochhammer symbol defined by $(\gamma)_k = \dfrac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)}$, $\Gamma(\alpha)$ is the Euler gamma function, $f(x)$ is a given function.

We consider the following problem for the equation (1):

Problem K. Find a function $y(x)$ such that $y(x) \in C^1[0,p]$, ${}^{PC}D_{0x}^{\alpha,\mathcal{R}_1,\gamma_1,\delta}y(x) \in C(0,p)$, which satisfies equation (1) and the initial conditions,

$$ y(0) = A, \quad y'(0) = B,$$

where A, B are given real numbers.

Our results is as follows:

Theorem. If $f(x) = x^{-\varepsilon}\widetilde{f}(x)$, $\quad \widetilde{f}(x) \in C[0,p]$, $\quad 0 \le \varepsilon < \beta_1$ and, then Problem K has a unique solution.

References

1. **D'Ovidio M., Polito F.** *Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions. Theory Probab.Appl.* 2018. Vol. 62, Issue 4, pp. 552-574.
2. **Prabhakar T.R.** *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Yokohama Math. J. 1971. Vol.19, pp. 7-15.

UDK 517.95

Ikkinchi tartibli parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun bir nolokal shartli masala haqida

Xalilov Q. S.[1], Mo'ydinona Sh. M.[2].
[1] Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston;
qsxalilov@gmail.com shohsanamhon27@gmail.com

xOy tekisligining $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ to'g'ri chiziqlar hamda tor tebranish tenglamasining $x + y = 0$, $x - y = 1$ xarakteristikalari bilan chegaralangan chekli sohani D bilan belgilaylik, hamda ushbu $D_1 = [D \cap (y > 0)] \cup AB$, $D_2 = D \cap (y < 0)$, $AB = \{(x, 0) : \quad 0 < x < 1\}$, $AE = \left\{(x, y) : y = -x, \quad 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$ belgilashlarni kiritaylik.

Ushbu

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in D_2 = D \cap (y < 0) \end{cases} \tag{1}$$

tenglama uchun D sohada quyidagi masalani o'rganamiz:

1-masala. Shunday $u(x, y) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^2_{x,y}(D_2)$ funksiya topilsinki, u D_1 va D_2 sohalarda (1) tenglamaning regulyar yechimi bo'lib, quyidagi

$$u(0, y) = \int_0^1 u(x, y)dx + \mu_1(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u(1, y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$u(x, -x) = \psi(x), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to +0} u_y(x, y) = \lim_{x \to -0} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1 \tag{5}$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\mu_1(y), \mu_2(y), \psi(x)$ - berilgan yetarlicha silliq funksiyalar bo'lib, $\psi(0) = \mu_1(0)$.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun integral shartli masalalar ko'pgina tadqiqotchilar, jumladan A.Q.O'rinov va Q.S.Xalilovlar tomonidan ham o'rganilgan [1-6].

Endi 1-masalaning bir qiymatli yechilishini tadqiq qilish bilan shug'ullanamiz. Faraz qilaylik, $u(x, y)$ funksiya qo'yilgan masalaning yechimi bo'lsin. Masala shartlariga asoslanib, quyidagi belgilash va farazlarni kiritaylik:

$$\begin{gathered} u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1, \tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1) \\ \lim_{y \to +0} u_y(x, y) = \lim_{y \to -0} u_y(x, y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad \nu(x) \in C^1(0, 1) \cap L[0, 1]. \end{gathered} \tag{6}$$

U holda D_2 sohada $u_{xx}-u_{yy}=0$ tenglama uchun qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi [6]

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(\xi)\,d\xi \tag{7}$$

ko‘rinishda yoziladi.

(7) formulani (4) shartga bo‘ysundirsak, $\tau(x)$ va $\nu(x)$ noma’lum funksiyalar orasidagi

$$\nu(x)=\tau'(x)-\psi'\left(\frac{x}{2}\right),\quad 0<x<1 \tag{8}$$

asosiy funksional munosabatni olamiz. D_1 sohada $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)$ va $u_y(x,y)\in C(D)$ ekanligini e’tiborga olib, (1) tenglama va (2), (3) chegaraviy shartlarda $y\to+0$ da limitga o‘tsak, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\tau''(x)-\nu(x)=0,\quad 0<x<1, \tag{9}$$

$$\int\limits_0^1\tau(x)\,dx=\mu_1(0),\quad \tau(1)=\mu_2(1). \tag{10}$$

$\nu(x)$ funksiyasining (8) ifodasini (9) ga qo‘yib, $\tau(x)$ funksiyaga nisbatan ushbu

$$\tau''(x)-\tau'(x)=-\psi'\left(\frac{x}{2}\right),\quad 0<x<1 \tag{11}$$

oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. (11) tenglamaning umumiy yechimini topib, uni (10) shartga bo‘ysundirsak, noma’lum $\tau(x)$ funksiya quyidagi

$$\tau(x)=\mu_2(1)+(e^x-e)\left[\mu_2(1)-\mu_1(0)-2\int\limits_0^1\left(e^{-t}-1\right)\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt\right] \tag{12}$$

ko‘rinishda bir qiymatli topiladi.

Noma’lum $\tau(x)$ funksiya topilgandan so‘ng $\nu(x)$ funksiya (8) formula orqali aniqlanadi. Natijada D_2 sohada 1-masalaning yechimi (7) formula bilan aniqlanadi, D_1 sohada esa issiqlik tarqalish tenglamasi uchun integral shartli masalaga keladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **O‘rinov A.Q.** *Parabolo-giperbolik tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar.* -Toshkent: Navro‘z, 2016. 216-bet.

2. **Уринов А.К., Халилов К.С.** *Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения.* Доклады АН РУз, 2014. N 5. -С.6–9.

3. **Уринов А.К., Халилов К.С.** *Задача с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения.* Научные ведомости БелГУ. Серия: Матем. Физика. – Белгород. 2015. N 17(214). вып.40. – С. 143–146.

4. **Уринов А.К., Халилов К.С.** *Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения.* // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. –Ташкент. 2014. N 2. – С. 6–9.

5. **Уринов А.К., Халилов К.С.** *Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения.* Доклады Академии наук Республики Узбекистан. – Ташкент. 2014. N 5. – С. 8–10.

6. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** *Уравнения математической физики.*- Москва: Наука, 1996.-724-с.

Zinapoyasimon grafda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich chegaraviy masalaning yechimi mavjudligi

Xayrullayeva A.
Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
xayrullayevaaziza490@gmail.com

Berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun zinapoyasimon grafda boshlang'ich-chegaraviy masalani ko'rib chiqamiz. Sakkizta chekli kesmalarning ketma-ket qo'yilishi natijasida zinapoyasimon graf hosil bo'lsin. Grafning barcha qirralarini $B_k = [0, L]\,(k = \overline{1,8})$ kesmalarga izometrik akslanatiramiz. Grafning har bir qirrasida kasr hosilali diffuziya tenglamasining qaraymiz:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial^2 x} u(x,t) = f_j(x,t), \quad 0 < t < T, x \in B_j \ \left(j = \overline{1,8}\right),$$

bu yerda $\partial_{0t}^{\alpha} u$ - α tartibli Kaputo kasr hosilasi. Boshlang'ich shartlar sifatida quyidagi shartlarni

$$u_j(x,0) = \phi_j(x), x \in \bar{B}_j, j = \overline{1,8},$$

chegaraviy shartlar sifatida esa quyidagi shartlarni

$$u_1(0,t) = \varphi_1(t), \quad u_2(L,t) = \varphi_2(t), \quad u_8(0,t) = \varphi_3(t), \quad u_7(L,t) = \varphi_4(t)$$

talab qilamiz. Shuningdek graf qirralarining tutashgan nuqtalarida quyidagi ulanish shartlari bajarilsin:

$$\lim_{x \to L} (u_1(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t)) = 0 \quad \lim_{x \to L} (u_5(x,t) + u_6(x,t) + u_8(x,t)) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} (u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_5(x,t)) = 0, \quad \lim_{x \to L} (u_4(x,t) + u_6(x,t) + u_7(x,t)) = 0,$$

bu yerda $0 < t \leq T$. Shuningdek, quyidagi moslik shartlari talab qilinadi

$$u_1(L,t) = u_3(L,t), \quad u_2(0,t) = u_3(0,t).$$

Masalaning qo'yilishi: Berilgan tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni, chegaraviy shatlarni hamda ulanish shartlarini qanoatlantiruvchi regulyar yechimlari topilsin.

Qo'yilgan masalaning yechimini qurish uchun bizga ma'lum teoremadan (3.1.2. (q. [5], 116-b.)) foydalanamiz va yechimni quyidagi ko'rnishda qidiramiz:

$$u(x,t) = \int_0^t (G(x,t;L,\tau)u_\xi(L,\tau) - G(x,t;0,\tau)u_\xi(0,\tau) - G_\xi(x,t;L,\tau)u(L,\tau) +$$

$$+ G_\xi(x,t;0,\tau)u(0,\tau))d\tau - \int_0^L \varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t \int_0^L G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

bu yerda

$$G = \begin{pmatrix} G^{11} & G^{12} & ... & G^{1(8)} \\ G^{21} & G^{22} & ... & G^{2(8)} \\ ... & ... & ... & ... \\ G^{81} & G^{82} & ... & G^{88} \end{pmatrix}$$

matritsaviy Grin funksiyasi hisoblanadi. Ta'kidlash joizi, (8) formuladagi barcha integrallar tekis yaqinlasuvchi. Matritsaning har bir elementi har bir $\xi \neq x, 0 < \tau < t$ lar uchun ushbu tenglamani qanoatlantiradi:

$$G_{\xi\xi} - D^{\alpha}_{t\tau} G = 0.$$

Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_n \Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + B_n \Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau)),$$

bu yerdda A_n va B_n matritsalar o'lchami 8×8 bo'lgan noma'lum matitsa, $\Gamma(s,t)$ esa Rayt funksiyasi orqali aniqlangan funksiyadir. Bu yerda masala A_n va B_n matritsalarni aniqlashga keltirildi. Bu matritsalarni topish uchun ulanish shartlaridan foydalanamiz. Natijada quyidagi teoremani olamiz.

Teormea. Aytaylik $\phi_i(t) \in C[0,T], \varphi_i(x) \in C[0;L]$, $(i = \overline{1,8}, T > 0)$ va$f(x,t) \in C^{0,1}\{(x,t) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ bo'lsin. U holda qo'yilgan maslaninng yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$u(x,t) = \int_0^t (G_{\xi}(x,t;0,\tau)U^{1,8}(0,\tau))d\tau - \int_0^t (G_{\xi}(x,t;L,\tau)U^{2,7}(L,\tau))d\tau -$$

$$- \int_0^L \varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t \int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

bu yerda $U^{1,8} = (u_1, 0, ...0, u_8)^T$, $U^{2,7} = (0, u_2, 0, ...0, u_7, 0)^T$, $F = (f_1, f_2, ..., f_8)^T$ va $G(x,t;\xi,\tau)$ quyidagi tenglik orqali aniqlanadi:

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(M^n \Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + (DC^{-1})^n \Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau)\right).$$

Bu yerda matritsalar quyidagicha aniqlanadi:

$$M_{(8\times 8)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -3 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & -3 \end{pmatrix}, \quad D_{(8\times 8)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{D} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad C_{(8\times 8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{C} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yuqoridagi $\widetilde{D}$ va $\widetilde{C}$ matritsalar quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\widetilde{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ va } \widetilde{C}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, qaralayotgan masalaning yechimi mavjudligi ko‘rsatildi.

Adabiyotlar

1. **Sobirov Z.A., Rakhimov K.U., Ergashov R.** *Green's function method for time-fractional diffusion equation on the star graph with equal bonds.* NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS, 2021, 12 (3), 271-278.
2. **Псху А.В.** *Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка.* — 2005. –200 стр.

MSC 33C10, 33E12, 35A22, 35B30, 35R11

Existence the solution to the Cauchy problem for a higher-order fractional equation with singular coefficients

Yuldashova H. A.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; hilolayuldashova77@gmail.com

In this work, we aim to study the Cauchy problem posed for a fractional order equation. General solution of the time-fractional equation is found by the Fourier method. The solution to the given problem is shown to be unique using the generalized Hankel transform. The solution consists of the Bessel function and the Mittag-Leffler function. Unknown coefficients are found by Hankel transformation. It is shown that the constructed solution satisfies the initial condition and equation.

Let us look for a solution in the space $\mathcal{S}(\Omega)$ of the time-fractional order equation given in the domain $\Omega=\{(x,t):\ x>0,\ 0<t<t_0\}$

$$^{RL}D^{\alpha}_{0t}u\left(x,t\right)=u_{xx}\left(x,t\right)+\frac{\nu}{x}u_{x}\left(x,t\right),\quad 0<\nu<1,\quad 2<\alpha<3, \tag{1}$$

satisfying initial conditions

$$^{RL}D^{\alpha-1}_{0t}u\left(x,t\right)\big|_{t=0}=\psi\left(x\right),\quad 0\leq x<\infty, \tag{2}$$

$$^{RL}D^{\alpha-2}_{0t}u\left(x,t\right)\big|_{t=0}=\varphi\left(x\right),\quad 0\leq x<\infty, \tag{3}$$

$$^{RL}D^{\alpha-3}_{0t}u\left(x,t\right)\big|_{t=0}=\tau\left(x\right),\quad 0\leq x<\infty, \tag{4}$$

where $\psi(x), \varphi(x)\ \tau(x) \in \mathbf{C}^2(0,\infty)$ and

$$\int_0^\infty |\psi(x)|\, x^{\frac{\nu}{2}} dx < c = const, \quad \int_0^\infty |\varphi(x)|\, x^{\frac{\nu}{2}} dx < c = const, \quad \int_0^\infty |\tau(x)|\, x^{\frac{\nu}{2}} dx < c = const$$

in addition to this

$$\psi(0) = \varphi(0) = \tau(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \tau(x) = 0, \tag{5}$$

and for any fixed t we have

$$\lim_{x\to\infty}\ u(x,t) = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\ u(x,t) = 0, \tag{7}$$

where ${}^{RL}D_{0t}^{\alpha}$ is the Riemann–Liouville fractional derivative operator of order α defined by

$${}^{RL}D_{0t}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left\{ {}^{RL}I_{0t}^{n-\alpha} f(t) \right\}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1,$$

and

$${}^{RL}I_{0t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad t > 0, \ \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0,$$

represents Riemann-Liouville fractional integral [1].

Theorem 1. If $2 < \alpha < 3, \quad 0 < \nu < 1$, then the Cauchy problem (1)-(4) has the following solution

$$u(x,t) = x^{\frac{1-\nu}{2}} t^{\alpha-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \rho^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\frac{1-\nu}{2}}(\rho\mu)\, J_{\frac{1-\nu}{2}}(\mu x)\, \rho\mu$$

$$\times \left[\psi(\rho)\ E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu^2 t^\alpha\right) + \varphi(\rho)\, t^{-1} E_{\alpha,\alpha-1}\left(-\mu^2 t^\alpha\right) + \tau(\rho)\, t^{-2} E_{\alpha,\alpha-2}\left(-\mu^2 t^\alpha\right)\right] d\rho d\mu \tag{8}$$

and this solution satisfied conditions (5)-(7).

References

1. **Miller K. S., Ross B.,** *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* John Wiley and Sons, New York (1993).
2. **Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.,** *Higher Transcendental Functions, vol. I*, McGraw-Hill, New York, Toronto and London. 1953.
3. **Arfken G. B., Weber H. J.,** *Mathematical Methods for Physicists. 6 th edition*, Elsevier, Oxford.(2005).
4. **Kilbas A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.,** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam etc. 2006.

MSC 35R11

Unique solvability of a mixed problem for time-fractional space-degenerate parabolic equation on a bounded domain

Ikromova N. S, [1], Yunusalieva M.T.[1]
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
mokhinuryunusaliyeva7577@gmail.com

Let Ω be a rectangular domain of the plane xOt, that is, $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$.

In the domain Ω, we consider the following equation

$$\partial_t^\alpha u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^\beta \frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 2$, $\beta \neq 1$; $f(x,t)$ is a given sufficiently smooth function, ∂_t^α denotes Caputo fractional differential operator of α order [1], that is

$$\partial_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{g'(z)\,dz}{(t-z)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, t > 0.$$

The line $x = 0$ is the line of degeneration of the equation (1), and β denotes the degeneration degree of the equation (1).

The aim of our talk is to formulate and study a mixed problem for equation (1) for different values of the degeneration degree, namely, we study the following problem:

Problem 1. Find a solution in the domain Ω of the equation (1) satisfying the following initial

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \le x \le 1$$

and the boundary conditions:

$$\frac{\partial^\nu u(0,t)}{\partial x^\nu} = 0; \quad \nu = \overline{0, -[\beta]}; \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

where φ is given function, $[\beta]$ denotes the integer part of β.

First, we will demonstrate the form of the boundary condition (2) for different values of β.

Let $\beta \in (0,1)$. Then, the condition (2) takes the form

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

For the values of $\beta \in (1,2)$, the condition (2) has the form

$$u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

So, we do not need any conditions on the line $x = 0$. Therefore, condition (2) encompasses conditions (3) and (4).

By applying the method of separation variables i.e., seeking a solution of the homogeneous equation corresponding to the equation (4) satisfying the boundary conditions (2) in the form

$$u(x,t) = T(t)v(x),$$

where $T(t)$ and $v(x)$ are unknown functions. Then, we obtain the following spectral problem for the function $v(x)$:

$$-\left(x^{\beta}v'(x)\right)' = \lambda v(x), \tag{5}$$

$$v^{(\mu)}(0) = 0, \quad \mu = \overline{0, -[\beta]}, \quad v(1) = 0. \tag{6}$$

For proving the existence of the eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem {(5),(6)} we consider the following operator

$$Av \equiv -\left(x^{\beta}v'\right)'$$

with the domain $D(A)$ that consists of functions with the following properties:

1) $v \in C[0,1]$;

2) $x^{\beta}v'(x) \in C[0,1]$ and $(x^{\beta}v'(x))' \in AC[0,1]$, $Av \in L^2(0,1)$;

3) $v^{(\mu)}(0) = 0, \quad \mu = \overline{0, -[\beta]}, \quad v(1) = 0.$

We denote by $\dot{W}^1_{2,\beta}$ the closure of the set $D(A)$ with the following norm

$$\|v\|^2_{W^1_{2,\beta}} = \int_0^1 \left[v^2(x) + x^{\beta}v'^2(x)\right] dx.$$

We proved the following theorems:

Theorem 1. Let $0 < \beta < 2$ and let $\beta \neq 1$. Then the operator A is positive definite in $L^2(0,1)$.

Theorem 2. Let $0 < \beta < 2$ and $\beta \neq 1$. Then, the operator A has a discrete spectrum.

Using the properties of eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem {(5),(6)}, and also the properties of two-parameter Mittag-Leffler functions, we proved the existence and the uniqueness of the solution of the main problem in the appropriate function spaces.

References

1. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.**, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam etc. (2006).

MSC 35R11

One non-local problem for a time fractional equations with the Regularized Prabhakar derivative on metric graph

Khujakulov J. R.[1], Abdimurodova X. A.[2], Yo'ldosheva M. D.[3]
[1,2,3] Termez state university, Termez, Uzbekistan;
[1]jonibek.16@mail.ru,[2] xusnyaa@gmail.com

Consider a simple star graph (metric graph), which is obtained by connecting three finite segments $B_k = \{x_k : 0 < x_k < L_k\}, (k = 1,2,3)$ at one point $O(0,0)$, called the vertex of the graph. Line segments are called bonds of the graph. On the each edges of the over defined graph, we consider fractional differential equations

$${}^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{0t}u^{(k)}(x,t) - u^{(k)}_{xx}(x,t) = f^{(k)}(x,t), \quad x \in B_k \tag{1}$$

on the metric graphs, where $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma, \delta \in R \quad f^{(k)}(x,t)$, $k = 1,2,3$ are given functions and ${}^{PC}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{0t}$ is Regularized Prabhakar derivative of order β [1].

Problem. To find functions $u^{(k)}(x,t)$ in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfying equation (1) at $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma, \delta \in R$ and non-local conditions:

$$u^{(k)}(x,t)\Big|_{t=0} = Mu^{(k)}(x,t)\Big|_{t=T} \tag{2}$$

vertex conditions

$$u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t) = u^{(3)}(0,t), t \in [0,T],$$
$$u_x^{(1)}(0,t) + u_x^{(2)}(0,t) + u_x^{(3)}(0,t) = 0, t \in [0,T],$$

and boundary conditions

$$u^{(k)}(L_k,t) = 0, \;\; t \in [0,T], \;\; k = 1,2,3.$$

where $M \in \mathbb{R}$.

Notice, that non-local initial problem with the same condition as (2) for the time-fractional and space-singular equation in simply-connected domain (not on the metric graphs) was investigated by E.Karimov, M.Mamchuev and M.Ruzhansky [2], in [3] non-local problem for a time-fractional differential equation on metric graph with the Hilfer operator was investigated.

Using the method of separations of variables for the homogeneous equation we will get ODE of integer order

$$\frac{d^2}{dx^2}X^{(k)}(x) + \lambda^2 X^{(k)}(x) = 0, \;\; \lambda \in R\backslash\{0\}, \; k = 1,2,3 \tag{3}$$

and ODE of fractional order

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}T(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \;\; 0 < \alpha < l,$$

moreover, the general solution

$$X^{(k)}(x) = a_k \cos\lambda x + b_k \sin\lambda x; \;\; x \in B_k$$

of equation (3), was found eigenfunctions and eigenvalues in [3].

Using properties of two variables Mittag-Leffler function, we prove the uniform convergence of the obtained Fourier series. The uniqueness of the solution of the problem is also proved [3].

References

1. **D'Ovidio M., Polito F.** *"Fractional diffusion telegraph equations and their associated stochastic solutions"*, Theory of Probability and its Applications, 2018. Vol 62, Issue 4, pp. 552-574. [arXiv: 1307.1696 (2013)].

2. **Karimov E.T., Mamchuev M., Ruzhansky M.** *Non-local initial problem for second order time-fractional and space-singular equation.* Hokkaido Mathematical Journal, 2020. Vol. 49, Issue 2, pp. 349-361.

3. **Karimov E.T., Sobirov Z. A., Khujakulov J. R.** *A non-local problem for a time-fractional differential equation with the Hilfer operator on metric graph.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2024. Vol. 47, Issue 18, pp. 13562-13580.

4. **Khujakulov J. R.** *Initial-boundary value problem for a time fractional differential equation with the Prabhakar derivative on a star graph.* Bulletin of the Institute of Mathematics, 2023. Vol. 6, Issue 2, pp. 20-30.

Некоторые свойства полигармонических функций, определенных в четномерном евклидовом пространстве

Хасанов А. Б., Жураева У. Ю.,
Самаркандский Государственный университет имени Шароф Рашидова,
Самарканд, Узбекистан; ahasanov2002@mail.ru, umida_9202@mail.ru

Abstract: In this work we consider polyharmonic functions and Cauchy problem .The integral representation for polyharmonic functions is proved. Moreover, there is investigated a regularized solution to Cauchy problem for polyharmonic functions in even dimensional Euclidean space. Keywords: Polyharmonic function, CarlemanЎ¯s function, integral representation, Cauchy problem.

Аннотация: В данной работе мы рассматриваем полигармонические функции и задачу Коши. Доказано интегральное представление для полигармонических функций.Кроме того, исследовано регуляризованное решение задачи Коши для полигармонических функций в четном размерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: полигармоническая функция, функция Карлемана, интегральное представление, задача Коши.

Если рассматривать задачу по заданным на части границы граничным значениям восстановить ее значения всюду внутри области, при произвольных начальных данных задача неразрешима.Поэтому оно относится к числу некорректно поставленных задач. М.М.Лаврентьев [1] ввел важное понятие - функцию Карлемана и с ее помощью построил регуляризацию решения задачи. С помощью методы и идеи М.М.Лаврентьева, Ш. Ярмухамедов в работе [2] впервые предлагает метод построения семейства фундаментальных решений уравнения Лапласа, исчезающего в пределе вместе со своими производными любого порядка вне произвольного фиксированного конуса. В работе [3] построена функция Карлемана для полигармонических уравнений порядка n в некоторых неограниченных областях лежащих в R^m при четных m, когда $2n \geq m$.

Работа посвящена полигаргармоническим функциям определенных в области $D \subset \mathbb{R}^m, m = 2k$. Пусть $\mathbb{R}^m$ - m-мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$,$x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0)$, $s = \alpha^2 = |x' - y'|$. D Ч неограниченная односвязная область, лежащая в слое $\{y : y = (y_1, y_2, \ldots, y_m), y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m-1}, 0 < y_m < h, h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\}$ с границей $\partial D = L \cup S$, где $L = \{y : y_m = 0\}$, $S = \{y : y_m = f(y_1, \ldots, y_{m-1})\}$, $f(y_1, \ldots, y_{m-1})$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, предположим, что площадь границы удовлетворяет условию $\int_{\partial D} \exp(-b_0 \cosh \rho_0 |y'|) ds < \infty$, $b_0 > 0$, $0 < \rho_0 < \rho$.

Пусть

$$u \in C^{2n}(D) \quad \Delta^n u(y) = 0, \quad y \in D. \tag{1}$$

$$u(y) = F_0(y), \quad \Delta u(y) = F_1(y), \ldots, \quad \Delta^{n-1} u(y) = F_{n-1}(y), \quad y \in S, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(y)}{\partial n} = G_0(y), \quad \frac{\partial \Delta u(y)}{\partial n} = G_1(y), \ldots, \quad \frac{\partial \Delta^{n-1} u(y)}{\partial n} = G_{n-1}(y), \quad y \in S. \tag{3}$$

Здесь $F_i(y)$ и $G_i(y)$ Ч заданные на ∂D непрерывные функции, n Ч внешняя нормаль к ∂D. Требуется найти $u \in C^{2n}(D)$, удовлетворяющий указанным условиям. Определим функцию:

$$\Phi_\sigma(y, x) = C \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{\exp(\sigma\omega + \omega^2 - a \cosh \rho_1(\omega - h/2))}{\omega - x_m} \right] (u^2 - s)^{n-k} du,$$

где $C = \frac{c_0}{\exp(\sigma x_m + x_m^2 - a \cos \rho_1 (x_m - h/2))}$, $\omega = iu + y_m$.

Теорема 1. Функция $\Phi_\sigma(y,x)$, является полигармонической функцией порядка n по y при $s>0$ и является функцией Карлемана для точки $x\in D$ и части $\partial D\setminus S$.

Обозначим через $B_\rho(D)$ пространство полигармонических функций порядка определенных в D, имеющие непрерывные частные производные порядка n вплоть до конечных точек границы ∂D и удовлетворяющих условию:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(|\Delta^k u(y)|+|\operatorname{grad}\Delta^k u(y)|\right)\le C\exp(o(\exp\rho_2(y'))).$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие роста:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(|\Delta^k u(y)|+\left|\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{n-k-1}u(y)\right|\right)\le C\exp\left(b\cos\rho_3(y_3-h/2)\exp(\rho_3|y'|)\right),\quad b<a_2.$$

Тогда справедливо интегральное представление.

$$u(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial D}\left[\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)\frac{\partial\Delta^{n-k-1}u(y)}{\partial n}-\Delta^{n-k-1}u(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)}{\partial n}\right]ds.$$

Теорема 3. Если $u(x)$ решение задачи (1)-(3), удовлетворяет условиям

$$u\in B_\rho(D),\quad \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{\partial\Delta^{n-1-k}u(y)}{\partial\bar n}\right|+|\Delta^{n-1-k}u(y)|\le 1,\ \forall y\in\partial D\setminus S,$$

то справедливо неравенство

$$|u(x)-u_\sigma(x)|\le MC(\sigma)\exp(-\sigma x_m),\quad \sigma\ge\sigma_0>0,\quad x\in D.$$

где $u_\sigma(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_S\left[G_{n-k-1}(y)\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)-F_{n-k-1}(y)\frac{\partial\Delta^k\Phi_\sigma(y,x)}{\partial\bar n}\right]ds$, $C(x)$- многочлен с вполне определчнными коэффициентами.

Литература

1. **Леонтьев А.Ф.** *О теоремах типа Фрагмена-Линделефа для гармонических функций в цилиндре.* Изв. АН СССР. Сер.матем.1963.є27.С.661–676.

2. **Ярмухамедов Ш.Я.** *Формула Грина в бесконечной области и ее применение.* ДАН СССР.1985.285.С.697–700

3. **Жураева Н.Ю.,Жураева У.Ю,Саидов У.М.** *Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в т-мерном четном евклидовом пространстве.* Uzbek Mathematical Journal.2011.є3.С.64–68

Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения гиперболического типа третьего порядка в специальной области

Исломов Б. И.[1], Юнусов О. М.[2].
[1] Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
e-mail: islomovbozor@yandex.com
[2] Кокандский государственный университет, Коканд, Узбекистан;
e-mail: oybek198543@mail.ru

Краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического и эллиптического типа второго порядка, когда нагруженная часть содержит след или производную от искомой функции изучены сравнительно мало. Отметим работы [1-5]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом. В работах [6] изложена методика постановки корректных краевых задач со смещением для нагруженных линейных гиперболических уравнений второго порядка в специальных областях. Показано, что на корректность таких краевых задач существенно влияет нагруженная часть рассмат-риваемого уравнения.

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задаче для нагруженного уравнения гиперболического типа третьего порядка в специальной области.

Пусть Ω – область, ограниченная отрезками A_jB_j $(j=1,2)$ оси Ox и при $y<0$ характе-ристиками $A_jC_1: x-(-1)^{j-1}y=(-1)^{j-1}$, $B_jC_2: x-(-1)^{j-1}y=(-1)^{j-1}q$ уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu)=\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx}-u_{yy}-\mu_j u(\xi,0))=0, \tag{1}$$

выходящими из точек $A_j((-1)^{j-1};0)$ и $B_j((-1)^{j-1}q;0)$, пересекающимися в точках $C_1(0;-1)$ и $C_2(0;-q)$, $\xi=x+y$. В уравнение (1) $\mu_j(j=1,2)$ - заданные действительные числа, причем

$$0<q<1,\quad (-1)^{j-1}\mu_j>0,\ \ (j=1,2). \tag{2}$$

Введем обозначения: $I_1=\{(x,y): x=0,-1<y<-q\}$, $J_1=\{(x,y): q<x<1, y=0\}$,

$$J_2=\{(x,y): -1<x<-q,\ \ y=0\},\ \ \Omega_{5j}=\Omega_5\cap\left\{(-1)^j x<0,\ \ y<0\right\},$$

$$B_jD_j:\ \ x+(-1)^{j-1}y=(-1)^{j-1}q,\ \ C_2E_j\ :\ \ x+(-1)^{j-1}y=(-1)^j q,$$
$$A_jD_j:\ \ x-(-1)^{j-1}y=(-1)^{j-1},\ \ A_jE_j\ :\ \ x-(-1)^{j-1}y=(-1)^{j-1}.$$

Через Ω_j и Ω_{j+2}, Ω_5 соответственно обозначим характеристические треугольники $A_jB_jD_j$, четырехугольники $B_jC_2E_jD_j$ и $C_2E_1C_1E_2$.

Задача L_μ. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup\overline{A_2C_1})$;

2) $u_{xxx},\ u_{xyy}\in C(\Omega_j\cup\Omega_{j+2}\cup\Omega_{5j}$ и удовлетворяет уравнению (2) в областях Ω_j, Ω_{j+2}, и $\Omega_{5j}, (j=1,2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u_y(x,0)|_{A_jB_j}=\nu_j(x),\qquad q<(-1)^{j-1}x<1, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{B_jC_2}=\psi_j(x),\qquad 0\le(-1)^{j-1}x\le q, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{A_jD_j} = \varphi_j(x), \qquad \frac{q+1}{2} \le (-1)^{j-1}x \le 1, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_2C_1} = p(x), \qquad -1 \le x \le 0, \tag{6}$$

где n – внутренняя нормаль, $\nu_j(x)$, $\psi_j(x)$, $\varphi_j(x)$, $p(x)$ $(j = 1, 2)$ – заданные функции, причем $\psi_1(0) = \psi_2(0)$,

$$\nu_j(x) \in C^2\left(q < (-1)^{j-1}x < 1\right), \tag{7}$$

$$\psi_j(x) \in C[0 \le (-1)^{j-1}x \le q] \cap C^3\left(0 < (-1)^{j-1}x < q\right), \tag{8}$$

$$\varphi_j(x) \in C^1\left[\frac{1+q}{2} \le (-1)^{j-1}x \le 1\right] \cap C^3\left(\frac{1+q}{2} < (-1)^{j-1}x < 1\right), \tag{9}$$

$$p(x) \in C^1[-1,0] \cap C^2(-1,0). \tag{10}$$

Доказана следующая теорема.

Teorema 1. Если выполнены условия (2), (7)-(10), то задача L_μ в области Ω однозначно разрешимо.

Литература

1. **Нахушев А.М.** *Нагруженные уравнения и их приложения.* М.: Дифф. уравнения. - 1983. 86-94 с.

2. **Исломов Б., Курьязов Д.М.** *Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа.* Т.: Узбекский математический журнал. - 2000. No 2. 29-35 с.

3. **Исломов Б., Курьязов Д.М.** *Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка.* УФА.: Уфимский математический журнал. - 2011. No 3. 15-25 с.

4. **Исломов Б. И., Юнусов О. М.** *Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболического типа в специальной области.* Т.: Узбекский математический журнал. - 2017. No 1. 86-95 с.

5. **Исломов Б. И., Холбеков Ж.А.** *Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.* Сам.: Физ.-мат. науки. - 2021. **25**(3). 407-422 с.

6. **Islomov B. I., Yuldashev T.K., Yunusov O.M.** *Nonlocal Boundary Problem for a Loaded Equation of Mixed Type in a Special Domain.* Lobachevskii Journal of Mathematics. -2024.**45**(7). 3304-3313 с.

UDK 517.95

Об одном методе решение краевой задачи для вязко-трансзвукового уравнения с несимметричными условиями по времени

Апаков Ю. П.,[1,2] Иброхимов Х. К.[2]
[1]Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз,
[2]Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан;
yusupjonapakov@gmail.com, xusniddin571@mail.ru

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = const.$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоско - параллельный поток [3]. Одним из центральных пунктов в теоретическом исследовании некорректной задачи является доказательство теоремы единственности.

В области $D = \{(x, y) : \ 0 < x < p, \ 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где $p, \ q \in R$ и для него исследуем следующую задачу.

Задача A. Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и следующим краевым условиям:

$$u_y(x, 0) = u(x, q) = 0, \ 0 \le x \le p, \tag{2}$$

$$\begin{cases} au(0, y) + bu_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \\ cu(p, y) + du_{xx}(p, y) = \psi_2(y), \ \ 0 \le y \le q, \\ u_x(0, y) = \psi_3(y), \end{cases} \tag{3}$$

где a, b, c и d - заданные постоянные, а также $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$, а $\psi_i(y)$, $i = \overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\psi_{in}(q) = \psi'_{in}(0) = 0, i = \overline{1,3}. \tag{4}$$

Отметим, что для уравнения (1) в работе [3], исследована краевая задача с симметричными условиями по времени.

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $ab \le 0, cd \ge 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два различных решений: $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$u\,L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx} - \frac{1}{2}\,u_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right) - u_y^2 = 0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области D, учитывая однородные краевые условии и требуя $a \neq 0, c \neq 0$, получим

$$\frac{d}{c}\int\limits_0^q u_{xx}^2\,(p,y)\,dy - \frac{b}{a}\int\limits_0^q u_{xx}^2\,(0,y)\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_0^q u_x^2\,(p,y)\,dy + \int\limits_0^p\int\limits_0^q u_y^2\,(x,y)\,dxdy = 0.$$

Учитывая условия $ab \leq 0$, $cd \geq 0$, получим $u_y\,(x,y) = 0$, т.е. $u\,(x,y) = f\,(x)$, здесь $f\,(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям задачи. Тогда из условии (2), т.е. $u\,(x,0) = 0$, получим $f\,(x) = 0$. Следовательно $u\,(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D}$. В силу последнего, получим $u_1\,(x,y) = u_2\,(x,y)$.

В случаях $b \neq 0$, $d \neq 0$; $a \neq 0$, $d \neq 0$; $c \neq 0$, $b \neq 0$, аналогично получаем равенство $u\,(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если функции $\psi_i\,(y) \in C^2\,[0,q]$, $i = \overline{1,3}$ и выполняются условия (4), то решение задачи A существует.

Теорема 2 доказана с помощью метода разделения переменных, т.е. ищется в виде произведения двух функций $X(x)$ и $Y(y)$. Для определения $Y(y)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя несимметричными условиями на границах сегмента $[0,q]$. Для этой задачи найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции при $n \in N$. Полнота система собственных функций $Y_n(y)$ показано в работе [5]. Для определения $X(x)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с тремя граничными условиями на границах сегмента $[0,p]$. Решения указанной задачи найдена в виде бесконечного ряда, доказана равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования при некоторых условиях на заданные функции. Сходимость производной второго порядка решения по переменной y доказывается с помощью неравенств Коши-Буняковского и Бесселя. При обосновании равномерной сходимости решения доказывается отсутствие "малого знаменателя".

ЛИТЕРАТУРА

1. **Юлдашев Т. К.** *Обратная задача для одного интегро-дифференциальноro уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - No 1(34). - С.56-65.

2. **Рыжов О. С.** *Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа.* Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

3. **Диесперов В.Н.** *О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения.* Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - No 5. - С. 1265-1279.

4. **Апаков Ю.П., Иброхимов Х.К.** *О разрешимости краевой задачи для вязкотрансзвукового уравнения.* Научный вестник НамГУ. 2024. No 10. С. 43–48.

5. **Umarov R. A.** *Краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками с младшими членами.* Дисс... док.фил.по физ.-мат. наук. - Фергана: Ферганский государственный университет, 2025. 98 с. *UDK 517.95*

Об одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка, содержащее третью производную по времени в полуограниченной области

Апаков Ю. П.[1],[2], **Меликузиева Д. М.**[2]

[1] Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз.,Ташкент,Узбекистан; yusupjonapakov@gmail.com

[2] Наманганский Государственный технический университет, Наманган, Узбекистан; meliquziyevadilshoda@gmail.com

Краевые задачи для уравнение четвертого порядка, содержащее третью производную по времени мало изучены [1-4].

В области $D^- = \{(x,y): \ 0 < x < p, \ -\infty < y < 0\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \tag{18}$$

где p - действительное число, и для него исследуем следующую задачу.

Задача A . Найти решение уравнения (1) в области D^- из класса $u(x,y) \in C^{4,3}_{x,y}(D^-) \cap \ C^{3,2}_{x,y}(D^- \cup \Gamma_2)$, ограниченное вторую производную по y при $y \to -\infty$, равномерно по x и $u_{xx} \in L_2(D^-)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0,y) = u_x(p,y) = u_{xx}(0,y) = u_{xxx}(p,y) = 0, \ -\infty < y \le 0, \tag{19}$$

$$u(x,0) = \psi_3(x), \ \lim_{y\to-\infty} u(x,y) = \lim_{y\to-\infty} u_y(x,y) = 0, \ 0 \le x \le p, \tag{20}$$

где $\Gamma = \partial D^-$ - граница области D^- , $\psi(x) \in C^2[0,p]$ - заданная функция, причем

$$\psi(0) = \psi'(p) = 0. \tag{21}$$

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однародными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D^-.

Для этого уравнение (1) умножим на u , тогда получим

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}(uu_{xxx} - u_x u_{xx}) - \frac{\partial}{\partial y}\left(uu_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2\right) + u_{xx}^2 = 0. \tag{22}$$

Интегрируя тождество (5) по области $D_d = \{(x,y): 0 < x < p, \ \ d < y < 0\}$, имеем

$$\begin{aligned} &\int_d^0 [u(p,y)\,u_{xxx}(p,y) - u(0,y)\,u_{xxx}(0,y)]dy - \\ &- \int_d^0 [u_x(p,y)\,u_{xx}(p,y) - u_x(0,y)\,u_{xx}(0,y)]dy - \\ &- \int_0^p [u(x,0)\,u_{yy}(x,0) - u(x,d)\,u_{yy}(x,d)]dx + \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^p \left[u_y^2(x,0) - u_y^2(x,d)\right]dx + \iint_{D_d} u_{xx}^2 dxdy = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Если $d \to \infty$, то $D_d \to D^-$. Учитывая однородные краевые условия задачи A и свойства функции $u(x,y)$ при $y \to -\infty$, а также, что $u_{xx} \in L_2(D^-)$, из (6) получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^p u_y^2(x,0)\,dx + \iint_{D^-} u_{xx}^2(x,y)\,dxdy = 0.$$

Из второго слагаемого имеем $u_{xx} = 0 \Rightarrow u(x,y) = x \cdot f_1(y) + f_2(y)$, $(x,y) \in D^- \cup \Gamma$, где $f_1(y)$, $f_2(y)-$ произвольные функции, удовлетворяюшие уравнения (1) и всем условиями задачи A.

Полагая $x = 0$, имеем $u(0,y) = f_2(y) = 0 \Rightarrow f_2(y) = 0$, а $x = p$, имеем $u_x(p,y) = f_1(y) = 0$. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$, в $D^- \cup \Gamma$.

Используя метода Фурье решения задачи A построено в виде:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{k_n y} X_n(x), \tag{24}$$

здесь $X_n(x)$ - собственные функции, задачи

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(p) = X''(0) = X'''(p) = 0, \end{cases}$$

имеют вид:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{\pi}{2p}(2n-1)x,$$

которая система функций $\{X_n(x)\}$, полна в $L_2(0,p)$.[5].

Терема 2. Если фнкции $\psi(x) \in C^2[0,p]$ и выполняются условия (4), то решение задачи A сушествуют, и представляются в виде (7).

Доказаны, что ряд (7) и его частные производные u_{xxxx}, u_{yyy} сходятся абсолютно и равномерно в области $D^- \cup \Gamma$.

Литература

1. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate.// Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023 Vol. 44, No. 8. pp.3218–3224. DOI:10.1134/S1995080223080061

2. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time.// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2023.No.4(112).pp.30–40. DOI:10.31489/2023M4/30-40

3. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On the solution of a boundary problem for a fourth order equation containing a third time derivative in semi- bounded domains.// Uzbek Mathematical Journal. 2024. Volume 68. Issue 3. pp 5–11. DOI: 10.29229 / uzmj. 2024-3-1

4. Апаков Ю.П., Меликузиева Д.М. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка, содержащее третью производную по времени в полуограниченных областях.// Вестник Ошского Государственного Университета математика.Физика.Техника. 2024 .Т.2.є5.С.16–25.

5. Апаков Ю.П.,Умаров Р.А. О полноте собственных функций краевой задачи с несимметричными условиями для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Международная научная конференция "Неклассические уравнения математической физики Ташкент.24-26 октября 2024.

Об одной нелокальной задаче для уравнения телеграфа

Зикиров О. С.[1], Болтаева М. У.[1]
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
zikirov@yandex.ru[1]

В работе рассматривается краевая задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в прямоугольной области, ограниченными характеристиками уравнения.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \tag{1}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $f(x, y)$ – заданные функции.

Исследование некоторых физических процессов приводит при математическом моделировании к нелокальным задачам для уравнений в частных производных. Одним из частных случаев таких задач являются задачи с интегральными условиями.

Нелокальные задачи с интегральными условиями для линейных уравнений в частных производных рассмотрены в работах [1].

Нелокальная задача. *Найти в области D решение $u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cup C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x, 0) + \alpha(x) \int_0^h u(x, y)dy = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0, y) + \beta(y) \int_0^1 u(x, y)dx = \psi(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

здесь $\alpha(x)$, $\varphi(x)$, $\beta(y)$, $\psi(y)$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования

$$\varphi(0) - \alpha(0) \int_0^h u(0, y)dy = \psi(0) - \beta(0) \int_0^1 u(x, 0)dx. \tag{4}$$

Целью данной работы является доказательство существования и единственности классического решения задачи (1)–(4). Для доказательство исходная задача сводится к задаче Гурса для нагруженного гиперболического уравнения.

Литература

1. **Пулькина Л.С.** *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений.* – Самара. Самарский университет. 2012. – 194 с.

УДК 517.956.6

Нелокальная задача с интегральными условиями для уравнения третьего порядка

Зикиров О.С.[1], Сагдуллаева М.М.[2],
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент;
[1]zikirov@yandex.ru [1]sagdullayevam@mail.ru

Целью данной работы является доказательство существования и единственности классического решения нелокальной задачи с интегральными условиями для уравнения третьего порядка.

В области $D = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция.

Найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

граничным

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и интегральным условиям

$$\int_0^l k(x)u(x,t)dx = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $k(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$ – заданные, непрерывные на $[0,l]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \qquad \varphi'(l) = \mu_2(0), \qquad \int_0^l k(x)\varphi(x)dx = \mu_3(0).$$

Определение. *Под регулярным в области D решением задачи (1)–(4) будем понимать действительную функцию $u(x,t)$, из класса $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяющую условиям (1)–(4) в обычном смысле.*

Имеет место следующая теорема о разрешимости задачи (1)–(4).

Теорема *Пусть выполнено условие $f(x,t) \in C(\overline{D})$ и заданные функции $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = 1,2,3)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x), k(x) \in C^2[0,l];\quad \mu_1(t),\quad \mu_3(t) \in C^1[0,T],\quad \mu_2(t) \in C[0,T].$$

Тогда существует единственное регулярное решение нелокальной задачи (1)–(4).

Литература

1. **Джураев Т. Д., Попелек Я.** О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка.// *Дифференц. уравнения,* 1991. Том 27, №10, (1991), 1734–1745.
2. **Cannon J. R.** The solution of the heat equation subject to the specification of energy.// *Quart. Appl. Math.,* 1963. Vol. 21, No. 2. pp. 155–160.

UDK 517.956.6

Об одной линейной обратной задаче для трҷхмерного уравнения чаплыгина с периодическими краевыми условиями в неограниченном параллелепипеде

Джамалов С.З.[1], Туракулов Х.Ш.[2]
[1] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
[2] Кокандский государственный университет, Коканд, Узбекистан;
[1]siroj63@mail.ru, [2]hamidtsh87@gmail.com

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений таких как, параболических, эллиптических и гиперболических типов.

Значительно менее изученными являются прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода в неограниченных областях [1]. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе, для исследования однозначное разрешимости обратных задач для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде предлагается метод, который основан на сведение обратной задачи к прямым периодическим краевым задачам для семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Чаплыгина в ограниченной прямоугольной области.

Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [2],[3].

В области

$$G = (-1,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (-1,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x)u_{tt} - \Delta u + a\,(x)\,u_t + c\,(x,t)\,u = \psi\,(x,t,z), \tag{1}$$

где $x\,K(x) > 0,\ x \neq 0, x \in (-1,1);\quad \Delta u = u_{xx} + u_{zz}$-оператор Лапласа.

Здесь $\psi\,(x,t,z) = g\,(x,t,z) + h\,(x,t) \cdot f\,(x,t,z)$, $g\,(x,t,z)$ и $f(x,t,z)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x,t,z),\ h(x,t)\}$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие что, функция $u\,(x,t,z)$ удовлетворяет следующим периодическим краевым условиям:

$$D_t^p\,u|_{t=0} = D_t^p\,u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p\,u|_{x=1} \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$.

Далее будем считать, что

$$u(x,t,z) \text{ и } u_z(x,t,z) \to 0 \text{ при } |z| \to \infty. \tag{4}$$

и дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), \tag{5}$$

и с функций $h(x,t)$ принадлежит классу $U = \{(u,h) |\ u \in W_2^{2,3}(G);\ h \in W_2^2(Q)\}$.

Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизатропная пространство Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)$ пространство Соболева.

Литература

1. **Джамалов С. З.** *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* Т.: Fan Ziyosi. - 2021.
2. **Turakulov Kh.Sh.** *On the smoothness of a semi-periodic boundary value problem for the three-dimensional Tricomi equation in the unlimited parallelepi-ped.* Uzbek Mathematical Journal, 2022. Vol. 66(4), P. 167–174.
3. **Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh., Kenjaev R.** *On a Semi-periodic Boundary Value Problem For The Three-dimensional Tricomi Equation In An Unbounded Parallelepiped.* AIP Conf. Proc., 2023. Vol. 2781, P. 358–362.
4. **Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh., Sultanov M.S.** *On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbound-ed domain.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022. 43(11), pp. 3104–3111. *УДК 517.955*

Интегрирование обобщенного уравнения Камассы-Холма в классе периодических функций

Бабажанов Б. А.[1], Атажонов Д. О.[2], Якубова М. З.[3],
[1,2,3]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;
diwa_4848@mail.ru

В 2001 году Дуллин и др. [1] представил обобщенное уравнение Камассы-Холма

$$u_t + c_0\, u_x + 3uu_x - \alpha^2(u_{xxt} - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx}) + \gamma\, u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

которое называется уравнением γ - Камасса-Холма. Они изучили все гладкие, пиковые и остроконечные уединенные волновые решения уравнения (1), используя метод динамических систем.

Рассмотрим следующее периодическое уравнение

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - \gamma\,(u_x - u_{xxx}) = 0 \tag{2}$$

в классе вещественных π-периодических по пространственной переменной x функций $u = u(x,t)$, удовлетворяющих условиям гладкости

$$u \in C_x^3(t>0) \cap C_t^3(t>0) \cap C(t \geq 0)$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R, \tag{3}$$

где $u_0(x+\pi) = u_0(x) \in C^3(R)$ - заданная вещественная π-периодическая функция и $q = u(x,t) - u_{xx}(x,t)$ - потенциал уравнения Штурма–Лиувилля с весом

$$y'' = \frac{1}{4}y + \lambda q(x,t)y,\quad x \in R. \tag{4}$$

Отметим, что задача (2)Ц(4) при $\gamma = 0$ решена в [2] методом обратных задач.

Цель данной работы – дать процедуру построения решения $u(x,t)$ задачи (2)-(4) методом обратной спектральной задачи для периодического уравнения Штурма–Лиувилля с весом (4).

Спектр уравнения Штурма–Лиувилля с весом (4) абсолютно непрерывен и совпадает с множеством [3]

$$E = \{\lambda \in R\colon -2 \leq \triangle(\lambda) \leq 2\} = [\lambda_0,\ \lambda_1] \cup [\lambda_2,\ \lambda_3] \cup \cdots \cup [\lambda_{2n},\ \lambda_{2n+1}] \ldots .$$

Интервалы $(-\infty,\ \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n \geq 1$ называются лакунами. Концы лакун являются собственными значениями либо периодической краевой задачи $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$, либо антипериодической краевой задачи $y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$ для уравнения (4) и состоят из нулей функции $\Delta^2(\lambda) - 4$, где $\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)$. Здесь $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ - решения уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = 1, c'(0,\lambda) = 0$ и $s(0,\lambda) = 0$, $s'(0,\lambda) = 1$ соответственно.

Обозначим через $\xi_n, n \geq 1$ нули функции $s(\pi,\lambda)$. Заметим, что ξ_n совпадает с собственными значениями задачи Дирихле для уравнения (4).

Величины ξ_n, $n \geq 1$ со знаками $\sigma_n = sign\{s'(\pi,\ \xi_n) - c(\pi,\ \xi_n)\}$, $n \geq 1$ называются спектральными параметрами уравнения Штурма–Лиувилля с весом (4).

Границы λ_n спектра и спектральные параметры ξ_n, σ_n называются спектральными данными уравнения Штурма–Лиувилля с весом (4).

Определение спектральных данных (4) называется прямой спектральной задачей и, наоборот, восстановление коэффициента $q(x)$ уравнения (4) по спектральным данным называется обратной спектральной задачей.

Основной результат представлен в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $u(x,t)$ - решение задачи (2)-(4). Тогда спектр задачи (4) не зависит от t, а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(t)$, $\sigma_n = \sigma_n(t)$, $n \geq 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\frac{d\xi_n(t)}{dt} = \left\{ -\frac{1}{2\xi_n} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_j} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k} + \gamma \right\} h_n(\xi),$$

где

$$h_n(\xi) = -\frac{\sigma_n\xi_n\sqrt{\left(1-\frac{\xi_n}{\lambda_0}\right)\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi_n}{\lambda_{2i-1}}\right)\left(1-\frac{\xi_n}{\lambda_{2i}}\right)}}{\prod\limits_{j\neq n,\,j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi_n}{\xi_j}\right)}.$$

Знак $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами ее лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. При этом выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \ n \geq 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geq 1$ - спектральные параметры уравнений Штурма–Лиувилля с весом (4), соответствующие коэффициентам $q_0(x) = u(x,0) - u_{xx}(x,0)$.

Литература

1. **Dullin H.R., Gottwald G.A., Holm D.D.** *An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion.* Phys. Rev. Lett. - 2001. - 1–4 с.
2. **Constantin A.** *On the spectral problem for the periodic Camassa-Holm equation.* J. Math. Anal. Appl. - 1997. - 215–230 с.
3. **Constantin A.** *A general-weighted Sturm-Liouville problem.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. - 1997. - 767–782 с.

УДК 517.946

Об интегрирование нагруженное уравнение Кортевег-де Фриза отрицательного порядка с простым самосогласованным источникомґ

Уразбоев Г. У.[1], Балтаева И. И.[2], Исмоилов О. Б.[3]
[1]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, 220100, Узбекистан, город Ургенч, улица Х. Олимжона, 14; gayrat71@mail.ru
[2]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, 220100, Узбекистан, город Ургенч, улица Х. Олимжона, 14; iroda-b@mail.ru
[3]Хорезмское отделение Института математики им. В. И. Романовского АН РУз, 220100, Узбекистан, город Ургенч, улица Х. Олимжона, 14; bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

В 1967 году Гарднер, Грин, Крускал и Миура [1] предложили метод обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля как метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега де Фриза (КдФ)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Вскоре после этого Лакс [2] показал общий характер этого метода. В работе [3] исследовалось уравнение КдФ отрицательного порядка. В данной работе рассматривается нагруженное уравнение КортевегаЦде Фриза отрицательного порядка с простым самосогласованным источником:

$$\begin{cases} u_t = 2vv_x + 2\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x} |\varphi_m|^2 + \gamma(t)u(0,t)u_x, \\ v_{xx} = uv, \\ -\varphi_m'' + u\varphi_m = \lambda_m \varphi_m, \quad m = 1, 2, \ldots, N, \quad t > 0, x \in R \end{cases} \tag{1}$$

Система уравнений (1) рассматривается при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0(x), \ \ x \in R, \tag{2}$$

где $\gamma(t)$ – заданная ограниченная, непрерывная функция и начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u_0(x)|dx<\infty$.

2. Оператор $L(y)\equiv -y''+u_0(x)y=\lambda y, x\in R^1$ имеет равно N потрицательных собственных значений $\lambda_1(0),\ \lambda_2(0),...,\lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче $\varphi_m(x,t)-$ собственная функция оператора $L(t)\equiv -\frac{d^2}{dx^2}+u(x,t)$, которая соответствуют собственному значению $\lambda_m(t)=-\chi_m^2(t)$ и нормированная условием:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_m(x,t)|^2\,dx=A_m(t), m=1,2,...,N, \tag{3}$$

где $A_m(t)$ – заданные, положительные, непрерывные функции. Предполагается, что функция $u(x,t)$ достаточно быстро стремится к нулю при $x\to\pm\infty$ функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ обладают требуемой гладкостью и удовлетворяют условиям $x\to\pm\infty$:

$$\begin{array}{l}\int_{-\infty}^{\infty}\left((1+|x|)\,|u|+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)dx<\infty,\\ v^2(x,t)\to 1, v_x(x,t)\to 0, v_{xx}(x,t)\to 0, \text{in}|x|\to\infty.\end{array} \tag{4}$$

В данной работе метод обратной задачи рассеяния применчн для интегрирования уравнения КдФ отрицательного порядка (1) при начальном условии.

Литература

1. **C. S. Gardner, J. M. Greene, Kruskal M.D. and Miura R.M.** *Phys. Rev. Lett.* T.: 19, 1095 (1967).
2. **P. D. Lax, Comm. Pure.** *Appl. Math.* T.: 21, 467 (1968).
3. **Г. У. Уразбоев, И. И. Балтаева, О. Б. Исмоилов.** *Интегрирование уравнения КортевегаЦде Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния* Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 33:3 (2023), 523Ц533. *УДК*

517.957

Система Каупа с дополнительным членом в классе периодических функций

Яхшимуратов А.Б.[1], Матекубов О.М.[2], Маткаримов С.А.[2]
[1] Университет Мамуна, Хива, Узбекистан,
[2] Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,
albaron@mail.ru ollabergan2021@mail.ru, sanjar_matkarimov86@mail.ru

Рассмотрим следующую систему Каупа с нагруженным членом (см. [1-3])

$$\begin{cases} p_t=-6pp_x-q_x+F(p(a,t),q(a,t),t)\cdot p_x \\ q_t=p_{xxx}-4qp_x-2pq_x+F(p(a,t),q(a,t),t)\cdot q_x, \end{cases} \tag{1}$$

при начальном условии

$$p(x,t)|_{t=0}=p_0(x),\ q(x,t)|_{t=0}=q_0(x). \tag{2}$$

Требуется найти π-периодические по x

$$p(x+\pi,t)\equiv p(x,t), q(x+\pi,t)\equiv q(x,t), x\in R, t\geq 0, \tag{3}$$

функции $p(x,t),\ q(x,t)$, удовлетворяющие условиям гладкости: $p\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$, $q\in C^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$. Здесь $F(x,y,t)=\sum_{k,j=0}^{m,n}\gamma_{kj}(t)x^k y^j$, где $\gamma_{kj}(t)$ – заданные действительные непрерывные ограниченные функции. $p_0\in C^3(R)$, $q_0\in C^2(R)$ заданные действительные π-периодические функции, причем $q_0(x)>0$.

Теорема 1. Пусть $p(x,t), q(x,t)$ решение задачи (1)-(3). Тогда собственные значения λ_n, $n\in Z$ периодической и антипериодической задачи для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля

$$T(\lambda,\tau,t)y\equiv -y''+q(x+\tau,t)y+2\lambda p(x+\tau,t)y-\lambda^2 y=0, x\in R$$

не зависят от параметров τ и t, а собственные значения $\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z\backslash\{0\}$ задачи Дирихле удовлетворяют аналогу системы Дубровина:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)sign(n)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times h_n(\xi)\times\left\{2p(\tau,t)+2\xi_n-F(p(a,t),q(a,t),t)\right\}, n\in Z\backslash\{0\},$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{-1})(\xi_n-\lambda_0)\cdot\prod_{k\neq n,0}(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)(\xi_k-\xi_n)^{-2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. При этом, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau), n\in Z\backslash\{0\},$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z\backslash\{0\}$ – спектральные параметры квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля, соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$ и $q_0(x+\tau)$.

Следствие 1. Эта теорема вместе с формулами следов дачт метод решения задачи (1)-(3).

Следствие 2. Используя результаты работы [4] выводим, что если начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются действительными аналитическими функциями, то и $p(x,t)$ и $q(x,t)$ являются действительными аналитическими функциями по x.

Следствие 3. Из результатов работы [5] следует, что если число $\pi/2$ является периодом для начальных функций $p_0(x)$ и $q_0(x)$, то и решение $p(x,t)$ и $q(x,t)$ являются $\pi/2$-периодическими по переменной x.

Литература

1. **Kaup D. J.** *A higher-order water-wave equation and the method for solving it.* Prog. Theor. Phys., v. 54, 1975, pp. 396-408.

2. **Matveev V. B. and Yavor M. I.** *Solutions presque periodiques et a N-solitons de l'equation hydrodynamique nonlineaire de Kaup.* Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A, v. 31, 1979, pp. 25-41.

3. **Cabada A., Yakhshimuratov A.** *The System of Kaup Equations with a Self-Consistent Source in the Class of Periodic Functions.* Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2013. V. 9, N 3. P. 287-303.

4. **Бабажанов Б. А., Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б.** *Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.* Дифф. уравнения, 2005, т. 41, N 3, с. 298-305.
5. **Яхшимуратов А. Б.** *Аналог обратной теоремы Борга для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля.* Вестник Елецкого гос. ун-та, 2005, т. 8, N 1, с. 121-126.

УДК 517.957

Нагруженная система Каупа в классе периодических функций

Яхшимуратов А.Б. [1], **Матекубов О.М.** [2]
[1] Университет Мамуна, Хива, Узбекистан,
[2]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,
ollabergan2021@mail.ru, albaron@mail.ru

Рассмотрим следующую нагруженную систему Каупа (см. [1-3])

$$\begin{cases} p_t = \gamma(t)\, p|_{x=0} \cdot (-6pp_x - q_x) \\ q_t = \gamma(t)\, p|_{x=0} \cdot (p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x) \end{cases} \tag{1}$$

при начальном условии

$$p(x,t)|_{t=0} = p_0(x),\, q(x,t)|_{t=0} = q_0(x). \tag{2}$$

Требуется найти π-периодические по x

$$p(x+\pi,t) \equiv p(x,t), q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), x \in R, t \geq 0, \tag{3}$$

функции $p(x,t),\ q(x,t)$, удовлетворяющие условиям гладкости: $p \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$, $q \in C^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$. Здесь $\gamma(t)$ - заданная действительная непрерывная ограниченная функция. $p_0 \in C^3(R)$, $q_0 \in C^2(R)$ заданные действительные π-периодические функции, причем $q_0(x) > 0$.

Теорема 1. Пусть $p(x,t), q(x,t)$ решение задачи (1)-(3). Тогда собственные значения λ_n, $n \in Z$ периодической и антипериодической задачи для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля

$$T(\lambda,\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y + 2\lambda p(x+\tau,t)y - \lambda^2 y = 0, x \in R$$

не зависят от параметров τ и t, а собственные значения $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z\backslash\{0\}$ задачи Дирихле удовлетворяют аналогу системы Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) sign(n) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times$$

$$\times h_n(\xi) \times 2\gamma(t)p(0,t)[p(\tau,t) + \xi_n], n \in Z\backslash\{0\},$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{-1})(\xi_n - \lambda_0) \cdot \prod_{k \neq n,0} (\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)(\xi_k - \xi_n)^{-2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. При этом, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\, \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in Z\backslash\{0\},$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z\backslash\{0\}$ – спектральные параметры квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля, соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$ и $q_0(x+\tau)$.

Следствие 1. Эта теорема вместе с формулами следов дачт метод решения задачи (1)-(3).

Следствие 2. Используя результаты работы [4] выводим, что если начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются действительными аналитическими функциями, то и $p(x,t)$ и $q(x,t)$ являются действительными аналитическими функциями по x.

Следствие 3. Из результатов работы [5] следует, что если число $\pi/2$ является периодом для начальных функций $p_0(x)$ и $q_0(x)$, то и решение $p(x,t)$ и $q(x,t)$ являются $\pi/2$-периодическими по переменной x.

Литература

1. **Kaup D. J.** *A higher-order water-wave equation and the method for solving it.* Prog. Theor. Phys., v. 54, 1975, pp. 396-408.
2. **Matveev V. B. and Yavor M. I.** *Solutions presque periodiques et a N-solitons de l'equation hydrodynamique nonlineaire de Kaup.* // Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A, v. 31, 1979, pp. 25-41.
3. **Cabada A., Yakhshimuratov A.** *The System of Kaup Equations with a Self-Consistent Source in the Class of Periodic Functions* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2013. V. 9, N 3. P. 287-303.
4. **Бабажанов Б. А., Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б.** *Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.* Дифф. уравнения, 2005, т. 41, N 3, с. 298-305.
5. **Яхшимуратов А. Б.** *Аналог обратной теоремы Борга для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля.* Вестник Елецкого гос. ун-та, 2005, т. 8, N 1, с. 121-126.

УДК 517.95

О единственности краевых задач для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками

Абдукодиров А. Т.[1], Мадибрагимова И. М.[2], Мамасидикова Т. А.[3]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
abdurashid1976@mail.ru
[2]Ферганский государственный технический университет, Фергана, Узбекистан;
samandar7g@gmail.com
[3]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
muhammadsiddiqovatojigul@gmail.com

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < p, \quad 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxxxx} + au_{xxxx} + bu_{xxx} + cu_{yy} + du_y + \mu u = 0 \tag{1}$$

где $p > 0, \quad q > 0, a, b, c, d, \mu$ - постоянные вещественные числа.

Задача Z_1. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^{5,2}_{x,y}(D) \cap C^{4,1}_{x,y}(\bar{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x,0) = u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p \tag{2}$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), u_x(0,y) = \psi_2(y), u_{xx}(0,y) = \psi_3(y),$$

$$u(p,y)=\psi_4(y), u_x(p,y)=\psi_5(y), \quad 0\le y\le q \tag{3}$$

где $\psi_i(y), \quad (i=1,5)$ - достаточно гладкие функции в области $\bar{D}$.

Теорема. Если задача Z_1 имеет решение, то при выполнении условия $\mu\ge 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. пусть задача Z_1 имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{D}$. Для этого обе части уравнения (1) умножим на $u(x,y)$, и получим

$$u\left(u_{xxxxx}+au_{xxxx}+bu_{xxx}+cu_{yy}+du_y+\mu u\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxxx}-u_xu_{xxx}+\frac{1}{2}u_{xx}^2+auu_{xxx}-au_xu_{xx}+buu_{xx}-\frac{1}{2}bu_x^2\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(cuu_y+\frac{1}{2}du^2\right)+au_{xx}^2-cu_y^2+\mu u^2=0 \tag{4}$$

Интегрируя тождество (4) по области D, учитывая формула Грина имеем

$$\int\limits_{aD}\left(uu_{xxxx}-u_xu_{xxx}+\frac{1}{2}u_{xx}^2+auu_{xxx}-au_xu_{xx}+buu_{xx}-\frac{1}{2}bu_x^2\right)dy-\left(cuu_y+\frac{1}{2}du^2\right)dx+$$

$$+\iint\limits_D\left(au_{xx}^2-cu_y^2+\mu u^2\right)dxdy=0$$

Если учесть однородных краевых условии, тогда из последнего получим

$$-\int_0^p\left[\left(cu(x,0)u_y(x,0)+\frac{1}{2}du^2(x,0)\right)-\left(cu(x,q)u_y(x,q)+\frac{1}{2}du^2(x,q)\right)\right]dx+$$

$$+\int_0^q\left(uu_{xxxx}-u_xu_{xxx}+\frac{1}{2}u_{xx}^2+auu_{xxx}-au_xu_{xx}+buu_{xx}-\frac{1}{2}bu_x^2\right)\Big|_{x=p}dy-$$

$$-\int_0^q\left(uu_{xxxx}-u_xu_{xxx}+\frac{1}{2}u_{xx}^2+auu_{xxx}-au_xu_{xx}+buu_{xx}-\frac{1}{2}bu_x^2\right)\Big|_{x=0}dy+$$

$$+\iint\limits_D\left(au_{xx}^2-cu_y^2+\mu u^2\right)dxdy=0$$

Учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q u_{xx}^2(p,y)dx+\iint\limits_D u_y^2dxdy+\iint\limits_D\mu u^2dxdy=0.$$

Пусть $\mu=0, u_y(x,y)=0$, т.е. $u(x,y)=f(x)$. Полагая $y=0$ и учитывая что $u(x,0)=0$, имеем $f(x)=0$. Следовательно $u(x,y)\equiv 0,(x,y)\in\bar{D}$. Если $\mu>0$, то из третьего слагаемого, получнм $u(x,y)\equiv 0,(x,y)\in\bar{D}$.

Теорема доказана. Аналогично можно доказать теорему о единственности решение следующих задач:

Задача Z_2. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C_{x,y}^{5,2}(D)\cap C_{x,y}^{4,1}(\bar{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u_y(x,0)=u(x,q)=0, \quad 0\le x\le p,$$

$$u_i(0,y)=\psi_1(y), u_x(0,y)=\psi_2(y), u_{xx}(0,y)=\psi_3(y), u(p,y)=\psi_4(y),$$
$$u_x(p,y)=\psi_5(y), \quad 0\le y\le q,$$

где $\psi_i(y), \quad (i=1,5)$ - достаточно гладкие функции в области $\bar{D}$.

Задача Z_3**.** Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^{5,2}_{x,y}(D)\cap C^{4,1}_{x,y}(\bar{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x,0)=u_y(x,q)=0, \quad 0\le x\le p$$

$$u(0,y)=\psi_1(y), u_x(0,y)=\psi_2(y), u_{xx}(0,y)=\psi_3(y), u(p,y)=\psi_4(y),$$
$$u_x(p,y)=\psi_5(y), \quad 0\le y\le q$$

где $\psi_i(y), \quad (i=1,5)$ - достаточно гладкие функции в области $\bar{D}$.

В работах [1]-[2] аналогичная краевые задачи иследовано для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками постоянными коэффициентами.

Литература

1. **Apakov Y. P., Umarov R. A.** *Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol 43:3. pp. 738–748.

1. **Апаков Ю.П., Умаров Р.А.** *О разрешимости одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области.* Материалы республиканской научной конференции "Управление, оптимизация и динамические системы. Андижан. АГУ. 17-19.10.2019. - С. 22–23. *УДК 517.95*

О канонических видах линейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка с кратными и действительными характеристиками

Абдукодиров А. Т.[1], Тулкинбоев Т. А.[2]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
abdurashid1976@mail.ru
[2]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
tulqinjon98@mail.ru

Многочисленные приложения дифференциальных уравнений с частными производными приводят к необходимости рассмотрения вопросов классификации и приведения к каноническому виду уравнений с частными производными. Классификация и нахождение канонических видов дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка общеизвестна. Вопросы классификации и приведения к каноническому виду уравнений третьего, четвертого и пятого порядка, рассмотрены в [1]-[5].

В данной работе рассмотрены вопросы приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка с кратными и действителъными характеристиками.

В некоторой области Ω плоскости xOy, рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$L[u]=\sum_{k=0}^{6}A_k\frac{\partial^6 u}{\partial x^{6-k}\partial y^k}=F, \tag{1}$$

где $A_k(k=\overline{0,6})$ - заданные постоянные, а F - непрерывная функция, зависящая от x, y, u и её частные производные по x, y до пятого порядка включительно, причем $\sum\limits_{k=0}^{6} A_k^2 \neq 0$.

С помощью преобразования переменных $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$, допускающего обратное преобразование, из (1) получаем новое уравнение:

$$M[u] = \sum_{k=0}^{6} a_k \frac{\partial^6 u}{\partial \xi^{6-k} \partial \eta^k} = F_1, \tag{2}$$

где F_1 - функция, зависящая от ξ, η, u и её частные производные по ξ, η до пятого порядка включительно, а a_k - новые коэффициенты, линейно зависящие от $A_k, k=\overline{0,6}$. Надо выбирать переменные ξ и η так, чтобы уравнение (1) имело канонический вид и чтобы наибольшие коэффициенты уравнения (2) обращались в нуль.

Можно сказать, что классификация и нахождении канонического вида уравнения (1) тесно связана с числом и кратностью действительных и комплексных корней алгебраи-ческого уравнения

$$A_0 t^6 - A_1 t^5 + A_2 t^4 - A_3 t^3 + A_4 t^2 - A_5 t + A_6 = 0, (t = dy/dx). \tag{3}$$

Как и в работе[5], можно доказать следующие три леммы и теорему:

Лемма 1. Если функция $z = \varphi(x,y)$ является решением уравнения

$$A_0 z_x^6 + A_1 z_x^5 z_y + A_2 z_x^4 z_y^2 + A_3 z_x^3 z_y^3 + A_4 z_x^2 z_y^4 + A_5 z_x z_y^5 + A_6 z_y^6, \tag{4}$$

то соотношение $\varphi(x,y) = const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$A_0 (dy)^6 - A_1 (dy)^5 dx + A_2 (dy)^4 (dx)^2 - A_3 (dy)^3 (dx)^3 +$$
$$+ A_4 (dy)^2 (dx)^4 - A_5 dy (dx)^5 + A_6 (dx)^6 = 0. \tag{5}$$

Лемма 2. Если $\varphi(x,y) = const$ представляет собой k-кратный ($k \leq 6$) общий интеграл уравнения (5), то при $z = \varphi(x,y)$ функция $f(z_x, z_y)$ и её все производные по z_x, z_y до $(k-1)$ порядка включительно равны нулю.

Лемма 3. При преобразовании переменных $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$, допускающих обратное преобразование, число и кратность действительных и комплексных корней уравнения (3) инвариантны и имеет место тождество $\tilde{D}_6 = J^{30} D_6$

Здесь $D_6 = {A_0}^{10} \prod\limits_{6 \geq i > j \geq 1} (t_i - t_j)^2$ является дискриминантом уравнения (3), а

$\tilde{D}_6 = {a_0}^{10} \prod\limits_{6 \geq i > j \geq 1} (\mu_i - \mu_j)^2$ - дискриминант уравнения

$$a_0 \mu^6 - a_1 \mu^5 + a_2 \mu^4 - a_3 \mu^3 + a_4 \mu^2 - a_5 \mu + a_6 = 0, (\mu = d\eta/d\xi\ \ ), \tag{6}$$

где $t_1, t_2, ..., t_n$ и $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ - корни уравнения (3) и (6) соответственно[6].

Теорема. Пусть относительно уравнения (3), справедливо одно из следующих утверж-дений:

1) имеет один двукратный и четыре различных действительных корня;

2) имеет один двукратный и один четырёхкратный действительных корня;

3) имеет два трёхкратных действительных корня;

4) имеет один пятикратный и один простой действительный корень;

5) имеет один шестикратный действительный корень;

6) имеет два двукратных и два различных действительных корня;

7) имеет три двукратных действительных корня;

8) имеет один двукратный, один трехкратный и один простой действительных корня;

9) имеет один трехкратный и три различных действительных корня;

10) имеет один четырёхкратный и два различных действительных корня.

Тогда в области Ω, уравнение (1) может быть приведено соответственно к одному из следующих канонических видов:

1) $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+c_1\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^4u}{\partial\xi^4}-\frac{\partial^4u}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\right)=F_3$;

2) $\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\partial\eta^2}u=F_1/\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^6$;

3) $\frac{\partial^6}{\partial\xi^3\partial\eta^3}u=F_1/\left\{-\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^6\right\}$;

4) $\frac{\partial^6}{\partial\xi\partial\eta^5}u=F_1/\left\{-\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^6\right\}$;

5) $\frac{\partial^6u}{\partial\eta^6}=F_1/\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^6$;

6) $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+c_3\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\left(\frac{\partial^4u}{\partial\xi^4}-\frac{\partial^4u}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\right)=F_5$;

7) $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+c_4\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\frac{\partial^4u}{\partial\xi^2\partial\eta^2}=F_6$;

8) $\frac{\partial^6u}{\partial\xi^4\partial\eta^2}+c_4\frac{\partial^6u}{\partial\xi^3\partial\eta^3}=F_7$;

9) $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+c_5\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^5u}{\partial\xi^2\partial\eta^3}+c_6\frac{\partial^5u}{\partial\xi\partial\eta^4}\right)=F_8$;

10) $\frac{\partial^6u}{\partial\xi^2\partial\eta^4}+c_7\frac{\partial^6u}{\partial\xi\partial\eta^5}=F_9$.

Литература

1. **Джураев Т.Д., Попелек Я.** *О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка.* Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27. No.10. С. 17–34.

2. **Джураев Т.Д., Сопуев А.** *О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными четвертого порядка.* Узбекский математический журнал. 1994. No.3. С. 7–21.

3. **Уринов А., Абдукодиров А.** *Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка.* Материалы второй Международного Российско-Узбекского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". -Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. С. 251–254.

4. **Уринов А., Абдукодиров А.** *О канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с некратными характеристиками* Бюллетен Институт Математики. 2023. Т.6. No.2. С. 156–176.

5. **Абдукодиров А.** *Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с кратными характеристиками* Бюллетенъ Института Математики. 2023. Т.6. No.4. С. 100–107.

6. **Курош А.Г.** *Курс высшей алгебры.* -Москва.: Наука, 1968.-432 с.

Некоторые свойства Функции Карлемана в трехмерном Евклидовом полупространстве

Ашурова З.Р,[1] Жураева У.Ю,[2] Маллаева Ф.У.[3]
[1]Узбекистан-Финляндия педагогический институт, Самарканд, Узбекистан; zeb1957niso@gmail.com
[2]Самаркандский Государственный университет имени Шароф Рашидова, Самарканд, Узбекистан; umida9202@mail.ru
[3]Самаркандский Государственный университет имени Шароф Рашидова, Самарканд, Узбекистан; feruzamallayeva2405@gmail.com

В теории аналитических функций хорошо известна следующая теорема:

Теорема.*Пусть аналитическая функция $F(z)$, регулярная в угле $|argz| < \frac{\pi}{2\rho}$ и непрерывная вплоть до его сторон, на сторонах угла удовлетворяет условию $|F(z)| \leq M$. Тогда во всем угле или $|F(z)| \leq M$ или $max_{|z|=r}|F(z)| > e^{cr^\rho}(c > 0, r > r_0)$.* Работа посвящена теореме типа Фрегмена-Линделефа для бигармонических функций определенных в области $D \subset R^3$, $D = \{y : y = (y_1, y_2, y_3), y_3 > 0\}$, проинтепретированной с помощью формул Карлемановского типа для решений задачи Коши для билапласиана.

Функции $\varphi_\sigma(y, x)$ при $s > 0, \sigma \geq 0$ определим следующими равенствами:

$$c_0\varphi_\sigma(y, x) = \int_0^\infty Im\left[\frac{exp\left[-\sigma\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3+1\right)^{\rho_1}\right]}{\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3-x_3\right)\left(i\sqrt{s+u^2}+y_3+x_3\right)^2}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}, \quad (25)$$

$$\Phi_\sigma(y, x) = c_0 r^2 \varphi_\sigma(y, x) \quad (26)$$

где $\sigma > 0$, $y_3 > 0$, $0 < \rho_1 < 1$, в дальнейшем обозначим через c_0 Цпостоянные числа не зависящая от y.

Лемма 1. Функция $\Phi_\sigma(y, x)$, определенная в области $D \subset R^3$, $D = \{y = (y_1, y_2, y_3) : y_3 > 0\}$, будет гармонической функцией по переменной при $\alpha > 0$, функцию $\Phi_\sigma(y, x)$ можно представит в виде

$$\Phi_\sigma(y, x) = c_0 r + c_0 r^2 G_\sigma(y, x)$$

и она является бигармонической.

Теорема 1. Для функции $\Phi_\sigma(y, x)$ справедлива оценка

$$|\Phi_\sigma(y, x)| \leq C\frac{r^2}{\alpha r_1^2 exp(\sigma A)}, \quad A = |(y_3+1)^2+s|^{\rho_1/2} cos\sigma\rho_1 arctg\frac{s^{\frac{1}{2}}}{(y_3+1)}.$$

Теорема 2. Пусть $\overline{n}$- внешняя нормаль к границе ∂D. Тогда для функции $\Phi_\sigma(y, x)$ справедливы неравенства:

$$|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial\overline{n}}| \leq (1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha r}+\frac{r}{\alpha}+\frac{r}{\alpha^2}+\frac{r^2}{\alpha^2})\frac{c_0}{r_1^2 exp(\sigma A)},$$

$$|\Delta\Phi_\sigma(y, x)| \leq (1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha r^2})\frac{c_0}{r_1^2 exp(\sigma A)}.$$

Лемма 2. Для функции $\Phi(y, x)$ справедливы неравенства:

$$|\frac{\partial\Phi_\sigma(y, x)}{\partial\overline{n}}| \leq (1+\frac{1}{\alpha r^3}+\frac{1}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha r^4}+\frac{1}{\alpha^2 r}+\frac{1}{\alpha^2 r^2}+\frac{1}{\alpha^2 r^3}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^4}+\frac{r}{\alpha}+\frac{r}{\alpha^2})\frac{c_0}{r_1^4 exp(\sigma A)}.$$

Теорема 3. *Функция $\Phi_\sigma(y,x)$,зависящая от параметра $\sigma > 0$, определенная формулой (0.1), при $y \neq x$ является функцией Карлемана для точки $x \in D$ и части $\partial D/S$*

$$\int_{L_1} \left(|\Phi_\sigma(y,x)| + |\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}| + |\Phi_\sigma(y,x)| + |\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial n}| \right) |ds| \leq C(x)\varepsilon(\sigma)$$

где постоянная C(x) зависит от x и $\overline{n}$ внешняя нормаль к границе ∂D, $\varepsilon(\sigma)>0$ когда $\sigma > \infty$.

Теорема 4. *Пусть функция u(y) бигармоническая функция определенных в области с границей ∂D где, $\partial D = \{y : y = (y_1, y_2, y_3), y_3 > 0\}$ Если выполнено условие*

$$\sum_{k=0}^{1} (|\Delta^k u(y)| + |grad\Delta^{1-k} u(y)|) \leq c_0 exp|y|^{\rho_1}, y \in D$$

И если в любой точке $y \in \partial D$ выполняется неравенство:

$$|\Delta^k u(y)| + |\frac{\Delta^k u(y)}{\partial \overline{n}}| < c_0$$

$\forall k \in \{0,1\}$, тогда $\forall x_0 \in D$ имеет место равенство:

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^{1} \int_{\partial D} (\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial \overline{n}} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial \overline{n}}) ds$$

$y \in \partial D$ где $\Phi_\sigma(y,x)$ определенная формулой (1), $\rho_1 < \rho$.

Теорема 5. *Пусть $u \in B_{\rho_2}(D)$, если выполнено условие роста $\Delta^k u < c$, $\frac{\partial \Delta^k u}{\partial n} < c$, $\forall k \in \{0,1,2\}$, $\forall y \in \partial D$, тогда $\forall x \in D$ справедливо*

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^{1} \int_{\partial D} (\Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0) \frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial \overline{n}} - \Delta^{1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi_\sigma(y,x_0)}{\partial \overline{n}}) ds.$$

Следствие. Пусть $u \in B_{\rho_2}(D)$, если $\forall y \in \partial D$ выполнено условие роста $\Delta^k u = 0$, $\frac{\partial \Delta^k u}{\partial \overline{n}} = 0$, $\forall k \in \{0,1,2\}$, $\forall y \in \partial D$, тогда $\forall x \in D$ справедливо $u(x) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашурова З.Р., Жураева У.Ю. These results provide answers to the problem proposed by E. M. Landis for second-order polyharmonic functions.// Reasearch and Education. 2024. Т.3, є 5. С. 102–109.

2. Ашурова З.Р., Жураева У. Ю., Азимова М. Интегральное представление для бигармонических функций в трчхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. // Reasearch and Education 3 (ISSUE 10), 147-153.

Метод усреднения для квазилинейного связанного уравнения Ван Дер Поля-Дюффинга

Елгондиев К.К.,[1], Наурызбаева Ш.О.[2]
[1] Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан; elgondiev61@gmail.com
[2]Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан; naurzibaevash@gmail.com

Рассмотрим колебательную систему, описываемую слабо нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка [1,2]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt}\right). \tag{1}$$

При $\varepsilon=0$ порождающее уравнение соответствующее уравнению (1) имеет двухпараметрическое семейство периодических решений вида

$$x\left(t\right)=a\cos\psi, \tag{2}$$

где $\psi=\omega t+\varphi$, $\frac{d\psi}{dt}=\omega$, $\frac{da}{dt}=0$. Из (2) следует, что

$$\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\psi \tag{3}$$

При $\varepsilon\neq0$ параметры начинают меняться по времени t, то есть a и φ становятся функциями вида $a=a(t)$, $\varphi=\varphi(t)$. Тогда с учетом (2) и (3) решение уравнения (1) может быть представлена в виде

$$x\left(t\right)=a\left(t\right)\cos\psi\left(t\right),$$

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt}=-a\left(t\right)\omega\sin\psi\left(t\right) \tag{4}$$

$$\frac{da(t)}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega}f\left(a\left(t\right)\cos\psi\left(t\right),-a\left(t\right)\omega\sin\psi\left(t\right)\right)\sin\psi\left(t\right)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega a(t)}f\left(a\left(t\right)\cos\psi\left(t\right),-a\left(t\right)\omega\sin\psi\left(t\right)\right)\cos\psi\left(t\right) \tag{5}$$

Система (5) называется стандартной формой квазилинейного уравнения (1). Из (5) видно, что новые переменные $a=a\left(t\right),\varphi=\varphi\left(t\right)$ являются медленно меняющимися функциями, так как правые части системы (5) пропорциональны малому параметру ε.

Усредняя правую часть системы (8) по ψ, получим усредненную систему

$$\frac{da\left(t\right)}{dt}=\varepsilon A\left(a\right);\frac{d\varphi\left(t\right)}{dt}=\varepsilon B\left(a\right),$$

где

$$A\left(a\right)=\frac{1}{2\pi\omega}\int\limits_0^{2\pi}f\left(a\left(t\right)\cos\psi\left(t\right),-a\left(t\right)\omega\sin\psi\left(t\right)\right)\sin\psi\left(t\right)d\psi$$

$$B\left(a\right)=\frac{1}{2\pi a\omega}\int\limits_0^{2\pi}f\left(a\left(t\right)\cos\psi\left(t\right),-a\left(t\right)\omega\sin\psi\left(t\right)\right)\cos\psi\left(t\right)d\psi \tag{10}$$

Очевидно, что исследовать систему (10) намного проще, чем исходного уравнения (1). Примером уравнения (1) является квазилинейное связанное уравнение Ван-дер Поля - Дюффинга:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon\left(1 - x^2\right)\frac{dx}{dt} + \varepsilon x^3 \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$- малый параметр.

При $\varepsilon \neq 0$ система для определения функций $a = a(t), \varphi = \varphi(t)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = \frac{\varepsilon a(t)}{2\omega}\left[1 - \frac{a^2(t)}{4}\right] \\ \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{3\varepsilon}{8\omega}a^2(t) \end{cases}$$

Из (7) следует, что точки $= 2, = 0, = -2$ являются положениями равновесия колебательной системы, описываемой уравнением (6). Причем положения равновесия $= 2, = -2$ являются устойчивыми, а положения равновесия $= 0$ неустойчива. В данной работе проведена амплитудно-частотный анализ колебательной системы описываемой квазилинейным связанным уравнением Ван дер Поля-Дюффинга

Литература

1. **Митропольский Ю.А.** *Метод усреднения в нелинейной механике.* ЦКиев: Наукова думка, 1974, -440 с.
2. **Найфэ А.** *Введение в методы возмущений.* ЦМ.: Мир, 1984. -526 с.
3. **Кузнецов А.П., Станкевич Н.В.,Тюрюкина Л.В.** *Связанные осцилляторы Ван-дер Поля-Дюффинга: Фазовая динамика и компютерное моделирование* Известия вузов ҮПНДҰ, Т.16, є4. 2008, с.101-135.
4. **Елгондиев К.К., Роговченко Ю.В.** *О применении метода усреднения для исследования дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.* Сб.науч.тр. Ин-та математики АН УССР. ҮАсимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметромҰ. ЦКиев, 1991. С.32-36.

UDK 517.95

Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа с характеристической линией изменения типа

Фармонов Ш.Р.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
farmonovsh@gmail.com

Несмотря на то, что спектральная теория дифференциальных операторов имеет длинную историю, исследование спектральных задач для уравнений смешанного типа начато с 80-х годов прошлого века. Первые фундаментальные результаты по этому направлению получены Т.Ш.Кальменовым, Е.И.Моисеевым и С.М.Пономаревым. Последние годы Е.И.Моисеевым, М.С.Салахитдиновым, К.Б.Сабитовым, А.К.Урино-вым и их учениками поставлены и исследованы многочленные спектральные задачи для различных уравнений смешанного типа и полученные ими результаты применены к построению решений краевых задач для

соответствующих уравнений [см. например, 1,2,3]. Но до настоящего времени малоизученными остаются спектральные задачи для уравнений смешанного типа с характеристической линией изменения типа.

В данной работе найдены собственные значения и собственные функции одной спектральной задачи с нелокальными краевыми условиями для уравнения

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y + sign(x+y)\lambda u = 0, \quad 0 < \alpha = const < (1/2\,). \quad (1)$$

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная отрезками $\overline{AB} = \{(x,y) : x+y=1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, $\overline{BA^*} = \{(x,y) : x = 0,\ -1 \leq x \leq 1\}$ и дугой $A^*A = \{(x,y) :\ \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1,\ x > 0,\ y < 0\}$, а $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y) :\ x > 0,\ y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y) : x+y > 0,\ \ x > 0, y < 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x,y) : x+y < 0,\ x > 0, y < 0\}$.

Задача A_λ. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные в области $\overline{\Omega}$ функции $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2\{\Omega \setminus [y(x+y)=0]\}$, удовлетворяющие уравнению (1) в области $\Omega \setminus [y(x+y)=0]$ и условиям $u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{AB}$;

$$u(0,y) + k_1 u(0,-y) = 0, \qquad 0 \leq y \leq 1; \quad (2)$$

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha u_x(x,y) + k_2 \lim_{x\to+0} x^\alpha u_x(x,-y) = 0, \qquad 0 < y < 1; \quad (3)$$

$$u\left[x, -\left(1-\sqrt{x}\right)^2\right] = u\left[\left(1-\sqrt{x}\right)^2, -x\right], \qquad (1/4\,) \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$\lim_{y\to-0} (-y)^\alpha u_y(x,y) = -\lim_{y\to+0} y^\alpha u_y(x,y), \qquad 0 < x < 1. \quad (5)$$

где k_1 и k_2 – заданные действительные числа, причем $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$.

Отметим, что условия (2)-(4) являются условиями типа условия Франкля.

Докажем, что поставленная задача имеет счетное число собственные значений и собственные функции. С этой целью, считая $\lambda \neq 0$, в области Ω_0 сделаем замену переменных $\sqrt{x} = r\cos\varphi$, $\sqrt{y} = r\sin\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq (\pi/2\,)$. Затем, из уравнения (1), разделяя переменные по формуле $u(x,y) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$r^2R''(r) + (1+4\beta)rR'(r) + (4\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0, \qquad 0 < r < 1; \quad (6)$$

$$\Phi''(\varphi) + 2\beta(ctg\varphi - tg\varphi)\Phi'(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < (\pi/2), \quad (7)$$

где $\beta = \alpha - (1/2\,)$, а μ-константа разделения.

Пользуясь общими решениями уравнении (6) и (7) находим, что нетривиальные и непрерывные в области $\overline{\Omega}_0$ решения уравнения (1) имеют вид

$$u(x,y) = r^{-2\beta} J_\omega\left(2r\sqrt{\lambda}\right)\left\{c_1 F\left[\beta - \omega/2\,, \beta + \omega/2\,, (1/2\,) + \beta; \sin^2\varphi\right] + \right.$$
$$\left. + c_2\left(\sin^2\varphi\right)^{(1/2\,)-\beta} F\left[(1-\omega)/2\,, (1+\omega)/2\,, (3/2\,) - \beta; \sin^2\varphi\right]\right\}, \quad (8)$$

здесь $c_1, c_2 = const$; $\omega = \sqrt{4\beta^2 + \mu}$, $\mathrm{Re}\,\omega > 2\beta$, $J_\omega(z)$ - функция Бесселя первого рода, $F(a,b,c;z)$-гипергеометрическая функция Гаусса.

Из формулы (8) следует, что

$$\begin{cases} u(x,+0) = c_1 \cdot x^{-\beta} J_\omega\left(\sqrt{4\lambda x}\right), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(+0,y) = \left[\chi_1(\omega)c_1 + \chi_2(\omega)c_2\right] \cdot y^{-\beta} J_\omega\left(\sqrt{4\lambda y}\right), & 0 \leq y \leq 1, \\ \lim\limits_{y\to+0} y^\alpha u_y(x,y) = \left[(1/2\,) - \beta\right] c_2 \cdot x^{-1/2}\, J_\omega\left(\sqrt{4\lambda x}\right), & 0 < x < 1, \\ \lim\limits_{x\to+0} x^\alpha u_x(x,y) = -\left[\chi_3(\omega)c_1 + \chi_4(\omega)c_2\right] \cdot y^{-1/2}\, J_\omega\left(\sqrt{4\lambda y}\right), & 0 < y < 1, \end{cases} \quad (9)$$

где $\chi_1(\omega) = \Gamma\begin{bmatrix} (1/2) + \beta,\ (1/2) - \beta \\ (1+\omega)/2\,,\ (1-\omega)/2 \end{bmatrix}$, $\chi_2(\omega) =$

$\Gamma\begin{bmatrix} (1/2) - \beta, & (3/2) - \beta \\ 1-\beta+(\omega/2\,), & 1-\beta-(\omega/2\,) \end{bmatrix}$, $\chi_3(\omega) = \Gamma\begin{bmatrix} (1/2) + \beta, & (1/2) + \beta \\ \beta+(\omega/2\,), & \beta-(\omega/2\,) \end{bmatrix}$,

$\chi_4(\omega) = [(1/2\,) - \beta]\,\chi_1(\omega)$, $\Gamma(z)$-гамма функция.

Далее, в области Ω_1 введем в рассмотрение функцию

$$W(x,y) = u(x,y) - u[x_1(x,y), y_1(x,y)], \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}_1 \tag{10}$$

где $x_1(x,y) = -y, \;\; y_1(x,y) = -x$. Очевидно, что если $(x,y) \in \overline{\Omega}_1$, то $(x_1, y_1) \in \overline{\Omega}_2$.

Принимая во внимание это и (1),(4), $\lim\limits_{x+y\to -0} u(x,y) = \lim\limits_{x+y\to +0} u(x,y)$, относительно $W(x)$ получим следующую задачу Гурса:

$$\begin{cases} W(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}_1\right) \cap C^2(\Omega_1), \; |y|^{2\beta} W_y(x,y) \in C[\Omega_1 \cup \{(x,0) : 0 < x < 1\}]; \\ xW_{xx} + yW_{yy} + \alpha W_x + \alpha W_y + \lambda W = 0, \qquad (x,y) \in \Omega_1; \\ W(x,-x) = 0, \quad 0 \le x \le (1/4); \qquad W\left[x, -\left(1-\sqrt{x}\right)^2\right] = 0, \quad (1/4) \le x \le 1. \end{cases}$$

Одним из решений этой задачи является функция $W(x,y) \equiv 0, \; (x,y) \in \overline{\Omega}_1$. Отсюда, в силу обозначения (10), следуют равенства

$$u(t,-0) = u(+0,-t), \; 0 \le t \le 1; \;\; \lim_{y\to -0} (-y)^{\alpha} u_y(t,y) = -\lim_{x\to +0} x^{\alpha} u_x(x,-t), \; 0 < t < 1. \tag{11}$$

Принимая во внимание равенства (11) и условий (2),(3),(5), находим

$$\left.\begin{array}{ll} u(0,t) + k_1 u(t,0) = 0, & 0 \le t \le 1; \\ \lim\limits_{x\to +0} x^{\alpha} u_x(x,t) + k_2 \lim\limits_{y\to +0} y^{\alpha} u_y(t,y) = 0, & 0 < t < 1. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Подставляя (9) в равенства (12), получим однородную систему линейных уравнений относительно c_1 и c_2:

$$\begin{cases} [\chi_1(\omega) + k_1]\, c_1 + \chi_2(\omega) c_2 = 0, \\ \chi_3(\omega) c_1 + [\chi_4(\omega) - [(1/2) - \beta] k_2]\, c_2 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее основной определитель равен нулю. Приравнивая нулю ее основной определитель, получим равенство

$$[\chi_1(\omega) + k_1]\,[\chi_4(\omega) - [(1/2) - \beta] k_2] = \chi_2(\omega)\chi_3(\omega),$$

откуда, в силу выражения для $\chi_j(\omega)$, $j = \overline{1,4}$, следует уравнение относительно ω:

$$\cos(\omega\pi/2) = [(1 - k_1 k_2)/(k_2 - k_1)]\, cos(\beta\pi), \qquad k_1 \ne k_2. \tag{14}$$

Находим решения уравнения (14), удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\,\omega > 2\beta$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. Пусть $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Тогда числа $\omega_n^{(j)} = 4n - (-1)^j 2\beta, \; n \in N, \; j = \overline{1,2}$ являются решениями уравнения (14), удовлетворяющими условию $\mathrm{Re}\,\omega > 2\beta$. Подставив $\omega = \omega_n^{(j)}$ в системе (13), находим ее нетривиальные решения: $c_1 = -\chi_3(\omega)\, c_2, \; \forall\, c_2 \in R \setminus \{0\}$ при $\omega = \omega_n^{(1)}$ и $c_1 = 0, \; \forall\, c_2 \in R \setminus \{0\}$ при $\omega = \omega_n^{(2)}$.

Аналогично находим, что

2. Если $k_1 = 0, \; k_2 = -1$, то $\omega_n^{(j)} = 4n - 2 - (-1)^j 2\beta, \; n \in N, \; j = \overline{1,2}$, а $c_1 = \chi_2(\omega)\, c_2, \; \forall\, c_2 \in R \setminus \{0\}$ при $\omega = \omega_n^{(1)}$ и $c_1 = 0, \; \forall\, c_2 \in R \setminus \{0\}$ при $\omega = \omega_n^{(2)}, \; n \in N$.

3. Если $k_1 = 1, \; k_2 = 0$, то $\omega_n^{(j)} = 4n - 2 - (-1)^j 2\beta, \; n \in N, \; j = \overline{1,2}$, а $\forall\, c_1 \in R \setminus \{0\}, \; \forall\, c_2 = 0$ при $\omega = \omega_n^{(1)}$ и $c_1 = [\chi_4(\omega)/\chi_3(\omega)]\, c_2, \; \forall\, c_2 \in R \setminus \{0\}$ при $\omega = \omega_n^{(2)}, \; n \in N$.

4. Если $k_1 = -1, \; k_2 = 0$, то $\omega_n^{(j)} = 4n - (-1)^j 2\beta, \; n \in N, \; j = \overline{1,2}$, а $\forall\, c_1 \in R \setminus \{0\}, \; c_2 = 0$ при $\omega = \omega_n^{(1)}$ и $c_1 = -[\chi_4(\omega)/\chi_3(\omega)]\, c_2, \; \forall\, c_2 \in R \setminus \{0\}$ при $\omega = \omega_n^{(2)}, \; n \in N$.

5. Если $k_1 = -1, \; k_2 = 1$, то $\omega_n^{(j)} = 4n - (-1)^j 2\beta, \; n \in N, \; j = \overline{1,2}$, а $\forall\, c_1 \in R \setminus \{0\}, \; c_2 = 0$ при $\omega = \omega_n^{(1)}$ и $c_1 = 0, \; \forall\, c_1 \in R \setminus \{0\}$ при $\omega = \omega_n^{(2)}, \; n \in N$.

6. Если $k_1 = 1, \; k_2 = -1$, то $\omega_n^{(j)} = 4n - 2 - (-1)^j 2\beta, \; n \in N, \; j = \overline{1,2}$, а $\forall\, c_1 \in R \setminus \{0\}, \; c_2 = 0$, при $\omega = \omega_n^{(1)}$ и $c_1 = 0, \; \forall\, c_2 \in R \setminus \{0\}$, при $\omega = \omega_n^{(2)}, \; n \in N$.

Теперь, подставляя в формулу (8) $\omega = \omega_n^{(j)}$ и удовлетворяя полученную функцию условию $u(x,y)|_{\overline{AB}} = 0$, получим уравнение $J_{\omega_n^{(j)}}\left(2\sqrt{\lambda}\right) = 0 \; \left(n \in N, \; j = \overline{1,2}\right)$. Так

как $\omega_n^{(j)} > -1$, то это уравнение для $\forall n \in N$ и $j = \overline{1,2}$ имеет счетное число действительных корней. Обозначая его m – й положительный корень через $\theta_{n,m}^{(j)}$, находим собственные значения $\lambda_{n,m}^{(j)} = \left[\theta_{n,m}^{(j)}\right]^2/4$, $j = \overline{1,2}$, $n, m \in N$ задачи A_λ.

Далее, подставляя в формулу (8) $\omega = \omega_n^{(j)}$, $\lambda_{n,m}^{(j)} = \left[\theta_{n,m}^{(j)}\right]^2/4$, находим собственные функции задачи A_λ в области Ω_0, соответствующие собственным значениям $\lambda_{n,m}^{(j)}$:

$$u_{n,m}^{(j)}(x,y) = r^{-2\beta} J_{\omega_n^{(j)}}\left[\theta_{n,m}^{(j)} r\right]\left\{c_1\left(\omega_n^{(j)}\right) F\left[\beta - \frac{\omega_n^{(j)}}{2}, \beta + \frac{\omega_n^{(j)}}{2}, \frac{1}{2} + \beta; \sin^2\varphi\right] + \right.$$

$$\left. + c_2\left(\omega_n^{(j)}\right)\left(\sin^2\varphi\right)^{(1/2)-\beta} F\left[\frac{1-\omega_n^{(j)}}{2}, \frac{1+\omega_n^{(j)}}{2}, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2\varphi\right]\right\}, \; n, m \in N, \; j = \overline{1,2}, \quad (15)$$

где под $c_1\left(\omega_n^{(j)}\right)$ и $c_2\left(\omega_n^{(j)}\right)$ понимаются значения c_1 и c_2, соответствующие $\omega_n^{(j)}$.

Теперь, с помощью формулы (15) и равенств (9),(5), находим $u_{n,m}^{(j)}(x,0)$, $0 \le x \le 1$; $u_{n,m}^{(j)}(0,y)$, $0 \le y \le 1$; $\lim\limits_{y \to -0}(-y)^\alpha u_y^{(j)}(x,y)$, $0 < x < 1$; $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha u_x^{(j)}(x,y)$, $0 < y < 1$, а затем, из (11) – $u_{n,m}^{(j)}(0,y)$, $-1 \le y \le 0$; $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha u_x^{(j)}(x,y)$, $-1 < y < 0$, $j = \overline{1,2}$, $n, m \in N$. После этого, собственные функции задачи A_λ в областях Ω_1 и Ω_2 определяются как решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) при $\lambda = \lambda_{n,m}^{(j)}$[4].

В задача A_λ условие $u(x,y)|_{\overline{AB}} = 0$ можно заменить $(u_x + u_y)|_{AB} = 0$.

Литература

1. **Моисеев Е.И.** *О расположении спектра задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.* Дифф. уравнения. 1989. Т.25, №1. С. 170–172.
2. **Салахитдинов М.С., Уринов А.К.** *К спектральной теории уравнений смешанного типа.* – Т.: MUMTOZ SO'Z, 2010. - 356 с.
3. **Сабитов К.Б., Бибакова С.Л.** *Построение собственных функций задачи Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение.* Мат. заметки. 2003. Т.74, №1. С. 76–87.
4. **Мамедов Я.Н.** *К задаче на собственные значения для уравнений смешанного типа.* Дифф. уравнения. 1993. Т.29, №1. С. 95–103.

UDK 517.95

Одна задача для аналитического продолжения

Гафаров И. А.
Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан; ilgorgafarov2@gmail.com

Как известно [1], для эллиптических уравнений корректными являются задачи, в которых краевые условия задаются на всей границе области, где требуется определить решение.

В данной работе рассматривается единственность одной некорректной задачи, когда краевые условия задаются на одной части замкнутой кривой внутри рассматриваемой области.

Одним из центральных пунктов в теоретическом исследовании некорректной задачи является доказательство теоремы единственности.

Издано достаточно монографий, посвященных теории некорректных задач (см. например [2]).

Пусть функция $u(r,\varphi)$ такова

$$\Delta u(r,\varphi) - \kappa^2 u(r,\varphi) = 0,\ r \in (0, R_1),$$
$$u(R_2,\varphi) = f(\varphi),\ R_2 < R_1,\ -\alpha < \varphi < \alpha,$$

где $0 < \alpha < \pi$.

Возникает вопрос: при каких условиях на величины R_1, R_2 и α функция $f(\varphi)$ определяет функцию $u(r,\varphi)$ единственным образом во всей области регулярности?

Обычно такие задачи решается методом аналитического продолжения.

Теорема. Пусть в сформулированной задаче

$$\ln \frac{R_1}{R_2} > \pi.$$

Тогда из равенства

$$u(R_2,\varphi) = 0,\ \varphi \in [-\alpha, \alpha]\,, \tag{1}$$

следует, что $u(r,\varphi) = 0$ во всей области регулярности.

Для доказательство используется некоторые факты для целых функций и представление решения в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n(\kappa r)}{I_n(\kappa R_1)}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(R_1,\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(R_1,\varphi)\sin n\varphi d\varphi,$$

$I_n(x) = \sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} \dfrac{1}{\Gamma(\kappa+1)\Gamma(\kappa+n+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2\kappa+n}$ - модифицированная функция Бесселя.

Из (2) следует, что функция

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n(\kappa R_2)}{I_n(\kappa R_1)}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

обращается в нуль на отрезке $[-\alpha, \alpha]$.

Функция $f(\varphi)$, первоначально определенная лишь для вещественных φ, $-\alpha \le \varphi \le \alpha$, допускает аналитическое продолжение в P,

$$P = \left\{(\varphi, y) : -\alpha < \varphi < \alpha, -ln\frac{R_1}{R_2} < y < ln\frac{R_1}{R_2}\right\}$$

с помощью равенства

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n(\kappa R_{2)})}{I_n(\kappa R_1)}(c_n e^{inz} + \bar{c}_n e^{-inz}), \tag{2}$$

где $c_n = a_n - ib_n$, $\bar{c}_n = a_n + ib_n$ (в области P этот ряд сходится абсолютно).

Нетрудно заметить, что на любом компакте, содержащемся в P, ряд (2) сходится равномерно. Отсюда следует аналитичность $f(z)$ в P, а так как $f(z) = 0$ на вещественном отрезке $[-\alpha, \alpha]$, то $f(z) = 0$ всюду в P.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.** *Теория операторов и некорректные задачи.* Издательство Института Математики Новосибирск, 1999 г.
2. **Лаврентьев М.М.** *О некоторых некорректных задачах математической физики.* Новосибирск: Наука, 1962 г.
3. **Левин Б.Я.** *Распределение корней целых функций.* М.: ГПТЛ, 1956 г.

УДК 517.95

Краевая задача для уравнения четвчртого порядка составного типа

Газиев К.С.
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
goziyevqobiljon@gmail.com

В односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной гладким жордановым контуром Γ рассмотрим уравнение

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta = \text{const}$, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Считаем, что Γ обладает следующими свойствами [1]:

а) характеристики $\beta x - \alpha y = l$, где $-\infty < l < l_1 < l_2 < +\infty$ пересекают контур Γ в двух точках, причем эти характеристики не касаются Γ; характеристики $\beta x - \alpha y = l_1$, $\beta x - \alpha y = l_2$ имеют с контуром Γ единственные общие точки (касания) Ц $N_1(x_1, y_1)$ и $N_2(x_2, y_2)$ соответственно, а характеристики $\beta x - \alpha y = l$ при $l < l_1$, $l > l_2$ общих точек с Γ не имеют.

б) функции $x = x(s)$, $y = y(s)$, определяющие параметрическое уравнение кривой Γ, непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно, причем $x'^2(s) + y'^2(s) \neq 0$.

Через Γ_1 обозначим ту часть Γ, которая получается при движении от точки N_1 к точке N_2 в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки), а через $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$.

Задача ДН. Найти решение $u(x, y) \in C^4(D) \cap C^2(\overline{D})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x, y)|_\Gamma = f_1(x, y), \quad \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = f_2(x, y), \quad \left.\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial n^2}\right|_{\Gamma_2} = f_3(x, y),$$

здесь $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ Ц заданные функции, n Ц внешняя нормаль к Γ.

Отметим, что различные краевые задачи для уравнения (1) при $\beta = 0$ были изучены в работе [1], и при $\beta \neq 0$ рассмотрено Задача Дирихле в работе [2].

Доказано теорема единственности методом интегралов энергии, а существования решения доказывается с использованием методов интегральных уравнений.

Литература

1. **Джураев Т.Д.** *Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно составного типов.* Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. **Газиев К.С.** *Задача Дирихле для уравнения четвчртого порядка составного типа.* ДАН РУ, 1995, є 11–12, с.4–7.

УДК 517.95

О построение решение краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с несимметричными условиями в R^3.

Хамитов А. А.
Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан; azizbek.khamitov.93@mail.ru

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В работах [2-3] в плоскости исследованы краевые задачи с несимметричными условиями для уравнения третьего порядка.

В области $D = \{(x, y, z) : 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = f(x, y, z), \tag{1}$$

где p, q, r - действительные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача A . Найти решение уравнения (1) в области D из класса $u(x, y, z) \in C^{3,2,2}_{x,y,z}(D) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u_y(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0,\ u_z(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} au\,(0, y, z) + bu_{xx}\,(0, y, z) = \psi_1\,(y, z)\,, \\ cu\,(p, y, z) + du_{xx}\,(p, y, z) = \psi_2\,(y, z)\,, \\ u_x\,(p, y, z) = \psi_3\,(y, z)\,, \end{cases} \tag{3}$$

где $a,\ b,\ c,\ d \in R\backslash\{0\}$, а $f(x, y, z)$, $\psi_i\,(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\begin{cases} \psi_i\,(q, z) = 0,\ \dfrac{\partial \psi_i\,(0, z)}{\partial y} = 0,\ \dfrac{\partial^2 \psi_i\,(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i\,(y, r) = 0,\ \dfrac{\partial \psi_i\,(y, 0)}{\partial z} = 0,\ \dfrac{\partial^2 \psi_i\,(y, r)}{\partial z^2} = 0, \\ f\,(x, q, z) = 0, \dfrac{\partial f\,(x, 0, z)}{\partial y} = 0,\ f\,(x, y, r) = 0, \dfrac{\partial f\,(x, y, 0)}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad i = \overline{1, 3}. \tag{4}$$

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеют два различных решений $u_1\,(x, y)$ и $u_2\,(x, y)$. Тогда функция $u\,(x, y) = u_1\,(x, y) - u_2\,(x, y)$ удовлетворяет однородную уравнению (1) с однародными краевыми условиями. Докажем, что $u\,(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx} - \frac{1}{2}\,u_x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\,(u\,u_y) + u_y^2 - \frac{\partial}{\partial z}\,(u\,u_z) + u_z^2 = 0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)\,dydz - \frac{d}{c}\int_0^q\int_0^r u_{xx}^2(p,y,z)\,dydz + \frac{b}{a}\int_0^q\int_0^r u_{xx}^2(0,y,z)\,dydz + \\ + \iiint\limits_D u_y^2(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_D u_z^2(x,y,z)\,dxdydz = 0.$$

Если $ab > 0,\ cd < 0$, из четвертого и пятого слагаемого, т.е. $u_y(x,y,z) = 0$ и $u_z(x,y,z) = 0$, получим $u(x,y,z) = h(x)$, здесь $h(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей уравнение (1) и условиями задачи A. Тогда поставляя в уравнение (1), имеем $h(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3$, из условия (3), получим

$$\begin{cases} 2bC_1 + aC_3 = 0, \\ (cp^2 + 2d)\,C_1 + cpC_2 + cC_3 = 0, \\ 2pC_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Основной определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2b & 0 & a \\ cp^2 + 2d & cp & c \\ 2p & 1 & 0 \end{vmatrix} = -acp^2 + 2ad - 2bc.$$

Пусть $\Delta = 0$, т.е. $-acp^2 + 2ad - 2bc = 0 \ \Rightarrow p^2 = 2\left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)$, учитывая условия $ab > 0,\ cd < 0$ и $p > 0$, получим $p^2 < 0$, а это невозможно, значит $\Delta \neq 0$. Тогда решение системы равен $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, отсюда получим $h(x) = 0$. Следовательно, $u(x,y,z) \equiv 0$, $(x,y,z) \in \overline{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x,y,z) = u_2(x,y,z)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1) $\dfrac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3} \in C\left(0 \le y \le q, 0 \le z \le r\right), i = \overline{1,3}$;

2) $\dfrac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x\partial y^2\partial z^2} \in C\left(0 \le x \le p, 0 \le y \le q, 0 \le z \le r\right)$,

и (4), то решение задачи A существует.

Теорема 2 существование решения задачи доказана методом разделения переменных. Решение построено с использованием функции Грина в виде бесконечного ряда. Доказано, что ряд и его производные, входящие в уравнение (1), сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара. 2014. N 1(34). С.56–65.

2. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol 43:3. pp. 738–748.

3. Апаков Ю.П., Умаров Р.А. О разрешимости одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области// Научный вестник НамГУ. 2020. N 1. С. 6–17.

УДК 517.953

Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с вырождением

Иргашев Б. Ю.[1], Мухсинова М. К.[2]
[1]Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан; Институт Математики им. В.И.Романовского АН РУз;
bahromirgasev@gmail.com
[2] Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан;

Задача A_1. Найти в области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x, y < 1\}$ решение уравнения

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} + (-1)^s K(y) \frac{\partial^{2s} u}{\partial y^{2s}} = f(x,y),$$

из класса $C_{x,y}^{2n+1,2s}(\Omega) \cap C_{x,y}^{2n,2s-1}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial y^j} = \frac{\partial^j u(x,1)}{\partial y^j} = 0, 0 \le x \le 1, j = \overline{0,(s-1)},$$

$$\frac{\partial^m u(0,y)}{\partial x^m} = \frac{\partial^m u(1,y)}{\partial x^m} = 0, m = \overline{0,(n-1)} = 0,$$

$$\frac{\partial^n u(0,y)}{\partial x^n} = 0, 0 \le y \le 1,$$

здесь

$$K(y) > 0, y \in (0,1), K(0) = K(1) = 0, K^{(i)}(y) = O\left(y^{m-i}\right), y \to 0+0, 0 \le m < s,$$

$$K^{(i)}(y) = O\left((1-y)^{n-i}\right), y \to 1-0, 0 \le n < s, i = 0,1,..., K(y) \in C^{2s}(0,1);$$

$f(x,y)$ достаточно гладкая функция.

Задача A_2. Найти в области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x, y < 1\}$ решение уравнения

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + (-1)^s K(y) \frac{\partial^{2s} u}{\partial y^{2s}} = f(x,y),$$

из класса $C_{x,y}^{2n,2s}(\Omega) \cap C_{x,y}^{2n-1,2s-1}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial y^j} = \frac{\partial^j u(x,1)}{\partial y^j} = 0, 0 \le x \le 1, j = \overline{0,(s-1)},$$

$$\frac{\partial^m u(0,y)}{\partial x^m} = \frac{\partial^m u(1,y)}{\partial x^m} = 0, m = \overline{0,(n-1)} = 0,$$

Получены достаточные условия однозначной разрешимости поставленных задач.

UDK 517.95

Об одной краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в полуограниченной области

Жураев А. Х.
Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан; abdullajuraev66@gmail.com

В работе [1] с симметричными условиями по времени, исследованы краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области .

В области $D^+ = \{(x,y):\ 0<x<+\infty,\ 0<y<1\}$, рассмотрим уравнение

$$u_{xxxxx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

Будим говорить, что $u(x,y)$ регулярное решение уравнения (1), если оно удовлетворяет уравнению (1) в области D^+ принадлежит классу $C^{5,2}_{x,y}(D^+) \cap C^{4,1}_{x,y}(D^+ \cup \Gamma)$ ($\Gamma = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{y=1\}$), ограниченно на бесконечности в месте с производными до 4-го порядка и $u_y \in L_2(D^+)$.

Задача A^+. Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^+ удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ \lim_{x\to+\infty} u(x,y) = \lim_{x\to+\infty} u_x(x,y) = \lim_{x\to+\infty} u_{xx}(x,y) = 0, \tag{3}$$

где $\varphi_i(y) \in C^4[0,1]$, причем

$$\varphi_i'(0) = \varphi_i'''(0) = 0, \quad \varphi_i(1) = \varphi_i''(1) = 0, \quad i = 1,2. \tag{4}$$

Отметим, что аналогичная задача для уравнения $\dfrac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}u(x,y) + (-1)^n \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0$ рассмотрена в работе [2], где решение построена методом потенциалов. В данной работе задача решается методом Фурье.

Теорема 1. Однородная задача A^+ имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A^+ имеют два различных решений: $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Рассмотрим функцию $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. Эта функция удовлетворяет уравнение (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y,z) \equiv 0$ в области D^+. Для этого предположим, что $u(x,y) \neq 0$ и обе части уравнения (1) умножим на $u(x,y)$, тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu_{xxx}) - \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_{xxx}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) - u_y^2 = 0.$$

Интегрируя это тождество в области $D_{cd} = \{(x,y):\ c << d,\ 0<y<1\}$, имеем

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(d,y)u_{xxxx}(d,y)dy - \int_0^1 u(c,y)u_{xxxx}(c,y)dy - \int_0^1 u_x(d,y)u_{xxx}(d,y)dy + \\ + \int_0^1 u(c,y)u_{xxx}(c,y)dy + \tfrac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(d,y)dy - \tfrac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(c,y)dy + \\ + \int_c^d u(x,1)u_y(x,1)dx - \int_c^d u(x,0)u_y(x,0)dx - \iint_{D_{cd}} u_y^2 dxdy = 0,\end{aligned}$$

при $c \to 0$, $d \to +\infty$, $D_{cd} \to D^+$. Тогда учитывая однородные краевые условия задачи A^+, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(0,y) + \iint_{D^+} u_y^2 dxdy = 0,$$

тогда, в силу $u_y(x,y) = 0$, получим $u(x,y) = f(x)$. Принимая во внимание условия задачи, т.е. $u(x,0) = 0$, имеем $f(x) = 0$, отсюда $u(x,y) \equiv 0$ в D^+. Следовательно, получим $u_1(x,y) = u_2(x,y)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если функции $\varphi_i(y) \in C^4([0,1])$ и выполняются условия (4), то решение задачи A^+ существует.

Теорема 2 доказана с помощью метода разделения переменных, т.е. ищется в виде произведения двух функций $X(x)$ и $Y(y)$. Для определения $Y(y)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя несимметричными условиями на границах сегмента [0; 1]. Для этой задачи найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции при $n \in N$. Полнота система собственных функций $Y_n(y)$ показано в работе [3]. Решение указанной задачи найдена в виде бесконечного ряда, доказана равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования при некоторых условиях на заданные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Апаков Ю.П., Жураев А.Х.** *Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области.* Узбекский математический журнал., 2009. No 4, -С.21–28.
2. **Cattabriga L.** *Potenziali di linia e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple.* Rendiconti del Sem. Mat. della Univ. di Padova 1961. Vol.31. p. 1–45.
3. **Apakov Y. P., Umarov R. A.** *Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function.* Lobachevskii Journal of Mathematics., 2022. Vol 43:3. -pp. 738–748.

К постановке одной краевой задачи для параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка в пятиугольной области

Мамажонов М. М.[1]; Шерматова Х.М.[2]
[1] Кокандский государственный педагогический институт, Фергана, Узбекистан;
[2] Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;

Начиная с 70-80 годов прошлого века интенсивно развивались исследования по уравнениям третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Краевые задачи для таких уравнений поставлены и изучены впервые Т.Д. Джураевым [1] и его учениками [2], [3], [4]. За прошедшее время исследования по краевым задачам для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа развивались в широком плане, а в настоящее время расширяется по направлениям усложнения уравнений и области их рассмотрения, а также обобщения рассматриваемых для них задач уравнений. По этому поводу смотрите работы Мамажанова М. [5], Тахирова Ж.О. [6] и Бердышев А.С. [7].

В настоящей статье ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup\cup J_1\cup J_2\cup J_3$; Lu-модельный параболо-гиперболический оператор, G_1- квадрат с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках $C(2,0)$, $E(1/2,-3/2)$, $D(-1,0)$; G_3, G_4 – квадраты с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0; B, $C(2,0)$, $C_0(2,1)$, B_0 соответственно; J_1, J_2, J_3 - открытые отрезоки с вершинами в точках C, D; A, A_0, B, B_0, а a_2, $b_2\in R$, $\gamma_2=\frac{b_2}{a_2}$, причем $-\infty<\gamma_2<-1$, тогда без ограничения общности можно полагать, что $a_2<0, b_2>0$.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\bar{G}$ и в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ - непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\backslash J_1\backslash J_2\backslash J_3$; 3) удовлетворяет 10 краевым условиям; 4) удовлетворяет 10 условиям склеивания на линиях изменения типа;

Теорема. Если φ_1, $\varphi_2\in C^4[0,1]$, $\varphi_3\in C^3[0,1]$, $\psi_1\in C^4[0,1]$, $\psi_2\in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3\in C^4[0,1/2]$, $\psi_4\in C^3[-1,1/2]$, $\psi_5\in C^2[-1,1/2]$, $\psi_6\in C^3[1/2,2]$, $\psi_7\in C^2[1/2,2]$, причем выполняется условие согласования $\varphi_1(0)=\psi_1(2)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi_1(1/2)=\psi_3(1/2)$, $\psi_4'(1/2)=-\psi_6'(1/2)$, $\tau_1(0)=\tau_2(0)$, $\tau_1(1)=\tau_3(1)$, $\tau_1'(0)=\tau_2'(0)$, $\tau_1'(1)=\tau_3'(1)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Литература

1. **Джураев Т.Д.** *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* Ташкент. Фан. 1979. 240 с.

2. **Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.** *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Ташкент. Фан. 1986. 220с.

3. **Джураев Т.Д., Мамажанов М.** *Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа.* Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 1. С. 25-31.

4. **Sopuev A., Babaev S., Bekmamatov Z.M.** *Rivisiting the Mixed Problem for Equations of Compound and Hyperbolic Types of Order Four.* Growth poles of the global economy: emergence, changes and future perspectives. Lecture notes in network and system. 2020. 73, V. 1. Pp. 725-736.

5. **Мамажонов М.** *Об одной краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в пятиугольной области.* Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). с. 29-39. ISSN 2079-6641.

6. **Тохиров Ж.О.** *К теории нелокальных краевых задач и задач со свободной границей для параболических, гиперболических и смешанных параболо-гиперболических уравнений.* Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук. 01.01.02. – Ташкент, 1999. – 38 с.

7. **Бердышев А.С.** *О существовании собственных значений одной краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка.* Узбекский математический журнал. – 1998. – с. 19–25.

УДК 517.956

О рассмотрении краевой задачи для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками

Мамажонов С. М.
Кокандский университет, Коканд, Узбекистан;
sanjarbekmamajonov@gmail.com; smamajonov@kokanduni.uz

Для уравнения

$$L(u) = u_{xxxx} + a_1 u_{xx} + a_2 u_x + a_3 u - u_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

в области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $\Omega_x = \{x : 0 < x < p;\ p \in R\}$, $\Omega_y = \{y : 0 < y < q;\ q \in R\}$ рассмотрим следующую задачу:

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим краевым условиям:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p,$$

$$\left.\frac{\partial^m}{\partial x^m}\right|_{x=0} = \psi_{m+1}(y), \quad \left.\frac{\partial^m}{\partial x^m}\right|_{x=p} = \psi_{m+3}(y), \quad m = 0,1, \quad 0 \le y \le q,$$

где $\psi_i(y)$, $i = \overline{1,4}$ заданные достаточна гладкие функции.

Отметим, что в работах [1]-[6] рассмотрены различные задачи для уравнения (1) как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнение условиях $a_1 \le 0$ и $a_3 \ge 0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1 uu_x + \frac{1}{2}a_2 u^2\right) + u_{xx}^2 - a_1 u_x^2 + a_3 u^2 - \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) + u_y^2 = 0. \tag{2}$$

Интегрируем тождество (2) по области Ω и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int_0^p \int_0^q u_{xx}^2(x,y)dxdy + \int_0^p \int_0^q u_y^2(x,y)dxdy - a_1 \int_0^p \int_0^q u_x^2(x,y)dxdy + a_3 \int_0^p \int_0^q u^2(x,y)dxdy = 0,$$

Если $a_3 > 0$, тогда из четвертого слагаемого получим $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Если $a_3 = 0$, тогда из второго слагаемого получим $u(x,y) = h(x)$, учитывая условие $u(x,0) = 0$, получим $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Отметим, что при нарушении условий теоремы 1, однородная задача A для однородного уравнение (1) может иметь нетривиальные решения. Например, когда $a_1 = \left(\frac{2\pi k}{p}\right)^2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$ задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y) + \left(\frac{2\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y) - \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y) - u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = u(x,q) = 0, \\ u(0,y) = u(p,y) = u_x(0,y) = u_x(p,y) = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения вида

$$u_{n,k}(x,y)=\left(1-\cos\left(\frac{2\pi k}{p}x\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right),\quad k=0,1,2,...,\ n\in N.$$

Теорема 2. Если выполняются следующие условия

1) $D<\frac{4}{9}\mu_1^7p^3(2+\mu_1)^{-1}e^{-2\mu_1 p}$, $D=\max\{|a_i|,i=\overline{1,3}\}$, $\mu_1=\sqrt{\frac{\pi}{2q}}$;

2) $\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0$, $i=\overline{1,4}$, $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$;

3) $f(x,0)=f(x,q)=0$, $0\le x\le p$, $f_{xyy}(x,y)\in C(\bar{\Omega})$, то решение задача A существует.

Доказательство теоремы 2 основано на применении метода Фурье и функции Грина.

Литература

1. **Apakov Y.P., Mamajonov S.M.** *Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients* // Journal of Mathematical Sciences. - 2024, - 284(2), - pp.153-165.

2. **Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M.** *Second Boundary Value Problem for a Fourth-Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients* // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2024, - 45(8), - pp.3849-3859.

3. **Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M.** *Boundary-Value Problem for the Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics in a Rectangular Domain* // Journal of Mathematical Sciences. - 2023, - 272(2), - p.185-201.

4. **Apakov, Y.P., Mamazhonov, S.M.** *Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms* // Differential Equations. - 2023, - 59(2), - p.188-198.

5. **Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M.** *The boundary value problem for a fourth-order nonhomo- geneous equation with variable coefficients* // Uzbek Mathematical Journal. - 2023, - 67(3), - pp.23-32

6. **Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M.** *Boundary value problem for a inhomogeneous fourth order equation with constant coefficients* // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. - 2023, - 8(2), - p.157-172.

УДК 517.956.32

Интегральное преобразование Ханкеля и его применение к краевым задачам

Исмоилов М.Х., Мирзалиев М.М. Ферганский государственный университет, Узбекистан; mirzaliyevgrand2020@gmail.com

Задача 1. Найти решение уравнения

$$u_{tt}=a^2\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho\right),\tag{1}$$

в области $\Omega=\{(\rho,t):0<\rho<+\infty,\ 0<t<+\infty\}$, удовлетворяющее условиям

$$u(\rho,t)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^{2,2}_{\rho,t}(\Omega),\tag{2}$$

$$u(\rho,0)=\frac{A}{\sqrt{1+(\rho/b)^2}},\ \ u_t(\rho,0)=0,\ \ 0<\rho<+\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{\rho\to+\infty}u(\rho,t)=\lim_{\rho\to+\infty}u_\rho(\rho,t)=0,\ 0<t<+\infty, \tag{4}$$

где $\bar{\Omega}=\{(\rho,t):0\le\rho<+\infty,\ 0\le t<+\infty\}$.

Поставленную задачу исследуем с помощью метода интегральным преобразованием Ханкеля.

Интегральным преобразованием Ханкеля порядка ν функции $f(t)$ называется интеграл [1], [2]

$$\bar{f}(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\,tJ_\nu(pt)\,dt,\ \ \nu\ge-1/2,\ \ 0<p<+\infty. \tag{5}$$

Здесь $J_\nu(z)-$ функция Бесселя первого рода порядка ν [3].

Преобразование Ханкеля функции $f(t)$ верно для любых точек на интервале $(0,+\infty)$, в которых функция $f(t)$ непрерывна или кусочно-непрерывна с конечным числом точек разрыва первого рода, и $\int\limits_0^{+\infty}|f(t)|\,t^{1/2}dt<+\infty$.

Формула обращения преобразования Ханкеля определяется интегралом

$$f(t)=\int_0^{+\infty}\bar{f}(p)\,pJ_\nu(pt)\,dp,\ \ 0<t<+\infty. \tag{6}$$

Функцию $\bar{f}(p)$ часто называют образом Фурье-Бесселя-Ханкеля [4], а функцию $f(t)$ оригиналом.

Преобразование Ханкеля целесообразно применять, очевидно, в случае, когда в уравнении переменные изменяется от 0 до $+\infty$. Поставленная задача 1, является соответствующим примером.

Для вывода уравнения для образа $\hat{u}(\rho,t)$ применим преобразование Ханкеля (нулевого порядка) к исходному уравнению по переменной ρ. Имеем

$$u_\lambda(t)=\int_0^{+\infty}\rho u(\rho,t)J_0(\lambda\rho)d\rho, \tag{7}$$

причем $u(\rho,t)=\int\limits_0^{+\infty}\lambda u_\lambda(t)J_0(\lambda\rho)d\lambda$.

Из равенства (7) вычислим производную второго порядка по переменной t :

$$u''_\lambda(t)=\int_0^{+\infty}\rho u_{tt}J_0(\lambda\rho)d\rho.$$

Используя уравнение (1) и условий (2)-(4), из последнего выражения после несложных преобразований имеем

$$u(\rho,t)=Ab\int_0^{+\infty}e^{-b\lambda}\cos(a\lambda t)J_0(\lambda\rho)d\lambda.$$

Последнее функция удовлетворяет всем условиям задачи 1.

Литература

1. **Снеддон И.** *Преобразования Фурье.* М.: ИЛ, 1955. 668 с.
2. **Диткин В.А., Прудников А.П.** *Интегральные преобразования и операционное исчисление.* М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
3. **Ватсон Г. Н.** *Теория бесселевых функций.* -М.:Т.1.Изд. ИЛ. Ц1949. -798 с.
4. **Пикулин В.П., Похожаев С.И.** *Практический курс по уравнениям математической физики.* 2-е изд., -М.: МЦНМО, 2004. -208 с.

УДК 517.95

Задача Коши для одного уравнения параболо-гиперболического типа

Муминов З. М., ФВПММ, Фергана, Узбекистан; zaylobiddinmuminov@gmail.com

Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup J \cup \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty\}, \ \ \Omega_2 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, \quad 0 < y < +\infty\},$$

$$J = \{(x,y) : x = 0, \quad 0 < y < +\infty\}.$$

Рассмотрим в области Ω уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} L_c u = 0, \tag{1}$$

где

$$L_c u = \begin{cases} u_{xx} - u_y + c_1 u, & \Omega_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - c_2 u, & \Omega_2, \end{cases}$$

c_1 и c_2– заданные вещественные числа.

Задача К. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) она непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{(x,y) : y = 0, \ -\infty < x < +\infty\}$ вместе с производными до второго порядка включительно;

2) является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega \backslash J$;

3) удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$u(x,0) = f_1(x), \qquad 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad -\infty < x \le 0, \tag{3}$$

$$u_y(x,0) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x \le 0, \tag{4}$$

4) удовлетворяет на J следующим условиям склеивания:

$$u(-0,y) = u(+0,y) = \tau(y), \ \ 0 \le y < +\infty, \tag{5}$$

$$u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = v(y), \ \ 0 \le y < +\infty, \tag{6}$$

$$u_{xx}(-0,y) = u_{xx}(+0,y) = \mu(y), \ \ 0 \le y < +\infty. \tag{7}$$

Здесь через $\tau(y)$, $\nu(y)$, $\mu(y)$ обозначены неизвестные следы искомого решения и его производных, а $f_1(x)$, $\varphi_i(y)$, $(i = 1, 2)$– заданные достаточно гладкие функции, причем они ограничены при $x \to \pm\infty$.

Заметим, что линия J является нехарактеристической линией изменения типа оператора L_c.

Доказательство существования и единственности поставленной задачи К проводится аналогично как в работе [1].

Литература

1. **Муминов З.М., Ханкелдиева Н.М.** *Краевая задача для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа.* Тезисы международной научной конференции "Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики." 12-13 марта 2020 г. - Фергана. -С. 115-120.

УДК 517.95

Об одной задаче для интегро-дифференциального уравнения второго порядка

Омонова А. Н.[1]
[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
adibaxonomonova@gmail.com

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$ {}_{C}D_{0t}^{\gamma} u(x,t) + a^2 I_{0t}^{\delta} u(x,t) + b^2 u(x,t) = u_{xx}, \tag{1} $$

где $u(x,y)$ - неизвестная функция; γ, δ, a, b - заданные действительные числа, причем $0 < \gamma < 1$, $0 < \delta < 1$,

$$ {}_{C}D_{0t}^{\gamma} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-z)^{-\gamma} u_z(x,z)\, dz $$

– дробный производные Капуто порядка γ [1],

$$ I_{0t}^{\delta} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-z)^{\delta-1} u(x,z)\, dz $$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка δ [1], $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера [2].

Задача A. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,t)$, $u_x(x,t) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$; $u_{xx}(x,t)$, ${}_{C}D_{0t}^{\gamma} u(x,t) \in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3)на границе области Ω выполняются следующие граничные условия:

$$ u(x,0) = \tau(x), \quad x \in [0,1]; $$

$$ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, t \in [0,T], $$

где $\tau(x)$ – задана непрерывная функция, причем $\tau(0) = 0,\ \tau(1) = 0$.

Теорема 1. *Задача A не может иметь более одного решения.*

Теорема 2. *Если функция* $\tau(x)$ *удовлетворяет условиям* $\tau(x) \in C^2[0,1]$, $\tau'''(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$, $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 0$, $\tau''(0) = 0$, $\tau''(1) = 0$, *то решение задача A существует.*

Литература

1. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and applications of fractional differential equations.* 2006. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier. 2006.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция.* Функция Лежандра. Москва: Наука, 1965.

UDK 517.95 UDK 517.95

Разрешимость обратной задачи для уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями

Отарова Ж.А. [1], Бекиев А.Б. [2]
[1,2] Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан; j.otarova@mail.ru, ashir1976@mail.ru

Обратные задачи для дифференциальных уравнений четвертого порядка представляют значительный интерес в современной математической физике и теории дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают в различных прикладных областях, включая теорию упругости, гидродинамику и теорию колебаний. Значительный вклад в эту область внесли многие ученые, В.А. Юрко [1], А.Л. Бухгейм [2], В.Г. Романов [3], А.М. Денисов [3], Уринов А.К. [5] и другие.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\ 0 < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{ttt} - u_{xxxx} - b^2 u = f(x),$$

где $b = const$.

Задача 1. Найти в области Ω функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{4,3}_{x,t}(\Omega), \quad f(x) \in C(0,p), \tag{1}$$

$$Lu(x,t) = f(x),\ (x,t) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u(x,0) = \varphi(x),\ u(x,\beta) = \xi(x), \\ u_t(x,0) = u_t(x,\beta) + \psi(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_{tt}(x,\beta) + \mu(x),\ 0 \le x \le p, \end{gathered} \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(p,t) = 0,\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(p,t) = 0,\ 0 \le t \le \beta, \tag{4}$$

где $\varphi(x), \xi(x), \psi(x), \mu(x)$ - заданные функции, причем $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(p) = 0,\ \xi^{(i)}(0) = \xi^{(i)}(p) = 0, \quad i = 0, 2.$

Решение задачи (1)-(4) представится в виде

$$u(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \tag{5}$$

где

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_k x,\ \lambda_k = \frac{k\pi}{p},\ k = 1, 2, \ldots\ , \tag{6}$$

$$T_k(t) = a_k e^{v_k t} + e^{-\frac{1}{2}v_k t}\left(b_k \cos\frac{\sqrt{3}}{2} v_k t + c_k sin\frac{\sqrt{3}}{2} v_k t\right) - v_k^{-3} f_k,$$

здесь

$$a_k = \frac{2}{3v_k^2 \Delta_k(\beta)}\left(v_k^2 \varphi_k - v_k^2 \xi_k + v_k \psi_k + \mu_k\right)\left(ch\frac{1}{2} v_k \beta - \cos\frac{\sqrt{3}}{2} v_k \beta\right),$$

$$b_k = \frac{1-e^{v_k\beta}}{3v_k^2\Delta_k(\beta)}\left[2v_k^2\varphi_k\left(e^{\frac{1}{2}v_k\beta}-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta\right)-2v_k^2\xi_k\left(e^{\frac{1}{2}v_k\beta}-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta\right)+\right.$$
$$\left.+v_k\psi_k\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta-e^{\frac{1}{2}v_k\beta}\right)+\mu_k\left(-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta-e^{\frac{1}{2}v_k\beta}\right)\right],$$

$$c_k = \frac{1-e^{v_k\beta}}{3v_k^2\Delta_k(\beta)}\left[-2v_k^2\varphi_k\sin\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+2v_k^2\xi_k\sin\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+\right.$$
$$+v_k\psi_k\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}v_k\beta}\right)+$$
$$\left.+\mu_k\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta-\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}v_k\beta}\right)\right],$$

$$f_k = \frac{v_k}{3\Delta_k(\beta)}\left\{2v_k^2\varphi_k\left[\left(1-2e^{v_k\beta}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+e^{v_k\beta}ch\frac{1}{2}v_k\beta+2sh\frac{1}{2}v_k\beta\right]+\right.$$
$$+2v_k^2\xi_k\left[\left(2-e^{v_k\beta}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+2e^{v_k\beta}sh\frac{1}{2}v_k\beta-ch\frac{1}{2}v_k\beta\right]+$$
$$+v_k\psi_k\left[-\left(1+e^{v_k\beta}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+\sqrt{3}\left(1-e^{v_k\beta}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+2e^{v_k\beta}ch\frac{1}{2}v_k\beta\right]+$$
$$\left.+\mu_k\left[-\left(1+e^{v_k\beta}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+\sqrt{3}\left(e^{v_k\beta}-1\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta+2e^{v_k\beta}ch\frac{1}{2}v_k\beta\right]\right\},$$

$$\Delta_k(\beta) = 4e^{\frac{1}{2}v_k\beta}sh\frac{1}{2}v_k\beta\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}v_k\beta-ch\frac{1}{2}v_k\beta\right),\quad v_k=\sqrt[3]{\lambda_k^4+b^2},$$

φ_k, ψ_k, ξ_k, μ_k– коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$, $\mu(x)$ по системе $\left\{\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}x\right\}_{k=1}^{\infty}$ при $k\in N$.

Теорема 1. Если существует решение задачи (1)-(4), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to 0+0}u_{xxx}(x,t)\sin\lambda_k x=\lim_{x\to p-0}u_{xxx}(x,t)\sin\lambda_k x=0,\quad 0\le t\le\beta,$$

то оно единственно.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ и $\mu(x)$ удовлетворяют условиям $\varphi(x)$, $\xi(x)\in C^5[0,p]$, $\varphi^{(2i)}(0)=\varphi^{(2i)}(p)=0, \xi^{(2i)}(0)=\xi^{(2i)}(p)=0, i=0,1,2$; $\psi(x)\in C^4[0,p]$, $\psi^{(2i)}(0)=\psi^{(2i)}(p)=0, i=0,1$ $\mu(x)\in C^2[0,p]$, $\mu(0)=\mu(p)=0$. Тогда существует единственное решение задачи (1)-(4), которое определяется рядами (5).

Литература

1. **Юрко В.А.** *Обратные спектральные задачи и их приложения.* Издательство Саратовского университета, 2001.

2. **Бухгейм А.Л.** *Введение в теорию обратных задач.* Наука. 1988.

3. **Романов В.Г.** *Обратные задачи для дифференциальных уравнений с интегральным переопределением.* Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57, N 6. – С. 1363-1378.

4. **Денисов А.М.** *Введение в теорию обратных задач.* МГУ. 1994.
5. **Urinov A.K., Jurayev U.T.** *Boundary Value Problems for a Fourth-Order Partial Differential Equation with an Unknown Right-Hand Part.* European Journal of Mathematics and Statistics. – 2021. – Vol. 2, No. 4. P. 42–45. *УДК 517.956*

Задача с двумя разными свободными границами для конкурентно-диффузионной системы

Расулов М. С.[1], Умирхонов М. Т.[2]
[1]Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
rasulovms@bk.ru
[2]Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан;
m.umirxonov@tsue.uz

В этой работе мы изучаем динамику конкурентной системы типа Лотки-Вольтерра с двумя свободными границами, введенными в [1, 2], где две свободные границы используются для описания фронтов распространения двух конкурирующих видов, соответственно.

Взаимодействие между двумя конкурирующими видами формулируется как следующая задача со свободной границей:

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} - m_1 u u_x = u\left(a_1 - b_1 u - c_1 v\right), \quad (t,x) \in D, \\ v_t - d_2 v_{xx} - m_2 v v_x = v\left(a_2 - b_2 u - c_2 v\right), \quad (t,x) \in Q, \\ u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le s_0, \\ v\left(0,x\right) = v_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le h_0, \\ u\left(t,0\right) = \sigma_1, \quad v\left(t,0\right) = \sigma_2, \quad 0 \le t \le T, \\ u\left(t,s\left(t\right)\right) = 0, \quad v\left(t,h\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ s'\left(t\right) = -\mu_1 u_x\left(t,s\left(t\right)\right) - \rho_1, \quad 0 \le t \le T, \\ h'\left(t\right) = -\mu_2 v_x\left(t,h\left(t\right)\right) - \rho_2, \quad 0 \le t \le T, \\ s\left(0\right) = s_0, \quad h\left(0\right) = h_0, \quad s_0 < h_0; \quad u(t,x) \equiv 0, \quad s(t) \le x \le h(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$, $Q = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < h(t)\}$; $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$ – плотности популяции; $s\left(t\right)$, $h\left(t\right)$– свободные границы, $u_0\left(x\right)$ и $v_0\left(x\right)$ – начальные плотности популяции соответственно находятся в областях $[0,s_0]$ и $[0,h_0]$. А параметры μ_i соответственно представляют скорость распространения в новые области для $u(t,x)$ и $v(t,x)$.

Задача (1) исследована в работах [1, 2] в случае $m_i \equiv 0$, $\rho_i \equiv 0$, $i = 1,2$, а вместо условий Дирихле заданы однородные условия Неймана.

Теорема 1. Если функции $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$, $s\left(t\right)$, $h\left(t\right)$ являются решением задачи (1), то справедливы оценки

$$0 < u\left(t,x\right) \le M_1 \equiv \frac{a_1}{b_1}, \qquad (t,x) \in \overline{D},$$

$$0 < v\left(t,x\right) \le M_2 \equiv \frac{a_2}{c_2}, \qquad (t,x) \in \overline{Q},$$

$$-\rho_1 < s'(t) \le M_3 \equiv \mu_1 N_1 - \rho_1, \quad 0 \le t \le T,$$

$$-\rho_2 < h'(t) \le M_4 \equiv \mu_2 N_2 - \rho_2, \quad 0 \le t \le T,$$

где $N_1 \ge \max\left\{\frac{a_1}{m_1}, \max\limits_x \left|\frac{u_0}{s_0 - x}\right|, \frac{\sigma_1}{s_0}\right\}$, $N_2 \ge \max\left\{\frac{a_2}{m_2}, \max\limits_x \left|\frac{v_0}{h_0 - x}\right|, \frac{\sigma_2}{h_0}\right\}$.

Литература

1. **Guo J.S., Wu C.H.** *Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries.* Nonlinearity, **28**, 1-27 (2015).
2. **Wu Ch.** *Different spreading speeds in a weak competition model with two free boundaries.* Journal of Differential Equations, **267**, No. 8, 1512–1535 (2019).

УДК 517.958

О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения

Сафаров Ж. Ш.[1], Хуррамова М. Ж.[2]
[1]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан; j.safarov65@mail.ru
[2]Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан; maftunasafarova94@mail.ru

Дефокусирующие дифференциальные уравнения гиперболического типа представляют собой важный класс уравнений, которые описывают динамику волн в нелинейных средах. Эти уравнения часто используются в физике, особенно в области оптики и теории солитонов.

Дефокусирующие дифференциальные уравнения с нелинейностью вида

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0,$$

являются важным классом уравнений в теории нелинейных волн и оптики. Эти уравнения описывают динамику полей, где нелинейные эффекты приводят к рассеиванию волн, что характерно для дефокусирующих сред. Из наиболее близких к данной работе следует отметит, работу [1] в которой исследуется одномерная обратная задача для уравнения

$$u_{tt} = (k^2(x)u_x)_x + q(x)|u|^{m-1}u$$

на полуоси $x > 0$ с нулевыми начальными данными и граничным условием $u(0,t) = f(t)$. Доказана теорема единственности и существования для прямой задачи, когда заданы коэффициенты $k(x)$ и $q(x)$, а также функция $f(t)$.

В области $\Omega := \{(x,t)|\ x > 0,\ 0 < t \le T\}$ рассматривается начально-краевая задача

$$u_{tt} - (k^2(x)u_x)_x = \int_0^t k(t-\theta)|u|^{n-1}u(x,\theta)\,d\theta, \tag{1}$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$u_x|_{x=0} = g(t), \quad 0 < t \le T, \tag{3}$$

где $n > 1$, $k(t)-$ непрерывно дифференцируемая функция, такая,что $0 < k_1 \le k(x) \le k_2$; $f(t)-$непрерывная функция. В дальнейшем будем полагать, что $g(t) < 0$ для всех $t > 0$.

Прямая задача заключается в отыскании решения задачи (1)-(3) при заданных функциях $k(t)$ и $g(t)$.

В обратной задаче требуется определить ядро $k(t)$ по следу решения прямой задачи при $x = 0$:

$$u|x = 0 = f(t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Данная работа посвящена исследованию прямой задачи, т.е. функция $k(t)$ предполагается известной. Основным результатом работы является следующая теорема однозначной разрешимости задачи (1)– (3).

Теорема 1. Пусть $m(t) \in C[0,T]$, $g(t) \in C^2[0,T]$, $1 \le g(t) \le G$, $g(+0) = 1$. Тогда существует число T_1, $0 < T_1 \le T$, такое, что функция $V(y,t)$ является единственным решением прямой задачи (11)–(13), принадлежить классу $C^2(G(T_1))$ и неотрицательна определена.

Литература

1. **Romanov V.G., Bugueva T.V.** An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation // Eurasian journal of mathematical and computer applications,Volume 12, Issue 2 (2024) 134-154. *УДК 517.954*

О разрешимости смешанной задачи для одной системы составного типа

Сраждинов И. Ф.
Наманганский государственный технический Университет,Наманган, Узбекистан
israjdinov@bk.ru

Основным вопросом, изучаемым в настоящей работе, являются, во первых, в отличие от предыдущих работ, найти соответствующую естественную постановку начальных условий смешанной задачи и во вторых, следуя основательной работе [1], исследование разрешимости смешанной задачи для системы двух уравнений второго порядка составного типа, вида

$$\begin{cases} U_{tt} - LU = aV, \\ V_{tt} + LV = bU; \end{cases} \tag{1}$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad V(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

$$U|_{x\in} = V|_{x\in} = 0, \tag{3}$$

в цилиндре $\Omega_l = g \times [0 \le t \le l]$. Здесь $g-$ произвольная $N-$ мерная область, содержащаяся вместе с границей $\Gamma-$ в некоторой открытой $N-$ мерной области , $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $\Omega_l - (N+1)-$ мерный цилиндр, равный произведению $g \times [0 \le t \le l]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)-$ заданные функции, определенные в области g, а $L-$оператор определенный в [1,стр.98]. Предполагаем выполненными все условия работы [1] относительно коэффициентов оператора L и границы Γ.(См. также [2]). По исследованиям одного скалярного , а также систем уравнений составного типа см. [3-9].

Задача S. Найти решение системы (1) удовлетворяющее начальным условиям (2) и краевым условиям (3).

Применение метода Фурье приводит к следующим результатам:

$$U(x,t) = u(x)\,T(t), \quad V(x,t) = u(x)S(t), \quad u(x)|_{x\in} = 0$$

$$\begin{cases} T(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + C_3 Coskt + C_4 Sinkt, \quad k = \sqrt[4]{\lambda^2 + ab} \\ S(t) = \frac{k^2+\lambda}{a}(C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}) - \frac{k^2-\lambda}{a}(C_3 Coskt + C_4 Sinkt), \\ LX + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0\,; \end{cases} \tag{4}$$

Далее имеем

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{k^2-\lambda}{k^2}\left(T(0) + \frac{1}{k}T'(0)\right) + \frac{a}{k^2}\left(S(0) + \frac{1}{k}S'(0)\right)\right] \\ C_2 = \frac{1}{4}\left[\frac{k^2-\lambda}{k^2}\left(T(0) - \frac{1}{k}T'(0)\right) + \frac{a}{k^2}\left(S(0) - \frac{1}{k}S'(0)\right)\right] \\ C_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2+\lambda}{k^2}T(0) + \frac{a}{k^2}S(0)\right),\ C_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2+\lambda}{k^2}\frac{1}{k}T'(0) + \frac{a}{k^2}\frac{1}{k}S'(0)\right) \end{cases} \tag{5}$$

Для обеспечения ограниченности решения по t при $t \to \infty$, предполагаем выполнение следующих равенств $T(0) + \frac{1}{k}T'(0) = 0, \quad S(0) + \frac{1}{k}S'(0) = 0$. Получаем

$$C_1 = 0,\ C_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k^2-\lambda}{k^2}T(0) + \frac{a}{k^2}S(0)\right],\ C_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2+\lambda}{k^2}T(0) + \frac{a}{k^2}S(0)\right),\ C_4 = -C_3$$

$$C_1 = 0,\ C_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k^2-\lambda_n}{k^2}T_n(0) + \frac{a}{k^2}S_n(0)\right],\ C_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2+\lambda_n}{k^2}T_n(0) + \frac{a}{k^2}S_n(0)\right),\ C_4 = -C_3 \tag{6}$$

Общее решение задачи S, представляется в виде

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_2 e^{-kt} + C_3\left(Coskt - Sinkt\right)\right]u_n(x)\,, \\ V(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_2 e^{-kt} + C_3\left(Coskt - Sinkt\right)\right]u_n(x)\ . \end{aligned} \tag{7}$$

Условия A. Предположим, следуя [1,стр.100], выполненными условия, относительно границы Γ и функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Теорема. Пусть выполнены условия A. Тогда ряды (7) удовлетворяют системе уравнений (1), начальным условиям (2) и краевым условиям (3).При этом возможно ряды (7) дифференцировать по x и t до двух раз и полученные при этом ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Литература

1. **Ильин В.А.** *Разрешимость смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений.* Успехи математических наук - 1960. - 15, 2(92),С.97–154.
2. **Алимов Ш.А.** *Избранные научные труды.* Ташкент.- 2015 г.изд.Мериюс.
3. **Салахитдинов М.С.** *Уравнения смешанно-составного типа.* Ташкент.Фан. - 1974, -155с.
4. **Джураев Т.Д.** *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* Ташкент,Фан, - 1979, - 236с.
5. **Джураев Т.Д** *Метод сингулярных интегральных уравнений.* Москва, Наука, - 1987, - 415с.

6. **Сраждинов И.Ф.** *Об одной системе уравнений составного типа в многомерных пространствах.* Доклады Академии Наук Республики Таджикистан, - 1980, том 23, 2,стр.66–70.
7. **Сраждинов И.Ф.** *Об одной составной системе с коэффициентом типа Лежандра.* Доклады Академии наук Республики Узбекистан, - 5, - 2016,стр.7-10.
8. **Srajdinov I.F.** *Towards a mixed problem study for composite systems of equations.* Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science,2(4),- 2021, 15 -19.
9. **Сраждинов И.Ф.** *Начально-краевая задача для одной системы составного типа.* Бюллетень Института математики АН РУз, - 2021, Vol.4, 2, стр.90 -95. *UDK*

517.956.6

Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа дробного порядка

Убайдуллаев У. Ш.[1], Абсоатова Х. Г.[2]
[1] Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета, Самарканд; ulugbekuz88@mail.ru;
[2] Наманганский Государственный Университет; rhmtvfarhod@gmail.com

Благодарности. *Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект* ***Ф3-202009211****).*

Отметим, что дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие
производные дробного порядка, имеют важные приложения в различных областях [1]–[5] и полученные результаты, безусловно, представляют большое значение из-за их новизны. Такие дифференциальные уравнения в частных производных невозможно классифицировать из-за наличия дробной производной, так как не удается написать соответствующее харак-теристическое уравнение.

В связи с этим предлагаю следующее определение классификации таких уравнений по типам.

Определение 1. Дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие производную дробного порядка γ, назовем параболическим, эллиптическим и гиперболи-ческим, если при каком-то значении γиз промежутка его изменения они становятся соответственно дифференциальным уравнением параболического, эллиптического и гиперболического типов по существующей классификации дифференциальных уравнений в частных производных.

Определение 2. Если в различных частях области задания дифференциальное уравнение в частных производных, содержащее дробную производную, принадлежит различным типам в указанном выше смысле, то такое дифференциальное уравнение следует называть уравнением смешанного типа в этой области.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - {}_cD^{\alpha}_{0y}u + \mu_1 u(x,0) = 0 & \text{при} \quad y > 0, \quad 0 < \alpha \le 1, \\ u_{xx} - {}_cD^{\beta}_{0y}u + \mu_2 u(x+y,0) = 0 & \text{при} \quad y < 0, \quad 1 < \beta \le 2 \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y): \ 0 < x < 1, \ -p < y < q\}, \quad p > 0, \quad q > 0,$ $\mu_j \ge 0$

$(j = 1, 2)$ −заданные действительные числа, а ${}_cD^{\gamma}_{0y}$− оператор дробного порядка в смысле Капуто[6, с. 38], [2] определяется формулой:

$$ {}_cD^{\gamma}_{0y}u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^y (y-t)^{-\gamma}u_t(x,t)dt, & 0<\gamma<1, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, & \gamma = 1, \\ \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\int_0^y |y-t|^{1-\gamma}u_{tt}(x,t)dt, & 1<\gamma<2, \\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}, & \gamma = 2. \end{cases} \tag{2} $$

Введем обозначения: $J = \{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y):\ x>0,\ y>0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x,y):\ x>0,\ y<0\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$.

Класс C^k_{θ}**.** Через $C^k_{\theta}(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных по θ до k−го порядка включительно в области M.

Задача T_d**.** Требуется найти функции $u(x,y)$ со следующими свойствами:

$$ u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1_x(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2_x(\Omega_1 \cup \Omega_2)\ {}_cD^{\alpha}_{0y}u \in C(\Omega_1), \quad {}_cD^{\beta}_{0y}u \in C(\Omega_2); \tag{3} $$

$$ Lu(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \tag{4} $$

$y^{1-\alpha}u_y(x,y) \in C(\Omega_1 \cup J)$, $(-y)^{1-\beta}u_y(x,y) \in C(\Omega_2 \cup J)$ и на линии J выполняются условия склеивания

$$ u(x,+0) = u(x,-0), \ \ (x,0) \in \bar{J}, \quad \lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lim_{y\to-0}(-y)^{1-\beta}u_y(x,y), \quad (x,0) \in J; \tag{5} $$

$$ u(0,y) = 0, \qquad u(1,y) = 0, \quad -p \le y \le q\,, \quad u(x,-p) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1\,, \tag{6} $$

где $\psi(x)$ −заданные достаточно гладкие функции, причем

$$ \psi(0) = \psi''(0) = \psi(1) = \psi''(1) = 0. \tag{7} $$

В данной работе доказаны теоремы единственность и существования решения задачи T_d. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда и при определенных ограничения на заданых функции показана его сходимость в классе регулярных решений (3) и (4) уравнения (1). Установлена устойчивость решения задачи T_d .

Литература

1. **Нахушев А.М.** *Элементы дробного исчисления и их применение.* Нальчик. Изд-во КБНЦ РАН. 2000. 299с.

2. **Псху А.В.** *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка.* Нальчик. 2005. 186 с.

3. **Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh.** *On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain.* Lobachevskii Jurnal. of Math.. 2020. **41**(9). P. 1801–1810.

4. **Ашуров Р.Р., Зуннунов Р.Т.** *Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной. Обратные задачи.* arXiv:2103. 14966v1 [math.AP] 2021. С. 1-13.

5. **Сабитов К.Б.** *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными.* Изв. вузов. Матем. 2022. №9.С. 83–94.

6. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск. Наука Техника. 1987. 688 с.

УДК 517.95

Об эллиптической задаче во внешности многомерного конуса

Васиотев В. Б.[1], Гебресласи Х. Ф.[2]
[1]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; vbv57@inbox.ru1
[2]Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; rhadishfe@gmail.com

Мы исследуем разрешимость уравнения

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \overline{C_+^a \times C_+^b} \tag{1}$$

в пространстве $H^s(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{C_+^a \times C_+^b})$ с дополнительными интегральными условиями

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_2 = f_1(x_1, x_3, x_4), \tag{2}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_4 = f_2(x_1, x_2, x_3), \tag{3}$$

где A – псевдодифференциальный оператор [1,2] с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$|A(\xi) \sim (1 + |\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$C_+^a \subset \mathbb{R}^2$, $C_+^b \subset \mathbb{R}^2$,

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = (x_1, x_2)x_2 > a|x_1|, a > 0\},$$

$$C_+^b = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = (x_3, x_4)x_3 > b|x_4|, b > 0\},$$

f_1, f_2 – заданные функции из $H^{s+1/2}(\mathbb{R}^3$, предполагается, что $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [1,2] относительно $-(C_+^a \times C_+^b)$

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с индексом æ , таким, что æ $- s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$.

Теорема. Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $-(C_+^a \times C_+^b)$ с индексом æ таким, что æ $- s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$, и существуют пределы

$$\lim_{b \to 0} A_{\neq}(\xi) = B_1(\xi),$$

$$\lim_{a \to 0} A_{\neq}(\xi) = B_2(\xi),$$

то задача (1),(2),(3) имеет единственное решение в пространстве $H^s(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{C_+^a \times C_+^b})$.

В образах Фурье решение может быть выписано явно, и мы приведем здесь конструкцию решения, $\sim$ над функцией обозначает ее преобразование Фурье. Введем операторы

$$P_k = \frac{1}{2}(I + S_k), \qquad Q_k = \frac{1}{2}(I - S_k), \quad k = 1, 3,$$

где I – единичный оператор, S_k – одномерные сингулярные интегральные операторы вида

$$(S_1\tilde{u})(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{i}{\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\eta, \xi_2, \xi_3, \xi_4)d\eta}{\xi_1 - \eta},$$

$$(S_3\tilde{u})(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\frac{i}{\pi}v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}(\xi_1,\xi_2,\eta,\xi_4)d\eta}{\xi_3-\eta},$$

Формула решения имеет вид

$$\tilde{u}(\xi)=A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi),$$

где

$$\tilde{g}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=(P_1P_3\tilde{h})(\xi_1+a\xi_2,\xi_2,\xi_3+b\xi_4,\xi_4)+(P_1Q_3\tilde{h})(\xi_1+a\xi_2,\xi_2,\xi_3-b\xi_4,\xi_4)$$

$$+(Q_1P_3\tilde{h})(\xi_1-a\xi_2,\xi_2,\xi_3+b\xi_4,\xi_4)+(Q_1Q_3\tilde{h})(\xi_1-a\xi_2,\xi_2,\xi_3-b\xi_4,\xi_4),$$

$$\tilde{h}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\tilde{F}_1(\xi_1,\xi_3,\xi_4)+\tilde{F}_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)-\tilde{F}_1(\xi_1,\xi_3,0),$$

функции $\tilde{F}_1,\tilde{F}_2$ определяются условиями (2),(3)

$$\tilde{F}_1(\xi_1,\xi_3,\xi_4)=B_1(\xi_1,0,\xi_3,\xi_4)\tilde{f}_1(\xi_1,\xi_3,\xi_4),$$

$$\tilde{F}_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=B_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3,0)\tilde{f}_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3).$$

Литература

1. **Vasil'ev V.B.** *Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications.Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains.* Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers. - 2000. -ix, 172 p.

2. **Васильев В.Б.** *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.* М.: УРСС. - 2010. - 135 с. *UDK*

517.956.6

Нелокальная краевая задача для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа, когда нагруженная часть содержит оператор дробного порядка

Холбеков Ж. А.
Ташкентский государственный технический университет им. И.Каримова
e-mail: juratxolbekov@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\mu_0D_{0,x}^{-\alpha_0}u(x,0) & (x,y)\in\Omega_0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu_1D_{0,\xi}^{\alpha_1}u(\xi,0), & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu_2D_{0,\eta}^{\alpha_2}u(0,\eta), & (x,y)\in\Omega_2,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu_3D_{0,\zeta}^{\alpha_3}u(1,\zeta), & (x,y)\in\Omega_3, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω_0 – область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно; Ω_1 –характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристи-ками $AN: x+y=0$,$BN: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N(0,5;\ -0,5)$; Ω_2 –харак-теристический треугольник, ограниченный отрезком AD

оси Oy и двумя характеристиками $AK: x+y=0$,$DK: \ y-x=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $K(-0,5;\ 0,5)$; Ω_3 −характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и двумя характеристиками $CM: x+y=2$,$BM: \ x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$, пересекающимися в точке $M(1,5;\ 0,5)$. В уравнении (1) $\xi = x+y$,$\eta = y-x$; $\zeta = y-x+1$ μ_j, $\alpha_j (j=\overline{0,3})$ −заданные действительные числа, причем

$$\mu_j \geq 0, \qquad 0 \leq \alpha_j < 1, \ \ (j=\overline{0,3}). \tag{2}$$

Здесь $D_{0x}^{c} f(x)$ - оператор интегро-дифференцирования дробного порядка $|c|$ в смысле
Римана - Лиувилля[1].

Определение 1. *Через* $AC^n(V)$, *где* $n=1,2,\ldots,V$−*отрезок, обозначим класс функций* $f(x)$, *непрерывно дифференцируемых на* V *до порядка* $n-1$, *причем* $f^{(n-1)}(x) \in AC(V)$ *и* $AC^1(V)=AC(V)$−*класс абсолютно непрерывных функций* [1, стр. 21; лемма 2.4, §2, стр.46].

Определение 2. *Пусть* $0 \leq c < 1$ *и* $f(x) \in AC([0,1])$, *тогда* $D_{0x}^{c} f(x)$ *существует почти всюду и может быть представлена в виде* [1,стр.46]:

$$D_{0x}^{c} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-c)} \left[f(0)x^{-c} + \int_0^x (x-t)^{-c} f'(t)\, dt \right].$$

Введем обозначения: $\Omega = \sum_{j=0}^{3} \Omega_j \cup \ AB \cup BC \cup DA$,

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_0, \ \Omega_2^* = \Omega_2 \cup AD \cup \Omega_0 \cup BC \cup \Omega_3.$$

Задача C_2**.** Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$; 2)$u(x,y) \in AC[0,1]$ для $\forall x \in [0,1]$; 3) $u_y(x,y) \in C(\Omega_1^*)$, $u_x(x,y) \in C(\Omega_2^*)$; 4) $u(x,y) \in C_{x,y}^{2,1}(\Omega_0) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_0 и $\Omega_j \ (j=\overline{1,3})$;
5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$au\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + bu\left(\frac{1+x}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = m(x)u_x(x,0) + n(x)u_y(x,0) + d(x)u(x,0) + c(x), \ x \in (0,1),$$

$$u(x,y)|_{DK} = \varphi_1(y), \qquad \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \ \ u(x,y)|_{CM} = \varphi_2(y), \qquad \frac{1}{2} \leq y \leq 1,$$

6) на линиях изменения типа AB,BC и DA выполняются условия склеивания

$$u_y(x,-0) = a_1(x)u_y(x,+0) + b_1(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u_x(-0,y) = a_2(y)u_x(+0,y) + b_2(y), \quad y \in (0,1),$$

$$u_x(1-0,y) = a_3(y)u_x(1+0,y) + b_3(y), \quad y \in (0,1),$$

где $a(x)$, $b(x)$, $m(x)$, $n(x)$, $d(x)$, $c(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$, $a_j(y)$, $b_j(y)$ $(j=2,3)$− заданные функции, причем

$$a^2(x) + b^2(x) \neq 0, \quad m^2(x) + n^2(x) + d^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in [0,1], \tag{3}$$

$$m(0) = n(0) = d(0) = c(0) = 0, \quad m(1) = n(1) = d(1) = c(1) = 0, \tag{4}$$

$$a_1(x),\ \ b_1(x) \in C\,[0,1] \cap C^1\,(0,1)\,, \quad a_1(x) \neq 0,\ \ \forall x \in [0,1]\,, \tag{5}$$

$$a_j(y),\ \ b_j(y) \in C\,[0,1] \cap C^2(0,1), \quad a_j(y) \neq 0,\ \ \forall y \in [0,1]\,,\ \ (j=2,3), \tag{6}$$

$$a(x),\ \ b(x),\ \ m(x),\ \ n(x),\ \ d(x),\ \ c(x) \in C^1\,[0,1] \cap C^2(0,1), \tag{7}$$

$$\varphi_1(y),\ \ \varphi_2(y) \in C^1\left[\frac{1}{2},1\right] \cap C^2\left(\frac{1}{2},1\right). \tag{8}$$

Доказана следуюшая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2)-(8) и*

$$\tilde{a}(x) = a_1(x)\,[a(x) - b(x) + 2n(x)] \neq 0, \frac{a(x) + b(x) - 2m(x)}{\tilde{a}(x)} \geq 0,$$

$$\frac{xa(x) + (1-x)b(x)}{\tilde{a}(x)} \geq 0, \frac{d(x)}{\tilde{a}(x)} \leq 0, \forall x \in [0,1]\,,$$

то в области Ω решение задачи C_2 существует и единственно.

Заметим, что локальные и нелокалные задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа с тремя линиями изменения, когда нагруженная часть содержит след от искомой функции, изучены в работах[2-4].

Литература

1. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. 1987. 688с.

2. **Исломов Б. И., Холбеков Ж. А.** Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. **25(??)**. С. 407–422.

3. **Исломов Б., Холбеков Ж. А.** Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа – I. // Узбек. мат. журнал. 2015. №4. С. 47–56.

4. **Исломов Б., Холбеков Ж. А.** Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа – II. // Узбек. мат. журнал. 2016. №1. С. 49–56.

УДК 517.956.45

Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения

Хуррамов А. Т.[1], Норхонова М. А.[1]
[1]Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
xurramovabbos625@gmail.com, norxonovamohichexra@gmail.com

Особенность данной задачи состоит в наличии переменных размеров области, в которой исследуется температурное поле, и наличия подвижной границы раздела фаз, изучение поведения которой и составляет основную цель решения. Физические свойства среды, находящейся в разных фазах, будут различными. Поэтому задача Стефана характеризуется существенной геометрической и физической нелинейностью, что крайне затрудняет еч решение [2].

В работе Джим Дуглас предлагает способ доказательства единственности решения задачи Стефана для квазилинейного параболического уравнения. В. Кайнером были доказаны теоремы существование и единственности однофазной задачи Стефана для нелинейных уравнений.

Отличительной особенностью однофазных задач является монотонность свободной границы и, как следствие этого, ограниченность первой производной решения по пространственной переменной на свободной границе. Цель настоящей статьи вывод априорных оценок решений однофазной задачи Стефана с нелокальным граничным условием на фиксированной границе, обеспечивающих еҷ разрешимость для любого конечного промежутка времени, и доказательство единственности решения. [1]

1. Постановка задачи. Требуется найти пару функций $(s(t), u(t,x))$ удовлетворяющих условиям

$$u_t = a(u)u_{xx}, \quad D = \{(x,t) : 0 < x < s(t),\, 0 < t \le T\} \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u(0,t) = mu(x_0,t), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 < x_0 \le s_0, \tag{3}$$

$$u(s(t),t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$s(t) = -cu_x(s(t),t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Будем предполагать выполнение следующих условий:

a) функции $a(u)$ и $a'(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, приччм $a(u) \ge a_0 > 0, a'(u) > 0$.

b) $s_0,\ m,\ x_0$ и c удовлетворяют следующим неравенствам: $s_0 > 0$, $0 < m < 1,\ c > 0$, $0 < x_0 \le s_0$;

c) $0 \le \varphi(x) \le N(s_0 - s)$, $N = \max\limits_{0 \le x \le s_0} |\varphi(x)(s_0 - x)^{-1}|$.

Задача (1)-(5) исследованы в работах в случае, когда вместо (3) задачтся граничное условие второго рода.

Литература

1. **Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н.** *Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения.* Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2012. 3 (28). С. 8-16.

2. **Friedman A.** *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hal, 1964. xiv+347 pp.; русск. пер.Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 428 с.

UDK 517.95

Об одном способе регуляризации в одномерных обратных динамических задачах для уравнений пористых сред

Хушвактова Ш.Дж,[1] Янгибоев З.Ш. [1]

[1] Каршинский госуниверситет, Карши, Узбекистон; zoyiry@mail.ru

Пусть полупространство $z > 0$ заполнено неоднородной пористой средой. Уравнения распространения сейсмических SH волн с учетом поглощения энергии, обусловленной коэффициентом межкомпонентного трения $b(z)$, имеют вид [1, 2]

$$\rho_s(z)\, u_{tt} = (\mu(z)\, u_z)_z - \rho_l(z)\, b(z)\, (u_t - v_t), \tag{1}$$

$$\rho_l(z)\, v_{tt} = \rho_l(z)\, b(z)\,(u_t - v_t), \tag{2}$$

Здесь u и v - компоненты векторов скоростей смещений частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$ соответственно. Предположим, что пористая среда покоится при $t < 0$:

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0. \tag{4}$$

Пусть на границе $z = 0$ приложена сила:

$$\mu u_z|_{z=0} = \delta(t), \tag{5}$$

Здесь $\delta(t)$ - функция Дирака.

Требуется по информации (5) и по заданным один раз непрерывно дифференцируем положительным функциям $\rho_s(z)$, $\mu(z)$, непрерывным положительном функциям $\rho_l(z)$, $b(z)$ определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $u(t,z)$, $v(t,z)$ из (1)-(4). Такую задачу будем называть прямой динамической задачей для уравнений SH волн в пористой среде.

В приложениях наибольший интерес представляют задачи об определении переменных коэффициентов дифференциального уравнения. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения, как правило, описывают физические процессы, а коэффициенты уравнения связаны с физическими характеристиками среды, в которой протекают эти процессы. Так как непосредственно эти коэффициенты измерить невозможно, то задача об определения свойств вещества является, по существу, обратной.

Используя методику предложенную в [3] для обратной задачи теории упругости, построим регуляризирующий алгоритм следующих обратных задач:

Задача 1. Требуется по информации

$$u|_{z=0} = \varphi(t) \tag{6}$$

восстановить $\mu(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z)$, $\rho_f(z), b(z)$).

Задача 2. Требуется по информации (6) восстановить $b(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z), \rho_f(z), \mu(z)$).

Задача 3. Требуется по информации (6) восстановить $\rho_s(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_f(z), \mu(z), b(z)$).

Задача 4. Требуется по информации (6) восстановить $\rho_f(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z), \mu(z), b(z)$).

Теперь рассмотрим регуляризованное уравнение для задачи (1)-(6).

$$z = z_0 + M(z, \alpha). \tag{7}$$

Доказано следующие

Теорема. Пусть $z_0 \in Z$. Тогда для любого $\alpha > 0$ в Z существует единственное решение $z(\alpha)$ уравнение (7), более того как функция параметра α оно непрерывно дифференцируемо в R_+ и

$$\|z(\alpha)\| \le \|z_0\| \exp(c_1 T/4\alpha). \tag{8}$$

Здесь Z-банахово пространство вектор-функций $z(x,t) = (z_1(x,t), z_2(x,t), z_3(x), z_4(x))$.

Литература

1. **Доровских В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И.** *Волновые процессы в насыщенных пористых упругопроводящих средах.* ФТВ. 1993. N 1. С. 100-111.
2. **Blokhin A. M., Dorovsky V. N.** *Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum.* New York: Nova Science Publishers, 1995.
3. **Пестов Л. Н.** *Об одном способе регуляризации одномерной задачи теории упругости.* Труды ВЦ СО РАН, Новосибирск. Мат. модел. и геофизика. 1993. Т. 1. С. 112-124.

УДК 517.95

О первой задаче Дарбу для нелинейного гиперболического уравнения второго порядка

Янгибоев З.Ш. [1], Рузимуродова Р. [1]
[1] Каршинский госуниверситет, Карши, Узбекистон; zoyiry@mail.ru

В плоскости x и t рассмотрим линейное гиперболическое уравнение с памятью вида

$$L_\nu u := u_{tt} - u_{xx} + b_1(x,t)\, u_t + b_2(x,t)u_x + b_3(x,t)u +$$

$$+\nu|u|^\beta u + \int_0^t b(x,s)\, u(x,s)ds = f(x,t). \qquad (1)$$

Здесь u искомая действительная функция, $b_k(x,t)$ $(k = 1,2,3)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$- заданные функции, β и ν -заданные действительные постоянные, причем $\beta\nu \neq 0$, $\beta > 1$. Уравнение (1) возникает в частности в динамической теорию пороупругости [1-3].

Введем обозначия $D_T := \{(x,t) : 0 < x < t, 0 < t < T\}$, $T \leq \infty$, треугольную область, ограниченную характеристическим отрезком $\Gamma_{1,T} : x = t, 0 \leq t \leq T$, а также отрезками $\Gamma_{2,T} : x = 0, 0 \leq t \leq T$ и $\Gamma_{3,T} : t = T, 0 \leq x \leq T$. Для уравнения (1) рассмотрим первую задачу Дарбу об определении в области D_T решения $u(x,t)$ этого интегро-дифференциального уравнения по краевым условиям (см., например, [5; с. 228]):

$$u\,|_{\Gamma_{i,T}} = 0, i = 1,2. \qquad (2)$$

Отметим, что для нелинейных уравнений гиперболического типа вопросам существования или отсутствия глобальных решений различных задач (как, например, начальных, смешанных, различного рода нелокальных задач, в том числе периодических) посвящено много работ (см., например, [6]-[7]). В линейном случае, т.е. при $\beta\nu = 0$, $b(x,t) = 0$ задача (1), (2), как известно, корректно поставлена и имеет место глобальную разрешимость в соответствующих пространствах функций.

Что при определенных условиях на показатель нелинейности β и параметр ν задача (1), (2) для случая $b(x,t) = 0$ в одних случаях глобально разрешима, а в других случаях не имеет глобального решения, при этом рассматриваемая задача локально разрешима.

В данной работе исследуется первая задача Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка с памятью. Обсуждается также вопрос о разрешимости поставленной задачи.

Определение 1[5]. Пусть $b_k(x,t), b(x,t) \in C(\bar{D}_T)$, $k = 1,2,3$, $f(x,t) \in C(\bar{D}_T)$. Функцию u будем называть *сильным обобщенным решением* задачи (1), (2) класса C в области D_T, если $u \in C(\bar{D}_T)$ и существует такая последовательность функций

$u_n \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T, S_T)$, что $u_n \to u$ и $L_\nu u_n \to f$ в пространстве $C(\bar{D}_T)$ $n \to \infty$, при $n \to \infty$, где

$$\tilde{C}^2(\bar{D}_T, S_T) := \{u \in C^2(\bar{D}_T) : u\,|_{S_T} = 0\}, \quad S_T := \Gamma_{1,T} \bigcup \Gamma_{2,T}.$$

Определение 2[5]. Пусть $b_k, b \in C(\bar{D}_\infty)$, $k = 1,2,3$, $f \in C(\bar{D}_\infty)$. Мы будем говорить, что задача (1), (2) глобально разрешима в классе C, если для любого конечного $T > 0$ эта задача имеет сильное обобщенное решение класса C в области D_T.

Имеет место

Лемма 1. Пусть $-1 < \beta < 0$, а в случае $\beta > 0$ дополнительно потребуем, чтобы $\nu > 0$. Тогда для сильного обобщенного решения задачи (1), (2) из класса $C(D_T)$ справедлива априорная оценка

$$||u||_{C(\bar{D}_T)} \le c_1 ||f||_{C(\bar{D}_T)} + c_2 \tag{3}$$

с положительными постоянными $c_k(T, b_j, b, \beta, \nu)$, $k = 1,2$, $j = 1,2,3$, не зависящими от u и f.

Задачи (1),(2) эквивалентна к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

Лемма 2. Функция $u \in C(\bar{D}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи (1), (2) класса C в области D_T тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения

$$u(x,t) + \nu \left(L_0^{-1}|u|^\beta u\right)(x,t) + (M_0\, u)(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in \bar{D}_T. \tag{4}.$$

Теорема. Пусть $-1 < \beta < 0$, а в случае $\beta > 0$ параметр $\nu > 0$. Тогда задача (1), (2) глобально разрешима в классе непрерывных функций C в смысле определения 2, т.е. если $f \in C(\bar{D}_\infty)$, то для любого $T > 0$ задача (1), (2) имеет сильное обобщенное решение класса непрерывных функций C в области D_T.

Литературы

1. **Blokhin A.M., Dorovsky V.N.** *Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum.* Nova Science Publishers, Inc, New York. 1995, 192 p.

2. **Imomnazarov Kh.Kh.** *Estimates of conditional stability of some combined inverse problems for Maxwell's equations and equations of porous media* Comp. Appl. Math. 2001. v.20. pp.20-34.

3. **Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Рахмонов Т.Т., Янгибоев З.Ш.** *Регуля- ризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде.* Владикавказский математический журнал, 2013, т.15, No. 2, б. 46-58. p.

4. **Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С.** *О первой задаче Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка.* Математические заметки 2008, т. 84, No. 5, с. 693-712.

5. **Бицадзе А.В.** *О первой задаче Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка.* Наука, М., 1981.

6. **John F.** *Blow-up of solutions of nonlinear wave equation in three space dimensions.* Manuscripta Math., 1979, v.28, No.1-3, pp. 235-268.

7. **John F.** *Blow-up for quasi-linear wave equations in three space dimensions.* Comm. Pure Appl. Math., 1981, v. 34, No. 1, pp. 29-51.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

UDK 519.6

Classification of character of rest points of the Lotka-Volterra operator acting in s^4

Ganihodzhayev R.N.[1], Eshmamatova D.B.[2,3], Muminov U.R.[4]

[1] National Univesity of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; rasulganikhodzhaev@gmail.com

[2] Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan; 24dil@mail.ru

[3] Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; 24dil@mail.ru

[4] Tashkent Institute of Management and Economics, Fergana Campus, Fergana, Uzbekistan; ulugbek.muminov.2020@mail.ru

There are a number of methods and dynamical systems describing living systems [1]-[4]. But the most striking representative is still the mappings of finite-dimensional simplex in the form of discrete Lotka-Volterra mappings. In this regard, this paper considers another case of this type of mapping, but in a degenerate form. It can be considered as a discrete model of the evolution of several viruses. Now let us move on to the mathematical part of the proposed work.

It is known [5] that discrete Lotka-Volterra mappings are uniquely determined by specifying the skew-symmetric matrix $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = -a_{ji}$, $i,\ j = \overline{1,m}$ and act on the simplex

$$S^{m-1} = \left\{ x \in R^m : \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \right\}$$

according to the formulas

$$V : x_k^{'} = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \right),\ k = 1, ..., m, \tag{1}$$

subject to $|a_{ki}| \leq 1$. We define it as $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ [5], [6].

Definition 1.[5]. Let $x \in S^{m-1}$. If condition $Vx = x$ is satisfied, then point x is called fixed. Let $x^* = (x_1,\ x_2, ..., x_m) \in S^{m-1}$ be a fixed point of a system of type (1). If

$$|J(x^*) - \lambda E| = 0, \tag{2}$$

then the numbers $\lambda_i,\ i = \overline{1,m}$, which are solutions to the equation, are called the eigenvalues of the fixed point [7]. Here $J(x)$ is the Jacobian matrix.

Definition 2. If at a fixed point $x^* = (x_1,\ x_2, ..., x_m) \in S^{m-1}$ all eigenvalues $\lambda_i,\ i = \overline{1,m}$ are less than 1 in absolute value, then this point is called attracting.

Definition 3. If all eigenvalues $\lambda_i,\ i = \overline{1,m}$ at a fixed point $x^* = (x_1,\, x_2, ..., x_m) \in S^{m-1}$ are greater than 1, then this fixed point is called repulsive.
In all other cases, the fixed point is called a saddle point.

Consider the following skew-symmetric matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & -e & 0 \\ a & -c & 0 & 0 & -d \\ -b & e & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & d & -f & 0 \end{pmatrix},\ 0 < a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \leq 1.$$

In this case, operator $V : S^4 \to S^4$, defined by matrix A, will have the following form:

$$V : \begin{cases} x_1^{'} = x_1(1 - ax_3 + bx_4), \\ x_2^{'} = x_2(1 + cx_3 - ex_4), \\ x_3^{'} = x_3(1 + ax_1 - cx_2 - dx_5), \\ x_4^{'} = x_4(1 - bx_1 + ex_2 + fx_5), \\ x_5^{'} = x_5(1 + dx_3 - fx_4). \end{cases} \tag{3}$$

The set of fixed points of operator (3) is of the form

$$\Gamma_{34} = \left\{(0,\, 0,\, \gamma,\, 1-\gamma,\, 0) \in S^4,\, 0 \leq \gamma \leq 1\right\},$$

$$\Gamma_{125} = \left\{(\alpha,\, \beta\,,\, 0,\, 0,\, 1-\alpha-\beta) \in S^4,\, 0 \leq \alpha,\, \beta \leq 1,\ \alpha + \beta \leq 1\right\}.$$

All points of edge $\Gamma_{34} \subset S^4$ satisfy condition $Vx = x$. We solve equations $-ax_3 + bx_4 = 0$, $cx_3 - ex_4 = 0,\ dx_3 - fx_4 = 0$ taking into account $x_3 + x_4 = 1$. The solutions to these equations consist of neutral fixed points. Let us denote them as

$$E_1 = \left(0,\, 0,\, \frac{b}{a+b},\, \frac{a}{a+b},\, 0\right),\ E_2 = \left(0,\, 0,\, \frac{e}{c+e},\, \frac{c}{c+e},\, 0\right),\ E_3 = \left(0,\, 0,\, \frac{f}{d+f},\, \frac{d}{d+f},\, 0\right),$$

respectively.

The main results of the work are the following theorems.

Theorem 1. If condition $de > cf$ is satisfied, then all fixed points belonging to the interval $[E_1,\, E_2] \subset \Gamma_{34}$ are repellers; if condition $de > cf$ is satisfied, then $[E_1,\, E_3] \subset \Gamma_{34}$ the interval consists entirely of repellers.

Theorem 2. If $-a\gamma + b\,(1-\gamma)\,,\ c\gamma - e\,(1-\gamma)\,,\ d\gamma - f\,(1-\gamma)$ have different signs, then the fixed points belonging to Γ_{34} consist of saddle points.

Theorem 3. The set of fixed points belonging to the edge Γ_{25} consists of saddle points.

References

1. **Devaney R.L.** *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment.* New York: CRC Press; 2020. 328 p. DOI: 10.1201/9780429280665.
2. **Strogatz S.** *Nonlinear Dynamics and Chaos.* New York: CRC Press; 2019. 532 p.

3. **Anupam P., Sandip M., Lan S.S, Hidekatsu Y.** *Micro-scale variability enhances trophic transfer and potentially sustains biodiversity in plankton ecosystems.* J. Theor. Biol. 2017; 412: 86-93. DOI: 10.1016/j.jtbi.2016.10.005.
4. **Muller J., Kuttler C.** *Methods and Models in Mathematical Biology. Deterministic and Stochastic Approaches.* Berlin: Springer; 2015. 711 p. DOI: 10.1007/978-3-642-27251-6.
5. **Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D. B., Muminov U.R., Masharipov S.I.** *Degenerate cases in discrete Lotka-Volterra dynamical systems.* Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025; 33(2):165-183. DOI: 10.18500/0869-6632-003153.
6. **Eshmamatova D. B., Tadzhieva M. A., Ganikhodzhaev, R.N.** *Criteria for the Existence of Internal Fixed Points of Lotka-Volterra Quadratic Stochastic Mappings with Homogeneous Tournaments Acting in an (m-1)-Dimensional Simplex.* Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2023, 12(4), 679-688.
7. **Gantmacher F.R.** *The Theory of Matrices.* Chelsea Publishing Company. 1959. P. 337.

UDK 517.977

Evasion from a single pursuer in a differential game with changing control resources

Ibragimov G [1], Ibroximjonov I [2], Inomiddinov S [3]
[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan; ibragimov.math@gmail.com
[2] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Toshkent, Uzbekistan; islombekibrohimjonov743@gmail.com
[3] Namangan State University, 160107, Namangan, Uzbekistan; sn.inomiddinov@gmail.com

This work is devoted to study an evasion game from one pursuer in a simple motion differential game when the controls of pursuer and evader are subjected to integral constraints. The control resources of players are changeable. The game is considered in $\mathbb{R}^n$ space. We construct a strategy for the evader which guarantees the possibility of the evasion. The dynamics of the players are given by the following equations:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= v, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

Where $x, y, x_0, y_0, u, v \in \mathbb{R}^n, x_0 \neq y_0$, u and v are the control parameters of pursuer and evader, respectively.

Definition 1. The measurable functions $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ are called admissible controls of the pursuer and evader, respectively, if the following integral constraints are satisfied for $t \geq 0$

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \rho^2 t, \quad \int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \sigma^2 t,$$

where $\sigma > \rho$.

Definition 2. A function $V(t, x, y, u), \quad V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, is called a strategy of the evader if the initial value problem (1) has a unique solution $(x(t), y(t))$ with $v = V(t, x, y, u)$ and an arbitrary admissible control $u = u(t)$ of the pursuer.

The behavior of the pursuer is arbitrary, which means the pursuer applies any admissible control, while the evader applies a strategy.

Definition 3. We say that evasion is possible in game (1) if there exists a strategy V of the evader such that, for any controls of pursuer, $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$.

Problem. Find a control strategy V for the evader that ensures the possibility of evasion in game (1).

It is sufficient to study the evasion game which a single evader versus one slow pursuer where $n = 2$.

We construct the following strategy for the evader:

$$\begin{aligned} &V_0 = (0, V_2(t)), \quad 0 \leq t < \tau, \\ &V(t) = (V_1(t), V_2(t)), \quad \tau \leq t < \tau', \\ &V_0(t) = (0, |u(t)|), \quad t \geq \tau. \end{aligned} \tag{2}$$

$V_1(t)$ and $V_2(t)$ functions are defined as follows

$$V_1(t) = \begin{cases} |u_1(t)| + \alpha, & x_1(\tau) \leq y_1(\tau), \\ -(|u_1(t)| + \alpha), & x_1(\tau) > y_1(\tau), \end{cases} \qquad V_2(t) = |u_2(t)| + \alpha,$$

where $0 < \alpha < \frac{\sigma - \rho}{2}$, $0 < a < ||x_0 - y_0||$, τ is the first time when $||x(t) - y(t)|| = a$ and $\tau' = \tau + \frac{2a}{\alpha}$.

We have obtained the following result for the constructed strategy for the evader.

Theorem. If the evader uses strategy (2), then evasion is possible in game (1).

References

1. **Ibragimov G.I., Ferrara M., Ruziboev M., Pansera B.A.** *Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints.* International Journal of Game Theory. 2021. https://doi.org/10.1007/s00182-021-00760-6.

2. **Ibragimov G.I., Salleh Y, Alias I.A., Pansera B.A., Ferrara M.** *Evasion from Several Pursuers in the Game with Coordinate-wise Integral Constraints.* Dynamic Games and Applications. 2022. https://doi.org/10.1007/s13235-022-00475-7.

3. **Ibragimov G.I.** *Evasion Differential Game of One Evader and Many Slow Pursuers.* Dynamic Games and Applications. 2024, 665-685. https://doi.org/10.1007/s13235-023-00501-2. *UDK 517.98*

p-adic SOS model with an external field on the Cayley tree

Rahmatullev M.M.[1], Akhmedov O.U.[2]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,Tashkent, Uzbekistan; mrahmatullaev@rambler.ru 1

[2] Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; axmedovolimxon5@gmail.com

Let $\mathbb{Q}$ be the field of rational numbers. The completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm defines the p-adic field $\mathbb{Q}_p$ (see [1]).

Let $\Gamma^k = (V, L)$ be Cayley tree (see [2]) and $\Phi = \{0, ..., m\}$. A configuration σ on $A \subset V$ is defined by the function $x \in A \to \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations on A is denoted by $\Omega_A = \Phi^A$. For simplicity, we denote $\Omega = \Omega_V$.

A formal p-adic Hamiltonian $H : \Omega \to \mathbb{Q}_p$ of the p-adic SOS model with an external field is defined by

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} | \sigma(x) - \sigma(y) |_\infty + \sum_{x \in V_n} \alpha_{\sigma(x),x}$$

where $J \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ is a coupling constant, $\alpha_x = (\alpha_{0,x}, \alpha_{1,x}, ..., \alpha_{m,x}) \in \mathbb{Q}_p^{m+1}$ such that $\alpha_{i,x} \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ $(i = \overline{0, m})$ is the external field, $\langle x, y\rangle$ stands for nearest neighbor vertices and $|\cdot|_\infty$ stands for usual absolute value.

We define a function $z : x \to z_x \in \mathbb{Q}_p^{m+1}$, $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$ and consider p-adic probability distribution $\mu_z^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_{\tilde{z}}^{(n)}(\sigma_n) = Z_{n,\tilde{z}}^{-1} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} \tilde{z}_{\sigma_{(x),x}}. \tag{2}$$

Here, $\sigma_n : x \in V_n \to \sigma_n(x)$ and $Z_{n,\tilde{z}}$ is the normalizing constant

$$Z_{n,\tilde{z}} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} \tilde{z}_{\sigma(x),x}. \tag{3}$$

We say that the p-adic probability distributions (2) are compatible if for all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\varphi \in \Omega_{W_n}} \mu_z^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_z^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{4}$$

Here $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ is the concatenation of the configurations.

Theorem 1. *The sequence of p-adic probability distributions (2) satisfy (4) if and only if for any $x \in V$ the set of quantities $z = \{\tilde{z}_x, x \in V\}$ satisfy:*

$$z_{i,x} = \alpha_{i,x} \prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|_\infty} z_{j,y} + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} z_{j,y} + 1}, \qquad i = 0, 1, ..., m-1, \tag{5}$$

here, $\theta = \exp_p(J)$, $\alpha_{i,x} = \exp_p\{\tilde{\alpha}_{i,x} - \tilde{\alpha}_{m,x}\}$ and $z_{i,x} = \alpha_{i,x} \frac{\tilde{z}_{i,x}}{\tilde{z}_{m,x}}$ for $i = 0, 1, ..., m-1$.

In this case, by the p-adic analogue of the Kolmogorov theorem, there exists a unique p-adic quasi Gibbs measure μ_z on the set Ω such that $\mu_z(\{\sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}) = \mu_z^{(n)}(\sigma_n)$ for all n and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ (see [2]).

The set of all p-adic quasi Gibbs measures associated with functions $z = \{\tilde{z}_x, x \in V\}$ is denoted by $\mathcal{QG}(H)$.

Definition 1.[3] If for some function z the measures $\mu_z^{(n)}$ satisfy the consistency condition, then there exists a unique p-adic probability measure, denoted by μ_z, since it depends on z. Such a measure μ_z is called *p-adic quasi Gibbs measure.*

Definition 2.[4] A *phase transition* is said to occur if there exist at least two different p-adic quasi Gibbs measures $\mu, \nu \in \mathcal{QG}(H)$ such that μ is bounded and ν is unbounded. In other words, two different functions s and h may be found defined on $\mathbb{N}$, for which corresponding measures μ_s and μ_h exist; one of these measures is bounded, while the other is unbounded.

In this work, we consider translation-invariant p-adic quasi Gibbs measures (TIpQGMs) for the three states p-adic SOS model with an external field on the Cayley tree of order two and we get the following results:

Theorem 2. *Let $k = 2$, $m = 2$, $\nu = 1$, $z_0 = 1$, $p > 3$ and $\mathcal{N}$ be the number of TIpQGMs for the p-adic SOS model with an external field on the Cayley tree of order two. Then the following assertions hold:*

$$\mathcal{N} = \begin{cases} 3, \ if \ p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 8) \ or \ p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 8), \\ \\ 1, \ otherwise. \end{cases}$$

Theorem 3. *For the three states p-adic SOS model with external field on the Cayley tree of order two, if $p > 3$ and $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 8)$ or $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 8)$, then a phase transition occurs.*

Literature

1. **Vladimirov V.S., Volovich I.V. and Zelenov E.V.** *p -Adic Analysis and Mathematical Physics.* World Sci. Publ., Singapore, 1994.
2. **Rozikov U.A.** *Gibbs Measures on Cayley Trees.* World Sci. Publ., Singapore, 2013.
3. **Mukhamedov F.M. and Khakimov O.N.** *On periodic Gibbs Measures of p-Adic Potts Model on a Cayley Tree.* p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 8,3, 2016, 225-235.
4. **Mukhamedov F.M.** *On dynamical systems and phase transitions for $q + 1$-state p-adic Potts model on the Cayley tree.* Math. Phys. Anal. Geom., 16, 2013, 49-87.

MSC 2020: 49N79, 49N70, 91A24

A discrete pursuit problem with Langenhop type constraints on controls

Samatov B. T.[1], Umaraliyeva N. T.[2]
[1] V.I. Romanovsky Institute of Mathematics at the Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; samatov57@gmail.com [1]
[2] Namangan State University, 160107, Namangan, Uzbekistan; umaraliyeva80@gmail.com [2]

In this paper, a discrete pursuit game with Langenhop constraints on the players' controls is considered, which was previously studied for differential pursuit games. To solve this problem, an algorithm for applying the Π-strategy is presented. According to the proposed method, the players first approach each other and eventually coincide exactly. The results obtained are verified using animation models created in the Visual $C\#$ programming language using ScottPlot.WinForms technology.

Problems statement. In space R^d, two objects perform stepwise movements. Let their movements be described by the following recurrent equations

$$P: \ x_n = x_{n-1} + u, \tag{1}$$

$$E: \ y_n = y_{n-1} + v, \tag{2}$$

respectively. Here: x_n is the location of position P in space R^d at step n, $n = 1, 2, ...$; y_n is the location of position E in space R^n at step n, $n = 1, 2, ...$; x_0 is the initial position of P; y_0 is the initial position of E and $y_0 \neq x_0$; u is a control parameter P, which is selected

as a sequence of constant vectors $u_1, u_2, ..., u_n \in R^d$ and subjected to the following total constraints

$$|u_1|^2 \le \rho_0^2,\ |u_2|^2 \le \rho_0^2 - k|u_1|^2\ , ...,\ |u_n|^2 \le \rho_0^2 - k\sum_{i=1}^{n-1}|u_i|^2,\ \rho_0 > 0, \tag{3}$$

$$|v_1|^2 \le \sigma_0^2,\ |v_2|^2 \le \sigma_0^2 - k|v_1|^2\ , ...,\ |v_n|^2 \le \sigma_0^2 - k\sum_{i=1}^{n-1}|v_i|^2,\ \sigma_0 > 0, \tag{4}$$

where $0 < k < 1$.

Discrete and differential games using the construction of parallel pursuit strategies were studied in the works [1]-[5] and in others. Here, constraints of the form (3) and (4) are a discrete analogue of the integral inequality of the Langenhop type [5]. Therefore, we will also call these constraints the Langenhop type constraints for discrete systems of the form (1)-(2). The physical meaning of the Langenhop type constraints (3) and (4) is very simple: at each step, the capabilities of the player (pursuer or evader) can decrease by some part, but not completely, depending on the previous steps and the reduction factor k.

To simplify the solution of the discrete pursuit problem, we introduce new variables $z_n = x_n - y_n$, $z_0 = x_0 - y_0$ for all $n = 1, 2, ...$ In this case, the Pursuer P strives to implement the equality $z_n = 0$ up to a certain finite number of the step N, where $n \le N$ (Discrete Pursuit Problem with Langenhop type constraint or more briefly LD-Pursuit Problem), and the Evader E strives to implement the inequality $z_n \ne 0$ for all $n = 1, 2, ...$ or avoid this meeting for as long as possible (Discrete Evasion Problem with Langenhop type constraint or more briefly LD-Evasion Problem). This is a preliminary formulation of Discrete Pursuit and Evasion Problems.

Definition We call the sequence

$$\boldsymbol{u}_n = \begin{cases} \boldsymbol{u}_n^* & \text{if } |z_{n-1}| > \ell(v_n), \\ \boldsymbol{u}_n^{**} & \text{if } |z_{n-1}| \le \ell(v_n), \end{cases}$$

Π_L-*Strategy* in the Discrete Pursuit Problem (1)-(4), where $\boldsymbol{u}_n^* = v_n - \ell(v_n)\xi_0$, $\boldsymbol{u}_n^{**} = v_n - z_{n-1}$, $\ell(v_n) = \langle v_n, \xi_0\rangle + \sqrt{\langle v_n, \xi_0\rangle^2 + (1-k)^{n-1}\delta_0}$, $\xi_0 = z_0/|z_0|$, $z_0 = x_0 - y_0$, $\delta_0 = \rho_0^2 - \sigma_0^2$, and $\langle v_n, \xi_0\rangle$ means the inner product of the vectors v_n and ξ_0 in R^d, $n = 1, 2, ...$. Further, we will call sequence $\boldsymbol{u}_n^*$ *the approach strategy*, and sequence $\boldsymbol{u}_n^{**}$ *the final* or *finishing strategy.*

Assumption *Let $\rho > \sigma$, $0 < k < 1$ in the Discrete Pursuit Problem (1)-(4) and let there exist the smallest natural number $n = N_L$ for which the inequality*

$$|z_0| \le \sqrt{p_n^2 + \delta_0 q_n^2} - p_n$$

is satisfied, where $p_n^2 = \frac{\sigma_0^2 n}{k}\left[1 - (1-k)^n\right]$ and $q_n = \frac{1-(1-k)^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{1-k}}$. Then we will call the number N_L the step that guarantees the completion of the pursuit.

Theorem *Let Assumption 1 be satisfied in the Discrete Pursuit Problem (1)-(4). Then the Pursuer, implementing the Π_L-strategy, completes the pursuit no later than at step N_L.*

References

1. **Isaacs R.** *Differential Games.* New York: John Wiley and Sons - 1965.
2. **Pshenichnii B.N.** *Simple pursuit by several objects. Cybernetics and System Analysis* - 1993, no. 12, 484–485.
3. **Azamov A.** *Osnovaniya teorii diskretnikh igr (Fundamentals of Theory of Discrete Games).* Tashkent: Niso Poligraf, 2011, (in Russian).
4. **Azamov A.A., Samatov B.T.** *The* Π*-Strategy: Analogies and Applications.* Contributions to Game Theory and Management. - 2011, 33-46.
5. **Samatov B.T., Umaraliyeva N.T., Uralova S.I.** *Differential Games with the Langenhop Type Constrains on Controls.* Lob. J. Math. - 2021, vol. 12, no. 12, 2942–2951.

UDK 517.95

Optimal control in inverse problem for fractional order pseudoparabolic equation

Yuldashev T. K.
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan
tursun.k.yuldashev@gmail.com

The theory of optimal control is widely used in solving problems of different kind. Various methods in solving optimal control problems are effectively used. There are a large number of publications on the study of the optimal control problem for the differential equations (see, for example, [1-4]).

One of the directions of the theory of optimal control of systems with distributed parameters is the development of methods for solving optimal control problems in the presence of moving sources. In optimal control problems with point moving sources, it is often necessary to take into account auxiliary elements. These elements often have concentrated parameters. The behavior of such systems is described by a set of differential equations in ordinary and partial derivatives with initial and boundary conditions. By another hand, initial and boundary value problems for parabolic and pseudoparabolic types differential and integro-differential equations became an interesting field of the theory of differential equations of mathematical physics (see, for examples [5-7]).

In this paper, we consider an inverse problem of nonlinear optimal mobile control for a fractional order nonlinear Barenblatt–Zheltov–Kochina type differential equation with a quadratic optimality criterion. The necessary optimality conditions are formulated by the maximum principle, and the input function, redefinition function and output function are calculated. So, in the domain $\Omega \equiv \left\{(t,x):\ 0<t<T,\ 0<x<1\right\}$ we consider the following fractional order equation

$$D^{\alpha,\gamma}V(t,x) - D^{\alpha,\gamma}\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} =$$

$$= \delta\left(x-\eta(t)\right) F\left(t,x,\int\limits_0^T\int\limits_0^1 Q(s,y)V(s,y)dyds, p(t)\right) \tag{1}$$

with final valued

$$V(T,x) = \varphi(x), \quad x\in[0,1] \tag{2}$$

and Dirichlet type conditions

$$V(t,0) = V(t,1) = 0, \ \ t\in[0,T], \tag{3}$$

where $F(t,x,u,p) \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \Upsilon)$ is external source function, $p(t) \in C[0,T]$ is an input function, $V(t,x) \in C(\Omega)$ is an output function, $\varphi(x)$ is the redefinition function, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0,\ \varphi(x) \in L_2[0,1],\ D^{\alpha,\gamma} = I_{0t}^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt} I_{0t}^{1-\gamma}\ (0 < \alpha \le \gamma \le 1)$ is Hilfer fractional operator, $I_{0t}^{\alpha}\psi(t),\ 0 < \alpha$ is Riemann–Liouville integral integral operator, $\delta(x - \eta(t))$ is Dirac delta function, $\int\limits_0^T \int\limits_0^1 |\, Q(t,x)\,| \, dxdt < \infty,\ \Upsilon \equiv [0, M^*],\ 0 < M^* < \infty,\ 0 < T < \infty.$

The function $\eta(t) \in C[0,T]$ describes the change in the position of a moving point source in the range from zero to 1 and is defined as the solution to the following Cauchy problem

$$\eta'(t) = \omega(t, \eta(t)),\ \ \eta(0) = \eta_0 = \text{const},$$

where $\omega(t,\eta) \in C^{0,1}(\Omega)$.

In finding redefinition function $\varphi(x)$, we use the following additional intermediate condition

$$V(t_1, x) = \psi(x), \quad 0 < t_1 < T, \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

where $\psi(x) \in L_2[0,1]$.

The inverse optimal control problem (1)-(4) contains a triple of unknown functions:

$$\big\{V(t,x) \in C(\Omega),\ \varphi(x) \in L_2[0,1],\ \ p(t) \in C[0,T]\big\}.$$

We note that for a complete definition of this triple, it is not enough to use only the conditions (2)-(4). Therefore, in this paper, we also consider the minimization of the quadratic functional of quality

$$J[p] = \int\limits_0^1 [\varphi(y) - \zeta(y)\,]^2\, dy + \alpha \int\limits_0^T p^2(t)\, dt + \beta \int\limits_0^T \eta^2(t) dt,$$

where

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \vartheta_n(x),\ \zeta_n = \int\limits_0^1 \zeta(y)\, b_n(y) dy,\ \zeta(0) = \zeta(1) = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} |\,\zeta_n\,| < \infty,\ 0 < \alpha,\ \beta = \text{const}.$$

The output function we consider as a solution to the mixed inverse problem (1)-(4).

Reference

1. **Abdullayev V. M.** Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions, Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerb. Academy of Sci., 2018, vol. 44 (2), 171–186.

2. **Aida-zade K. R., Hashimov V. A., Bagirov A. H.** On a problem of synthesis of control of power of the moving sources on heating of a rod, Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerb. Academy of Sci., 2021, vol. 47 (1), 183–196.

3. **Ashirbaev B. Y., Yuldashev T. K.** Derivation of a controllability criteria for a linear singularly perturbed discrete ssystem with small step, Lobachevskii J. Math., 2024, vol. 45 (3), 938–948.

4. **Butkovsky A. G., Pustylnikov L. M.** Theory of mobile control of systems with distributed parameters. – Moscow, Nauka, 1980. 384 p. (in Russian)

5. **Ashurov R. R., Fayziev Yu. E., Khushvaktov N. Kh.** Forward and inverse problems for the Barenblatt–Zheltov–Kochina type fractional equations, Lobachevskii J. Math., 2023, vol. 44 (7), 2563–2572.

6. **Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N.** On finitness conditions in the mechanics of continuous media. Static problems of the theory of elasticity, Prikl. Mat. Meh., 1960, vol. 24 (5), 316–322. (in Russian)
7. **Bogolyubov A. N., Malykh M. D.** On one class of nonlocal nonlinear equations of parabolic type, Zhurn. Vychisl. Matem. i Mat. Fiziki, 2011, vol. 51 (6), 1056–1063. (in Russian)

Geometrik grafdagi quvish-qochish o‘yinida $n(\Gamma)$ sonining o‘zgarishi

Abdullayeva Sh. H.
O‘zbekiston milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston
shahnozaabdullayeva2002@gmail.com

Ushbu ishda chekli geometrik grafning uchlarini ketma-ket ochish (uzish)dan hosil bo‘lgan yangi grafdagi quvish-qochish o‘yinida qochuvchini tutadigan quvuvchilarning eng kam sonining o‘zgarishiga oid masala qaralgan. Bizga Γ - geometrik graf berilgan bo‘lsin. Γ grafning uchlari to‘plami $V(\Gamma)$ bo‘lsin [4]. Ushbu grafdagi quvish-qochish o‘yinida qochuvchini tutadigan quvuv-chilarning eng kam soni $N(\Gamma)$ ga teng bo‘lsin [1, 3]. Grafning ixtiyoriy $v \in V(\Gamma)$ uchini olib, shu uchni ochib yangi Γ_v graf hosil qilaylik va Γ_v grafda $N(\Gamma_v)$ sonni topaylik. $V(\Gamma)$ to‘plamning har bir elementi uchun $N(\Gamma_v)$ mavjud va $N(\Gamma_1) = \min\{N(\Gamma_v)\}$ deb belgilaylik. Keyingi qadamda Γ_v grafning ixtiyoriy $u \in V(\Gamma_v)$ uchini olib, yangi graf hosil qilib shu grafda $N(\Gamma_{vu})$ sonlarni aniqlab $N(\Gamma_2) = \min\{N(\Gamma_{uv})\}$ deb belgilaymiz. Bu jarayonni davom ettiramiz, natijada shunday $k \in N$ topiladiki, $N(\Gamma_k) = 1$ ga teng bo‘ladi. Agar Γ graf sifatida uch o‘lchamli Yevklid fazosidagi muntazam ko‘pyoqliklar tetraedr, oktaedr, kub, dodekaedr va ikosaedrni olsak, ya’ni $\Gamma \in \{T,\ O,\ K,\ D,\ I\}$ bo‘lsin, u holda quyidagi teorema o‘rinli [2].

Teorema. Ushbu $T,\ O,\ K,\ D,\ I$ graflar uchun quyidagilar o‘rinli bo‘ladi:

$$N(T) = 2, \quad N(T_1) = 2, \quad N(T_2) = 1,$$

$$N(O) = 3, \quad N(O_1) = 2, \quad N(O_2) = 2, \quad N(O_3) = 1,$$

$$N(K) = 2, \quad N(K_1) = 2, \quad N(K_2) = 2, \quad N(K_3) = 1,$$

$$N(I) = 3, \quad N(I_1) = 2, \quad N(I_2) = 2, \quad \ldots, \quad N(I_6) = 1,$$

$$N(D) = 3, \quad N(D_1) = 2, \quad N(D_2) = 2, \quad \ldots, \quad N(D_6) = 1.$$

Adabiyotlar

1. **Азамов А.А., Ибайдуллаев Т.Т.** *Дифференциальная игра сближения-уклонения с медленными преследователями на графе ребер симплекса.* I. Математическая Теория Игр и еҷ Приложения. - 2020. - 7-23 с.
2. **Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G.** *The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron.* I. Automation and Remote Control - 2017. - 754-761 с.
3. **Bonato A., Nowakowski R. J.** *The game of cops and robbers on graphs* Student Mathematical Library, Vol. 61. American Mathematical Society, Providence. - 2019.
4. **Nowakowski R. J.** *Unsolved problems in combinatorial games. Games of no chance* Cambridge Univ. Press, Cambridge. - 2019.-125-168 с.

MSC2010:37N30

Accuracy estimation for Cauchy problems in quadratic systems using 4th order Runge-Kutta

Akhmedov O. S.[1], Muzaffarova D. B.[2]
[1,2]Andijan State University, Andijan, Uzbekistan;
[1]axmedovodiljon@gmail.com
[2]muzaffarovadilshodaxon@gmail.com

Abstract. In this thesis, the accuracy of a general (non-classical) 4th order Runge-Kutta method for solving Cauchy problems in quadratic systems is investigated. This general form, unlike the standard method, allows more flexibility.

Keywords: Cauchy problem, quadratic dynamical system, Runge-Kutta method, numerical analysis, stability analysis.

Let us consider a quadratic system of the form

$$\dot{z} = f(z), \quad z(0) = z_0, \quad z \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

where $z = (z_1, z_2, \ldots, z_d)$,

$$f_k(z) = c^k + \sum_{i=1}^{d} a_i^k z_i + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j \geq i}^{d} b_{ij}^k z_i z_k,$$

$$c^k, \quad a_i^k, \quad b_{ij}^k \in \mathbb{R}, \quad i, j, k = \overline{1, d}.$$

Assumption. Solution $z(t)$ of the system (1) exists on the given segment $[0, T]$ and does not leave the convex compact region K.

Let us use the general Runge-Kutta scheme of the fourth order of accuracy to solve (1) numerically with integrating step $h = \frac{T}{N}$ $[1-2]$:

$$z_{n+1} = z_n + b_1 k_1(z,h) + b_2 k_2(z,h) + b_3 k_3(z,h) + b_4 k_4(z,h)$$

where

$$k_1(z,h) = hf(z), \quad k_2(z,h) = hf(z + a_{21}k_1(z,h)),$$
$$k_3(z,h) = hf(z + a_{31}k_1(z,h) + a_{32}k_2(z,h)),$$
$$k_4(z,h) = hf(z + a_{41}k_1(z,h) + a_{42}k_2(z,h) + a_{43}k_3(z,h))$$

and also:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1, \;\; b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 = \frac{1}{2},$$
$$b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 = \frac{1}{3}, \;\; b_3a_{32}c_2 + b_4a_{42}c_3 + b_4a_{43}c_3 = \frac{1}{6},$$
$$b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 = \frac{1}{4}, \;\; b_3c_{32}c_2^2 + b_4a_{42}c_2^2 + b_4a_{43}c_3^2 = \frac{1}{12},$$
$$b_4a_{43}a_{32}c_2 = \frac{1}{24}$$

where

$$c_2 = a_{21}, \quad c_3 = a_{31} + a_{32}, \quad c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43},$$

$N-$is the number of division of the segment $[0, T]$.

Definition 1. The sequence of real numbers $z_1, z_2, ..., z_N$ is called a discrete solution of the Cauchy problem (1).

Definition 2. The sequence of real numbers $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_N$ is called a numerical solution of the Cauchy problem (1).

Introduce notations

$$m_0 = \max_{z\in K} |f(z)|; \quad m_1 = \max_{z\in K} ||f'(z)||; \quad m_2 = \max_{z\in K} |||f''(z)|||;$$

where $|\cdot|, ||\cdot||, |||\cdot|||-$ Euclidean norms of the vector $f(z)$, linear mapping $f'(z)$ and bilinear mapping $f''(z)$, respectively.

Note that the maximum values of vector functions $k_1(z,h), k_2(z,h), k_3(z,h)$ and $k_4(z,h)$:

$$\max_{z\in K} |k_1(z,h)| = I_1(h), \quad \max_{z\in K} |k_2(z,h)| = I_2(h), \quad \max_{z\in K} |k_3(z,h)| = I_3(h), \quad \max_{z\in K} |k_4(z,h)| = I_4(h)$$

Theorem. Let Assumption and conditions $z_n \in K, \zeta_n \in K$ hold for all $n = \overline{0,N}$. Then

$$|z_n - \zeta_n| < \frac{e^{LT}-1}{Lh}\Delta_{rd}, \qquad n = \overline{0,N}.$$

where

$$L = b_1L_1 + b_2L_2 + b_3L_3 + b_4L_4;$$

$$L_1 = m_1; \quad L_2 = (m_1 + a_{21}m_2I_1(h))(1 + a_{21}hL_1);$$

$$L_3 = (m_1 + m_2(a_{31}I_1(h) + a_{32}I_2(h))(1 + h(a_{31}L_1 + a_{32}L_2));$$

$$L_4 = (m_1 + m_2(a_{41}I_1(h) + a_{42}I_2(h) + a_{43}I_3(h))(1 + h(a_{41}L_1 + a_{42}L_2 + a_{43}L_3))$$

$\Delta_{rd}-$ calculation error with rounding at one step.

The proof of the theorem follows a similar structure to the error analysis presented in [3].

This work provides a basis for further optimization and application of general Runge-Kutta methods.

References:

1. **Butcher J. C.** *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.* Second edition Wiley. 2008.

2. **England R.** *Error estimate for Runge-Kutta type solutions of ordinary differential equation.* Computer Journal, 1969. Vol. 12, pp. 166-170.

3. **Ахмедов О.С.** *Обоснование оценки точности численного решения задачи Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка.* Uzbek Mathematical Journal, 2010. є 4. pp. 31-38.

S^3 simpleksda aniqlangan Lotka-Volterra operatorlari va epidemiologik modelining o‘zaro bog‘liqligi

Eshmamatova D. B.[1], Bozorov A. A.[2], Hakimova D. A.[3].

[1] Toshkent davlat transport universiteti, Toshkent, O‘zbekiston; 24dil@mail.ru

[2] O‘zRFA Matematika instituti, Toshkent, O‘zbekiston; bozaxror9@gmail.com

[3] Toshkent davlat transport universiteti, Toshkent, O‘zbekiston; hakimovadildora47@gmail.com

Ma'lumki, shiziqsiz dinamik tizimlar hozirda epidemiologik, ekologik va iqtisodiy masalalarni yechishda muhim o'ringa ega [1]-[2]. Taklif etilayotgan ish [3] ishning mantiqiy davomi bo'lib, aynigan kososimmetrik matritsaga ega Lotka-Volterra diskret dinamik tizimlarga asoslangan $SIVR$ modelining diskret analogining barqarorlik va strukturaviy xossalari tahlil qilingan.

Ma'lumki $(m-1)$ овГ Чlchamli simpleks deb quyidagicha aniqlanadigan ko'pyoqqa aytamiz:

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\} \tag{1}$$

Simpleks uchlarining koordinatalari $e_1(1,0,...,0)$, $e_2(0,1,...,0), ..., e_m(0,0,...,m)$ ko'rinishda bo'ladi. Aytaylik $I = \{1,2,...,m\}$ va $\alpha \in I$. e_i nuqtalarning qavariq qobig'i deb S^{m-1} ning yog'iga aytiladi va Γ_α kabi belgilanadi. Endi [3] da keltirilgan operatorni qaraylik:

$$V(x)_i = x_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right), \qquad i = 1, ..., n,$$

bu yerda $A = (a_{ij})$ – kososimmetrik matritsa, $a_{ij} = -a_{ji}$, $|a_{ij}| \leq 1$.

Uch o'lchamli simpleksda aniqlangan aynigan Lotka-Volterra operatorlarini signaturalariga ko'ra 3 guruhga ajratish mumkin. Biz bu klassifikatsiyani batafsil boshqa maqolada ko'rsatamiz.

Bu yerda quyidagi dinamik sistemani qaraymiz:

$$V_1 : \begin{cases} x_1' = x_1(1 - bx_3 + cx_4) \\ x_2' = x_2(1 + dx_3) \\ x_3' = x_3(1 + bx_1 - dx_2) \\ x_4' = x_4(1 - cx_1) \end{cases}$$

Ikki va uch o'lchamli simpleksda aniqlangan operatorlarning ba'zi hollari [3] ishda SIR va $SIRD$ diskret kompartmentar model sifatida tadqiq qilingan. Endi V_1 operatorni ikkita signaturasini aniqlab, uni tadqiq qilamiz, Buning uchun [3] ga asosan P va Q qo'zg'almas nuqtalar to'plamlarini topamiz. Avval sistema uchun $Vx = x$ tenglamani yechib, operatorlarning qo'zg'almas nuqtalar to'plamini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - bx_3 + ex_4) \\ x_2' = x_2(1 + dx_3) \\ x_3' = x_3(1 + bx_1 - dx_3) \\ x_4' = x_4(1 - cx_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \;\Rightarrow\; \Gamma_{24} = \{0;\, x_2;\; 0;\, 1 - x_2\}, \\ x_3 = x_4 = 0 \;\Rightarrow\; N\left(\frac{d}{b+d}; \frac{b}{b+d}; 0; 0\right), \\ x_1 = x_2 = 0 \;\Rightarrow\; M\left(0; 0; \frac{c}{b+c}; \frac{b}{b+c}\right) \end{cases}$$

Bu sistema uchun to'rtta signatura mavjud:

$\sigma_1 = \{+;+;+;-\}$; $\sigma_2 = \{+;+;-;-\}$ $\sigma_1 = \{-;+;+;-\}$ $\sigma_1 = \{-;+;-;-\}$.

Umumiy holda P va Q qo'zg'almas nuqtalar to'plami quyidagicha bo'ladi:

$P = \{x \in S^3 : Ax \geq 0\} = \{\Gamma_{14}, M, N\}$, $\quad Q = \{x \in S^3 : Ax \leq 0\} = \{\Gamma_{23}, M, N\}$

Lekin bu to'plamlarni har bir signatura uchun alohida topish kerak. Bu ishni batafsil boshqa maqolada ko'ramiz. Bu to'plamlar [3] ishdan ma'lumki, qo'zg'almas nuqtalardan iborat bo'ladi, ularning xarakterini aniqlaymiz. Buning uchun Yakobi matritsasining spektrini tahlil qilamiz va natijada quyidagiga ega bovГ Чlamiz:

agar spektr 1 dan katta bo'lsa, ya'ni barcha $\lambda > 1$ bovГ Чlsa qo'zg'almas nuqtalar repeller, $\lambda < 1$ bo'lsa atraktor nuqta bo'ladi [3]. Biz qarayotgan sistema uchun bu xulosalar

quyidagicha:
1. $\Gamma_{24} = \{0; x_2; 0; 1 - x_2\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 1 + cx_4;\ \lambda_4 = 1 - dx_2$. Egar nuqta.
2. M va N nuqtada Egar nuqta bo‘ladi.
Bu operatorning epidemiologik qo‘llanishi bo‘lib, uni $SIVR$ modeli sifatida ko‘rsak bo‘ladi. Bunda $SIVR$ (Susceptible-Infected-Vaccinated-Recovered) modeli infeksion kasalliklar kontekstida populyatsiya dinamikasini tavsiflovchi klassik epidemiologik modellar qatoriga kiradi. Ushbu V_1 modelda odamlar to‘rtta guruhga bo‘linadi:
kasallikka moyillar $-$ (S), kasallilni yuqtirganlar $-$ (I),
emlanganlar $-$ (V) va sog‘ayganlar $-$ (R).
Endi har bir tenglama nimani anglatishini tahlil qilamiz:
x_1 – kasallikka moyillar soni (S), x_2 – kasallangan insonlar soni (I), x_3 – emlangan insonlar soni (V), x_4 – tuzalgan insonlar soni (S) bo‘ladi.
V_2 operatorda b, c, d parametrlar esa quyidagi ma’noga ega bo‘ladi:
b $-$ yuqtirish kuchi: kasallik tez yuqtiruvchilarning virusning o‘sishiga qanday yordam berishi va virusning qanday qilib yuqtirishga sabab bo‘lishi;
c $-$ immunitetning yo‘qolish darajasi: immunitetga ega bo‘lgan shaxslar qanday qilib yana kasallik tez yuqtiruvchi bo‘lishlari mumkin; d $-$ virusning infeksiyalashuvini kuchaytirish darajasi.
Modeldagi tenglamalarning umumiy ma’nosi quyidagicha bo‘ladi:
1. $x_1^{'} = x_1(1 - bx_3 + cx_4)$ modelda kasallik tez yuqtiruvchilar soni virus ta’sirida kamayadi, immunitetga ega bo‘lganlar sonining ortishi bilan esa ko‘payadi - bu immunitetning yo‘qolishi mumkinligi bilan bog‘liq bog‘lishini anglatadi.
2. $x_2^{'} = x_2(1 + dx_3)$ esa yuqtirganlar soni virus yuklamasi (infeksion bosim) oshganda tezroq ortishini anglatadi.
3. $x_3^{'} = x_3(1 + bx_1 - dx_2)$- virus yuklamasi kasallik tez yuqtiruvchilar (yuqtirish ehtimoli mavjud bo‘lgan) individlar hisobiga ortadi, infeksiyalanganlar sonining ko‘payishi bilan esa kamayadi bu esa resurslarning tugab borayotganini anglatadi.
4. $x_4^{'} = x_4(1 - cx_1)$- immunitetga ega bo‘lganlar kasallik tez yuqtiruvchilar bilan aloqada bovlg‘lishi natijasida immunitetini yo‘qotadilar.
Xulosa: modeli to‘rt toifadagi odamlarning (kasallik tez yuqtiruvchilar, infeksiyalangan, emlangan va sog‘aygan) o‘zaro ta’sirini va emlash va sog‘ayish kabi turli omillar kasallikning tarqalishiga qanday ta‘sir qilishini tasvirlaydi. Ushbu model bizga emlash va boshqa epidimiologik tadbirlarning aholidagi kasallikning dinamikasiga ta’sirini baholash imkonini beradi.

Adabiyotlar

1. **Clark R.** *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos.* London, - 1995.
2. **Brauer F., Castillo-Chavez C.** *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London, Second Edition, - 2012.
3. **Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B., Tadzhieva M.A., Zakirov B.S.** *Some degenerate cases of discrete Lotka-Volterra dynamical systems and their applucations in epidemiology.* J. Math. Sci. (N.Y.) (2024). https://doi.org/10.1007/s10958-024-07404-6.

UDK 517.98

Uchta qo‘zg‘almas nuqtali p-adik $(1,2)$-ratsional dinamik sistemalar haqida

Eshondedayev.F.J.
Andijon davlat universiteti, Andijon, O‘zbekistan;
e-mail:feshondedayev@gmail.com

Hozirgi kunda dunyoda p-adik dinamik tizimlar nazariyasidagi asosiy masalalardan biri berilgan funksiyaga mos diskret vaqtli dinamik tizimning tortish sohasi va Zigel disklari chegaralarini aniqlashdir. Berilgan funksiyaga mos dinamik tizimning tortish sohalari, Zigel disklari va trayektoriyalarning qo‘zg‘almas nuqtalardan uzoqlashish sohalarini aniqlash dinamik tizimni tasniflashda muhim ahamiyatga ega. Bu borada, parametrlarning qo‘zg‘almas nuqtalar soni o‘zgaradigan shartlarini topish, bu shartlar asosida qo‘zg‘almas nuqtalar va ularning xarakterini aniqlash, tortuvchi qo‘zg‘almas nuqtalar uchun tortish sohasini aniqlash, betaraf qo‘zg‘almas nuqtalar uchun Zigel disklarini topish, berilgan funksiyaga nisbatan invariant to‘plamlarni topish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi [1 – 2].

Ushbu ishda $\mathbb{C}_p$ p-adik kompleks sonlar maydonini o‘ziga akslantiruvchi

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+cx+d}, a,b,c,d\in\mathbb{C}_p \tag{1}$$

ko‘rinishidagi $(1,2)$-ratsional funksiyalar uchta qo‘zg‘almas nuqtaga ega bo‘lganda ularning umumiy ko‘rinishi topilgan va bu ko‘rinishdagi dinamik sistema haqidagi natijalar keltirilgan.

Ikkita $f:\mathbb{U}\to\mathbb{U}$ va $g:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ akslantirishlar berilgan bo‘lsin, agar $h:\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ homeomorfizm ushbu $h\circ f=g\circ h$ shartni qanoatlantirsa f va g funksiyalar-topologik qo‘shma deyiladi.

Teorema 1. Ixtiyoriy uchta qo‘zg‘almas nuqtali $(1,2)$-ratsional funksiya (1) biror

$$f(x)=\frac{ax}{x^2+bx+c}, a,b,c\in\mathbb{C}_p$$

ko‘rinishidagi funksiyaga yoki

$$f(x)=\frac{ax^2+bx}{x^2+cx+d}, a,b,c,d\in\mathbb{C}_p$$

ko‘rinishidagi funksiyaga topologik qo‘shma bo‘ladi.

Endi

$$f(x)=\frac{ax}{x^2+bx+c}; ac(a-c)\neq 0; a,b,c\in\mathbb{C}_p$$

bo‘lgan holni qaraylik. Bu holda $f(x)=x$ tenglamadan $x_0=0$; $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4(a-c)}}{2}$ ga ega bo‘lamiz.

Quyidagi to‘plamni aniqlaylik

$$\mathbb{P}=\{x\in\mathbb{C}_p:\exists n\in\mathbb{N}\cup 0, f^n(x)\in\{\hat{x}_1,\hat{x}_2\}\},$$

bu yerda $\hat{x}_1,\hat{x}_2$ lar $x^2+bx+c=0$ tenglama ildizlari va $\alpha=\mid x_1-\hat{x}_1\mid$, $\beta=\mid x_2-\hat{x}_2\mid$

Teorema 2. Agar $\mid a\mid_p<\mid c\mid_p$, $\mid\hat{x}_1\mid_p<\mid x_2\mid_p$ bo‘lsa, u holda $x_0=0$ nuqta tortuvchi qo‘zg‘almas nuqta bo‘ladi va

1) Agar $\alpha<\mid\frac{c}{b}\mid_p$ va $\beta<\mid b\mid_p$ bo‘lsa, u holda:

•$A(x_0)=\mathbb{C}_p\setminus(\mathbb{P}\cup\{x_1,x_2\})$

•x_1 va x_2 nuqtalar itaruvchi qo‘zg‘almas nuqta bo‘ladi.
2) $\alpha =\mid \frac{c}{b} \mid_p$ va $\beta <\mid b \mid_p$ bo‘lsa, u holda:
•$A(x_0) = \mathbb{C}_p \backslash (\mathbb{P} \cup \mathbb{U}_\alpha(x_1) \cup \{x_2\})$.
•x_2-itaruvchi, x_1-betaraf va $\mathbb{SI}(x_1) = \mathbb{U}_\alpha(x_1)$.
3) $\alpha <\mid \frac{c}{b} \mid_p$ va $\beta =\mid b \mid_p$ bo‘lsa, u holda:
•$\mathbb{A}(x_0) = C_p \setminus (\mathbb{P} \cup \mathbb{U}_{|b|_p}(x_2) \cup \{x_1\})$
•x_1-itaruvchi va x_2-betaraf bo‘lib, $\mathbb{SI}(x_2) = \mathbb{U}_{|b|_p}(x_2)$.
4) $\alpha =\mid \frac{c}{b} \mid_p$ va $\beta =\mid b \mid_p$ bo‘lsa:
•$\mathbb{A}(x_0) = \mathbb{C}_p \setminus (\mathbb{P} \cup \mathbb{U}_{|\frac{c}{b}|_p}(x_1) \cup \mathbb{U}_{|b|}(x_2))$
•x_1 va x_2-betaraf bo‘lib, $\mathbb{SI}(x_1) = \mathbb{U}_{|\frac{c}{b}|_p}(x_1)$, $\mathbb{SI}(x_2) = \mathbb{U}_{|b|_p}(x_2)$ bo‘ladi.

Adabiyotlar

1. U.A. Rozikov, I.A. Sattarov Dynamical Systems of the p-Adic $(2,2)$-Rational Functions with Two Fixed Points. **Results in Mathematics.** 2020. V.100, N.75, p. 1-37.
2. U.A. Rozikov, I.A. Sattarov p-Adic dynamical systems of $(2,2)$-rational functions with unique fixed point. **Chaos, Solitons and Fractals.** 2017, V.105, p.260-270.

UDK 517.97

Dynamic search on the edges of the graph

Holboyev A. G.
Tashkent state pedagogical university, Tashkent, Uzbekistan;
azamatholboyev@gmail.com

There are considered the dynamic game of catching a moving point on a geometric graph G whose edges in the space $R^d, d \geq 2$ are correctable in the article. It is assumed that the graph is connected, the number of ends is $|V(G)| = n$, the number of edges is $|E(G)| = l$, the length of all edges is 1 . The game involves two players moving along the edges of the graph: a team of evaders who control the movement of $P_1, P_2, \ldots, P_m$ points and a evader who controls the movement of the point [1, 5-6]. All players have a maximum speed of 1 . Let's determine the natural number $N(G)$ [2-4]. Let $N(G)$ be the smallest of the m numbers in which the game is decided in favor of $\mathbf{P}$. The existence of $N(G)$ is self-evident that $N(G) \leq n-1$ has the following properties:
a) if $m \geq N(G)$, the game is decided in favor of the chasing team $\mathbf{P}$;
b) if $m < N(G)$, the game will be solved in favor of the dodger Q.

Now let's take a point A that doesn't belong to the graph G and connect it to an end of the graph G. As a result, a geometric graph G_1 with this $V(G) \subset V(G_1), E(G) \subset E(G_1)$ property, the number of vertices is $n+1$, the number of edges is $l+1$, and the length of all edges is equal to 1 is formed. Looking at the Pursuit-evasion game between the team of pursuers $\mathbf{P}$ and the evader Q on the edges of the generated geometric graph $G_1, m_1 = N(G_1)$ we define a natural number.

At the next stage, by connecting any end of the graph G_1 (not adjacent to point A) with end A, a geometric graph G_2 with the $V(G) \subset V(G_1) = V(G_2), E(G) \subset E(G_1) \subset E(G_2)$ property, the number of vertices is $n+1$, the number of edges is $l+2$, and the length of all edges is equal to 1 is generated. Again, we determine the $m_2 = N(G_2)$ natural number by looking at the Pursuit-evasion game on the edges of the G_2 graph as above.

Continuing this process $G_k, k = 1, 2, \ldots, n$ geometric graphs are formed, each of has this $V(G) \subset V(G_1) = V(G_2) = \ldots = V(G_k), E(G) \subset E(G_1) \subset E(G_2) \subset \ldots \subset E(G_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ property, the number of vertices is $n+1$, the number of edges is $l+k, k = 1, 2, \ldots, n$ and the length of all edges is equal to 1 . We determine the $m_k = N(G_k), k = 1.n$ natural numbers by looking at the chase-escape game on the edges of these graphs. As a result, a set of n numbers consisting of $m_1, m_2, \ldots, m_n$ natural numbers is formed in the game with the participation of the pursuer and the evader on the edges of each $G_1, G_2, \ldots, G_n$ geometric graphs. Let's mark this set of numbers $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$.

Now let's study the properties of the set M. Properties of M given G and generated $G_1, G_2, \ldots, G_n$ depends on the geometric graphs and the game with the participation of the Pursuer Pursuer pursuer and the evader considered in these graphs.

Property 1. If G is a finite tree graph, then $M = \{1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n-1}\}$ is. Here $n = |V(G)|$ natural number is the number of vertices of the graph G.

Property 2. If G is a finite geometric graph with a cycle, then $\min\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} = 2$ is. Here $n = V(G)|$.

The following results follow from the above 2 properties.

Result 1. If G is $N(G) = m$ in a finite geometric graph, then $m_1 = m$.

Result 2. If G is $N(G) = m$ in a finite geometric graph, then $m_n = 2, m_1 = m$.

Property 3. If $N(G) = m$ in a finite geometric graph G, then $\max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \leq m + 1$.

Above we have studied some properties of the set M and the results arising from them. Now let's look at the vibration of the set to study other properties of the set M. For this purpose, we determine the relation $\omega_i = m_i - m_{i-1}, m_i \in M, i = 1, 2, \ldots, n, m_0 = m$ between the elements of the set M and create the set $\omega M = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

For a deeper study of the M set, we will look at the properties of the $\omega M = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ set.

Property 4. In the finite geometric graph G, the elements of the set $\omega M = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ consist of $-1, 0, 1$ numbers.

Theorem 1. If $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ for such $m_{i-1} > m_i, m_i \in M$, then $m_i \geq m_{i+1} \geq \ldots \geq m_n$.

Result 3. In a finite geometric graph G, the number of elements of the set $\omega M = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ equal to 1 is at most one.

Theorem 2. In a graph with a finite geometric cycle G, the number of elements of the set $\omega M = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ equal to -1 is equal to the value of $\max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} - \min\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$.

References

1. **Азамов А.А., Ибайдуллаев Т.Т.** *Дифференциальная игра сближенияуклонения с медленными преследователями на графе ребер симплекса. I.* Математическая Теория Игр и еч Приложения, (12) 4, 2020. стр. 7-23.

2. **Азамов А.А., Кучкаров, А.Ш., Холбоев А.Г.** *Игра преследованияубегания на реберном остове правильных многогранников III.* Математическая Теория Игр и еч Приложения, (11) 4, 2019. С. 5-23.

3. **Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G.** *The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I.* Automation and Remote Control, (78) 4, 2017. pp. 754-761.
4. **Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G.** *The pursuit-evasion game on the 1 -skeleton graph of regular polyhedron. II.* Automation and Remote Control, (80) 1, 2019. pp. 164-170.
5. **Nowakowski R. J.** *Unsolved problems in combinatorial games.* Games of no chance, 5, pp. 125-168, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 70, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019.
6. **Bonato A., Nowakowski R.J.** *The game of cops and robbers on graphs.* Student Mathematical Library, Vol. 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

MSC 49N70, 49N79, 91A24

Π-strategy in a differential game with integral and linear constraints on controls

Juraev B. I.[1], Uraimxudjaeva R. O.[1], Juraeva D. T.[1]
[1]Andijon State University, Andijon, Uzbekistan; jbahodirjon@bk.ru

Consider a differential game of two players. Let a controlled player P (the pursuer) follow another controlled player E (the evader) in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. Suppose that the positions of the players P and E are described by x and y respectively in $\mathbb{R}^n$, and the players' movements are based on the following differential equations with initial conditions

$$P: \ \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E: \ \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0 \tag{2}$$

correspondingly, where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0 and y_0 are the initial states of the objects and it is presumed that $x_0 \neq y_0$; u and v are the velocity controls which function as parameters of equations (1) and (2). We regard the control parameters u and v as measurable functions $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, respectively.

On the control parameter u, we impose the constraint [3]

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \frac{\rho_1^2}{2k} \left(1 - e^{-2kt}\right) + \rho_0^2,$$

where ρ_0, ρ_1 and k are positive numbers. We denote by U_I the set of all measurable functions $u(\cdot)$ such that satisfy the integral constraint.

Similarly, on the control parameter v, we impose the constraint [2]

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \sigma_1^2 t + \sigma_0^2,$$

where $\sigma_0 \geq 0$, $\sigma_1 \geq 0$, are positive numbers. We denote by V_L the set of all measurable functions $v(\cdot)$ such that satisfy the linear constraint.

Definition 1. The functions $u(\cdot) = (u_1(\cdot), ..., u_n(\cdot))$ and $v(\cdot) = (v_1(\cdot), ..., v_n(\cdot))$ are said to be *admissible control functions* of pursuer and evader, respectively if (1) and (2) are satisfied for $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ correspondingly.

Definition 2. For the pair $(x_0, u(\cdot))$, $u(\cdot) \in U_I$, the solution of equation (1)

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds$$

is called *a trajectory of the Pursuer* in the time interval $[0, +\infty)$.

Definition 3. For the pair $(y_0, v(\cdot))$, $v(\cdot) \in V_L$ the solution of equation (2)

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)ds$$

is called *a trajectory of the Evader* in the time interval $[0, +\infty)$.

The principal aim of pursuer is to capture evader, i.e. to reach the equality $x(t) = y(t)$ (the Pursuit game), and meanwhile evader struggles not to encounter pursuer (the Evasion game), viz., to keep on the relation $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$, and in the opposite case, to delay the time of encounter as long as possible. This is the preliminary statement of the pursuit-evasion problems for the considered game.

Definition 4. We say the function [1,3]

$$\boldsymbol{u}_{IL}(t, v) = v - \lambda_{IL}(t, v)\xi_0$$

the Π_{IL}*-strategy* in the IL–Game of Pursuit, where

$$\lambda_{IL}(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \frac{\delta_0}{2|z_0|} + \sqrt{\left(\langle v, \xi_0 \rangle + \frac{\delta_0}{2|z_0|}\right)^2 + \rho_1^2 e^{-2kt} - \sigma_1^2},$$

$\delta_0 = \rho_0^2 - \sigma_0^2$, $\xi_0 = z_0/|z_0|$, $z_0 = x_0 - y_0$, and $\langle v, \xi_0 \rangle$ means the inner product of the vectors v and ξ_0 in $\mathbb{R}^n$.

It is worth noting that the function $\lambda_{IL}(t, v)$ is usually called *the resolving function.*

Proposition.

a) If $\rho_0 > \sigma_0, \rho_1 > \sigma_1$ and $d_2 \geq |z_0|$ then for any pair $(t, v) : \mathbb{R}_+ \times V_L$, where

$$d_2 = \sqrt{\frac{\rho_0^2 - \sigma_0^2}{k} ln\frac{\rho_1}{\sigma_1} + \left(\frac{\sigma_1}{k} ln\frac{\rho_1}{\sigma_1}\right)^2} - \frac{\sigma_1}{k} ln\frac{\rho_1}{\sigma_1}.$$

b) the function $\lambda_{I^2_{\text{exp}}}(t, v)$ is defined and non-negative.

Lemma. Let $\rho_0 > \sigma_0,\ \rho_1 > \sigma_1$ and $d_2 \geq |z_0|$ be valid. Then the equation

$$\sqrt{t^2\rho_1^2 e^{-2kt} + \delta_0 t} - \sigma_1 t = |z_0| \tag{3}$$

has at least one positive root in respect to t, $t \geq 0$.

In the IL-Game of Pursuit, we call the smallest positive root of (3) *the guaranteed capture time* and denote it by T_{IL}.

Theorem. Let $\rho_0 > \sigma_0,\ \rho_1 > \sigma_1$ and $d_2 \geq |z_0|$. Then Π_{IL}-strategy guarantees realization of capture on the time interval $[0, T_{IL}]$.

References

1. **Azamov A.A.** *On the quality problem for simple pursuit games with constraint*, Serdica Bulgariacae math. Publ.Sofia. Vol.12, Issue 1, pp. 38-43 (1986).

2. **Azamov A.A., Samatov B.T.** *The* П*-Strategy: Analogies and Applications*, The Fourth International Conference Game Theory and Management. St. Petersburg 4. pp. 33-47 (2010).

2. **Samatov B.T., Horilov M.A., Juraev B.I.** П*-strategy for a differential game of pursuit with integral constraints of a generalized type*, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki. Vol. 33, Issue 2, pp. 293Ц311 (2023).

Aynigan matritsaga ega uch o‘lchamli simpleksda aniqlangan Lotka – Volterra akslantirishlarining traektoriyalari dinamikasi

Karimov D.I.
Toshkent xalqaro moliyaviy boshqaruv va texnologiyalar universiteti,
Toshkent, O‘zbekiston; karimov.dilshod98@gmail.com

Lotka-Volterra tenglamalari ekologiya, genetika va iqtisodiyot kabi sohalarda raqobat qiluvchi tizimlarning dinamikasini tadqiqot qilishda asosiy vosita hisoblanadi. Ushbu ishda biz Lotka-Volterra tipidagi kvadratik stoxastik operatorlarning simpleksda ko‘rsatilgan dinamikasini o‘rganamiz.

Simpleks yoki m- o‘lchamli simpleks R^m fazoda yotmagan $m+1$ nuqtalarni (uchlarni) tutashtirishdan hosil bo‘lgan geometrik figuraga aytiladi va quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}.$$

a) $m = 2$ bo‘lganda ko‘pyoq nurdan iborat bo‘ladi,
b) $m = 3$ bo‘lganda teng tomonli uchburchak,
c) $m = 4$ bo‘lganda teng tomonli tetraedr shaklida ifodalanadi.

Tasdiq 1. (G‘anixodjayev R.N.) Lotka-Volterra tipidagi kvadratik staxostik operatorlari ko‘rinishini quyidagicha yozish mumkin:

$$x'_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i.) \tag{1}$$

bu yerda A=$\{a_{ki}\}$ – kososimmetrik matritsa bo‘lib, ya’ni $a_{ki} = -a_{ik}$ va uning elementlari quyidagi shartni qanoatlantiradi

$$|a_{ki}| \leq 1.$$

Agar kososimmetrik matritsaning barcha juft tartibli bosh minorlari noldan farqli bo‘lsa, u holda u umumiy holatdagi matritsa deyiladi.

Agar kososimmetrik matrisa umumiy holatda bo‘lsa, u holda unga mos Lotka-Volterra akslantirishi xam umumiy holatdagi operator deyiladi.

Lotka–Volterra tipidagi kvadratik staxostik operatorlarning turnirlar bilan bogÇliqligi

Har bir

$$x'_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i), \quad a_{ki} = -a_{ik}, \mid a_{ki} \mid \leq 1 \qquad i = \overline{1,n}$$

Lotka - Volterra tipidagi kvadratik staxostik operatorga, agar u umumiy holda bo‘lsa, to‘la orientilangan graf, ya’ni turnirni mos qo‘yishimiz mumkin: $a_{ki} \neq 0, k \neq i$ deb m qirralariga yo‘nalish kiritamiz: k va i uchlarini birlashtiruvchi $a_{ik} < 0$ da k i ga yo‘nalsin,$a_{ik} > 0$ da esa i dan k ga yo‘nalsin. $a_{ki} = -a_{ik}, \mid a_{ki} \mid \neq 0$ shartlari muntazam m yoq qirralariga yo‘nalish beradi. Yo‘nalishlar bilan olingan muntazam m yoq V ga mos turnir deyiladi va T_m orqali belgilanadi.

Ta’rif 1. Aytaylik

$$X = \{x \in S^{m-1} : Vx = x\}$$

X – Lotka-Volterra akslantirshning qo‘zg‘almas nuqtalar to‘plami bo‘lsin. Bunda S^{m-1}-qavariq kompakt to‘plam bo‘lganligi sababli, Boll-Brauer teoremasiga asosan $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ operatorning qo‘zg‘almas nuqtalar to‘plami bo‘sh emas.

Teorema 1. Aytaylik A-kososimmetrik matritsa bo‘lsin

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0 \quad \text{va} \quad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\} \qquad (*)$$

to‘plamlar bo‘sh bo‘lmagan qavariq ko‘pyoqdir.

F. Hararini momografiyasiga muvofiq $m = 4$ bo‘lganda jami – 42 ta qisman orientirlangan graf mavjud. Quyidagi ba’zi hollarini keltiramiz.

m=4 uchun dinamik sistemaning umumiy shakli quyidagicha bo‘ladi: $V : S^3 \to S^3$

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) \\ x_2' = x_2(1 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4) \\ x_3' = x_3(1 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4) \\ x_4' = x_4(1 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3) \end{cases}$$

bunda a_{ki} kososimmetrik matritsaning elementlari bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantiradi

$$a_{ki} = -a_{ik} \qquad |a_{ki}| \leq 1$$

Lemma 1. Agar Lotka-Volterra asklantirishi quyidagi ko‘rinishida berilgan bo‘lsa,

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + x_3 + x_4) \\ x_2' = x_2(1 + x_3) \\ x_3' = x_3(1 - x_1 - x_2) \\ x_4' = x_4(1 - x_1) \end{cases}$$

u holda

$$P = \{x \in S^3 \quad Ax \geq 0\} = \{\Gamma_{34}\} = \{0, 0, \alpha, 1 - \alpha\};$$
$$Q = \{x \in S^3 \quad Ax \leq 0\} = \{\Gamma_{12}\} = \{\alpha, 1 - \alpha, 0, 0\}$$

ga teng. Bu yerda $\alpha \in [0; 1]$.

Izoh. Bunda P to‘plamga tegishli nuqtalar - repeller, chunki $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1 + \alpha$

Q to‘plamga tegishli nuqtalar – attraktor bo‘ladi.

Adabiyotlar

1. **К.А.Курганов, Ф.А.Юсупов** "Новые результаты математики и их приложения".14-15-мая 2018 г. Самарканд-2018. Ст. 154-155.

2. **Ганиходжаев Р. Н.** Карта неподвижных точек и функции Ляпуно-ва для одного класса дисткретных динамических систем // Мат. заметки. 1994. 56. С. 1125-1131. 34

3. **К.А.Курганов., Ганиходжаев Р.Н.** Динамика вольтерра стохасти-ческих операторов четвертой степени Республиканская научная конференция.Ташкент.2013. 19-21 сентябрь.77-79 стр.

4. **Ганиходжаев Р. Н.** Квадратичные стохастические операторы, функ-ция Ляпунова и турниры// Мат.Сб.1992.83, э 8. Ст. 119-140

5. **Харари Ф., Палмер Э.** Перечисление графов. // Монография. – М. – Мир, 1977. – стр. 324.

6. **Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, James A.** Yorke Chaos: An Introduction to Dynamical Systems.Berlin, (2000).

UDK 517.913

Analysis of formal stability in resonant Hamiltonian systems

Khaydarov Z. Kh.
Samarkand State University named after Sh.Rashidov, 140103 Samarkand, Uzbekistan; zafarxx@gmail.com

Abstract. A method for studying formal stability of equilibrium points in multiparameter Hamiltonian systems with three degrees of freedom is proposed in the case of resonances present. We detail a technique for the symbolic computation of resonance conditions, employing computer algebra and power geometry to represent the resonant variety as a rational algebraic curve and provide its polynomial parametrization.

Keywords: Hamiltonian system, equilibrium state, normal form, formal stability, resonance condition, elimination ideal.

Resonances are fundamental to the behavior of oscillatory systems, significantly impacting their dynamics and stability. This study investigates the formal stability analysis within a multiparameter Hamiltonian framework possessing three degrees of freedom, with particular emphasis on the calculation of resonance conditions. The employment of computer algebra alongside power geometry facilitates the symbolic representation of these conditions in the form of rational algebraic curves.

We consider an autonomous Hamiltonian system with an analytic function $\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ and with n degrees of freedom (DOF)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \tag{1}$$

whose *stationary point* (SP) coincides with the origin $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0$.

Here we focus on studying stability in the case of resonances of the third and fourth orders of multiplicity 1. Earlier in [1] a schematic description of a method was proposed to study the formal stability of the stationary point of a Hamiltonian system. The drawback of this approach is that it does not take into account multi-frequency resonances of order three or more, which appear in systems with more than two degrees of freedom. This drawback was corrected in papers [2,3], where a method for computing the parametric representation of a resonant variety of an arbitrary 3-frequency resonance of multiplicity 1 was proposed. However, in those papers, the problem of stability in the presence of such a resonance was left aside. Here we correct for this issue.

The principal characteristics can be outlined as follows.

Definition of a resonant variety for a specific resonant vector using the characteristic polynomial coefficients of the linear Hamiltonian system.

Utilization of computer algebra and power geometry techniques to obtain polynomial parametrization of the resonant variety.

Application of these results to investigate the formal stability regions of equilibrium in a Hamiltonian multiparameter system, including the presentation of a non-trivial example.

If the Hamilton function $\gamma(\boldsymbol{\zeta})$ is analytic at this point, then it expands into a convergent power series

$$\gamma(\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{P}) = \sum \gamma_{\mathbf{pq}}(\mathbf{P}) \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}, \tag{2}$$

where $\mathbf{p}, \ \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geqslant 0$, $\gamma_{\mathbf{pq}}(\mathbf{P})$ are constant coefficients that can depend smoothly on a parameter vector $\mathbf{P} \in \Pi$.

Here we describe a method for investigating formal stability of the SP for a multiparameter Hamiltonian system with 3 degrees of freedom. Consider a Hamiltonian system in the vicinity of the SP for which the following conditions are satisfied:

the number of degrees of freedom of the system is greater than two;

the quadratic form γ_2 in expansion (2) is nondegenerate and is not definite;

the Hamiltonian function γ smoothly depends of the vector of parameters $\mathbf{P}$.

Theorem.[4]If under the condition of Theorem of Formal Stability[2] in $\mathbb{R}^3$ the intersection of the plane $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q} \rangle = 0$ and the cone $\langle C\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$ either does not belong to $\mathcal{Q}$, or belongs to $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^3_+$, but does not contain the integral vector $\mathbf{q}$, then the stationary point is formally stable.

To examine the formal stability of a stationary point of a Hamiltonian system (1), we should:

- find in the space of parameters Π the stability set Σ of the linear part of system (1)
- find such domains, in which the quadratic form $\gamma_2(\mathbf{z})$ is not sign definite
- find parts S_k in these domains that do not contain strong resonances
- normalize the Hamiltonian in each of these parts S_k up to order four, and then
- apply Formal Stability Theorem[2]

The border of the stability set Σ in generic case is the resonant variety $\mathcal{R}_3(1,1,0)$. For $n = 3$ the borders between the parts S_k are defined by the following resonant varieties:

- $\mathcal{R}_3^{(2,1,0)}$, $\mathcal{R}_3^{(3,1,0)}$ corresponding two-frequency resonances and
- $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$, $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$ corresponding three-frequency resonances

The implicit and parametric representation of all resonant varieties is given in[2].

The application of the method would be demonstrated on an nontrivial example in the lecture.

References

1. **Bruno A. D., Batkhin A. B.** *Survey of eight modern methods of Hamiltonian mechanics*, Axioms 10 (2021) 1–32. doi:10.3390/axioms10040293.

2. **Batkhin A., Khaydarov Z.** *Resonances and Formal Stability Investigation in Hamiltonian Systems*, Mathematics in Computer Science 18 (2024) 22. URL: https://doi.org/10.1007/ s11786-024-00596-9. doi:10.1007/s11786-024-00596-9.

3. **Batkhin A. B., Khaydarov Z. K.** *Calculation of a strong resonance condition in a Hamiltonian system*, Computational Mathematics and Mathematical Physics 63 (2023) 687–703. doi:10. 1134/S0965542523050068.

UDK 512.554.38

Local $\frac{1}{2}$-derivations of n-dimensional naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra

Madrakhimov T. R.[1], Vaisova N. Z.[2], Yusupov B. B.[2,3]

[1] Department of Mathematical analysis, Urgench State University, Urgench, Uzbekistan;
temurmadraximov1995@gmail.com

[2] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
vasiova_nafosat@mail.ru

[3] Department of Algebra and Mathematical engineering, Urgench State University;
baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

Nowadays, local and 2-local operators have become popular for some non-associative algebras such as the Lie, Jordan, and Leibniz algebras. The notion of local derivations were introduced in 1990 by Kadison [3] and Larson, Sourour [5].

Investigation of local and 2-local δ-derivations on Lie algebras was initiated in [4] by A.Khu-doyberdiyev and B.Yusupov. Namely, in [4] we introduced the notion of local and 2-local δ-derivations and described local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivations of finite-dimensional solvable Lie algebras with filiform, Heisenberg, abelian nilradicals. Moreover, we gave the description of local $\frac{1}{2}$-derivation of oscillator Lie algebras, conformal perfect Lie algebras, and Schrödinger algebras. B.Yusupov, V.Vaisova and T.Madrakhimov proved similar results concerning local $\frac{1}{2}$-derivations of naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras of type I in their recent paper [6]. They proved that quasi-filiform Leibniz algebras of type I, as a rule, admit local $\frac{1}{2}$-derivations which are not $\frac{1}{2}$-derivations.

Definition 1. Let $(\mathfrak{L}, [-,-])$ be an algebra with a multiplication $[-,-]$. A linear map φ is called a δ-derivation if it satisfies

$$\varphi[x,y] = \delta\big([\varphi(x),y] + [x,\varphi(y)]\big),$$

where δ from the ground field $\mathbb{F}$.

Note that 1-derivation is a usual derivation and (-1)-derivation is called an anti-derivation. If φ_1 and φ_2 are δ_1 and δ_2-derivations, respectively, then their commutator $[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1$ is a $\delta_1\delta_2$-derivation. The set of all δ-derivations, for the fixed δ, we denote by $\mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$. For the Lie algebras, the notion of anti-derivations coincides with the notion of reverse derivations, which was studied by Herstein in [2]. Note that the main example of $\frac{1}{2}$-derivations is the multiplication by an element from the ground field, i.e., $\varphi(x) = \lambda x$ for all $x \in \mathfrak{L}$. Such kind of $\frac{1}{2}$-derivations are called trivial $\frac{1}{2}$-derivations.

Definition 2. A linear map Δ is called a local δ-derivation, if for any $x \in \mathfrak{L}$, there exists a δ-derivation $\varphi_x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = \varphi_x(x)$. The set of all local δ-derivations on $\mathfrak{L}$ we denote by $\mathrm{LocDer}_\delta(\mathfrak{L})$.

In this work, we focus on investigating local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivations. Since any $\frac{1}{2}$-derivation is a local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivations, we are interesting on local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivation, which is not a $\frac{1}{2}$-derivation. Such local (resp. 2-local) $\frac{1}{2}$-derivations we call non-trivial local (resp. 2-local) $\frac{1}{2}$-derivations.

Definition 3. A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is called quasi-filiform if $\mathcal{L}^{n-2} \neq \{0\}$ and $\mathcal{L}^{n-1} = \{0\}$, where $n = \dim \mathcal{L}$.

Given an n-dimensional nilpotent Leibniz algebra $\mathcal{L}$ such that $\mathcal{L}^{s-1} \neq \{0\}$ and $\mathcal{L}^s = \{0\}$, put $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^i/\mathcal{L}^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, and $gr(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{s-1}$. Due to

$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \mathcal{L}_{i+j}$ we obtain the graded algebra $gr(\mathcal{L})$. If $gr(\mathcal{L})$ and $\mathcal{L}$ are isomorphic, $gr(\mathcal{L}) \cong \mathcal{L}$, we say that $\mathcal{L}$ is *naturally graded*.

Let x be a nilpotent element of the set $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^2$. For the nilpotent operator of right multiplication $\mathcal{R}_x$ we define a decreasing sequence $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, where $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, which consists of the dimensions of Jordan blocks of the operator $\mathcal{R}_x$. On the set of such sequences we consider the lexicographic order, that is, $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k) \leq C(y) = (m_1, m_2, \dots, m_t)$ iff there exists $i \in \mathbb{N}$ such that $n_j = m_j$ for any $j < i$ and $n_i < m_i$.

Definition 4. The sequence $C(\mathcal{L}) = \max\limits_{x \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^2} C(x)$ is called the characteristic sequence of the algebra $\mathcal{L}$.

The study of naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra of corresponding type from Theorems 1 and 2 can be simplified, as follows (see [1]):

Proposition 1. Let L be a naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra, then it is isomorphic to one of the algebras from the following non isomorphic families

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + \alpha e_2, & [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n, \quad [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma): \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_3] = -e_4 + \beta e_2, & [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-1, \\ [e_3, e_3] = \gamma e_2, & [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i \alpha e_n, & 3 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

where $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ is a basis of the algebra; moreover, in the algebra $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ if n is odd, then $\alpha \in \{0, 1\}$, if n is even, then $\alpha = 0$.

Remark 1. The algebras given in Theorem 1 and 2 under the conditions of Proposition 1 are of the form:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{L}(0,\beta,0) := \mathcal{L}_n^{1,\beta}; & \mathcal{L}(0,\beta,1) := \mathcal{L}_n^{2,\beta}; & \mathcal{L}(1,\beta,0) := \mathcal{L}_n^{3,\beta}; & \mathcal{L}(1,0,\gamma) := \mathcal{L}_n^{4,\gamma}; \\ \mathcal{L}(1,\beta,\gamma) := \mathcal{L}_n^{5,\beta,\gamma}; & \mathcal{G}(0,0,0) := \mathcal{L}_n^1; & \mathcal{G}(0,1,0) := \mathcal{L}_n^2; & \mathcal{G}(0,0,1) := \mathcal{L}_n^3; \\ \mathcal{G}(0,2,1) := \mathcal{L}_n^4; & \mathcal{G}(1,0,0) := \mathcal{L}_n^5; & \mathcal{G}(1,\beta,0) := \mathcal{L}_n^{6,\beta}; & \mathcal{G}(1,0,\gamma) := \mathcal{L}_n^{7,\gamma}; \\ \mathcal{G}(1,\beta,\gamma) := \mathcal{L}_n^{8,\beta,\gamma}. & & & \end{array}$$

The following theorem is the main result of this note.

Theorem 1. The naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra admit local $\frac{1}{2}$-derivations which are not $\frac{1}{2}$-derivations.

Reference

1. **Camacho L. M., Gómez J. R., González A. J., Omirov B. A.** *Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras.* Journal of Symbolic Computation, 44(5), 2010, pp.527-539.

2. **Herstein I.** *Jordan derivations of prime rings.* Proceedings of the American Mathematical Society, 8 (1957), p. 1104–1110.

3. **Kadison R.** *Local derivations.* Journal of Algebra, 130 (1990), p. 494–509.

4. **Khudoyberdiyev A. Kh., Yusupov B. B.** *Local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivation on finite-dimensional Lie algebras.* Results in Mathematics, **79**, 210 (2024).

5. **Larson D., Sourour A.** *Local derivations and local automorphisms of $B(X)$.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 51 (1990), p. 187–194.
6. **Yusupov B., Vaisova N. and Madrakhimov T.** *Local $\frac{1}{2}$-derivation on of n-dimensional naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra of type I.* AIP Conference Proceedings, 3147(1) (2024), 020008. *UDK 517.977*

Optimal pursuit differential game problem described by infinite system of ternary differential equations

Muxammadjonov A. A.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan; akbarshohmuhammadjonov6764@gmail.com

This work is devoted to study optimal pursuit differential game problem for an infinite system of ternary differential equations in Hilbert space l_2. The players' control functions are subjected to integral constraints. In papers [1,2,3], differential game problem for an infinite system of binary differential equations and optimal control problem for infinite system of ternary differential equations were studied. While, in this paper, the equation for the optimal pursuit time in the given game is found.

Let the players' dynamics be given by the following infinite system of ternary differential equations in the Hilbert space l_2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\lambda_i x_i + y_i + w_{i1}, \quad x_i(0) = x_{i0}, \\ \dot{y}_i &= -\lambda_i y_i + z_i + w_{i2}, \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, ..., \\ \dot{z}_i &= -\lambda_i z_i + w_{i3}, \qquad z_i(0) = z_{i0}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, ...$, are given real numbers, $\omega = (\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, ...)$ is the control parameter.

Let μ, ρ_0 and σ_0 be positive numbers. It is assumed that $\rho_0 > \sigma_0$.

Definition 1. We call the function

$$w(\cdot) = (w_{11}(\cdot), w_{12}(\cdot), w_{13}(\cdot), w_{21}(\cdot), w_{22}(\cdot), w_{23}(\cdot) \ldots), \quad w : [0, T] \to l_2,$$

an admissible control if its coordinates $w_{k1}(t), w_{k2}(t), w_{k3}(t)$, $0 \leq t \leq T$, $k = 1, 2, \ldots$, are measurable and satisfy the following constraint

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(w_{k1}^2(s) + w_{k2}^2(s) + w_{k3}^2(s) \right) ds \leq \mu^2.$$

We let $S(\mu)$ denote the set of all admissible controls.

Definition 2. We call the functions $u(\cdot) \in S(\rho_0)$ and $v(\cdot) \in S(\sigma_0)$ admissible controls of pursuer and evader, respectively.

Definition 3. A function

$$U(t, v) = (U_1(t, v), U_2(t, v), U_3(t, v), \ldots),$$

$$U_k(t, v) = (U_{k1}(t, v), U_{k2}(t, v)), U_{k3}(t, v), \quad U : [0, T] \times l_2 \to l_2,$$

with the components U_k of the form $U_k(t,v) = v_k(t) + w_k(t)$ with $v_k(t) = (v_{k1}(t), v_{k2}(t), v_{k3}(t))$ and $w_k(t) = (w_{k1}(t), w_{k2}(t), w_{k3}(t))$ that satisfy, for any $v(\cdot) \in S(\sigma_0)$, the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |U_k(t, v(t))|^2 \, dt \le \rho_0^2, \quad |U_k(t,v(t))|^2 = U_{k1}^2(t,v(t)) + U_{k2}^2(t,v(t)) + U_{k3}^2(t,v(t)),$$

is called a strategy of the pursuer, where $w(\cdot) = (w_1(\cdot), w_2(\cdot), \ldots) \in S(\rho_0 - \sigma_0)$.

Definition 4. We say that the strategy $U = U(t,v)$ of the pursuer guarantees completion of pursuit in game (1) starting from the initial state η_0 for the time $\tau(U)$, if $\eta(t') = 0$ at some $t' \in [0, \tau(U)]$ for the solution $\eta(t)$ of initial value problem generated by $u(t) = U(t, v(t))$ and any admissible control of evader $v(t)$, $0 \le t \le \tau(U)$. Also, the number $\tau(U)$ is called a guaranteed pursuit time.

Obviously, any number τ', $\tau' \ge \tau(U)$, can also be considered as a guaranteed pursuit time corresponding to the same strategy U. Let $\tau^*(U)$ denote the least upper bound of the numbers $\tau(U)$.

The strategy U^* is called the optimal strategy for the pursuer if $\tau^*(U^*) = \inf\limits_U \tau^*(U)$ and the number $\tau^* = \tau^*(U^*)$ is called the minimax payoff of the game.

Definition 5. We call the function

$$(t, \eta, \rho, \sigma, u) \to V(t, \eta, \rho, \sigma, u), \quad V : \mathbb{R} \times l_2 \times [0, \rho_0] \times [0, \sigma_0] \times l_2 \to l_2,$$

the evader's strategy, if, for any pursuer's admissible control $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, the system with $v = 0$ if $0 \le t \le \varepsilon$, and $v = V(t, \eta(t), \rho(t), \sigma(t), u(t-\varepsilon))$ if $t > \varepsilon$, where ε is a positive number, has a unique solution

$$\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \ldots), \quad i = 1, 2, ...,$$

and along this solution the following inequality holds

$$\int_{\varepsilon}^{T} ||V(t, \eta(t), \rho(t), \sigma(t), u(t-\varepsilon))||^2 dt \le \sigma_0^2.$$

Definition 6. We say that the strategy V of evader guarantees evasion on the interval $[0, \tau(V))$ from the initial state $\eta_0 \in l_2$ if $\eta(t) \ne 0, t \in [0, \tau(V))$ for any pursuer's admissible control $u(t)$, $t \in [0, T]$. We call the number $\tau(V)$ a guaranteed evasion time.

Let $\tau_*(V)$ be the greatest lower bound of the numbers $\tau(V)$ that correspond to the strategy V. If $\tau_*(V^*) = \sup\limits_V \tau_*(V)$, we call the strategy V^* the optimal strategy of the evader, and we call the number $\tau_* = \tau_*(V^*)$ the maximin payoff of the game. If $\tau^*(U^*) = \tau_*(V^*)$, this number is called the optimal pursuit time.

Teorema The number θ that satisfies the equation $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_{i0}^* W_i^{-1}(t) \eta_{i0} = (\rho_0 - \sigma_0)^2$, is the optimal pursuit time in game (1). Where η_{i0}^* is the transpose of η_{i0}, $W_i^{-1}(t)$ is the inverse matrix of $W_i(t) = \int\limits_0^t e^{-A_i s} e^{-A_i^* s} ds$.

References

1. **Ibragimov G.I., Qo'shaqov X.Sh., Muxammadjonov A.A.** *Optimal Pursuit Differential Game Problem for an Infinite System of Binary Differential*

Equations. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. 45(3): 1131–1144. https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080224600821.
2. **Ibragimov G.I., Qo'shaqov H.Sh., Turgunov I., Alias I.A.** *The Solution of an Infinite System of Ternary Differential Equations.* Mathematical Modeling and Computing. 2022. 9(4): 833–841. DOI: 10.23939/mmc2022.04.833.
3. **Ibragimov G.I.** *Optimal pursuit time for a differential game in the Hilbert space l_2.* ScienceAsia. 2013. 39S: 25–30.

UDK 519.624.3

Dastlab integrallash metodini chegaraviy masalani yechishga tadbiqi

Normurodov. Ch.B. 01.[1], Shakayeva. E.E. 02.[2], Ziyakulova. Sh.A. 03.[3]
[1] Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston
[1]ch.normurodov@gmail.com [2]Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston
[2]shakayevae@gmail.com
[3] Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston [3]shziyaqulova@gmail.com

Quyidagi to'rtinchi tartibli singulyar qo'zg'atilgan tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masalani qaraylik:

$$\varepsilon\frac{d^4u}{dy^4} = f(y), \quad y \in (-1,1) \tag{1}$$

$$u(\pm1) = \frac{du}{dy}(\pm1), \tag{2}$$

bu yerda ε yetarli kichik musbat parametr $0 < \varepsilon < 1$.

(1)-(2) masala uchun aniq yechimni quyidagicha tanlab olamiz:

$$u_e(y) = (1-y^2)^2 e^{\varepsilon y}, \quad u_e = u_{exact}. \tag{3}$$

Bu funksiya (2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. (3) aniq yechimni (1) tenglamaga qo'yib, tenglamaning o'ng tomonini

$$f(y) = (\varepsilon^4y^4 + 16\varepsilon^3y^3 + (72\varepsilon^2 - 2\varepsilon^4)y^2 + (96\varepsilon - 16\varepsilon^3)y + \varepsilon^4 - 24\varepsilon^2 + 24)e^{\varepsilon y}$$

(1) ga ko'ra hisoblaymiz.

(1)-(2) differensial masalani sonli modellashtirish uchun dastlab integrallash metodining diskret variantini qo'llaymiz. Taqribiy yechim $u_a(y)$ va o'ng tomondagi funksiya $f(y)$ ni birinchi tur Chebyshev ko'pxadlari qatori ko'rinishida quyidagicha izlaymiz:

$$\frac{du_a}{dy} = \sum_{i=0}^{N} a_iT_i(y), \quad f(y) = \sum_{i=0}^{N} b_iT_i(y). \tag{4}$$

Bu yerda a_i, b_i noma'lum koeffitsiyentlar, yig'indidagi shtrix esa $i = 0$ bo'lganda koeffitsiyentlar $\frac{1}{2}$ga bo'linishini anglatadi[2-3].

To'rtinchi tartibli hosilani hisoblashda quyidagi qatordan foydalanamiz:

$$\frac{d^4u_a}{dy^4} = \sum_{i=0}^{N} a_i^{(4y)}T_i(y). \tag{5}$$

(4)-(5) tengliklarni (1) tenglamaga qo'yib, bir xil tartibli Chebyshev ko'pxadlari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglab, $\varepsilon a_i^{(4y)} = b_i, \quad i = 4, 5, \ldots, N$, tenglamaga ega bo'lamiz.

Ushbu tenglikning har ikkala tomonini dastlab integrallash metodining diskret formulasi

$$a_i^{((k-1)y)} = \frac{a_{i-1}^{(ky)} - a_{i+1}^{(ky)}}{2i}$$

yordamida to'rt marta ketma-ket integrallaymiz va (2) -chegaraviy shartlarga ko'ra yozilgan tenglamalarni qo'shib, ayirib quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

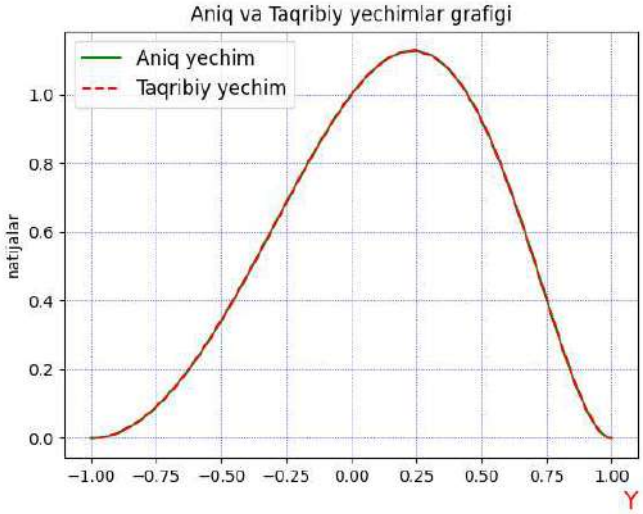
$$\begin{cases} (16\varepsilon i^2(i-1)^2(i+1)^2(i^2-4)(i^2-9) + 2i^2(i^2-1)(i^2-9)(8i^2-29))a_i = \\ = i(i-1)(i+1)^2(i+2)(i+3)b_{i-4} - 4i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)b_{i-2} + \\ +6i^2(i^2-1)(i^2-9)b_i - 4i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)b_{i+2} + \\ +i(i-1)^2(i+1)(i-2)(i-3)b_{i+4}, \ (i = \overline{4, N}) \\ \frac{1}{2}a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_N = 0 \\ a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{N-1} = 0 \\ 4a_2 + 16a_4 + 36a_6 + \ldots + N^2 a_N = 0 \\ a_1 + 9a_3 + 25a_5 + \ldots + (N-1)^2 a_{N-1} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

(6) tenglamalar sistemasini yechish uchun, o'ng tomondagi b_i koeffitsiyentlarni

$$b_i = \frac{2}{Nc_i} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{c_i} f(y_l) T_i(y_l), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N, c_0 = c_N = 2, \ c_m = 1, \text{agar } m \neq 0; N.$$

dastlab yuqoridagi formula bo'yicha hisoblaymiz[1]. Sistema (6) dan a_i larni topib, taqribiy yechim (4) formulasiga qo'yib, taqribiy yechimning $y_l = \cos\frac{\pi l}{N}$ va tugun nuqtalaridagi qiymatlarni hisoblaymiz va aniq yechimi bilan parametr ε ning turli qiymatlarida taqqoslaymiz.

Quyida $\varepsilon = 10^{-3}$ bo'lganda yechimlar grafiklari keltirilgan:



Rasmlardan ko'rinib turibdiki, approksimatsiyalovchi ko'pxadlar sonining ortib borishi bilan taqribiy yechim xatoligi kamayadi.

Adabiyotlar

1. **Абуталиев Ф.Б., Нормуродов Ч.Б.** *Математическое моделирование проблем гидродинамической устойчивости.* Ташкент: Фан ва технология, 2011.
2. **Абдурахимов Б.Ф., Джураева Н.Т.** *Численное моделирование сингулярно возмущенного уравнения четвертого порядка методом предварительного интегрирования*, Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2024, є4(58), С.8-17.
3. **Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А.** *Численное моделирование уравнений эллиптического типа дискретным вариантом метода предварительного интегрирования*, Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2024, є5(61), С.59-68.
UDK 517.98

On a p-adic $(2,2)$-rational dynamical system with three fixed points

Sattarov I.A
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan. sattarovi-a@yandex.ru

Let $\mathbb{Q}_p$ be the field of p-adic numbers. Any p-adic number $x \neq 0$ can be uniquely represented in the canonical form

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots),$$

where $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ and the integers x_j satisfy: $x_0 > 0$, $0 \leq x_j \leq p-1$ (see [1]-[3]). In this case $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

For each $a \in \mathbb{Q}_p$ and $r \in \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ we denote

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq r\}$$

and the set of all *p-adic integers*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}.$$

Denote

$$\mathcal{E}_p := \begin{cases} B_{\frac{1}{4}}(1), & \text{if } p = 2; \\ B_{\frac{1}{p}}(1), & \text{if } p \neq 2. \end{cases}$$

We consider

$$f(x) = \frac{a^2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + a^2}, \quad a \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0, 1\} \tag{1}$$

It is easy to check that $x_0 = 1$ be a fixed point of f. So, we have

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{(a^2 - 1)(x + 1)}{x^2 + 2x + a^2} \quad \text{if } x \neq 1$$

Consequently, we conclude that $x_* \neq 1$ be a fixed point of f if and only if it is a solution of the following equation

$$x^2 + (3 - a^2)x + 1 = 0 \tag{2}$$

Note that (2) has a solution if and only $\sqrt{(a^2 - 1)(a^2 - 5)} \in \mathbb{Q}_p$. So, a function f has either only one fixed point $x_0 = 1$ or three fixed points $x_0 = 1$ and

$$x_1 = \frac{1}{x_2} = \frac{a^2 - 3 + \sqrt{(a^2 - 1)(a^2 - 5)}}{2}$$

Let us denote

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{Q}_p : \exists n \in \mathbb{Z}_+ \text{ such that } f^n(x) = \hat{x}_1 \text{ or } f^n(x) = \hat{x}_2\}$$

where $\hat{x}_{1,2}$ be a solution of $x^2 + 2x + a^2 = 0$.

In this work we consider the case $|a|_p > 1$.

Theorem 1. Let $|a|_p > 1$ and $\sqrt{(a^2 - 1)(a^2 - 5)} \in \mathbb{Q}_p$. Then the dynamical system of the function (1) has the following properties:

I. The fixed point $x_0 = 1$ is attractive when $p = 2$, and indifferent when $p \geq 3$, and

I.1) $A(x_0) = 1 + 2\mathbb{Z}_2$ for $p = 2$.

I.2) the maximal Siegel disk is $SI(x_0) = \mathcal{E}_p$ for $p \geq 3$.

II. The fixed points x_1 and x_2 are attractive fixed points for the function (1), and

$$A(x_1) = \mathbb{Q}_p \setminus (\mathbb{Z}_p \cup \mathcal{P}), \quad \text{and} \quad A(x_2) = p\mathbb{Z}_p.$$

Remark. Theorem 1 implies that when $|a|_p > 1$, $\sqrt{(a^2 - 1)(a^2 - 5)} \in \mathbb{Q}_p$ and $p = 2$, we can precisely track the trajectory of any initial point $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathcal{P}$. However, for $p \geq 3$, we lack precise information about the trajectories of points within the invariant set $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x|_p = 1\}$.

We note that

$$\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{i=1}^{p-1} B_{\frac{1}{p}}(i).$$

Lemma 1. Let $p \geq 3$, $|a|_p > 1$, $\sqrt{a^2 - 1} \in \mathbb{Q}_p$ and $i, j \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$. Then

$$f(B_{\frac{1}{p}}(i)) = B_{\frac{1}{p}}(j) \ \text{ if and only if } \ i^2 \equiv j (\mathrm{mod}\, p).$$

For $p \geq 3$, since $\mathcal{E}_p = B_{\frac{1}{p}}(1)$, we have the following

Corollary. Let $p \geq 3$, $|a|_p > 1$ and $\sqrt{a^2-1} \in \mathbb{Q}_p$. Then the function $f : \mathcal{E}_p \to \mathcal{E}_p$ is isometry.

Since $SI(x_0) = \mathcal{E}_p = B_{\frac{1}{p}}(1)$, the sphere $S_r(1)$ is invariant for (1) for all $r \leq \frac{1}{p}$. Let $\mathcal{B}$ is the algebra generated by clopen subsets of $S_r(1)$, when $r \leq \frac{1}{p}$. It is known that every element of $\mathcal{B}$ is a union of some balls $V_\rho(s) \subset S_r(1)$. Note that [2], a measure $\bar{\mu} : \mathcal{B} \to p^{\mathbb{Z}}$ is a Haar measure if it is defined by $\bar{\mu}(V_\rho(s)) = \rho$ for all $V_\rho(s) \in \mathcal{B}$. We consider the normalized Haar measure μ, defined by

$$\mu(V_\rho(s)) = \frac{\bar{\mu}(V_\rho(s))}{\bar{\mu}(S_r(a))} = \frac{p\rho}{(p-1)r}.$$

The dynamical system of isometry on an invariant sphere is fully described in [2]. According to it, the dynamics of the function (1) also has the following properties:

Theorem 2. Let $p \geq 3$, $|a|_p > 1$, $\sqrt{a^2-1} \in \mathbb{Q}_p$ and $S_r(1) \subset \mathcal{E}_p$. For any ball $V_\rho(s) \subset S_r(1)$ the following equality holds

$$\mu(f(V_\rho(s))) = \mu(V_\rho(s)).$$

Literature

1. **Koblitz N.** *p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-function.* Berlin, Springer, 1977.
2. **Sattarov I.A.** *Group Structure of the p-Adic Ball and Dynamical System of Isometry on a Sphere. p*-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications., 16(2), 2024, 128–135.
3. **Vladimirov V.S., Volovich I.V., Zelenov E.I.** *P-adic Analysis and Mathematical Physics.* World Scientific, Singapore, 1994.

A piecewise constant argument method for solving second order nonlinear differential equations

Shermukhammedov B. A. [1], Abdusaitov D.Sh.[1]
[1]Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
shermuxammedovbaxtiyor47@gmail.com, dostonabdusaitov@gmail.com.

In this work is to apply the method of Piecewise constant arguments to numerical solutions of second order nonlinear differential equations of the form

$$y''(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

with initial conditions

$$y(0) = a_0, \qquad y'(0) = a_1 \tag{2}$$

where $f(\cdot,\cdot)$ is given differentiable function, a_0, a_1 are real constants.

Let n be a positive integer number and $t_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$. Consider the following differential of equations with piecewise constant arguments of the form

$$\begin{gathered} cccy''(t) = f(t_{k-1}, y(t_{k-1})), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), k = 1, 2, ..., n \\ y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1. \end{gathered} \tag{3}$$

A solutions of (3) is defined as following:

Definition. A function $y(t) := y_n(t)$ is called a solution of the initial value problem (3) if the following conditions are satisfied:

(a) $y(t)$, $y'(t)$ are continuous on $[0,1]$;

(b) $y''(t)$, exist and continuous on $[0,1]$ with possible exception at points t_k, $k = 0,1,...,n$, where one-sided derivatives exist;

(c) $y(t)$, satisfy the initial value problem (3) in (0,1), with the possible exception at the points t_k, $k = 0,1,...,n$.

The equation (3) is called differential equations with a piecewise constant argument corresponding to the non-linear differential equations (1).

Theorem 1. For any positive integer number n the initial value problem (3) has a unique solution $y(t) := y_n(t)$ defined as

$$y(t) = \frac{1}{2}f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))(t - t_{k-1})^2 + y'(t_{k-1})(t - t_{k-1}) + y(t_{k-1}) \tag{4}$$

where

$$y(t_{k-1}) = \lim_{t \to t_{k-1}-0} y(t), \quad y'(t_{k-1}) = \lim_{t \to t_{k-1}-0} y'(t).$$

Theorem 2. For any $\varepsilon > 0$ there exists a positive number $n_0 = n_0(\varepsilon)$ such that for any number n with $n > n_0$ the inequality

$$\sup_{t \in [0,1]} |y''(t) - f(t, y(t))| < \varepsilon \tag{5}$$

holds, where $y(t)$ is solution of the initial value problem (3).

t	HPM [1]	Present method	Error of HPM [1]	Error of Present method
0.0	0.05000000000000	0.05000000000000	3.13×10^{-5}	0
0.1	0.04974973931842	0.04974958374617	2.99×10^{-5}	2.45×10^{-17}
0.2	0.04900146249005	0.04900085553331	2.58×10^{-5}	6.06×10^{-20}
0.3	0.04776266008565	0.04776135077633	1.94×10^{-5}	9.64×10^{-18}
0.4	0.04604573304658	0.04604354076521	1.13×10^{-5}	9.57×10^{-19}
0.5	0.04386786854607	0.04386470211673	2.15×10^{-6}	1.08×10^{-18}
0.6	0.04125086793831	0.04124673657558	7.19×10^{-6}	8.42×10^{-18}
0.7	0.03822092851752	0.03821594362293	1.58×10^{-5}	1.22×10^{-17}
0.8	0.03480838127188	0.03480274890183	2.31×10^{-5}	9.69×10^{-18}
0.9	0.03104738725738	0.03104139192325	2.83×10^{-5}	7.02×10^{-18}

Таблица 1: Describe the values of HPM [1] and $y_n(t)$ obtained by PCAM (4) and residual errors for Example.

table:1

Example. The cubic-quintic-septic Duffing equation is expressed as [1]

$$\begin{gathered} y''(t) + y(t) + y^3(t) + y^5(t) + y^7(t) = 0, \quad t \in [0,1], \\ y(0) = 0.05, \quad y'(0) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

The exact solution to this problem is not known. The approximate solution of equation (6), obtained using the Piecewise constant argument method (PCAM), is expressed in the form of equation (4). The approximate solution obtained using the Homotopy Perturbation method (HPM) is $y(t) = y_0 cos(\sqrt{1 + \frac{3}{4}y_0^2 + \frac{5}{8}y_0^4 + \frac{35}{64}y_0^6}t)$, where $y_0 = 0.05$. Table 1 present the approximate solution values for equation (6) at selected points and residual errors. As shown in Table 1, the PCAM method produces solutions with exceptionally high accuracy.

References

1. **Naveed A, He J.** *Two modifications of the homotopy perturbation method for nonlinear oscillators.* Journal of Applied and Computational Mechanics 6. Special Issue (2020): 1420-1425. *MSC 517.9*

On life-line game when players move by linear equations with time-varying coefficients

Soyibboev U. B.[1], Abdullaeva G. I.[2], Mahammadjonova M. M.[3], Khoshimova N. T.[4]

[1,2,3,4] Namangan State University, 160107, Namangan, Uzbekistan; ulmasjonsoyibboev@gmail.com [1]

We address linear pursuit-evasion game problems for players whose motions are governed by linear differential equations of time-varying coefficients and whose control functions meet geometric restrictions, in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. For solving the pursuit game, the $\Pi-$*strategy* (known as the *parallel pursuit strategy* [2–5]) is constructed, and sufficient pursuit conditions are obtained. For solving the evasion game, a directional control function is devised, and sufficient evasion conditions are derived.

Problems statement. Assume that a player P (the pursuer) with a control u, $u \in \mathbb{R}^n$, follows another player E (the evader) with a control v, $v \in \mathbb{R}^n$. Write by x, $x \in \mathbb{R}^n$, the position of the pursuer and by y, $y \in \mathbb{R}^n$, that of the evader. Let their motions be respectively given as follows:

$$P: \ \dot{x} = a(t)x + u, \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E: \ \dot{y} = a(t)y + v, \ y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $a(t)$ is a positive scalar integrable function; x_0, y_0 are the players' initial positions and it is supposed that $x_0 \neq y_0$ at $t = 0$.

The control parameters u and v are considered as measurable functions $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ meeting the geometric constraints

$$|u(t)| \leq \alpha \text{ for almost every } t \geq 0,$$

$$|v(t)| \leq \beta \text{ for almost every } t \geq 0$$

appropriately, where $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, and $|\cdot|$ means the Euclidean norm in $\mathbb{R}^n$. According to the physical meaning, α and β mean the minimal speeds of players P and E, respectively. Denote by $\mathbb{U}_\alpha$ (by $\mathbb{V}_\beta$) the family of all measurable functions $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) meeting condition (3) ((4)).

For $r = 0$, linear differential game (1)–(4) was comprehensively investigated in [1–4].

If $u(\cdot) \in \mathbb{U}_\alpha$ and $v(\cdot) \in \mathbb{V}_\beta$, then from (1)–(2) it proceeds the following players' motion trajectories

$$x(t) = e^{\int_0^t a(s)ds} \left(x_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s a(\tau)d\tau} u(s)ds \right), \ y(t) = e^{\int_0^t a(s)ds} \left(y_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s a(\tau)d\tau} v(s)ds \right).$$

The target of player P is to capture player E, i.e. to realize the equality $x\big(T\big) = y\big(T\big)$ at a finite time T, $T > 0$. The aim of player E is to avoid from meeting player P, i.e. to

hold the relation $x(t) \neq y(t)$ for any t, $t \geq 0$, or if this is not possible, then it struggles to delay the meeting time T as far as possible.

Main results. Here are the obtained results for linear differential game (1)–(4).

Definition 1. For $\alpha_0 \geq \beta_0$, we call the function

$$\mathbf{u}(z_0, v) = v - \delta(z_0, v)\zeta_0$$

the Π-strategy of Pursuer P, where $\zeta_0 = \frac{z_0}{|z_0|}$, $z_0 = x_0 - y_0$,

$$\delta(z_0, v) = \langle v, \zeta_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \zeta_0 \rangle^2 + \alpha^2 - |v|^2},$$

and $\langle v, \zeta_0 \rangle$ implies the scalar product of the vectors v and ζ_0 in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1. Let $\alpha > \beta$. Then Pursuer P, with the help of Π-strategy (5), captures Evader E on the time interval $\left[0, T_P\right]$, where T_P is a positive root of the equation $\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^s a(\tau)d\tau} ds = \frac{|z_0|}{\alpha - \beta}$.

In linear differential game (1)–(4), we call T_P a guaranteed pursuit time.

Definition 2. The control function

$$\mathbf{v}(t) = -\beta\zeta_0$$

is called the evasion strategy of Evader E.

Theorem 2. Let $\alpha \leq \beta$. Then Evader E, using evasion strategy (6), can escape from Pursuer P in the time interval $[0, +\infty)$.

References

1. **Isaacs R.** *Differential Games.* New York: John Wiley and Sons - 1965.
2. **Petrosjan L.A.** *Differential Games of Pursuit. Series on Optimization 2.* World Scientific, Singapore - 1993.
3. **Azamov A.** *On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Bulgariacae math.* - 1986. 38-43.
4. **Azamov A.A., Samatov B.T.** *The* Π*-Strategy: Analogies and Applications. Contributions to Game Theory and Management.* - 2011. 33-46.
5. **Samatov B.T., Soyibboev U.B.** *Differential game with a lifeline for the inertial movements of players. Ural Mathematical Journal.* - 2021. 94-109.

UDK 517.977

The ℓ-catch problem in the differential game under Grönwall type constraints

Turgunboeva M. A.[1], Akbarov A. Kh.[2]
[1] Namangan State University, Namangan, Uzbekistan; turgunboyevamohisanam95@gmail.com
[2] Andijan State University, Andijan, Uzbekistan; akbarov.adhambek@bk.ru

Differential game problems began to be examined systematically by Isaacs [1] in the 1950's. Fundamental results of differential games were obtained by Krasovskii [2], Pontryagin [3] and others. The problem for the case of ℓ-approach [4] was first studied by Indian mathematician Ramchundra. Similar effects in the cases of geometric and integral

constraint were considered in the works of Chikrii, Rappoport, Pshenichnii, Ostapenko, Petrosjan, Satimov, Grigorenko, Azamov, Ibragimov, Samatov and etc.

We consider a differential game with two objects, named Pursuer $\mathcal{P}$ and Evader $\mathcal{E}$, in the space $\mathbb{R}^n$. The Pursuer, with position represented by x, chases the Evader, with position represented by y, where their motion dynamics are governed by the following differential equations

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

respectively, where $x, y, x_0, y_0, u, v \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$; x_0, y_0 are the initial positions of the objects which are regarded as $|x_0 - y_0| > \ell$ for some $\ell > 0$ at the time $t = 0$; the velocity vectors u and v serve as their control parameters, which depend on the time $t \geq 0$, correspondingly.

The controls u and v in (1), (2), are selected as a measurable function $u(\cdot) : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot) : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^n$, in addition, they are required to satisfy the following inequalities

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2\omega_1 \int_0^t |u(s)|^2 ds \quad \text{for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

and

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2\omega_2 \int_0^t |v(s)|^2 ds \quad \text{for almost every } t \geq 0, \tag{4}$$

respectively, where ρ, σ are a given positive numbers and ω_1, ω_2 are given non-negative numbers.

In the Differential Game Theory, inequalities (3), (4) are referred to as *Grönwall type constraint* (abbreviated as **Gr**-constraints) for the control functions [5]. The set of all permissible controls $u(\cdot)$ of the Pursuer that satisfy **Gr**-constraint (3) is designated by $U_{\mathbf{Gr}}$, while the set of all permissible controls $v(\cdot)$ of the Evader that satisfy **Gr**-constraint (4) is denoted by $V_{\mathbf{Gr}}$.

By equations (1) and (2), for controls $u(\cdot) \in U_{\mathbf{Gr}}$ and $v(\cdot) \in V_{\mathbf{Gr}}$, every pair $(x_0, u(\cdot))$ and $(y_0, v(\cdot))$ generates the trajectories $x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds$, $\quad y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)ds$, of the Pursuer and the Evader, respectively.

The Pursuer's primary goal is to get inside an ℓ-radius vicinity of the Evader, that is, to achieve the relation $|x(t^*) - y(t^*)| \leq \ell$ at some finite time $t^* > 0$. The Evader's goal, on the other hand, is to prevent the Pursuer from getting to this ℓ-radius zone, i.e., to maintain the inequality $|x(t) - y(t)| > \ell$ for all $t \geq 0$.

Introduce the denotation: $z = x - y$, $z_0 = x_0 - y_0$.

Lemma 1. (Grönwall's inequality, see [6]) If $|\gamma(t)|^2 \leq \alpha^2 + 2k \int_0^t |\gamma(s)|^2 ds$, then $|\gamma(t)| \leq \alpha e^{kt}$, where $\gamma(t)$ is a measurable function and α, k are non-negative numbers.

By Lemma 1, if $u(\cdot) \in U_{\mathbf{Gr}}$ and $v(\cdot) \in V_{\mathbf{Gr}}$, then

$$|u(t)| \leq \rho e^{\omega_1 t}, \quad |v(t)| \leq \sigma e^{\omega_2 t}, \quad t \geq 0.$$

Definition 1. If a) $\rho \geq \sigma$ and $\omega_1 > \omega_2$, or b) $\rho > \sigma$ and $\omega_2 > \omega_1$, or c) $\rho > \sigma$ and $\omega_2 = \omega_1$, then the function

$$\mathbf{u}(t, v) = v + \lambda_{\Pi_\ell}(t, v)\,(m(t, v) - z_0) \tag{5}$$

is called the Π_ℓ-strategy of the Pursuer in the differential game (1)–(4), where

$$\lambda_{\Pi_\ell}(t,v)=\left[\langle v,z_0\rangle+\rho e^{\omega_1 t}\ell+\sqrt{(\langle v,z_0\rangle+\rho e^{\omega_1 t}\ell)^2+(\rho^2e^{2\omega_1 t}-|v|^2)(|z_0|^2-\ell^2)}\right]/(|z_0|^2-\ell^2),$$

$$m(t,v)=-(v-\lambda_{\Pi_\ell}(t,v)z_0)\ell/|v-\lambda_{\Pi_\ell}(t,v)z_0|.$$

Definition 2. If $\rho<\sigma$ and $\omega_1>\omega_2$, then the function

$$\mathbf{u}^*(t,v)=\begin{cases}0 & \text{if } 0\le t<\theta,\\ v+\lambda^*_{\Pi_\ell}(t,v)\,(m^*(t,v)-z_0^*) & \text{if } \theta\le t\end{cases}\tag{6}$$

is called the Π^*_ℓ-strategy of the Pursuer in the differential game (1)–(4), where

$$\lambda^*_{\Pi_\ell}(t,v)=\left[\langle v,z_0^*\rangle+\rho e^{\omega_1 t}\ell+\sqrt{(\langle v,z_0^*\rangle+\rho e^{\omega_1 t}\ell)^2+(\rho^2e^{2\omega_1 t}-|v|^2)(|z_0^*|^2-\ell^2)}\right]/(|z_0^*|^2-\ell^2),$$

$$m^*(t,v)=-(v-\lambda^*_{\Pi_\ell}(t,v)z_0^*)\ell/|v-\lambda^*_{\Pi_\ell}(t,v)z_0^*|,\quad z_0^*=x_0-y(\theta),\quad \theta=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\ln\frac{\rho}{\sigma}.$$

Theorem 1. Let one of the conditions a) $\rho\ge\sigma$ and $\omega_1>\omega_2$, or b) $\rho>\sigma$ and $\omega_2>\omega_1$, $|z_0|\le\Delta$, or c) $\rho>\sigma$ and $\omega_2=\omega_1$ be valid. Then the Π_ℓ-strategy (5) is winning in the differential game (1)–(4) on time interval $[0,T_{Gr}]$, where $\Delta=\big(\ell\omega_1\omega_2+\rho^{\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}\sigma^{\frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2}}(\omega_2-\omega_1)+\sigma\omega_1-\rho\omega_2\big)/\omega_1\omega_2$, and T_{Gr} is the first positive root of the equation

$$|z_0|-\ell-\frac{\rho}{\omega_1}e^{\omega_1 t}+\frac{\sigma}{\omega_2}e^{\omega_2 t}+\frac{\rho}{\omega_1}-\frac{\sigma}{\omega_2}=0.$$

Theorem 2. Let $\rho<\sigma$ and $\omega_1>\omega_2$ be valid. Then in the differential game (1)–(4), the Π^*_ℓ-strategy (6) is winning on time interval $(0,T^{**}_{Gr}]$, where $T^{**}_{Gr}=\theta+T^*_{Gr}$ and T^*_{Gr} is the first positive root of the equation

$$|z_0|-\ell-\frac{\rho}{\omega_1}e^{\omega_1 t}+\frac{\rho}{\omega_1}e^{\omega_1\theta}+\frac{\sigma}{\omega_2}e^{\omega_2 t}-\frac{\sigma}{\omega_2}e^{\omega_2\theta}=0.$$

References

1. **Isaacs R.** *Differential games*, John Wiley and Sons, New York (1965).
2. **Krasovskii N.N.** *Control of a Dynamical System*, Nauka, Moscow, (1985). [In Russian]
3. **Pontryagin L.S.** *Izbrannye trudy* [Selected Works], MAKS Press, Moscow, (2004). [In Russian]
4. **Nahin P.J.** *Chases and Escapes*, The Mathematics of Pursuit and Evasion, Princeton University Press (2012).
5. **Samatov B.T., Akbarov A.Kh., Zhuraev B.I.** *"Pursuit-evasion differential games with Gr-constraints on controls"*, Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Uni versiteta, 59, 67–84 (2022).
6. **Grönwall T.H.** *"Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations"*, Annals of Mathematics. Second Series, 20, No 4, 292–296 (1919).

UDK 517.977.5.

A non-stationary evasion problem with the Langenhop type constraints

Uralova S. I.[1], Abdullayeva G. I.[2], Omonov A. H.[3]
[1] Namangan state university, Namangan, Uzbekistan; saboxat.17@inbox.ru
[2] Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;
abdullayevagulshoda178@gmail.com
[3] Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;
alisheromonova2001@gmail.com

We consider the following non-stationary differential games in the space R^n involving players: a pursuer $\boldsymbol{P}$ and an evader $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{P}: \dot{x} = a(t)u, \qquad x(0) = x_0, \quad \boldsymbol{E}: \dot{y} = b(t)u, \qquad y(0) = y_0, \tag{1}$$

where x_0,y_0 are initial positions of players respectively and we always assume that $x_0 \neq y_0$; $u(\cdot), v(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ are control functions of players respectively and we always assume that they are measurable functions; $a(t)$, $b(t)$ are scalar, measurable, positive functions for all $t \geq 0$.

We introduce the following classes for the admissible controls of players $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{E}$:

1) The Langenhop type constraint (LT-constraint):

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 - 2k_1 \int_0^t k(s)\,|u(s)|^2\,ds, \;\; |v(t)|^2 \leq \sigma^2 - 2k_1 \int_0^t k(s)\,|v(s)|^2\,ds, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$\rho, \sigma > 0$, $k(t)$ is a scalar, positive, monotonically increasing and Lebesgue integrable function on $[0, t]$,

$$K(t) = \int_0^t k(s)ds,$$

and we denote such classes $\mathbf{U}_{LT}$ and $\mathbf{V}_{LT}$;

2) The Geometric constraint (in short $\bar{G}$- constraint) for $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{E}$:

$$|u(t)| \leq \rho e^{-k_1 K(t)}, \quad |v(t)| \leq \sigma e^{-k_1 K(t)}, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

and we denote such classes $\mathbf{U}_{\bar{G}}$ and $\mathbf{V}_{\bar{G}}$;

3) The Integral constraint (in short $\bar{I}$- constraint) for $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{E}$:

$$\int_0^t k(s)\,|u(s)|^2\,ds \leq \frac{\rho^2}{2k_1}\left(1 - e^{-2k_1 K(t)}\right), \quad \int_0^t k(s)\,|v(s)|^2\,ds \leq \frac{\sigma^2}{2k_1}\left(1 - e^{-2k_1 K(t)}\right), \; t \geq 0, \tag{4}$$

and we denote such classes $\mathbf{U}_{\bar{I}}$ and $\mathbf{V}_{\bar{I}}$.

If $\mathbf{U}$ ($\mathbf{V}$) is one of $\mathbf{U}_{\bar{G}}$, $\mathbf{U}_{LT}$, $\mathbf{U}_{\bar{I}}$ ($\mathbf{V}_{\bar{G}}$, $\mathbf{V}_{LT}$, $\mathbf{V}_{\bar{I}}$), then for $u(\cdot) \in \mathbf{U}$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s)u(s)ds, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t b(s)v(s)ds.$$

Lemma. $\mathbf{U}_{\bar{G}} \subset \mathbf{U}_{LT} \subset \mathbf{U}_{\bar{I}}$, $\mathbf{V}_{\bar{G}} \subset \mathbf{V}_{LT} \subset \mathbf{V}_{\bar{I}}$.

We call game (1) with the LT-constraints on controls the LT-Game and denote $z(t) = x(t) - y(t)$, $z_0 = x_0 - y_0$

Definition. We sPϴy thPϴt Pϴ function

$$\boldsymbol{v}_{LT}(t,u(t-\varsigma))=\begin{cases}0, & \text{if } 0\le t<\bar{\varsigma},\\ -\sqrt{|u(t-\bar{\varsigma})|^2+(\sigma^2-\rho^2)\,e^{-2k_1K(t-\bar{\varsigma})}}\xi_0, & \text{if } t\ge\bar{\varsigma}\end{cases} \tag{5}$$

the $\boldsymbol{E}_{LT}$ strategy of $\boldsymbol{E}$, in the case $\rho\le\sigma$, $\xi_0=\frac{z_0}{|z_0|}$ where $\bar{\varsigma}>0$.

We use the following conditions to solve the Evasion problem in the LT-Game:

$$a(t)\le k(t)\le b(t),\ a.e\ t\ge 0 \text{ or } \quad a(t)=b(t)\le k(t),\ a.e\ t\ge 0. \tag{6}$$

Theorem. If $\rho\le\sigma$, $0<\bar{\varsigma}\le\frac{2k_1|z_0|^2}{\rho^2}$, $k(t)\le 1$ and (6) are hold in the LT-Game, then $\boldsymbol{E}_{LT}$-strategy (5) is winning for $\boldsymbol{E}$ for all $t\in[0,+\infty)$ and

$$|z(t)|>\begin{cases}0, & \text{if } 0\le t<\bar{\varsigma},\\ \sqrt{\Upsilon_E(t-\bar{\varsigma})+\Omega_E(t-\bar{\varsigma})}-\sqrt{\Upsilon_E(t-\bar{\varsigma})}>0, & \text{if } t\ge\bar{\varsigma},\end{cases}$$

$$\Upsilon_E(t)=\frac{\rho^2K(t)}{2k_1}\left(1-e^{-2k_1K(t)}\right),\ \Omega_E(t)=\frac{(\sigma^2-\rho^2)}{k_1^2}\left(1-e^{-k_1K(t)}\right).$$

References

1. **Isaacs R.** *Differential Games.* John Wiley and Sons. New York, -1965.
2. **Azamov A.** *On the quality problem for simple pursuit games with constraint.* Serdica Bulgariacae math. 1986. pp. 38–43.
3. **Azamov A.A., Samatov B.T.** *The* П*-Strategy: Analogies and Applications:* Contributions to Game Theory and Management. 2011. pp. 33–46.
4. **Samatov B.T., Umaraliyeva N.T., Uralova S.I.** *Differential games with the Langenhop type constraints on controls* Lobachevskii Journal Mathematics. 2021. pp. 2942–2951.
5. **Samatov B.T, Uralova S.I.** *Differential games with the Langenhop type constraints on controls.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. pp.4363–4373.
6. **Uralova S.I.** *Non-stationary problems of pursuit-evasion with Langenhop- type* Uzbek Mathematical Journal. 2024. pp.60-67.

УДК 517.977

Импульсные управления в дифференциальных играх с геометрическими ограничиниями

Мамадалиев Н. А.[1,2], Мустапокулов Х. Я.[1,3]
[1]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
[2]Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан; m_numana59@mail.ru
[3]Международный университет Нордик, Ташкент, Узбекистан; m_hamdam@mail.ru

Рассмотрим задачу о преследовании движения которых описывается дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом [1]

$$\dot{z}\,(t)=Az\,(t)+Bz\,(t-h)-Cu\,(t)+Dv\,(t)\,,\ t\ge 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$; h — величина запаздывания; A, B, C, D — постоянные прямоугольные матрицы, порядки которых $(m \times m)$, $(m \times m)$, $(m \times p)$, $(m \times q)$, соответственно. $u(t)$ − управление преследующего игрока, $v(t)$ − управление убегающего игрока, соответственно.

Задача преследования состоит в том, что с помощью определенным образом выбранным управлением u за конечный момент времени привести траекторию системы (1) на цилиндрическое терминальное множество M, которое имеет вид: $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, M_1 — непустое компактное подмножество подпространства L, где L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^m$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^m$). Задача убегающего игрока противоположна - избежать встречи с терминальным множеством M. Начальным положением для системы (1) является m — мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$, где $\{\varphi(t) : z(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0],\ \varphi(0) \in \mathbb{R}^m \setminus M\}$.

Определение 1. Пусть $K(t)$ — единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами [1]: a) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка m; b) $K(0) = E_m$, где E_m — единичная матрица порядка m; в) функция $BK(t - h)$ непрерывна на $[0, +\infty)$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t - h),\ t > 0, \tag{2}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям a)–b), могут быть доказаны обычном методом последовательного интегрирования по шагам уравнения (2).

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания $(\tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k < ....)$, не имеющая конечных точек сгущения, т.е. любой компактный отрезок вида $[a, b]$ содержит конечное число точек этой последовательности.

Рассмотрим линнейную управляемую динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением (1), и предположим, что управления обоих игроков (как преследователя, так и убегающего) носят импульсный характер и имеют вид [2]:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i),\ v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - \tau_i),\ i \in N \tag{3}$$

где выкторы скачков преследователя $u_i\,(i \in N)$ принадлежат компакту P, $P \subset \mathbb{R}^m$, а векторы скачков убегающего $v_i\,(i \in N)$− компакту Q, $Q \subset \mathbb{R}^m$.

Согласно [3], если управления игроков имеют вид (2), то при любом начальным положении $\varphi(\cdot)$ система (1) имеет единственное решение, которое является абсолютно непрерывным на интервалах (τ_{i-1}, τ_i), $i \in N$.

Рассмотрим множества

$$W_i(n, v_i) = \pi K(\tau_n - \tau_i)P - \pi K(\tau_n - \tau_i)v_i,$$

$$W_i(n) = \pi K(\tau_n - \tau_i)P \dot{-} \pi K(\tau_n - \tau_i)Q,$$

где $i = 1, ..., n$.

Предположение 1. Множества $W_i(n)$ непусты при всех n, $n \in N$, $i = 1, ..., n$.

В силу предположения 1 мы можем выбрать из каждого множества $W_i(n)$ некоторый элемент $\omega_i(n)$. Зафиксируем некоторый набор $\omega = \omega(n) = \{\omega_i(n)\}_{i=1}^{n}$ и положим

$$\xi(n, \varphi(\cdot), \omega) = \pi K(\tau_n)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_n - s - h)B\varphi(s)ds - \sum_{i=1}^{n} \omega_i(n).$$

Введем функции

$$\tilde{\lambda}_i(n,\varphi(\cdot),v_i,\omega) =$$

$$= \begin{cases} \sup\Big\{\lambda \geq 0 : \lambda\Big[\xi(n,\varphi(\cdot),\omega) - m_1\Big] \in \\ \hat{W}_i(n,v_i) - w_i(n)\Big\} & \xi[n,\varphi(\cdot),\omega] \neq m_1, \\ {\tau_n}^{-1} & \xi[n,\varphi(\cdot),\omega] = m_1, \end{cases}$$

где $z_0(\cdot)$, $v_i \in Q$.

Обозначим $k = \min\Big\{j \in \{1,2,\cdots,n\} : \sum_{i=1}^{j} \tilde{\lambda}_i(n,\varphi(\cdot),v_i,\omega) \geq 1\Big\}$, если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном j, $j \in \{1,2,\cdots,n\}$, положим $k = n+1$. Определим разрешающие функции в следующем виде [4]

$$\lambda_i(n,\varphi(\cdot),v_i,\omega) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_i(n,\varphi(\cdot),v_i,\omega) & i = 1,2,\cdots,k-1, \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \tilde{\lambda}_j(n,\varphi(\cdot),v_i,\omega) & i = k, \\ 0 & i = k+1,\cdots,n. \end{cases}$$

Введем также функцию

$$N(\varphi(\cdot),\omega) = min\Big\{n \in N : \sum_{i=1}^{n} \inf_{v_i} \lambda_i(n,\varphi(\cdot),v_i,\omega) = 1\Big\}.$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном n, положим $N(z_0(\cdot),\omega) = +\infty$.

Теорема 1. Если для системы (1) при импульсном управлении игроков (2) выполнено предположение 1, множества M_1 и P выпуклы, $N(\varphi(\cdot),\omega) < +\infty$ для начального состояния $\varphi(\cdot)$ и некоторого набора ω, то траектория системы (1) может быт приведена из начального состояния $\varphi(\cdot)$ на терминальное множество M в момент $\tau_{N(\varphi(\cdot),\omega)}$.

Литература

1. **Беллман Р., Кук К.** *Дифференциально - разностные уравнения.* М.: Мир, 1967. 254 с.

2. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** *Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. 11:1. 212-224.

3. **Филиппов А.Ф.** *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М.: Наука, 1985.

4. **Чикрий А.А.** *Конфликтно управляемые процессы.* Киев: Наукова думка, 1992, 384 с.

UDK 517.984

Конструктивные меры Гиббса для модели Изинга-Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли

Рахматуллаев М.М.[1], Исаков Б.М.[2].
[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan;
[2] Андижон давлат университети, Андижон, Узбекистан;
mrahmatullaev@rambler.ru [1], isakovbegzod899@gmail.com [2]

Задачи, возникающие при исследовании термодинамических свойств физических и биологических систем, как правило, решаются в рамках теории мер Гиббса. Мера Гиббса – это фундаментальное понятие, определяющее вероятность микроскопического состояния данной физической системы (определенной конкретным гамильтонианом) [1,2]. Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса.

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево без циклов, из каждой вершины которого выходят ровно $k+1$ ребер, где V – множество вершин, L – множество ребер τ^k.

Две вершины $x, y \in V$ называются ближайшими соседями, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l \in L$ и в этом случае обозначим $l = \langle x, y \rangle$.

Для произвольной точки $x^0 \in V$ определим W_n, L_n (см. [3]).

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x \in G_k$, т.е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} : \rho(x, y) = 1\}$.

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Изинга-Поттса с параметром α имеет вид (см.[3]):

$$H(\sigma) = -\alpha J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) - (1-\alpha) J_2 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{1}$$

где $J = (J_1, J_2) \in R^2, \alpha \in (0, 1)$, $\delta_{ij}-$ символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Далее, мы находим условия существования новых нетрансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Изинга-Поттса, т.е. с помощью известных мер, конструктивным методом, построим нетрансляционно-инвариантные меры Гиббса.

Teorema 1. [3] Вероятностное распределение $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ согласованно тогда и только тогда, когда для любого $x \in V \setminus \{x^0\}$ имеют место следующее:

$$h_x^* = \sum_{y \in S(x)} F(h_y^*, \nu, \eta),$$

где $h_x^* = (h_{-1,x}^*, h_{+1,x}^*)$ с условием

$$h^*_{-1,x} = h_{-1,x} - h_{0,x}, h^*_{+1,x} = h_{+1,x} - h_{0,x}.$$

$F : h^* = (h^*_{-1}, h^*_{+1}) \mapsto F(h^*, \nu, \eta) = (F_{-1}, F_{+1})$ определяющееся следующим образом:

$$F_l(h^*_{-1}, h^*_{+1}) = \ln \left[\frac{\sum\limits_{j\in\Phi} \exp\left(\alpha\beta J_1 lj + (1-\alpha)\beta J_2 \delta_{l,j}\right) \exp(h^*_j)}{\sum\limits_{j\in\Phi} \exp((1-\alpha)\beta J_2 \delta_{0,j}) \exp(h^*_j)} \right], l = \pm 1$$

и $\eta = \exp(\alpha J_1 \beta), \nu = \exp((1-\alpha)J_2\beta), \beta = 1/T, S(x)-$множество прямых потомков.

Пусть $k = 2$. Тогда система фунциональных уравнений Модели Изинга-Поттса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u = \frac{au^2+bv^2+1}{u^2+v^2+ab}, \\ v = \frac{bu^2+av^2+1}{u^2+v^2+ab}. \end{cases}$$

Данная система уравнений рассмотрена в работе [3] и доказано следующее утверждение:

Отметим, что если $a > a_c$, то имеем $x_1 < x_2 < x_3$, где $x_i = x_i(a), i = 1, 2, 3-$ решения кубического уравнения:

$$2x^3 - (a+2)x^2 + 2ax - 1 = 0.$$

Таким образом, векторы $h_x = h_i = (x_i, x_i), i = 1, 2, 3$ соответствуют трансляционно-инвариантным мерам Гиббса на дереве Кэли порядка два.

Используя трансляционно-инвариантные решения уравнения которая рассмотрена в [3], мы построим не трансляционно-инвариантные решения функциональных уравнений.

Рассмотрим дерево Кэли порядка $k = 5$. Множество вершин дерева Кэли порядка пять обозначим через V^5. Для $\forall x \in V$ через $S_{k_0}(x)$ обозначим произвольный k_0 элементов из множества $S(x)$. Сначала, используя h_1 и h_3, мы построим совокупность векторов h_x на V^5, которые удовлетворяют функциональное уравнение . Построим совокупность векторов h_x, на дереве Кэли порядка пять следующим образом:

(I) Если на вершине x имеем $h_x = h_1$, тогда на вершины $S_3(x)$ мы ставим значения $h_x = h_1$, на остальные вершины $S_2(x)$ мы ставим значения $h_x = h_3$. Если на вершине x мы имеем $h_x = h_3$, тогда на вершину $S_1(x)$ мы ставим $h_x = h_1$, на остальные вершины $S_4(x)$ ставим $h_x = h_3$.

Анализ конструкции дает следующую теорему:

Teorema 2. Для модели Изинга-Поттса при $a = a_c^*(\approx 13.48)$ на дереве Кэли пятого порядка существуют не менее двух не трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Литература

1. **U.A.Rozikov.** *Gibbs Measures on Cayley Trees.*, Hackensack, World Sci. Singapore, 2013.

2. **N.N. Ganikhodjaev, U.A.Rozikov** *The Potts model with countable set of spin values on a Cayley tree.*, Lett. Math. Phys., 2006, 99-109 c.

3. **M.M.Rahmatullaev, B.Isakov.** *Translation-invariant Gibbs measures for the Ising-Potts model on a second-order Cayley tree*, Theoretical and Mathematical Physics, 2024). 1048-1059 c.

УДК 517.928

Потеря устойчивости положения равновесия в нескольких точках и задержка решений

Алыбаев К. С.[1], Нурматова М. Н.[2]
[1]Жалал-Абадский государственный университет имени Бекмамата Осмонова, Жалал-Абад, Кыргызстан; alybaevkurmanbek@rambler.ru
[2]Жалал-Абадский государственный университет имени Бекмамата Осмонова, Жалал-Абад, Кыргызстан; nurmatova_mairamgul@mail.ru

Пусть рассматривается автономная система сингулярно возмущенных уравнений следующего вида:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(y)\tilde{x}(t,\varepsilon) + V^k(\tilde{x}(t,\varepsilon))\tilde{x}(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$y' = 1, \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) - y(t_0) = \tilde{x}(t_0,\varepsilon) = x^0, \quad y(t_0) = t_0 \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $k = 1, 2$;

$t \in \Omega \subset \mathbb{C}$ Ч множество комплексных чисел, а $\Omega = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < r_0, \quad r_0 \in \mathbb{R}, \quad r_0 \gg |t_0|\}$ $x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon), x_3(t,\varepsilon), x_4(t,\varepsilon)$, $\tilde{x}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon) - y, x_2(t,\varepsilon), x_3(t,\varepsilon) - y, x_4(t,\varepsilon)$.

$$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 \\ 0 & A_2(y) \end{pmatrix}, \quad A_1(y) = \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & -y \end{pmatrix}, \quad A_2(y) = \begin{pmatrix} 1-y^2 & 2y \\ -2y & 1-y^2 \end{pmatrix},$$

$V^2 = (x_1 - y)^2 + x_2^2 + (x_3 - y)^2 + x_4^2$.

Матрица $A(y)$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = y \pm i, \quad \lambda_{3,4} = -(y \pm i)^2, \quad i = \sqrt{-1}$.

Устойчивость положения равновесия сначала теряется при $y = -1$, затем при $y = 0$.

Определение. Если некоторая система быстрых переменных имеет положение равновесия и устойчивость положения равновесия теряется при некотором значении медленных переменных, причем решение системы быстрых переменных не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесия, а в течение конечного времени остается вблизи него, то будем говорить, что происходит задержка решения вблизи неустойчивого положения равновесия (ЗР).

Задача. Исследовать задачу (1)-(2)-(3) на ЗР.

Доказана:

Теорема Пусть рассматривается задача (1)-(3), тогда решение существует на отрезке $[t_0; 0]$, где $t_0 < -\sqrt{3}$,в части которого (на интервале $[-1; 0]$) происходит задержка решения, где положение равновесия неустойчива.

Для доказательства теоремы использованы методы, изложенные в [1-7].

Литература

1. **Алыбаев К.С.** *Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости.* Вестник КГНУ. 2001. Серия 3. Вып. 6. С. 190–200.

2. **Нурматова М.Н.** *Асимптотика решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия в нескольких точках.* Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. No 5. С. 40–45.
3. **Нурматова М.Н.** *Влияние точек поворота на задержку решения вблизи неустойчивого положения равновесия.* Alatoo Academic Studies. 2024. No 2, С. 398–411.
4. **Алыбаев К.С., Нурматова М.Н., Мусакулова Н.К.** *Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях.* Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. No 3 С. 14–27.
5. **Алыбаев К.С., Нурматова М.Н.** *Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений.* Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. No 12. С. 12–19.
6. **Алыбаев К.С., Нурматова М.Н.** *Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений с попарно комплексно-сопряженными точками поворота.* Вестник ОшГУ. Математика. Физика. Техника. 2024. No 2(5). С. 6–15.
7. **Alybaev K.S., Dzhuraev A.M., Nurmatova M.N.** *Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position.* Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No3, P. 1178–1187.

Дискретный аналог математической модели сложных биогенов

Эшмаматова Д. Б.[1], Солижанова К. А.[2].
[1] Ташкентский государственный транспортный университет; 24dil@mail.ru
[2] Ташкентский государственный транспортный университет; kamolasolijanova@gmail.com

Известно [1], что термин биосфера введен в 1875 году австрийским геологом Э.Зюссом. Он рассматривал биосферу главным образом – как топологическое образование, т.е. пространство, заполненное жизнью. В.И.Вернадский (1863Ц1945) используя данный термин, создал науку с аналогичным названием. Живые организмы и биосфера в целом состоят из тех же химических элементов, которые содержатся в окружающей среде. Для синтеза биомассы необходимо около 40 элементов, из которых наиболее важными являются углерод, азот, кислород, водород, фосфор и сера. Они называются биогенными элементами. Все остальные химические элементы находятся в рассеянном состоянии [2]. Цель предлагаемой работы обоснование выбора в качестве математической модели круговорота углерода и фосфора, введенной в работах [3], [4]. Рассмотрим отображение Лотки-Вольтерры, действующее в четырехмерном симплексе:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - ax_2 - bx_3 - cx_4 + dx_5), \\ x_2' = x_2(1 + ax_1 - ex_3 - fx_4 - kx_5), \\ x_3' = x_3(1 + bx_1 + ex_2 - lx_4 - mx_5), \\ x_4' = x_4(1 + cx_1 + fx_2 + lx_3 - nx_5), \\ x_5' = x_5(1 - dx_1 + kx_2 + mx_3 + nx_4). \end{cases} \tag{1}$$

Приведем интерпритацию этой системы:
x_1– исходный ресурс (например, неограническое вещество: азот, фосфор);
x_2– первичный продуцент (например, растения, водоросли);
x_3– консумент первого порядка (травоядные);

x_4– консумент второго порядка (хищники);
x_5– детрит (остатки органики). Параметры a, b, c, d, e, f, k, l, m, n взаимодействия между компонентами (положительное влияние, отрицательное-угнетающее). Чтобы исследовать динамику траекторий отображения внутренних точек (1), нужно построить карту неподвижных точек и изучить ее структуру. Напомним некоторые определения из работы [3].

Определение. [1] Заполненное множество Жюлиа $K(V)$ отображения (1) является множество всех точек $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, которые имеют ограниченную траекторию, относительно отображения (1). $K(V) = \{(x_1, x_2, ..., x_m) : V^n(x_1, x_2, ..., x_m) \to \infty$ при $n \to \infty\}$.

Определение 1. [2] Множество Жюлиа – это граница заполненного множества Жюлиа $J(V) = \partial K(V)$.

Также в работе [3] была доказана следующая теорема и карта неподвижных точек вышеприведенного оператора был исследован в виде транзитивной и циклической тройки.

Теорема. [1] Для отображения $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ заполненным множеством Жюлиа является симплекс.

В этой работе мы продолжаем исследования из работ [3], [4]. То есть рассматриваем те случаи, когда в карте неподвижных точках получаем частично-ориентированный граф. Исследования такого типа интересны тем, что этот оператор и его модификации можно рассматривать в качестве математической модели более сложных биогенов. Среди таких биогенных элементов особое место занимают так называемые элементы Ч органогены, которые образующие важнейшие вещества организма. Это вода, белки, углеводы, жиры, витамины, гормоны и др. К таким веществам относится 6 химических элементов: углерод C, кислород O, водород H, азот N, фосфор P, сера S. Известно, что их общая массовая доля в организме человека составляет примерно 97,3%.

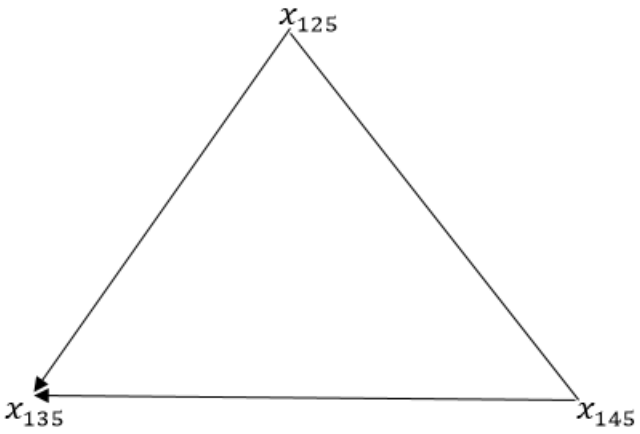
Зададим коэффициентам следующие значения для наглядности: $a = 0,4; b = 0,2; c = 0,1$; $d = 0,3$; $e = 0,8$; $f = 0,8$; $k = 0,4$; $l = 0,1$; $m = 0,6$; $n = 0,7$ Так как в таком случае система является примером для (1), эта система также имеет три циклические грани Ц$\overline{125}, \overline{135}$ и $\overline{145}$, которые имеют по одной неподвижной точке. В этом случае любые две циклические тройки смежные, причем из определяемых неподвижных точек одна Ц P точка, а другая Ц Q точка для грани, содержащей их. Рассмотрим два сильных подтурнира с тремя вершинами, например, $\alpha = \{1, 2, 5\}$и $\beta = \{1, 3, 5\}$. Как было отмечено выше, они смежные. Пусть, тогда сужение матрицы на имеет вид

$$A_{1235} = \begin{pmatrix} 0 & -0,4 & -0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & -0,8 & -0,4 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & -0,6 \\ -0,3 & 0,4 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}; |A_{1235}| = (bk - am + de)^2, \Delta_1 = bk - am + de.$$

Если $\Delta_1 > 0$, тогда $A_\gamma x_\alpha > 0$ и $A_\gamma x_\beta < 0$, значит неподвижные точки x_α и x_β составляют пару (P, Q) на грани Γ_γ [1]. Это означает, что направление ставится от точки x_{125} к точке x_{135}. Теперь перейдем к другим смежным граням. Пусть $\alpha = \{1, 2, 5\}$ $\beta = \{1, 4, 5\}$, тогда $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 2, 4, 5\}$. Здесь найдя сужение матрицы A на Γ_γ имеем:

$\Delta_2 = ck - an + de$; $\Delta_2 = 0$. Перейдем к последнему, пусть $\alpha = \{1, 3, 5\}$ $\beta = \{1, 4, 5\}$, тогда $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 3, 4, 5\}$ Сделав те же вычисления, получим $|A_{1345}| =$

$(ca - bn + dl)^2$; $\Delta_3 = ca - bn + dl$; $\Delta_3 = -0,05 < 0$. Если $\Delta_3 < 0$, тогда $A_\gamma x_\alpha < 0$ и $A_\gamma x_\beta > 0$. Это означает, что направление ставится от точки x_{145} к точке x_{135}. В итоге карта неподвижных точек имеет вид:



Следствие: В случае $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 < 0$ карта неподвижных точек (1) системы имеет вид, представленный выше.

Литература

1. **Вернадский В.И.** Биосфера. В кн.: Биосфера. (Избранные труды по биогеохимии). М.: Мысль. 1967(1926), 222-348.
2. **Небел Б.** Наука об окружающей среде: Как устроен мир. В 2Цх томах. Пер. с англ. М.: Мир. 1993. С. 424.
3. **Seytov Sh. J. and Eshmamatova D. B.** Discrete dynamical systems of Lotka–Volterra and their applications on the modeling of the biogen cycle in ecosystem, Lobachevskii J. Math. 44 (4), 1462–1476.(2023).
4. **Tadzhieva M. A., Eshmamatova D. B., R. N Ganikhodzhaev.** Volterra–type quadratic stochastic operators with a homogeneous tournament, J. Math. Sci. (N.Y.) 278 (3), 546–556 (2024).

UDK 517.977

Инерционная дифференциальная игра с пополняемыми ресурсами управлений

Ибайдуллаев Т.Т.
Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан;
ibaydullayev73@mail.ru

Рассматриваются дифференециальные игры преследования-убегания, в которых на параметры управления игроков налагаются интегральные ограничения специального вида, моделирующие пополнение ресурсов в процессе движения. Исследуются игры преследования-убегания описываемые уравнениями второго порядка, т.е. игроки являются инерционными объектами. Строится аналог стратегии параллельного преследования для нескольких видов ограничений с пополнением. При этом в задаче

преследования находится гарантированное время поимки, а в задаче убегания - нижняя оценка для расстояния между преследующим и убегающим точками. Интегральные ограничения специального вида, которых назовем кратко A-ограничениями, отличаются от традиционных типов ограничений [1], [2], [5], [6] и вводятся с целью моделирования пополнения ресурсов управления по мере движения, главным образом с течением времени. A-ограничение определяется скалярной монотонно возрастающей, кусочно-непрерывной функцией $a(\cdot) : [0, \infty) \to R$, удовлетворяющей условию $0 \leq a(t) < t$. Примеры A-ограничений ($h > 0$):

1) $a(t) = 0$ для $t < h, a(t) = t - h$ для $t \geq h$;

2) $a(t) = h[t/h], ([\cdot] -$ целая часть дроби);

3) $a(t) = \alpha t, (0 < \alpha < 1)$;

4) $a(t) = ln(t + 1)$.

Пусть в пространстве R^n управляемый объект x, называемый преследователем, преследует другой объект y, называемый убегающим. Уравнения движения объектов задаются в виде

$$\ddot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \tag{2}$$

где $x, y, u, v \in R^n, \ n \geq 1$; x_0, y_0-начальные положения объектов, а x_1, y_1-начальные скорости, $x_0 \neq y_0$; векторы u, v служат параметрами управления. При этом реализация управления вектором u должна оказаться измеримой функцией $u(\cdot) : [0, \infty) \to R^n$, удовлетворяющей ограничению

$$\int_{a(t)}^{t} |u(s)|^2 ds \leq \rho^2, t \geq 0. \tag{3}$$

Аналогично, реализация управления вектором v должно быть измеримой функцией $v(\cdot) : [0, \infty) \to R^n$, для которого налагается интегральное ограничение

$$\int_{a(t)}^{t} |v(s)|^2 ds \leq \sigma^2, t \geq 0, \tag{4}$$

(ρ и σ-заданные положительные числа).

Целью объекта x является осуществить поимку, т. е. равенство

$$x(t) = y(t), \tag{5}$$

где $x(t), y(t)$-траектории, порождаемые при выборе конкретных способов управления векторами u, v, соответственно.

Убегающий y стремится уклониться от встречи, а если этого невозможно, то как можно дольше отодвинуть момент встречи (5). Постановка задач может быть уточнена, как это осуществляется в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями [1], [5], [6].

Класс допустимых управлений преследующего, т. е. всех измеримых функций удовлетворяющих ограничению (3) обозначим через U, а класс допустимых управлений убегающего игрока, удовлетворяющих ограничению (4), обозначим через V.

Определение 1. Пусть $z(t) = x(t) - y(t), z_0 = x_0 - y_0, \ z_1 = x_1 - y_1$. Тогда стратегию u принято называть стратегией параллельного преследования или П-стратегией, если для каждого $v(\cdot) \in V$ решение задачи Коши

$$\ddot{z} = u(v(t)) - v(t), \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = z_1$$

можно представить в виде

$$z(t) = \Lambda(t, v(\cdot))z_0, \Lambda(0, v(\cdot)) = 1,$$

где $\Lambda(t, v(\cdot))$-некоторая скалярная непрерывная функция по $t, t \geq 0$, которую можно называть функцией сближения в задаче преследования.

Теорема 1. Если в игре (1)-(4) выполнено условие $\rho > \sigma$, то стратегия параллельного преследования гарантирует завершение преследования за конечное время.

Теорема 2. Если в игре (1)-(4) выполнено условие $\rho \leq \sigma$, то все начальные позиции, выигрышны для убегающего игрока и при этом для расстояния между игроками имеет место оценка:

$$|z(t)| \geq |z_0|.$$

В заключении заметим, что стратегия параллельного преследования позволяет установить альтернативу и в играх с клининей жизниь [2] и на игру ккказаки-разбойникиь [3], [4] при A-ограничениях на управления игроков. Автор благодарит А. А. Азамова за предложение изучать игры с A-ограничениями.

Литература

1. **Ушаков В. И.** *Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями.* Прикладная мат. и мех. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 15–23.
2. **Петросян Л. А.** *Игры преследования с клинией жизниь.* Вестник ЛГУ.ЦЛенинград, 1967. N 3. С. 76–85.
3. **Петров Н. Н., Петров Н. Н.** *О дифференциальной игре ккказаки-разбойникиь.* Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. N 8. С. 1366–1374.
4. **Азамов А.** *О задаче качества для игр простого преследования с ограничением.* Сердика. Българско матем. спис. София. 1986. N 12. С. 38–43.
5. **Ibragimov G. I., Azamov A. A., Khakestari M.** *Solution of a linear pursuit-evasion game with integral constraints.* ANZIAM Journal. 2010. Vol. 52. Pp. E59–E75.
6. **Azamov A. A., Samatov B. T.** *The* П*-Strategy: Analogies and applications.* The Fourth International Conference Game Theory and Management. St. Petersburg. 2010.

Расщепление решений сингулярно возмущенных уравнений при иррегулярном вырождении

Мусакулова Н.К.
Жалал-Абадский государственный университет им. Б.Осмонова, Жалал-Абад, Кыргызстан; kuralbekovna79@inbox.ru

Рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)x(t, \varepsilon) + b(t) + \varepsilon f(t, x(t, \varepsilon)), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр, $t \in D \subset C$ – множество комплексных чисел, D – открытая и ограниченная область; $x(t, \varepsilon)$ – скалярная неизвестная функция. Предположим следующее:

У1. $a(t), b(t) \in Q(D)$ — пространство аналитических функций в области D.

У2. $\exists T_0 \in D \wedge (a(T_0) = 0, a'(T_0) \neq 0, b(T_0) \neq 0)$.

У3. $f(t,0) \equiv 0, f(t,x) \in Q(H), H = \{(t,x)|t \in D, |x| \leq M_0\}$.
У4. Для всех $((t,\tilde{x}),(t,\hat{x})) \in H$:

$$|f(t,\tilde{x}) - f(t,\hat{x})| \leq M_1|\tilde{x} - \hat{x}|.$$

Здесь и далее буквами $M_0, M_1, M_2, \ldots$ обозначаются положительные постоянные, не зависящие от ε.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) переходит в невозмущҷнное уравнение:

$$a(t)\xi(t) + b(t) = 0, \tag{3}$$

которое имеет решение

$$\xi(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}. \tag{4}$$

Если решение невозмущҷнного уравнения имеет особенности, то говорят, что сингулярно возмущҷнное уравнение вырождается иррегулярно. Функция (4) имеет особенность в точке $t = T_0$.

Задача. Провести структурный анализ асимптотики решения задачи (1)–(2) в области D.

Поставленная задача решается с помощью расщепления решения уравнения на три составляющие. Решение задачи (1)–(2) в рассматриваемых комплексных областях расщепляется на три части:

- одна составляющая является решением невозмущҷнного уравнения и определяет особые точки, в которых решение задачи (1)–(2) не определено;
- вторая определяет погранслойные линии и области;
- третья — область притяжения решения задачи (1)–(2) к решению невозмущҷнного уравнения.

Как показывают полученные результаты, если рассматриваемое уравнение описывает некоторый процесс, который имеет особенность (типа импульсивного или других воздействий), то каждая из составляющих определяет особенности процесса в рассматриваемой области.

Литература

1. **Алыбаев К.С., Мусакулова Н.К.** *Расщепление решений иррегулярно вырожденных линейных сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях* // Наука. Образование. Техника. — О., 2022. — є 3. — С. 22–32.
2. **Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.В., Нарбаев М.Р.** *Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущҷнных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями* // Вестник ОшГУ. – О., 2013. – N 1. — С. 227–231.
3. **Нарымбетов Т.К.** *Существование и связь областей притяжения решений сингулярно возмущҷнных уравнений: дисс... канд. физ.-мат. наук.* — Ош, 2022. — 114 с. *UDK 517.93*

Применение уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана для дифференциальной игры со случайной продолжительностью

Сапарова Г. Б. О.[1], Ажиева Э. О.[1], Икромова Н. С. О.[2]
[1] Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева, Ош, Кыргызстан;
gulya141005@mail.ru
[3] Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
ikramova.nargis@mail.ru

В настоящее время в теории дифференциальных игр большое внимание уделяется моделированию конфликтно - управляемых процессов, процессы которых происходят в реальности. При моделировании этих процессов учитываются стохастический характер окружающей реальности. Как известно, любой реальный процесс имеет реальный процесс, который имеет случайную продолжительность, так как может закончиться в любой случайный момент времени. В применениях дифференциальных игр часто рассматриваются конфликтно - управляемые процессы в таких науках как: экология, менеджмент, экономика и также в различных сферах человеческой деятельности, эти процессы развиваются во времени, и заканчиваются в определенный момент времени. Например, если случится экономический кризис, то досрочно прекращаются товарно - денежные отношения, и поэтому игры со случайной продолжительностью могут быть более реалистичными.

В первый раз задачу со случайной продолжительностью дифференциальных игр рассмотрели в своих работах Петросян Л.М., Мурзов Н.В. в 1966 году [2]. Они рассмотрели антагонистическую игру преследования двух лиц с терминальными выигрышами. И для этой игры они вывели уравнение типа Айзекса - Беллмана. Также в работе Петросяна Л.М., Шевкопляс Е.В. в 2000 году была рассмотрена общая постановка дифференциальной игры со случайной продолжительностью [1]. В их работе рассмотрена кооперативная дифференциальная игра со случайной продолжительностью, где основную роль играла динамическая устойчивость принципа оптимальности.

Постановка задачи. Пусть дана задача максимизации:

$$\frac{1}{1-G(y)}\int_y^\infty M(x,u,l)(1-G(l))\,dl, \tag{1}$$

$$\dot{x}=f(x,u),\quad x(y)=x.$$

где $S(x,y)$ - функция Беллмана для задачи. Также рассмотрим другую задачу максимизации вида:

$$\int_y^\infty M(x,u,l)(1-G(l))\,dl, \tag{2}$$

$$\dot{x}=f(x,u),\quad x(y)=x.$$

В этом случае $\overline{S}(x,y)$ - функция Беллмана для данной задачи.

Отсюда справедливо равенство:

$$\overline{S}(x,y)=S(x,y)\cdot(1-G(l)). \tag{3}$$

Частные производные находим по формулам:

$$\frac{\partial\overline{S}}{\partial y}=-f(y)S+(1-S(y))\frac{\partial S}{\partial y}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} = (1 - S(y))\frac{\partial S}{\partial x}. \tag{5}$$

Для задачи (1) с функцией Беллмана имеем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (4):

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial y} + \max_u \left(M(x,u,l)(1 - G(l)) + \frac{\partial \overline{S}}{\partial x} f(x,u) \right) = 0. \tag{6}$$

Применяя формулы (3), (4), (5), из уравнения (6) получаем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для задачи со случайной продолжительностью:

$$\frac{g(y)}{1 - G(y)} S = \frac{\partial S}{\partial y} + \max_u \left(M(x,u,l)(1 - G(l)) + \frac{\partial \overline{S}}{\partial x} f(x,u) \right). \tag{7}$$

Методы решения. По определению функции интенсивности отказов вида

$$\lambda(y) = \frac{g(y)}{1 - G(y)}$$

уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана запишется в виде:

$$\lambda(y) S(x,y) = \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} + \max_u \left(M(x,u,l) + \frac{\partial S(x,y)}{\partial x} f(x,u) \right). \tag{8}$$

Рассмотрим случай, когда окончания игры V распределено по закону Вейбулла. Отсюда следует, что функция интенсивности отказов $\lambda(y)$ находится по формуле:

$$\lambda(y) = n\sigma y^{\sigma - 1},$$

$$y \geq 0, \quad n > 0, \quad \sigma > 0.$$

На основании формулы уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана будет иметь вид:

$$n\sigma y^{\sigma-1} S(x,y) = \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} + \max_u \left(M(x,u,l) + \frac{\partial S(x,y)}{\partial x} f(x,u) \right). \tag{9}$$

Задача. Пусть дана игра где участвуют n - игроков, то есть компании которые разрабатывают не возобновляемый природный ресурс, газ. Количество игроков обозначим через $L = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $x(y)$ - поток не возобновляемого ресурса. Через $C_i(y)$ - это управление игроками, которые являются темпами разработки ресурса. Изменение потока ресурсов можно записать в виде:

$$x'(y) = -\sum_{i=1}^{n} C_i(y);$$

$$\lim_{t \to \infty} x(y) \geq 0;$$

Каждый игрок имеет функцию мгновенного выигрыша вида $h(C_i)$, где $C_i > 0$. Рассмотрим вид функции полезности игрока:

$$h(C_i) = \ln(C_i).$$

Пусть начало игры равна $y_0 = 0$, а конец Y, является случайной величиной распределенной по закону Вейбулла. Тогда ожидаемый выигрыш равна:

$$V_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^{\infty} \int_0^{t} h_i(\tau) d\tau g(y) dy,$$

$$g(y) = n\sigma y^{\sigma-1}e^{-ny^{\sigma}}.$$

Для распределения Вейбулла $(1 - G(y)) = e^{-ny^{\sigma}}$, интегральный выигрыш находится по формуле:

$$V_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^{\infty} h_i(\tau)e^{-ny^{\sigma}}dy.$$

Тогда, итоговый выигрыш вычисляется по формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^{\infty} h_i(\tau)e^{-ny^{\sigma}}dy.$$

Так как рассматриваются симметричные игроки, то получаем $C_i = C_j = C$. Имеем, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана вида:

$$n(\tau)S(x,y) = \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} + \max_{C}\left(m\ln(C(y)) + \frac{\partial S(x,y)}{\partial x}(-mC(y))\right).$$

Ищем решение данного уравнения в виде:

$$S(x,y) = A(y)\ln x + B(y).$$

Частные производные тогда будут иметь вид:

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = \frac{A(y)}{x}; \quad \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = A'(y)\ln x + B'(y).$$

На основании частных производных, учитывая условия максимизации, оптимальное управление имеет вид $C = \frac{x}{A}$. Применяя метод неопределенных коэффициентов для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана имеем:

$$\begin{cases} A'(y) - n(y)A(y) + m = 0; \\ B'(y) - n(y)B(y) - m\ln A(y) - m = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем оптимальное управление для задачи разработки невозобновляемых ресурсов со случайной продолжительностью:

$$C_i^* = C^* = \frac{x \cdot e^{-n(\tau)\tau}}{m\int_y^{\infty} e^{-n(s)s}ds}.$$

Литература

1. **Петросян Л.А., Шевкопляс Е.В.** *Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью* // Вест. С.-Петерб. ун-та. Сер.1: Математика, механика, астрономия. 2000. Вып. 4. С. 18 - 23.

2. **Петросян Л.А., Мурзов Н. В.** *Теоретико - игровые проблемы в механике* // Литовск. матем. Сб. 1966. Т. VI-3. С. 423 - 433.

3. **Костюнин С.Ю., Шевкопляс Е.В.** *Об упрощении интегрального выигрыша в дифференциальных играх со случайной продолжительностью* // Вестн. С.- Петерб. Ун. Сер.10, Прикладная математика, информатика, процессы упр-я. 2011. Вып. 4, С. 47 - 56.

4. **Шевкопляс Е.В.** *Уравнение Гамильтона - Якоби - Беллмана в дифферен. играх со случайной продолжительностью* // Матем. теория игр и ее приложения. 2009. Т.1, N 2. С.98 - 118.

5. **Сапарова Г.Б., Султан К. Н.** *Математические модели оценки финансовых рисков.* // Известия ОшТУ, N 1, 2021. С. 142 – 145.

Разработка моделей частичного равновесия при миграции и мутациях

Завгороднева С.Ю.[1], Турдиев С.С.[1]
[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан; svetik1657@mail.ru
s.turdiev@alumni.nsu.ru

Классическая модель Харди–Вайнберга описывает идеализированное равновесие частот генотипов в закрытой популяции без внешних воздействий. Однако в реальных условиях на популяцию действуют мутации и миграция, что приводит к смещению и нарушению равновесия. При достаточно медленных изменениях возникает частичное равновесие или метастабильное состояние, характеризующееся квазипостоянством частот на промежутке времени [1]-[7].

Начнем работу с напоминания определений из [1].

Определение 1. [1] Миграция – процесс перемещения особей между популяциями, приводящий к изменению частот аллелей за сччт притока новых генов.

Определение 2. [1] Мутация – процесс спонтанного изменения одного аллеля в другой, влияющий на изменение частот аллелей в популяции.

Определение 3. [1] Частичное равновесие (метастабильное состояние) – динамическое состояние популяции, в котором изменения частот аллелей достаточно малы за единицу времени, так что популяция выглядит квазистационарной на промежуточных временных масштабах.

Теоретическая постановка задачи:

p – частота аллеля A,

$q = 1 - p$ – частота аллеля a,

μ – вероятность мутации $A \to a$ за поколение,

v – вероятность мутации $a \to A$,

m – коэффициент миграции: доля особей, прибывающих извне,

p_m – частота аллеля A в мигрирующей популяции.

Тогда изменение частоты p за одно поколение описывается уравнением:

$$p' = (1 - m)[(1 - \mu)p + vq] + mp_m, \tag{1}$$

где: Первая скобка описывает мутацию внутри популяции, $(1 - m)$ отражает долю местных особей, mp_m добавляет вклад мигрантов.

Теорема 1. Теорема о частичном равновесии: Если скорости мутации μ, ν и миграции m малы $(\mu, \nu, m \ll 1)$, то существует устойчивое частичное равновесное значение частоты аллеля p^*, к которому стремится динамика популяции, заданное приближчнно решением:

$$p^* \approx \frac{(1 - m)\nu + mp_m}{(1 - m)(\mu + \nu) + m} \tag{2}$$

Уравнения динамики Рекуррентное уравнение частоты аллеля:

$p_{n+1} = (1 - m)[(1 - \mu)p_n + \nu(1 - p_n)] + mp_m$ что раскрывается в явном виде:

$p_{n+1} = (1 - m)(1 - \mu - \nu)\, p_n + (1 - m)\nu + mp_m$ Это линейное разностное уравнение первого порядка, общее решение которого: $p_n = p^* + (p_0 - p^*)[(1 - m)(1 - \mu - \nu)]^n$ где p_0 – начальная частота.

Свойства модели: * Если $m, \mu, \nu \to 0$, модель стремится к классическому Харди–Вайнберговскому равновесию.

* Чем больше m или μ, ν, тем быстрее система приходит к новому равновесию.

* При непрерывной миграции с отличающейся генетической структурой возможна стабилизация на промежуточных частотах, не совпадающих с внутренними или миграционными аллелями.

Новый пример: расчёт метастабильного равновесия

Модели в виде дифференциальных уравнений миграции между популяциями Рассмотрим две популяции:

Первая популяция: частоты аллелей $p_1, q_1, r_1(A, B, O)$,

Вторая популяция: частоты аллелей p_2, q_2, r_2.

Аллельные частоты нормированы отдельно в каждой популяции: $p_1 + q_1 + r_1 = 1, \quad p_2 + q_2 + r_2 = 1$ Миграция:

Из популяции 2 в популяцию 1 с коэффициентом m (доля переселяющихся за единицу времени).

И из популяции 1 в популяцию 2 тоже с коэффициентом m (можно сделать их разными, здесь рассматриваем с одинаковым коэффициентом).

Дифференциальные уравнения для аллелей в первой популяции:

Для первой популяции:

$$\frac{dp_1}{dt} = m(p_2 - p_1)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = m(q_2 - q_1)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = m(r_2 - r_1)$$

Для второй популяции:

$$\frac{dp_2}{dt} = m(p_1 - p_2)$$

$$\frac{dq_2}{dt} = m(q_1 - q_2)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = m(r_1 - r_2)$$

Каждое уравнение имеет следующий смысл:

Разность $(p_2 - p_1)$ отражает напор миграции аллеля A из популяции 2 в популяцию 1, m определяет скорость миграции:

если популяции изолированы $(m = 0)$, частоты не меняются,

если же миграция есть, частоты стремятся средниться между популяциями.

Более общая модель (с разными скоростями миграции, в случае, когда миграция несимметрична имеет следующий вид:

$$\frac{dp_1}{dt} = m_{21}(p_2 - p_1) \quad \frac{dp_2}{dt} = m_{12}(p_1 - p_2)$$

и аналогично для q, r, где m_{21} – миграция из 2 в 1, m_{12} – миграция из 1 в 2. Если миграция продолжается достаточно долго, популяции становятся генетически одинаковыми: $p_1 = p_2, \quad q_1 = q_2, \quad r_1 = r_2$ и скорость движения зависит от величины m.

Теперь рассмотрим как ведут себя популяции со временем

$$y'(t) + P(t) \cdot y(t) = Q(t)$$

Возьмем общий интегрирующий множитель $\mu(t) = e^{\int P(t)\,dt}$, $\mu(t) = e^{m\,dt} = e^{mt}$ $e^{mt}p_1 + me^{mt}p_1 = mp_2e^{mt}$, $\frac{d}{dt}(e^{mt}) = mp_2e^{mt}$, $e^{mt} = p_2e^{mt} + C$, $p_1 = p_2 + C_1, q_1 = q_2 + C_2, r_1 = r_2 + C_3$, $C_1 = C/e^{mt}$ таким образом находим q_1, r_1. Следующий шаг находим момент пересечения двух популяций

$p_1 = 0,7 \quad q_1 = 0,2 \quad r_1 = 0,1 \quad p_2 = 0,1 \quad q_2 = 0,4 \quad r_2 = 0,2 \quad m = 1.$

$$p_1(t) = q_1(t), \quad m = 1$$

$$p_2 + (p_1 - p_2)e^{-mt} = q_2 + (q_1 - q_2)e^{-mt}$$

$$(p_1 - p_2)e^{-mt} - (q_1 - q_2)e^{-mt} = q_2 - p_2$$

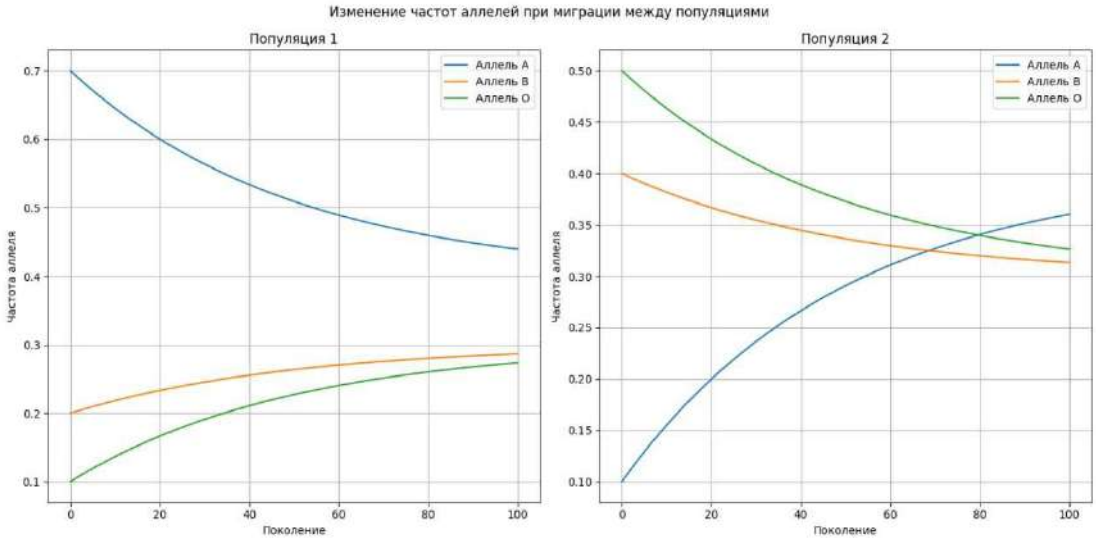
$$e^{-mt} = \frac{q_2 - p_2}{(p_1 - p_2) - (q_1 - q_2)} = a - mt = \ln a$$

$$t = -\frac{1}{m}\ln a$$

$$e^{-t} = \frac{0{,}4 - 0{,}1}{(0{,}7 - 0{,}1) - (0{,}2 - 0{,}4)} = 0{,}375$$

$$t = -\ln(0{,}375) \approx 0{,}9808$$

Приведем изменение частот аллелей между популяциями в графическом виде (см. Рис.1).



Модель частичного равновесия позволяет описать сложные эволюционные процессы в реальных популяциях, где на генетическую структуру влияют как случайные мутации, так и постоянные потоки мигрантов. Предложенные уравнения позволяют количественно оценивать динамику аллелей и предсказывать долгосрочные метастабильные состояния популяций.

Список литературы

1. **Ли Ч.** *Введение в популяционную генетику.* – 1978.
2. **Weinberg W.** *Uber den Nachweis der Vererbung beim Menschen.* – 1908.
3. **Hartl D. L., Clark A. G.** *Principles of Population Genetics.* – 2007.
4. **Ewens W. J.** *Mathematical Population Genetics.* – 2004.
5. **Hamilton M. B.** *Population Genetics.* – 2009.

6. **Кемени Дж., Снелл Дж.** *Математические модели в биологии.* – 1973.
7. **Gillespie J. H.** *Population Genetics: A Concise Guide.* – 2010.

Адрес: 150100, Узбекистан, город Фергана,
ул. Мураббийлар 19

conffsu2025@gmail.com

https://mpderbm.fdu.uz

https://t.me/conffsu2025