МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ОТДЕЛ АСПИРАНТУРЫ И ДОКТОРАНТУРЫ

510200 «Прикладная математика и информатика»

Составитель **Сопуев А.С.,**
д.ф.-м.н., профессор

Ош – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА И ГРАФИЧЕСКИЙ ДИЗАЙН

«Согласован»	«Утвержден»
Зав. отд. аспирантуры и докторантуры ОшГУ к.б.н., доцент: Молдалиев Ж.Т. ___ сентября 2025 года	на заседании кафедры ПМИГД, протокол __ от ____ сентября 2025 года. Зав. кафедры ПМИГД ИМФТИТ ОшГУ к.т.н., доцент: Жолдошов Т.М.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА (СИЛЛАБУС)

Дисциплина: Краевые задачи для уравнений в частных производных

Направления: 510200 «Прикладная математика и информатика»

Расчет часов по учебному плану

Краевые задачи для уравнений в частных производных	Количество часов				СРД	Отчетность
	Всего	Аудиторные занятия				
		Всего ауд.	*Лекции*	*Практ.*		
1 курс, 1 сем.	150 часов 5 кред.	60	*24*	*36*	90	Экзамен

Учебная программа (силлабус) составлена на основе Государственного образовательного стандарта по специальности 510200 “Прикладная математика и информатика” для PhD докторантов.

Составитель: д.ф.-м.н., профессор Сопуев А.

Ош – 2025

Сведения о преподавателей

Лектор-преподаватель:

Сопуев Адахимжан Сопуевич – д.ф.-м.н., профессор каф. Информационных систем и программирования Института МФТиИТ ОшГУ,
общий стаж работы – 49 лет, образование – высшее, закончил физико-математический факультет ОГПИ в 1975 г.

Рабочее место: 723500. Главный корпус ОшГУ, ул. Алымбек Датка, 331, каб. 321.
Мобильный телефон: +996 553 50-00-54
E-mail: sopuev@mail.ru

Контактная информация:

Лекционные занятия проводится в Мультимедийном лекционном классе (ауд. 328), практические занятия в компьютерных классах 302, где осваиваются навыки работы с различными пакетами программ.
Дежурство преподавателя проводится в аудитории 328
по понедельникам с 16^{00} до 18^{00}.

1. Цели и задачи дисциплины

Целями программы является подготовка специалистов, способных решать задачи современной науки и техники, опираясь на передовые достижения в области математики, физики и уравнений с частными производными второго и третьего порядка с двумя независимыми переменными, нахождение достаточных условий, обеспечивающие корректность изучаемых задач.

Докторанты получают знания и навыки в области разработки и использования математических методов и алгоритмов, реализованных в виде информационных технологий. Докторанты смогут изучать, интерпретировать и оптимизировать математические модели для решения научных и инженерных задач, используя современные методы решения краевых задач уравнений математической физики.

Задачи дисциплины:

- *овладение навыков исследования доказательства существования решений краевых задач;*
- *освоение методов исследования единственности решения краевых задач;*
- *формировать умение применять доказательства непрерывной зависимости решений от начально-краевых условий задачи*

Выпускники программы могут работать научными специалистами в области математического моделирования, аналитиками и консультантами по разработке и внедрению современных информационных технологий, а также проводить научные исследования и готовиться к преподавательской деятельности в вузах.

2. Технологическая карта

Всего	Ауд. часы	СРД	1 модуль (60 ч., 30 б.)				2 модуль (60 с., 30 б.)				Итоговый контроль (ИК) (30 б.)				Поощрительные баллы	Всего
			Ауд. ч.				Ауд. ч.									
			Лекция	Лаборато-рия	СРД	**1 рубежный контроль (РК1)**	Лекция	Лаборато-рия	СРД	**2 рубежный контроль (РК2)**	Лекция	Лаборатория	СРД	**Итоговый контроль (ИК**		
120	60	60	12	18	30		12	18	30							
Баллы			30	30	30	**30 б.**	30	30	30	**30 б.**	30	30	20	**30 б**	**10 б**	
Модули и рез-ты итоговых контролей			ТК=(Лек+Пр+ +СР)/3, М1=(ТК1+ТК2+ +ИК1)/3				ТК=(Лек+Пр+ +СР)/3, М2=(ТК3+ТК4+ +ИК2)/3				ИК=(Лек+Пр+ +СР)/3, Экз=М1+М2+ИК+П					100

Ауд. – аудитория, ТК – текущий контроль, М – модули, СР – самостоятельная работа диссертанта, РК – рубежный контроль, ИК – итоговый контроль, П – поощрительный балл.

3. Тематический план лекционного занятия

№	Наименование разделов, модулей и тем	К-во часов
	Модуль 1	
1	Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными	2
2	Уравнение колебания струны. Общее решение. Решение задача Коши. Понятие о корректности краевой задачи.	2
3	Решение задачи Гурса для уравнения гиперболического типа методом последовательных приближений	2
4	Уравнение теплопроводности. Фундаментальное решение. Решение первой краевой задачи методом функции Грина	2
5	Уравнение смешанного типа и их классификация. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабoло-гиперболического типа	2
6	Задачи со смещением для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа	2
	Модуль 2	
7	Задачи с нелокальными условиями для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа	2
8	Классификация уравнений в частных производных 3-го порядка с двумя независимыми переменными	2
9	Краевые задачи для уравнений в частных производных 3-го порядка с двумя независимыми переменными	2
10	Задачи со смещением для уравнения 3-го порядка с двумя независимыми переменными	2
11	Задачи с нелокальными условиями 3-го порядка с двумя независимыми переменными	2
12	Классификация уравнений в частных производных 4-го порядка с двумя независимыми переменными	2
	Всего:	24 часа

4. Тематический план практических занятий

№	Наименование разделов, модулей, темы и учебных вопросов	К-во часов
Модуль 1		
1	Приведение к каноническому виду уравнений гиперболического типа	2
2	Приведение к каноническому виду уравнений параболического типа	2
3	Приведение к каноническому виду уравнений составного типа	2
4	Решение задачи Коши для уравнения колебания струны	2
5	Решение задачи Гурса для уравнения колебания струны	2
6	Решение задачи Дарбу для уравнения колебания струны	2
7	Доказательство корректности на примере задачи Коши	2
8	Метод разделения переменных для уравнения колебания струны	2
9	Фундаментальное решение уравнения теплопроводности	2
Модуль 2		
10	Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности	2
11	Функция Грина для уравнения теплопроводности	2
12	Применение метода abc при доказательство единственности решения краевых задач для уравнения теплопроводности	2
13	Задача Бицадзе-Самарского для уравнения теплопроводности	2
14	Решение уравнения теплопроводности с учетом специальной энергии	2
15	Задача Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения	2
16	Построение функции Грина первой краевой задачи для ОДУ	2
17	Сведение задачи Трикоми к решению ИУ Фредгольма 2-го рода	2
18	Решение ИУ Фредгольма 2-го рода методом резольвенты	2
	Всего:	36 часов

5. Литература

1. Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. - Ташкент: Фан, 1982. - 104 с.
2. Апаков Ю.П. Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в трехмерных областях: Дис. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1989. – 115 с.
3. Баренблатт Г.И., Жеглов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиновых породах // Прикл. матем. и мех. - 1960.- Т. 25. - Вып. 5. - С. 852-864.
4. Бердышев А.С. Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1983. - 120 с.
5. Бжихатов Х.Г., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Доклады АН СССР. - 1968. - Т. 183. - № 2. - С. 261-264.
6. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - М.: Изд-во АН СССР, 1959. - 164 с.

Содержание

6. Критерии оценивания

Оценка знаний (академической успеваемости)
PhD докторанта

30 балльная система	100 балльная система	Буквенная система	GPA	Традиционная система
26 – 30	87 – 100	A	4,0	Отлично
24 – 25	80 – 86	B	3,33	Хорошо
22 – 23	74 – 79	C	3,0	
20 – 21	68 – 73	Д	2,33	Удовлетворительно
18 – 19	61 – 67	E	2,0	
9 – 17	31 – 60	FX	0	Неудовлетворительно
0 – 8	0 – 30	F	0	

7. Критерии оценки знаний

Выставление оценок на экзаменах осуществляется на основе принципов объективности, справедливости, всестороннего анализа качества знаний магистрантов, и других положений, способствующих повышению надежности оценки знаний обучающихся и устранению субъективных факторов.

В соответствии с действующими нормативными актами и рекомендациями Министерства образования и науки КР устанавливаются следующие критерии выставления оценок на экзаменах:

- оценка *"отлично"* выставляется магистранту, который обнаружил на экзамене всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, который усвоил основную литературу и ознакомился с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "отлично" выставляется магистрантам, усвоившим взаимосвязь основных понятий дисциплины и их значений для приобретаемой профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала;

- оценка *"хорошо"* выставляется магистранту, который на экзамене обнаружил полное знание учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные в программе задания, усвоил основную литературу, рекомендованную в программе. Как правило, оценка "хорошо" выставляется магистрантам, показавшим систематический характер знаний по дисциплине и способным к их самостоятельному выполнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности;

- оценка *"удовлетворительно"* выставляется магистранту, обнаружившему знание основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, справляющемуся с выполнением заданий, предусмотренных программой, который ознакомился с основной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "удовлетворительно" выставляется магистрантам, допустившим погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя;

- оценка *"неудовлетворительно"* выставляется магистранту, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий, не ознакомившемуся с основной литературой, предусмотренной программой, и не овладевшему базовыми знаниями, предусмотренными по данной дисциплине и определенными соответствующей программой курса (перечень основных знаний и умений, которыми должны овладеть магистранты, является обязательным элементом рабочей программы курса).

Оценка знаний (академической успеваемости) магистранту осуществляется по 100 балльной системе (шкале) следующим образом:

30 балльная система	100 балльная система	Буквенная система	GPA	Традиционная система
26 – 30	87 – 100	A	4,0	Отлично
24 – 25	80 – 86	B	3,33	Хорошо
22 – 23	74 – 79	C	3,0	
20 – 21	68 – 73	Д	2,33	Удовлетворительно
18 – 19	61 – 67	E	2,0	
9 – 17	31 – 60	FX	0	Неудовлетворительно
0 – 8	0 – 30	F	0	

Лекции: «Краевые задачи для уравнений в частных производных»

1. Основные понятия теории уравнений в частных производных

Определение 1. *Уравнение, связывающее неизвестную функцию* $y(x)$, *независимую переменную* x *и производные от неизвестной функции, называется обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Общий вид этого уравнения имеет вид

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0, \tag{1}$$

где F - заданная функция.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком этого уравнения. Например, линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y'+a(x)y=f(x), \tag{2}$$

где $a(x),\ f(x)$ - заданные функции.

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (2) называется линейным однородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и имеет вид

$$y'+a(x)y=0. \tag{3}$$

Главная особенность обыкновенного дифференциального уравнения состоит в том, что искомая функция зависит лишь от одного независимого переменного x.

А что будет, если искомая функция зависит от нескольких независимых переменных? На этот вопрос отвечает следующее определение.

Определение 2. *Уравнение, связывающее неизвестную функцию* $u(x_1,x_2,...,x_n)$, *независимые переменные* $x_1,x_2,...,x_n$ *и частные производные от неизвестной функции, называется уравнением в частных производных.*

Общий вид уравнения в частных производных n го имеет вид

$$F(x_1,x_2,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}})=0, \tag{4}$$

где F - заданная функция, причем $k_1+k_2+...+k_n=n$.

Определение 3. *Наивысший порядок частной производной, входящей в уравнение, называется порядком этого уравнения.*

Например, уравнение

$$u_{xxyy}+u_{xx}-u_{yy}=0$$

является дифференциальным уравнением 4-го порядка с двумя независимыми переменными.

Общее уравнение с частными производными 1-го порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \tag{5}$$

Например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{6}$$

является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка.

Общее уравнение с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})=0 \tag{7}$$

или в виде

$$F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy})=0\,.$$

Определение 4. *Уравнение с частными производными называется квазилинейным, если оно линейно относительно всех ее старших частных производных.*

Например, квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$\begin{aligned}&A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx}+B(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy}+C(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy}=\\&=F(x,y,u,u_x,u_y)\end{aligned} \tag{8}$$

Простейшим представителем квазилинейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными является следующее уравнение

$$u_{xx}-(1+xu_x)u_{xy}+u_y^2u_{yy}+yu_x^3+uu_y=0\,.$$

Определение 5. *Уравнение в частных производных называется линейным, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее частных производных.*

Общий вид линейного неоднородного уравнения в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными x и y имеет вид

$$\begin{aligned}&A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+E(x,y)u_x+\\&+G(x,y)u_y+H(x,y)u=F(x,y),\end{aligned} \tag{9}$$

здесь $A(x,y),B(x,y),C(x,y),D(x,y),E(x,y),G(x,y)$ - коэффициенты уравнения, $F(x,y)$ - правая часть уравнения.

Если $F(x,y)\equiv 0$, то уравнение (9) примет вид

$$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+E(x,y)u_x+G(x,y)u_y+H(x,y)u=0 \tag{10}$$

Уравнение (10) называется линейным однородным уравнением в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.

Уравнение

$$u_{xx}-u_{yy}=0 \tag{11}$$

является простейшим представителем линейного однородного уравнения в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными.

Пусть в области D все коэффициенты и правая часть уравнения (9) определены.

Определение 6. *Действительная функция $u(x,y)$, определенная в области D, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в уравнение (9), и обращающая его в тождество, называется регулярным решением.*

Наряду с регулярными решениями в теории уравнений в частных производных определенные значения имеют решения, перестающие в изолированных точках. К ним относятся так называемые *элементарные* или *фундаментальные* решения.

Например, функция $\Phi(x,y) = ln(x^2 + y^2)$ является фундаментальным решением уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

так как она перестает быть регулярным в точке $O(0,0)$.

Все встречающиеся в приложениях уравнения имеют целые семейства решений. Однако существуют уравнения, множества решений которых весьма узки и в некоторых случаях даже не существует.

Например, множество действительных решений уравнения

$$u_x^2 + u_y^2 = 0$$

исчерпывается функцией $u(x,y) = const$, а уравнение

$$u_x^2 + u_y^2 + 1 = 0$$

вовсе не имеет действительных решений.

Если рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка (1), то его общее решение содержит n произвольных постоянных $F(x,y,C_1,C_2,...,C_n) = 0.$ Любое частное решение получается из него, если параметрам $C_1, C_2,..., C_n$ придать определенные значения.

Некоторые дифференциальные уравнения в частных производных допускает общее решение, содержащее произвольные функции, количество которых равно порядку уравнения.

Например, общее решение уравнения (6) имеет вид

$$u(x,y) = \varphi(x + y),$$

где φ - произвольная дифференцируемая функция.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (12)$$

Найдем его общий интеграл, т.е. функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую (12). Для этого сначала запишем это уравнение в виде: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$ Поскольку производная по переменной x от величины, стоящей в скобках, равна нулю, то последняя является некоторой произвольной функцией от y: $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$. Поэтому $u(x,y) = F_1(x) + \int f(y)dy$. Но интеграл $\int f(y)dy$ представляет собой некоторую произвольную функцию $F_2(y) = \int f(y)dy$. Таким образом, получим общее решение вида

$$u(x,y) = F_1(x) + F_2(y),$$

которая зависит от двух произвольных функций.

Чтобы выделит из всей совокупности решений какое-либо частное решение, надо задать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями являются граничные и начальные условия.

При математическом моделировании различных физических, химических, биологических, технических и других явлений природы получаем дифференциальные уравнения в частных производных.

Если дифференциальные уравнения в частных производных описывают физические процессы, то эти уравнения называются уравнениями математической физики.

Типичными примерами таких уравнений являются следующие уравнения:

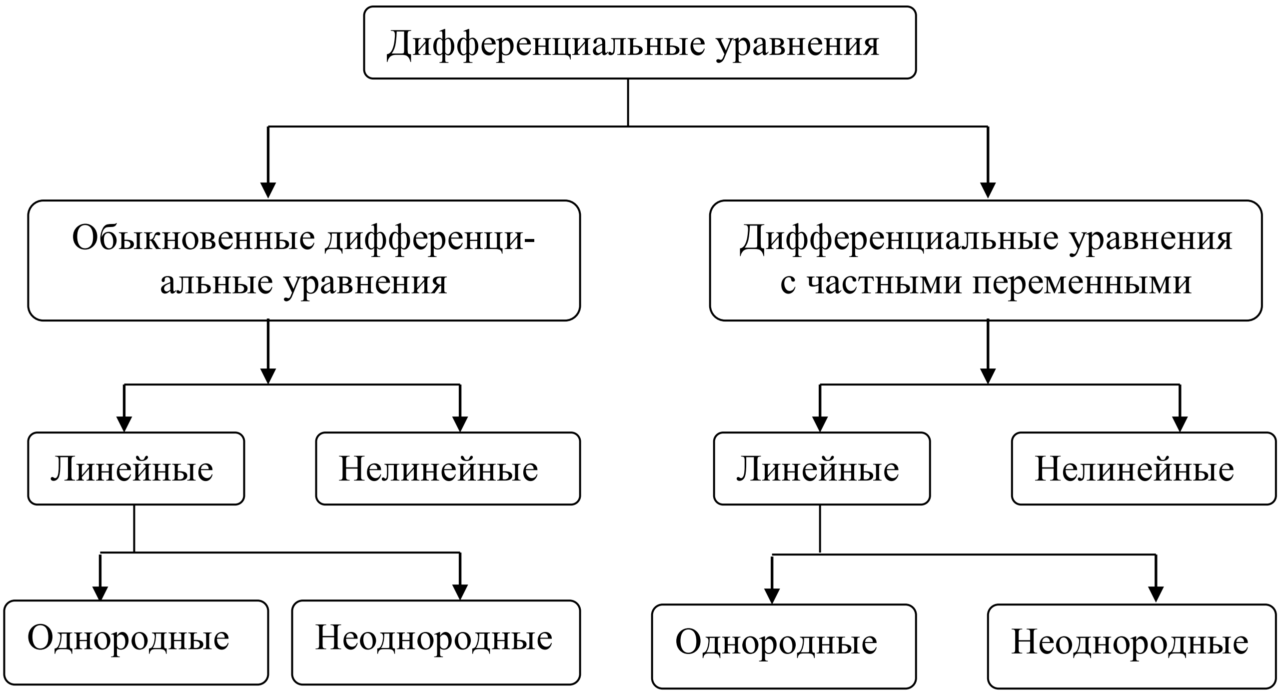
$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0, a = const$ - уравнения колебания струны,

$a^2 u_{xx} - u_t = 0, a = const$ - уравнения теплопроводности,

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ - описывает стационарные процессы.

Таким образом, можно дать следующую квалификационную схему для дифференциальных уравнений.

Квалификационная схема дифференциальных уравнений



2. Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными

В области D плоскости (x, y) рассмотрим линейное уравнение в частных производных второго порядка относительно старших производных

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \qquad (1)$$

Пусть в окрестности точки $M(x_0, y_0) \in D$ выполняются условия $A \neq 0$ или $B \neq 0$.

С помощью замены переменных

$$\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y) \qquad (2)$$

уравнение (1) можем привести к каноническому виду. Если якобиан преобразования (2) отличен от нуля: $J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$. Тогда существует обратное преобразование $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$. Имеем $u(x,y) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) =$ $= \vartheta(\xi,\eta)$. Находим частные производные

$$u_x = \vartheta_\xi \xi_x + \vartheta_\eta \eta_x, \qquad u_y = \vartheta_\xi \xi_y + \vartheta_\eta \eta_x,$$

$$u_{xx} = \vartheta_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\vartheta_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \vartheta_{\eta\eta}\eta_x^2 + \vartheta_\xi\xi_{xx} + \vartheta_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{xy} = \vartheta_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + 2\vartheta_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + \vartheta_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \vartheta_\xi\xi_{xy} + \vartheta_\eta\eta_{xy},$$

$$u_{yy} = \vartheta_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\vartheta_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \vartheta_{\eta\eta}\eta_y^2 + \vartheta_\xi\xi_{yy} + \vartheta_\eta\eta_{yy}.$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$A_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2B_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + C_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \qquad (3)$$

где

$$A_1(\xi,\eta) = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,$$

$$B_1(\xi,\eta) = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y,$$

$$C_1(\xi,\eta) = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2.$$

Если замену (2) выбрать так, чтобы $A_1 = 0, C_1 = 0$, то уравнение (3) примет более простой вид. С этой целью рассмотрим уравнение

$$Az_x^2 + 2Bz_xz_y + Cz_y^2 = 0 \qquad (4)$$

Имеет место

Лемма 1. *Функция $z = \varphi(x,y)$ является решением уравнения (4) тогда и только тогда, когда соотношение $\varphi(x,y) = const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения*

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0 \tag{5}$$

Уравнение (5) называется уравнением характеристик. Алгебраическое уравнение

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0, \tag{6}$$

соответствующее уравнению (5) называется характеристическим уравнением.

Если дискриминант уравнения (6) обозначим через

$$\delta = B^2 - AC, \tag{7}$$

то дискриминант уравнения, соответствующее уравнению (3) обозначим так $\Delta_1 = B_1^2 - A_1C_1$.

Лемма 2. Имеет место соотношение

$$\delta_1 = J^2\delta \tag{8}$$

где $J = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y$.

Если $J \neq 0$, то замена переменных (2) не является вырождающимся и тип уравнения в рассматриваемой области не меняется.

Уравнение (5) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\delta}}{A}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\delta}}{A} \tag{10}$$

По знаку дискриминанта δ можно дать следующую классификацию:

Если в окрестности точки $M(x_0, y_0)$

1) $\delta > 0$, *то уравнение (1) в точке* $M(x_0, y_0)$ *называется уравнением гиперболического типа,*

2) $\delta < 0$, *то уравнение (1) в точке* $M(x_0, y_0)$ *называется уравнением эллиптического типа,*

3) $\delta = 0$, *то уравнение (1) в точке* $M(x_0, y_0)$ *называется уравнением параболического типа.*

Если во всех точках области D

1) $\delta > 0$, *то уравнение (1) в области* D *называется уравнением гиперболического типа,*

2) $\delta < 0$, *то уравнение (1) в области* D *называется уравнением эллиптического типа,* *3) $\delta = 0$, то уравнение (1) в области D называется уравнением параболического типа,*

4) Если в области D знак дискриминанта δ меняется, то уравнение (1) в области D называется уравнением смешанного типа.

Если $y < 0$, то $\delta = -y > 0$. Поэтому в нижней полуплоскости уравнение принадлежит гиперболическому типу.

Если $y > 0$, то $\delta = -y < 0$. Поэтому в верхней полуплоскости уравнение принадлежит эллиптическому типу.

Если $y = 0$, то $\delta = 0$. Поэтому вдоль оси абсцисс уравнение принадлежит параболическому типу.

Таким образом, в некоторой области D плоскости, содержащей отрезок оси абсцисс, уравнение является уравнением смешанного типа.

3. Приведение дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду

1. Приведение к каноническому виду уравнений гиперболического типа. Рассмотрим уравнение

$$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y) \qquad (1)$$

в области D плоскости xOy. Без ограничения общности будем считать, что $A\neq 0$. Составляем уравнение характеристик

$$A(dy)^2-2Bdydx+C(dx)^2=0 \qquad (2)$$

и характеристическое уравнение

$$A\lambda^2-2B\lambda+C=0$$

Пусть во всех точках области D дискриминант $\Delta=B^2-AC>0$. Тогда из (2) имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{A},\ \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{A} \qquad (3)$$

Правые части уравнений (3) действительны и различны. Интегрируя (3) получим общие интегралы:

$$y-\int\frac{B(x,y)+\sqrt{\Delta}}{A(x,y)}dx=C_1,\ y+\int\frac{B(x,y)-\sqrt{\Delta}}{A(x,y)}dx=C_2. \qquad (4)$$

Кривые (4) определяют семейства двух различных действительных характеристик. Положим

$$\xi=\varphi(x,y)\equiv y-\int\frac{B(x,y)+\sqrt{\Delta}}{A(x,y)}dx,\eta=\psi(x,y)\equiv y+\int\frac{B(x,y)-\sqrt{\Delta}}{A(x,y)}dx. \qquad (5)$$

Пусть якобиан преобразования переменных (5) отличен от нуля: $J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x\neq 0$. Тогда существует обратное преобразование $x=x(\xi,\eta),\ y=y(\xi,\eta)$. Поэтому $u(x,y)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=\vartheta(\xi,\eta)$. Находим частные производные

$$u_x=\vartheta_\xi\xi_x+\vartheta_\eta\eta_x, \qquad u_y=\vartheta_\xi\xi_y+\vartheta_\eta\eta_y,$$

$$u_{xx}=\vartheta_{\xi\xi}\xi_x^2+2\vartheta_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+\vartheta_{\eta\eta}\eta_x^2+\vartheta_\xi\xi_{xx}+\vartheta_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{xy}=\vartheta_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+\vartheta_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+\vartheta_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+\vartheta_\xi\xi_{xy}+\vartheta_\eta\eta_{xy},$$

$$u_{yy}=\vartheta_{\xi\xi}\xi_y^2+2\vartheta_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+\vartheta_{\eta\eta}\eta_y^2+\vartheta_\xi\xi_{yy}+\vartheta_\eta\eta_{yy}.$$

Тогда уравнение (1) приводится к виду

$$A_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi}+2B_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta}+C_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta}=F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \qquad (6)$$

где

$$A_1(\xi,\eta)=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2,$$

$$B_1(\xi,\eta)=A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+C\xi_y\eta_y,$$

$$C_1(\xi,\eta)=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2.$$

В силу леммы 1, имеем, что

$$A_1(\xi,\eta)=A\varphi_x^2+2B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2=0,\ C_1(\xi,\eta)=A\psi_x^2+2B\psi_x\psi_y+C\psi_y^2=0.$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$2B_1(\xi,\eta)\vartheta_{\xi\eta}=F_1(\xi,\eta,\vartheta,\vartheta_\xi,\vartheta_\eta)$$

Отсюда, будем, иметь

$$\vartheta_{\xi\eta}=\Phi_1(\xi,\eta,\vartheta,\vartheta_\xi,\vartheta_\eta),\Phi=\frac{F_1}{2B_1} \tag{7}$$

Это канонический вид гиперболического уравнения.

Если вести замену

$$\xi=\alpha+\beta,\eta=\alpha-\beta,$$

то получим второй канонический вид уравнения

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\Phi_1,\ \Phi_1=4\Phi \tag{8}$$

Пример 1. Найдите канонический вид уравнения

$$u_{xx}-u_{xy}-2yu_x=0. \tag{9}$$

Решение. *Шаг 1. Определение типа уравнения.* В данном случае $A=1,B=-1/2,C=0$. Дискриминант $\Delta=B^2-AC=(-1/2)^2-1\cdot 0=1/4>0$. Следовательно, уравнение принадлежит гиперболическому типу.

Шаг 2. Отыскание характеристик уравнения. Составляем уравнение характеристик:

$$(dy)^2+dydx=0.$$

Записывая это уравнение в виде $(dx+dy)dy=0$, получим: $dy+dx=0,dy=0$. Общие интегралы этих уравнений имеют вид $x+y=C_1,y=C_2$. Уравнение имеет два семейства действительных характеристик.

Шаг 3. Подбор замены переменных. Воспользуюсь уравнениями характеристик, замена переменных подберем так

$$\xi=x+y,\eta=y. \tag{10}$$

Так как $\xi_x=1,\xi_y=1,\eta_x=0,\eta_y=1$, то якобиан $J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x=1\cdot 1-1\cdot 0=1$.

Обратное преобразование имеет вид $x = \xi - \eta,\ y = \eta$.

Шаг 4. Вычисление частных производных. Тогда $u(x,y) = u(\xi - \eta, \eta) = .$ $= \vartheta(\xi,\eta)$. Найдем частные производные

$$u_x = \vartheta_\xi \xi_x + \vartheta_\eta \eta_x = \vartheta_\xi,\ u_y = \vartheta_\xi \xi_y + \vartheta_\eta \eta_y = \vartheta_\xi + \vartheta_\eta$$

$$u_{xx} = \vartheta_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\vartheta_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \vartheta_{\eta\eta}\eta_x^2 + \vartheta_\xi \xi_{xx} + \vartheta_\eta \eta_{xx} = \vartheta_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = \vartheta_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \vartheta_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + \vartheta_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \vartheta_\xi \xi_{xy} + \vartheta_\eta \eta_{xy} = \vartheta_{\xi\xi} + 2\vartheta_{\xi\eta},$$

Шаг 5. Преобразование уравнения. Подставляя значения частных производных в уравнение, имеем

$$u_{xx} - u_{xy} - 2yu_x = \vartheta_{\xi\xi} - \vartheta_{\xi\xi} - 2\vartheta_{\xi\eta} - 2\eta\vartheta_\xi = -2(\vartheta_{\xi\eta} + \eta\vartheta_\xi) = 0$$

или

$$\vartheta_{\xi\eta} + \eta\vartheta_\xi = 0$$

Это и есть канонический вид гиперболического уравнения.

2. Приведение к каноническому виду уравнений параболического типа. Пусть $\Delta = B^2 - AC = 0$. Тогда уравнения (9) и (10) совпадают: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B}{A}$.

Так как $B = \sqrt{A}\sqrt{C}$, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{A}\sqrt{C}}{A} = \dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}$, то есть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}. \tag{11}$$

Пусть общий интеграл этого уравнения имеет вид $\varphi(x,y) = C$. Найдем дифференциал этого соотношения: $\varphi_x(x,y)dx + \varphi_y(x,y)dy = 0.$ Отсюда найдем $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}$. Тогда с учетом (11) будем имеет: $\dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} = -\dfrac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}$.

Следовательно, для $\varphi(x,y)$ имеет место соотношение

$$\sqrt{A}\varphi_x(x,y) + \sqrt{C}\varphi_y(x,y) = 0. \tag{12}$$

Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \eta(x,y) \tag{13}$$

где $\eta = \eta(x,y)$ - любая функция, независимая от $\varphi(x,y)$. Тогда, будем имеет $A_1(\xi,\eta) = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = A\xi_x^2 + 2\sqrt{A}\sqrt{C}\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)^2 =$

$= (\sqrt{A}\varphi_x(x,y) + \sqrt{C}\varphi_y(x,y))^2 = 0$ в силу соотношения (12). Кроме того,

$B_1(\xi,\eta) = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y = A\xi_x\eta_x + \sqrt{A}\sqrt{C}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y =$

$$= A\xi_x\eta_x + \sqrt{A}\sqrt{C}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y = (\sqrt{A})^2\xi_x\eta_x + \sqrt{A}\sqrt{C}\xi_x\eta_y + \sqrt{A}\sqrt{C}\eta_x\xi_y +$$
$$+(\sqrt{C})^2\xi_y\eta_y = \sqrt{A}\xi_x(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y) + \sqrt{C}\xi_y(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y) = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)\times$$
$$\times(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y) = 0.$$

Таким образом, $A = 0, B = 0$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$C_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

Отсюда будем иметь канонический вид уравнения параболического типа:

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\ \Phi = \frac{F_1}{C_1}.$$

Пример 2. Найдите канонический вид уравнения

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - xu_y = 0. \qquad (14)$$

Решение. *Шаг 1. Определение типа уравнения.* В данном случае $A = 1, B = -2, C = 4$. Дискриминант $\Delta = B^2 - AC = (-2)^2 - 1\cdot 4 = 0$. Следовательно, уравнение принадлежит параболическому типу.

Шаг 2. Отыскание характеристик уравнения. Составляем уравнение характеристик: $dy^2 + 4dydx + 4dx^2 = 0$. Это уравнение можно записать в виде $(dy + 2dx)^2 = 0$. Отсюда имеем $2dx + dy = 0$. Интегрируя это уравнение, имеем $2x + y = C$. Итак, уравнение (14) имеет один двукратную действительную характеристику.

Шаг 3. Подбор замены переменных. Положим $\xi = 2x + y, \eta = x$. Так как $\xi_x = 2, \xi_y = 1, \eta_x = 1, \eta_y = 0$, то $J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = 2\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1$, то есть якобиан отличен от нуля. Найдем обратное преобразование: $x = \eta,\ y = \xi - 2\eta$.

Шаг 4. Вычисление частных производных. Имеем $u(x,y) = u(\xi - 2\eta,\eta) = \ = \vartheta(\xi,\eta)$. Найдем частные производные

$$u_x = \vartheta_\xi\xi_x + \vartheta_\eta\eta_x = 2\vartheta_\xi + \vartheta_\eta,\ u_y = \vartheta_\xi\xi_y + \vartheta_\eta\eta_y = \vartheta_\xi$$

$$u_{xx} = \vartheta_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\vartheta_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \vartheta_{\eta\eta}\eta_x^2 + \vartheta_\xi\xi_{xx} + \vartheta_\eta\eta_{xx} = 4\vartheta_{\xi\xi} + 4\vartheta_{\xi\eta} + \vartheta_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = \vartheta_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \vartheta_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + \vartheta_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \vartheta_\xi\xi_{xy} + \vartheta_\eta\eta_{xy} = 2\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = \vartheta_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\vartheta_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \vartheta_{\eta\eta}\eta_y^2 + \vartheta_\xi\xi_{yy} + \vartheta_\eta\eta_{yy} = \vartheta_{\xi\xi}.$$

Шаг 5. Преобразование уравнения. Из уравнения (14) имеем
$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - xu_y = 4\vartheta_{\xi\xi} + 4\vartheta_{\xi\eta} + \vartheta_{\eta\eta} - 8\vartheta_{\xi\xi} - 4\vartheta_{\xi\eta} + 4\vartheta_{\xi\xi} - \eta\vartheta_\xi = \vartheta_{\eta\eta} - \eta\vartheta_\xi = 0$.
Таким образом, приходим к следующему каноническому виду уравнения параболического вида

$$\vartheta_{\eta\eta} - \eta\vartheta_\xi = 0$$

3. Приведение к каноническому виду уравнений эллиптического типа. Пусть $\Delta = B^2 - AC < 0$. Тогда правые части уравнений (3) будут комплексными. Предположим, что соотношение

$$\varphi(x,y) = C$$

представляет собой комплексный интеграл первого уравнения (3). Тогда общий интеграл второго уравнения (3) имеет вид

$$\varphi^*(x,y) = C,$$

где $\varphi^*(x,y)$ - сопряженная функция относительно $\varphi(x,y)$. Если положим

$$\xi = \varphi(x,y), \eta = \varphi^*(x,y), \tag{15}$$

то уравнение (1) приводится к такому же виду что и уравнения гиперболического типа. Однако коэффициенты уравнения при этом будут комплексными. Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные α и β, следующим образом:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}.$$

Тогда $\varphi = \alpha + i\beta, \varphi* = \alpha - i\beta$. Следовательно, замена переменных (15) запишется в виде

$$\xi = \alpha + i\beta, \eta = \alpha - i\beta.$$

В этом случае будем иметь

$$A_1(\xi,\eta) = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = (A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2) - (A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y) = 0.$$

Это означает, что $A_1 = C_1$, $B_1 = 0$. Тогда разделив на коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ получим канонический вид эллиптического уравнения.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta), \Phi = \frac{F}{A_1}$$

Пример 3. Найдите канонический вид уравнения

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0. \tag{16}$$

Решение. *Шаг 1. Определение типа уравнения.* В данном случае $A = 1, B = 1, C = 5$. Дискриминант $\Delta = B^2 - AC = (1)^2 - 1 \cdot 5 = -4 < 0$. Следовательно, уравнение принадлежит эллиптическому типу.

Шаг 2. Отыскание характеристик уравнения. Составляем уравнение характеристик: $dy^2 - 2dydx + 5dx^2 = 0$. Это уравнение распадается на два уравнения

$$\frac{dy}{dx}=1+2i,\ \frac{dy}{dx}=1-2i.$$

Общие интегралы имеют вид

$$x-y+2xi=C_1,\ x-y-2xi=C_2.$$

Шаг 3. Подбор замены переменных. Замену переменных выберем следующим образом: $\xi=x-y,\eta=2x$. Очевидно, что $\xi_x=1,\xi_y=-1,\eta_x=2,\eta_y=0$. Тогда $J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x=2\cdot 0+1\cdot 2=2$. Итак, якобиан отличен от нуля. Найдем обратное преобразование: $x=\eta,\ y=\xi-2\eta$.

Шаг 4. Вычисление частных производных. Имеем $u(x,y)=u(\eta,\xi-2\eta)==\vartheta(\xi,\eta)$. Найдем частные производные

$$u_x=\vartheta_\xi\xi_x+\vartheta_\eta\eta_x=\vartheta_\xi+2\vartheta_\eta,\ u_y=\vartheta_\xi\xi_y+\vartheta_\eta\eta_y=-\vartheta_\xi,$$

$$u_{xx}=\vartheta_{\xi\xi}\xi_x^2+2\vartheta_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+\vartheta_{\eta\eta}\eta_x^2+\vartheta_\xi\xi_{xx}+\vartheta_\eta\eta_{xx}=\vartheta_{\xi\xi}+4\vartheta_{\xi\eta}+4\vartheta_{\eta\eta},$$

$$u_{xy}=\vartheta_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+\vartheta_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+\vartheta_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+\vartheta_\xi\xi_{xy}+\vartheta_\eta\eta_{xy}=-\vartheta_{\xi\xi}-2\vartheta_{\xi\eta},$$

$$u_{yy}=\vartheta_{\xi\xi}\xi_y^2+2\vartheta_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+\vartheta_{\eta\eta}\eta_y^2+\vartheta_\xi\xi_{yy}+\vartheta_\eta\eta_{yy}=\vartheta_{\xi\xi}.$$

Шаг 5. Преобразование уравнения. Из уравнения (16) имеем $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=\vartheta_{\xi\xi}+4\vartheta_{\xi\eta}+4\vartheta_{\eta\eta}-2\vartheta_{\xi\xi}-4\vartheta_{\xi\eta}+5\vartheta_{\xi\xi}-32\vartheta=$

$=4(\vartheta_{\xi\xi}+\vartheta_{\eta\eta})-32\vartheta=0$. Отсюда получим канонический вид эллиптического уравнения: $\vartheta_{\xi\xi}+\vartheta_{\eta\eta}-8\vartheta=0$.

4. Задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Типы краевых условий. Постановка краевых задач

4.1. Уравнение малых поперечных колебаний струны

В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Примем следующие допущения:

1). Натяжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю.

2). Пусть струна длины ℓ в начальный момент направлена по отрезку оси от 0 до ℓ.

3). Предположим, что концы струны жестко закреплены в точках $x=0$ и $x=\ell$.

Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя положение, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, или отклонить струну и придать ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения – говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси Ox и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x,t)$, которая дает величину перемещения точек струны с абсциссой x в момент t.

Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости (x,u), то будем предполагать, что длина элемента струны $\cup AB$ равняется ее проекции на ось Ox, т.е. $\cup AB = x_2 - x_1$. Также будем предполагать, что натяжение во всех точках струны одинаковое, обозначим его через T.

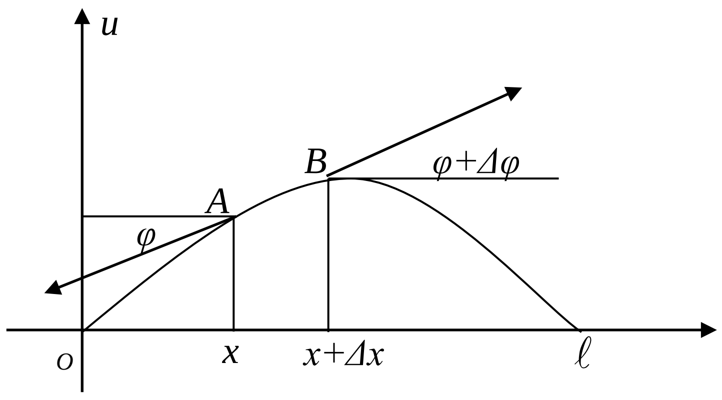


Рис. 1.

Рассмотрим элемент струны AB. На элемент струны AB могут действовать следующие силы.

1. Сила натяжения. На концах этого элемента, по касательным к струне, действует сила натяжения $\vec{T}$. Пусть касательные образуют с осью Ox углы φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда проекция на ось Ou сил, действующих на элемент AB будет равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi$. Так как угол φ мал, то можно положить

$sin\varphi \approx tg\varphi$, и мы будем иметь

$$F_{íàòÿæ} = T\,sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\,sin\varphi \approx T\,tg(\varphi + \Delta\varphi) - T\,tg\varphi =$$

$$= T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x, \quad 0<\theta<1.$$

2. Внешняя сила $F_{âíåø} = F(x,t)\Delta x$. Здесь $F(x,t)$ означает плотность внешней силы. Внешняя сила $F(x,t)$, приложенная к струне, может произвольным образом зависеть от x и t. Например, это может быть гравитационная сила $F_{ãðàâ} = -mg$.

3. Сила сопротивления $F_{ñîïð} = -\beta\dfrac{\partial u}{\partial t}\Delta x$. Если струна колеблется в среде, то возникает сила сопротивления, которая пропорциональна скорости u_t.

4. Возвращающая сила $F_{âîçâð} = -\gamma u\Delta x$. Эта сила направлена противоположно смещению струны. Если смещение положительно, то сила отрицательна.

Тогда результирующая сила имеет вид

$$F = F_{íàòÿæ} + F_{âíåø} + F_{ãðàâ} + F_{ñîïð} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x + F(x,t)\Delta x - \beta\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x - \gamma u\Delta x.$$

5. Сила инерции. Пусть $\rho-$ линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет $m = \rho\,\Delta x$. Ускорение элемента равно $a = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

По второму закону Ньютона

$$F = ma,$$

где F - сила, действующая на тело, m - масса тела, a - ускорение тела.

Следовательно, по второму закону Ньютона будем иметь

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x + F(x,t)\Delta x - \beta\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x - \gamma u\Delta x = \rho\,\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Сокращая на Δx и обозначая $a^2 = \dfrac{T}{\rho}, b = -\dfrac{\beta}{\rho}, c = -\dfrac{\gamma}{\rho}, f(x,t) = \dfrac{1}{\rho}F(x,t)$, получаем уравнение движения колебательного процесса

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu + f(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

Это и есть хорошо известное ***телеграфное уравнение***. Если отсутствуют сила сопротивления и возвращающая сила, то из уравнения (1) получаем ***уравнение вынужденных колебаний струны***:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

Если отсутствует еще и внешняя сила, то получим уравнение ***свободных колебаний струны***:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

4.2. Типы краевых условий.

Для полного определения движения струны одного уравнения недостаточно. Искомая функция $u(x,t)$ в области $D=\{(x,y):0<x<\ell,0<t<h\}$ должна удовлетворять еще граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны ($x=0$ и $x=\ell$), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент ($t=0$).

Запишем краевые условия, с учетом которых следует интегрировать уравнение (1). Пусть, например, концы струны при $x=0$ и $x=\ell$ неподвижны, те есть жестко закреплен. Тогда при любом t должны выполняться равенства:

$$u(0,t)=0,u(\ell,t)=0,0\le t\le h. \qquad (4)$$

Если концы струны изменяется по заданному режиму (***граничные условия 1-го рода***), граничные условия запишется в виде:

$$u(0,t)=\varphi_1(t),u(\ell,t)=\varphi_2(t),0\le t\le h. \qquad (5)$$

Эти равенства являются граничными условиями нашей задачи.

Если концы струны свободны, то граничные условия имеют вид

$$u_x(0,t)=0,u_x(\ell,t)=0,0\le t\le h. \qquad (6)$$

Если на концах струны заданы силы (***граничные условия 2-го рода***), то граничные условия имеют вид

$$u_x(0,t)=\varphi_1(t),u_x(\ell,t)=\varphi_2(t),0\le t\le h. \qquad (7)$$

При упругом закреплении (***граничные условия 3-го рода***), имеем

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=\varphi_1(t),u_x(\ell,t)+hu(0,t)=\varphi_2(t),0\le t\le h. \qquad (8)$$

В начальный момент $t=0$ струна имеет форму, которую мы ей придали. Пусть эта форма описывается функцией $\tau(x)$

$$u(x,0)=\tau(x). \qquad (9)$$

В начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией $\nu(x)$

$$u_t(x,0)=\nu(x). \qquad (10)$$

Условия (9) и (10) являются начальными условиями.

4.3. Постановка краевых задач.

С учетом граничных и начальных условий сформулируем краевые задачи для уравнения колебания струны в области $D=\{(x,y):0<x<\ell,0<t<h\}$.

Первая краевая задача. *Найти в области D регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(0,t)=\varphi_1(t),u(\ell,t)=\varphi_2(t),0\le t\le h \qquad (11)$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\tau(x),u_t(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell, \qquad (12)$$

причем выполняются условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(\ell)=\varphi_2(0),\nu(0)=\varphi_1'(0),\nu(\ell)=\varphi_2'(0). \qquad (13)$$

Вторая краевая задача. *Найти в области* D *регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$u_x(0,t)=\varphi_1(t), u_x(\ell,t)=\varphi_2(t), 0\le t\le h \qquad (14)$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\tau(x), u_t(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (15)$$

причем выполняются условия согласования

$$\tau'(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(\ell)=\varphi_2(0). \qquad (16)$$

Третья краевая задача. *Найти в области* D *регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$u_x(0,t)+\gamma_1 u(0,y)=\varphi_1(t), u_x(\ell,t)+\gamma_2 u(\ell,y)=\varphi_2(t), 0\le t\le h \qquad (17)$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\tau(x), u_t(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (18)$$

причем выполняются условия согласования

$$\tau'(0)+\gamma_1\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(\ell)+\gamma_2\tau(\ell)=\varphi_2(0). \qquad (19)$$

Если струна бесконечна, то граничный режим не влияет на колебательный процесс, и мы приходим к следующей начальной задаче.

Задача Коши. *Найти в области* R^2_+ *регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям*

начальным условиям

$$u(x,0)=\tau(x), u_t(x,0)=\nu(x),\ -\infty<x<\infty. \qquad (20)$$

4.4. Дифференциальные уравнения электрических колебаний

При прохождении по проводу электрического тока вокруг него образуется электромагнитное поле, которое вызывает изменения, как силы тока, так и величины напряжения.

Из законов Кирхгофа получим следующую систему двух уравнений с частными производными первого порядка:

$$\begin{cases} i_x + C\vartheta_t + G\vartheta = 0, \\ \vartheta_x + Li_t + Ri = 0, \end{cases} \qquad (21)$$

где x координата вдоль провода, t время, $i(x,t)$ распределение тока вдоль провода, $\vartheta(x,t)$ распределение потенциала вдоль провода, C емкость провода, G утечка тока, R сопротивление провода, L индуктивность провода.

Если продифференцируем первое уравнение по x, а второе уравнение по t и затем из найденных уравнений исключим производную ϑ_{xt}, то получим следующее уравнение относительно i:

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi \qquad (22)$$

Это уравнение для тока, известное под названием телеграфного уравнения, является гиперболическим уравнением второго порядка, если $C \neq 0, L \neq 0$.

Напряжение описывается точно таким же уравнением:

$$\vartheta_{xx} = CL\vartheta_{tt} + (CR + GL)\vartheta_t + GR\vartheta . \qquad (23)$$

Если $G = R = 0$, то уравнения (12)-(13) упрощаются:

$$a^2 i_{xx} = i_{tt},\ a^2\vartheta_{xx} = \vartheta_{tt},\ a^2 = 1/CL .$$

5. Понятия корректных краевых задач. Задача Коши. Формула Даламбера.

5.1. Понятия корректных краевых задач

Краевая задача, сформулированная как математическая модель, правильно отражает сущность физической задачи, если она корректно поставлена.

Краевая задача называется корректно поставленной, если выполняются следующие условия:

1). Решение задачи существует в некотором классе M_1 *(условия существования решения);*

2). Решение задачи единственно в некотором классе M_2 *(условия единственности решения);*

3). Решение задачи непрерывно зависит от данных задачи, то есть, малым изменениям данных соответствует малые изменения решения (условия устойчивости решения).

Задачи, удовлетворяющие вышеперечисленным требованиям, называются ***корректно поставленными по Адамару***, а множество $M = M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$ называется классом корректности задачи.

Если не выполняются, хотя бы одно из условий 1) - 3), то задача является ***некорректно поставленной***.

5.2. Задача Коши для уравнения колебания струны. Формула Даламбера.

В верхней полуплоскости $R_+^2 = \{(x,t): -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty\}$ рассмотрим уравнение колебания струны

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0 \qquad (5.1)$$

Задача Коши. Требуется найти в области R_+^2 решение уравнения (5.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \tau(x),\ u_t(x,0) = \nu(x),\ -\infty < x < \infty. \qquad (5.2)$$

Докажем, что задача Коши является корректно поставленной.

1. Существование решения. В данном случае $A = a^2, B = 0, C = -1$, то $\Delta = B^2 - AC = 0^2 - a^2 \cdot (-1) = a^2 > 0$. Следовательно, уравнение (5.1) является уравнением гиперболического типа.

Запишем уравнение характеристик уравнения (5.1): $a^2 (dt)^2 - (dx)^2 = 0$. Это уравнение можно записать в виде $(adt + dx)(adt + dx) = 0$. Отсюда имеем $dx + adt = 0,\ dx - adt = 0$. Методом интегрирования найдем семейства характеристик: $x + at = const,\ x - at = const$.

Введем замену переменных

$$\xi = x + at, \eta = x - at. \qquad (5.3)$$

Так как $\xi_x = 1,\ \xi_t = a,\ \eta_x = 1,\ \eta_t = -a$, то якобиан отличен от нуля:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a - a = -2a \neq 0.$$

Следовательно, существует обратное преобразование: $x = \dfrac{\xi + \eta}{2},\ t = \dfrac{\xi - \eta}{2a}$.

Тогда $u(x, y) = u\left(\dfrac{\xi + \eta}{2}, \dfrac{\xi - \eta}{2a}\right) = \vartheta(\xi, \eta)$. Вычислим частные производные:
$u_x = \vartheta_\xi \xi_x + \vartheta_\eta \eta_x = \vartheta_\xi + \vartheta_\eta$, $u_t = \vartheta_\xi \xi_t + \vartheta_\eta \eta_t =$
$= \vartheta_\xi a + \vartheta_\eta (-a) = a(\vartheta_\xi - \vartheta_\eta)$, $u_{xx} = \vartheta_{\xi\xi} \xi_x + \vartheta_{\xi\eta} \eta_x + \vartheta_{\eta\xi} \xi_x + \vartheta_{\eta\eta} \eta_x =$
$= \vartheta_{\xi\xi} + 2\vartheta_{\xi\eta} + \vartheta_{\eta\eta}$. $u_{tt} = a(\vartheta_{\xi\xi} \xi_t + \vartheta_{\xi\eta} \eta_t - \vartheta_{\xi\eta} \xi_t + \vartheta_{\eta\eta} \eta_t = a^2 (\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta})$. Подставляя значения производных в (5.1) получим канонический вид уравнения:

$$\vartheta_{\xi\eta} = 0 \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.4) является вторым каноническим видом уравнения гиперболического типа. Если интегрируем уравнение (5.4) по η, то имеем $\vartheta_\xi = F_1^*(\xi)$. Далее, интегрируя по ξ, получим $\vartheta(\xi, \eta) = \int F_1^*(\xi) d\xi + F_2(\eta)$. Введем обозначение $F_1(\xi) = \int F_1^*(\xi) d\xi$. Тогда будем иметь $\vartheta(\xi, \eta) = F_1(\xi) + F_2(\eta)$. Если перейти к старым переменным по формуле (5.3), то получим общее решение уравнения (5.1):

$$u(x, t) = F_1(x + at) + F_1(x - at) \qquad (5.5)$$

где F_1, F_2 - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Воспользуясь начальными условиями (5.2), найдем произвольные функции F_1, F_2. Так как $u_t(x, t) = aF_1'(x + at) - aF_2'(x - at)$, то из (5.2) будем иметь

$$u(x, 0) = F_1(x) + F_2(x) = \tau(x), \qquad (5.6)$$

$$u_t(x, 0) = aF_1'(x) - aF_2'(x) = \nu(x). \qquad (5.7)$$

Интегрируя уравнение (5.7), получим

$$F_1(x) - F_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \nu(t) dt + F_1(x_0) + aF_2(x_0). \qquad (5.8)$$

Из (5.6) и (5.8) определим

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \tau(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \nu(t) dt + \frac{1}{2} F_1(x_0) + \frac{a}{2} F_2(x_0),$$

$$F_2(x)=\frac{1}{2}\tau(x)-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\nu(t)dt-\frac{1}{2}F_1(x_0)-\frac{a}{2}F_2(x_0).$$

Подставляя эти значения в (5.5), имеем

$$u(x,t)=F_1(x+at)+F_2(x-at)=\frac{1}{2}\tau(x+at)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at}\nu(t)dt+\frac{1}{2}F_1(x_0)+$$

$$+\frac{a}{2}F_2(x_0)+\frac{1}{2}\tau(x-at)-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at}\nu(t)dt-\frac{1}{2}F_1(x_0)-\frac{a}{2}F_2(x_0)=$$

$$=\frac{1}{2}\tau(x+at)+\frac{1}{2}\tau(x-at)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at}\nu(t)dt+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x_0}\nu(t)dt=$$

$$=\frac{\tau(x+at)+\tau(x-at)}{2}\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\nu(t)dt$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид.

$$u(x,t)=\frac{\tau(x+at)+\tau(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\nu(\xi)d\xi. \qquad (5.9)$$

Формула (5.9) называется формулой Даламбера. Нетрудно заметить, что если $\tau(x)\in C^2(R^1),\nu(x)\in C^1(R^1)$, то решение (5.9) является регулярным решением уравнения колебания струны. Таким образом, существование решения задачи Коши доказано.

2. Единственность решения задачи. Предположим, что существуют два решения Задачи Коши $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, причем $u_1(x,t)\neq u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ будет решением однородной задачи Коши:

$$a^2u_{xx}-u_{tt}=0,-\infty<x<\infty,0<t<\infty, \qquad (5.1)$$

$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,-\infty<x<\infty. \qquad (5.10)$$

Умножаем уравнение (5.1) на $2u_t$:

$$2u_t(a^2u_{xx}-u_{tt})=2a^2u_tu_{xx}-2u_tu_{tt}=0. \qquad (5.12)$$

Преобразуем следующие выражения:

$$2a^2u_tu_{xx}=2a^2(u_tu_x)_x-2a^2u_{tx}u_x=2a^2(u_tu_x)_x-a^2(u_x^2)_t$$

$$2u_tu_{tt}=(u_t^2)_t$$

Тогда тождество (5.12) запишется в виде

$$2u_t(a^2u_{xx}-u_{tt})=(2a^2u_tu_x)_x-(a^2u_x^2+u_t^2)_t$$

Перепишем это тождество на языке переменных ξ и η:

$$2u_\eta(a^2u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta})=(2a^2u_\eta u_\xi)_\xi-(a^2u_\xi^2+u_\eta^2)_\eta \tag{5.13}$$

На плоскости выберем произвольную точку $C(x,t)$ и проведем через нее характеристики уравнения (5.1) $CA:\xi=a\eta+x-at,\ BC:\xi=-a\eta+x+at$ до пересечения с осью абсцисс в точках: $A(x-at,0),\ B(x+at,0)$.

Проинтегрируем тождество (5.13) по треугольнику ΔABC:

$$\iint_{\Delta ABC}2u_\eta(a^2u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta})d\xi\,d\eta=\iint_{\Delta ABC}[(2a^2u_\eta u_\xi)_\xi-(a^2u_\xi^2+u_\eta^2)_\eta]\,d\xi\,d\eta=0$$

Используя формулу Грина, будем иметь

$$\int_{\Delta ABC}(a^2u_\xi^2+u_\eta^2)d\xi+(2a^2u_\eta u_\xi)d\eta=0 \tag{5.14}$$

Вдоль AB в силу условия (5.10) имеем $u_\xi(\xi,0)=0,u_\eta(\xi,0)=0$. Поэтому $\int_{AB}[a^2u_\xi^2(\xi,0)+u_\eta^2(\xi,0)]d\xi=0$. Далее вдоль отрезков $CA:\xi=a\eta+x-at$, $BC:\xi=-a\eta+x+at$ имеем, что $d\xi=ad\eta,d\xi=-ad\eta$. Тогда

$$-a^2\int_{BC}[u_\xi^2-2u_\eta u_\xi+u_\eta^2)d\xi=-a^2\int_0^t[u_\xi(-a\eta+x+at,\eta)-u_\eta(-a\eta+x+at,\eta)]^2d\eta$$

$$a^2\int_{CA}[u_\xi^2+2u_\eta u_\xi+u_\eta^2)d\xi=-a^2\int_0^t[u_\xi(a\eta+x-at,\eta)-u_\eta(a\eta+x-at,\eta)]^2d\eta$$

Тогда тождество примет вид

$$\int_0^t[u_\xi(-a\eta+x+at,\eta)-u_\eta(-a\eta+x+at,\eta)]^2d\eta+$$
$$+\int_0^t[u_\xi(a\eta+x-at,\eta)-u_\eta(a\eta+x-at,\eta)]^2d\eta=0$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&BC:\ u_\xi(-a\eta+x+at,\eta)-u_\eta(-a\eta+x+at,\eta)=0,\\&AC:\ u_\xi(a\eta+x-at,\eta)-u_\eta(a\eta+x-at,\eta)=0.\end{aligned} \tag{5.15}$$

На вершине треугольника ΔABC, то есть при $\eta=t$ из (5.15) имеем, что

$$BC:\ u_\xi(x,t)-u_\eta(x,t)=0,\ AC:\ u_\xi(x,t)-u_\eta(x,t)=0.$$

Это означает, что $u_\xi(x,t)=0,\ u_\eta(x,t)=0$. Так как точка $C(x,t)$ выбрана произвольно, то $\forall(x,t)\in R_+^2:u_x(x,t)=0,u_t(x,t)=0$. Следовательно, $\forall(x,t)\in R_+^2:u(x,t)=const$. Но в силу (5.10) функция $u(x,t)=0$, откуда следует, что $\forall(x,t)\in R_+^2:u(x,t)\equiv 0$. Это означает, что решение задачи Коши единственно.

3. Устойчивость решения задачи. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ являются решениями задачи Коши:

$$a^2u_{1xx}-u_{1tt}=0,\ -\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty,$$

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ u_t(x,0)=\nu_1(x),\ -\infty<x<\infty.$$

$$a^2u_{2xx}-u_{2tt}=0,\ -\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty,$$

$$u_2(x,0)=\tau_2(x),\ u_t(x,0)=\nu_2(x),\ -\infty<x<\infty.$$

Докажем, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ из неравенства $\left|\tau_1(x)-\tau_2(x)\right|<\delta,\ \left|\nu_1(x)-\nu_2(x)\right|<\delta$ следует неравенство

$$\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|<\varepsilon. \qquad (5.11)$$

В самом деле $\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\left|\tau_1(x-at)-\tau_2(x-at)\right|+$

$$+\frac{1}{2}\left|\tau_1(x+at)-\tau_2(x+at)\right|+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left|\nu_1(s)-\nu_2(s)\right|ds\le\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\delta\,ds=$$

$$=\delta+\frac{1}{2a}\delta(x+at-x+at)=\delta(1+t)<\delta(1+t_0).$$

Если выберем $\delta=\varepsilon/(1+t_0)$, то из предыдущего неравенства вытекает неравенство (5.11). Это означает, что малым изменениям данных задачи соответствует малые изменения решения, то есть решение задачи устойчиво.

6. Полуограниченная прямая. Решение задач методом продолжений.

6.1. Некоторые свойства решения задачи Коши для уравнения колебания струны

Рассмотрим задачу Коши

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0,\ (x,t) \in R_+^2, \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = \tau(x),\ u_t(x,0) = \nu(x),\ x \in R^1, \tag{6.2}$$

решение которого определяется по формуле Даламбера

$$u(x,t) = \frac{\tau(x+at) + \tau(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \nu(t)dt. \tag{6.3}$$

Исходя из этой формулы, в зависимости от четности или нечетности начальных данных $\tau(x), \nu(x)$ вдоль оси R^1 относительно точки $x=0$ можно определить ряд свойств решения задачи Коши.

1°. Если функции $\tau(x), \nu(x)$ нечетны относительно точки $x=0$, то решение задачи Коши (6.1), (6.2) при $x=0$ обращается в нуль, то есть, $u(0,t) \equiv 0$.

Доказательство. Полагая $x=0$ в формуле Даламбера (6.3) имеем $u(0,t) = \dfrac{\tau(at) + \tau(-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\int_{-at}^{+at} \nu(t)dt$. Если учесть, что $\tau(x)$ является нечетной функцией, то $\forall t \in R^1 : \tau(-at) = -\tau(at)$. Кроме того, $\int_{-at}^{+at} \nu(t)dt = 0$ как интеграл от нечетной функции $\nu(x)$ относительно начало координат с симметричными пределами. Следовательно, $u(0,t) \equiv 0$.

2°. Если функции $\tau(x), \nu(x)$ четны относительно точки $x=0$, то производная по x решение задачи Коши (6.1), (6.2) при $x=0$ обращается в нуль, то есть, $u_x(0,t) \equiv 0$.

Доказательство. Вычислим производную от решения задачи Коши по переменной x и, полагая в нем $x=0$, имеем

$$u_x(0,t) = \frac{\tau'(at) + \tau'(-at)}{2} + \frac{\nu(at) - \nu(-at)}{2}. \tag{6.4}$$

Так как $\tau(x)$ является четной функцией, то выполняется равенство $\tau(-x) = \tau(x)$. Дифференцируя это равенство, получим $-\tau'(-x) = \tau'(x)$. Отсюда, заменяя x на at, имеем $\tau'(at) + \tau'(-at) \equiv 0$. Следовательно, первое слагаемое в формуле (6.4), равно нулю. Если учесть, что $\nu(x)$ является четной функцией, то выполняется равенство $\nu(-x) = \nu(x)$. Заменяя x на at, имеем $\nu(at) - \nu(-at) \equiv 0$. Итак, второе слагаемое в формуле (6.4) также равно нулю. Тогда из (6.4) следует, что $u_x(0,t) \equiv 0$.

Эти два свойства решения задачи Коши можно использовать при решении ряд задач на четверть плоскости. Для этого следует продолжить периодически начальные данные на всю числовую ось соответствующим образом. Поэтому такой метод решения задачи называется методом продолжений.

6.2. Первая краевая задача для полуограниченной прямой

В четверть плоскости $R^2_{++}=\{(x,t):0<x<\infty, 0<t<\infty\}$ рассмотрим следующие задачи.

Первая вспомогательная задача. *Найти решение задачи:*

$$a^2u_{xx}-u_{tt}=0,(x,t)\in R^2_{++}, \tag{6.5}$$

$$u(x,0)=\tau(x),u_t(x,0)=\nu(x),0\le x<\infty, \tag{6.6}$$

$$u(0,t)=0,0\le t<\infty. \tag{6.7}$$

где $\tau(0)=0,\nu(0)=0.$

Решение. Здесь, сразу нельзя использовать формулу Даламбера, так как функции $\tau(x),\nu(x)$ не определены для отрицательных значений аргумента.

Если продолжить функции $\tau(x),\nu(x)$ нечетно для отрицательных значений x, то есть начальные данные определим следующим образом:

$$\tau_1(x)=\begin{cases}\tau(x), x>0,\\ -\tau(-x), x<0,\end{cases}\quad \nu_1(x)=\begin{cases}\nu(x), x>0,\\ -\nu(-x), x<0,\end{cases} \tag{6.8}$$

то формула Даламбера примет вид

$$u(x,t)=\frac{\tau_1(x+at)+\tau_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\nu_1(t)dt. \tag{6.9}$$

Формула (6.9) дает решение задачи (6.5) - (6.7), так как эта формула как формула Даламбера удовлетворяет уравнению (6.5) и (6.6). Кроме того, в силу свойства 1^o выполняется и условие (6.7).

Если учесть обозначения (6.8), то из (6.9) получим решение задачи в виде:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\tau(x+at)+\tau(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\nu(t)dt, & t<\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\tau(x+at)-\tau(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\nu(t)dt, & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Вторая вспомогательная задача. *Найти решение задачи:*

$$a^2u_{xx}-u_{tt}=0,(x,t)\in R^2_{++}, \tag{6.9}$$

$$u(x,0)=0,u_t(x,0)=0,0\le x<\infty, \tag{6.10}$$

$$u(0,t)=\mu(t),0\le t<\infty. \tag{6.11}$$

где $\mu(0)=0, \mu'(0)=0.$

Решение. Для решения задачи воспользуемся общим решением уравнения (6.9):

$$u(x,t)=F_1(x+at)+F_2(x-at), \tag{6.12}$$

где F_1, F_2 - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Из физического соображения будем считать, что $a>0$. Вычислим производную

$$u_t(x,t)=aF_1'(x+at)-aF_2'(x-at) \tag{6.13}$$

Воспользуясь условием (6.10) из (6.12) и (6.13) имеем:

$$F_1(x)+F_2(x)=0, F_1'(x)-F_2'(x)=0,\ 0\le x<\infty.$$

Отсюда находим, что

$$F_1(x)=C_1,\ F_2(x)=C_2,\ 0\le x<\infty. \qquad (6.14)$$

Аргумент функции F_1 при $x\ge 0, t\ge 0$ всегда положительна, то есть $x+at\ge 0$, поэтому из (6.14) заключаем, что $F_1(x+at)=C_1$. Тогда формула (6.12) примет вид

$$u(x,t)=C_1+F_2(x-at). \qquad (6.15)$$

Если учесть, что при $t<\frac{x}{a}, x>0$ аргумент функции F_1 положительно, то есть $x-at\ge 0$. Тогда из (6.14) следует, что $F_2(x-at)=C_2$. Следовательно, в этом случае формула (6.15) имеет вид: $u(x,t)=C_1+C_2$. Отсюда, в силу первого условия (6.10) имеем

$$u(x,t)\equiv 0,\ t\le\frac{x}{a}. \qquad (6.16)$$

В случае $t\ge\frac{x}{a}$ используем граничное условие (6.11):

$$u(0,t)=C_1+F_2(-at)=\mu(t),\ 0\le t<\infty.$$

Отсюда находим $F_2(z)=\mu(-\frac{z}{a})-C_1, -\infty<z\le 0$. Полагая, $z=x-at$ получим $F_2(x-at)=\mu(t-\frac{x}{a})-C_1, -\infty<x-at\le 0$. Тогда из (6.15) имеем

$$u(x,t)=\mu(t-\frac{x}{a}),\ \ t\ge\frac{x}{a}. \qquad (6.17)$$

Наконец, объединяя (6.16) и (6.17) получим решение второй вспомогательной задачи в виде:

$$u(x,t)=\begin{cases}0,\ \ t\le\dfrac{x}{a},\\ \mu(t-\dfrac{x}{a}),\ \ t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases} \qquad (6.18)$$

Общая первая краевая задача. *Найти решение задачи:*

$$a^2u_{xx}-u_{tt}=0,(x,t)\in R^2_{++}, \qquad (6.19)$$

$$u(x,0)=\tau(x),u_t(x,0)=\nu(x),0\le x<\infty, \qquad (6.20)$$

$$u(0,t)=\mu(t),0\le t<\infty. \qquad (6.21)$$

где $\tau(0)=\mu(0),\nu(0)=\mu'(0)$.

В силу линейности уравнения (6.19) решение общей первой краевой задачи определяется как сумма решений первой и второй вспомогательных задач:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\tau(x+at)+\tau(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\nu(t)dt,\ \ t<\dfrac{x}{a},\\ \mu(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{\tau(x+at)-\tau(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\nu(t)dt,\ \ t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Граничный режим влияет только в области $t > \dfrac{x}{a}$ (см. Рис. 1).

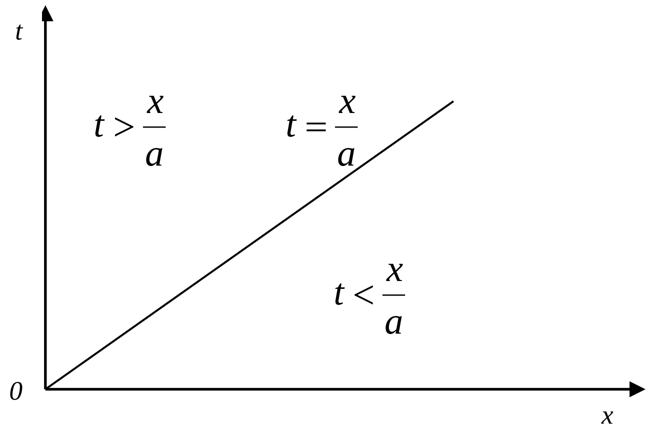


Рис. 1.

Аналогично определяется решение второй краевой задачи для полуограниченной прямой.

Общая вторая краевая задача. *Найти решение задачи:*

$$a^2u_{xx} - u_{tt} = 0, (x,t) \in R^2_{++},$$
$$u(x,0) = \tau(x), u_t(x,0) = \nu(x), 0 \le x < \infty,$$
$$u_x(0,t) = \mu(t), 0 \le t < \infty.$$

где $\tau'(0) = \mu(0), \nu'(0) = \mu'(0).$

Общая смешанная краевая задача. *Найти решение задачи:*

$$a^2u_{xx} - u_{tt} = 0, (x,t) \in R^2_{++},$$
$$u(x,0) = \tau(x), u_t(x,0) = \nu(x), 0 \le x < \infty,$$
$$u_x(0,t) + \gamma u(0,t) = \mu(t), 0 \le t < \infty.$$

где $\tau'(0) + \gamma\tau(0) = \mu(0), \nu'(0) + \gamma\nu(0) = \mu'(0).$

7. Метод разделения переменных.

7.1. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны

Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода проведем для уравнения колебания струны

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0. \qquad (7.1)$$

в области $D = \{(x,t): 0 < x < \ell, 0 < t < \infty\}$.

Первая краевая задача. *Найти в области D решение уравнения (7.1), удовлетворяющее однородным граничным условиям*

$$u(0,t) = 0, u(\ell,t) = 0, 0 \le t < \infty \qquad (7.2)$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \tau(x),\ u_t(x,0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell, \qquad (7.3)$$

где $\tau(x), \nu(x)$ *- заданные функции, причем выполняются условия согласования*

$$\tau(0) = 0, \tau(\ell) = 0, \nu(0) = 0, \nu(\ell) = 0. \qquad (7.4)$$

Уравнение (7.1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Для построения частных решений рассмотрим следующую задачу.

Основная вспомогательная задача. *Найти в области D решение уравнения (7.1), не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям*

$$u(0,t) = 0, u(\ell,t) = 0, 0 \le t < \infty \qquad (7.2)$$

и представимое в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad (7.5)$$

где $X(x)$ *- зависит только от* x, *а* $T(t)$ *- зависит только от* t.

Подставляя предполагаемую форму решения (7.5) в уравнение (7.1), получим

$$a^2 X''(x)T(t) - X(x)T''(t) = 0. \qquad (7.6)$$

После деления на $a^2 X(x)T(t)$ из (7.6) имеем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}. \qquad (7.7)$$

Чтобы функция (7.5) была решением уравнения (7.1), равенство (7.7) должно быть выполнено тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $0 < x < \ell, 0 < t < \infty$. Это возможно в том случае, если правая и левая части равенства (7.7) сохраняет постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda \qquad (7.8)$$

где $\lambda = const$. Знак – выбран для удобства последующих выкладок. Из соотношения (7.8) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0.$$

Граничные условия дают

$$u(0,t)=X(0)=0, u(\ell,t)=X(\ell)=0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0)=0, X(\ell)=0,$$

Так как иначе мы имели бы

$$T(t)\equiv 0 \text{ и } u(x,t)\equiv 0.$$

Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях.

Задача Штурма-Лиувилля. *Найти те значения параметра λ и соответствующие нетривиальные решения задачи:*

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{7.9}$$

$$X(0)=0, X(\ell)=0. \tag{7.10}$$

Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями.

Рассмотрим отдельно случаи, когда $\lambda=0,\ \lambda<0,\ \lambda>0.$

1°. Пусть $\lambda=0.$ В этом случае уравнение примет вид $X''(x)=0$, общее решение которого представимо в виде $X(x)=C_1x+C_2$, где C_1,C_2 - произвольные постоянные. Из граничного условия $X(0)=C_1\cdot 0+C_2=0$ следует, что $C_2=0$. Тогда $X(x)=C_1x$. Из второго условия $X(\ell)=C_1\ell=0$ имеем $C_1=0$. Следовательно, $X(x)\equiv 0$.

2°. Пусть $\lambda<0.$ В этом случае характеристическое уравнение имеет вид $k^2+\lambda=0$, корни которого действительны, различны и представимо в виде $k_1=\sqrt{-\lambda}, k_2=-\sqrt{-\lambda}$. Поэтому общее решение уравнения (7.9) имеет вид $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$. Граничные условия дают:

$$C_1+C_2=0,\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}\,\ell}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,\ell}=0.$$

Отсюда находим $C_1=C_2=0$, и, следовательно $X(x)\equiv 0$.

3°. Пусть $\lambda>0.$ В этом случае характеристического уравнения комплексно-сопряженны: $k_1=i\sqrt{\lambda}, k_2=-i\sqrt{\lambda}$. Поэтому общее решение уравнения (7.9) имеет вид

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x. \tag{7.11}$$

Из первого граничного условия имеем: $X(0)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0)+$ $+C_2\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0)=C_1=0$. Поэтому общее решение примет вид $X(x)=C_2\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$. Из второго граничного условия имеем:

$X(\ell)=C_2 sin(\sqrt{\lambda}\,\ell)=0$. По условию $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $C_2 \neq 0$, поэтому $sin(\sqrt{\lambda}\,\ell)=0$ или $\sqrt{\lambda}=\dfrac{\pi n}{\ell}, n=\pm 1,\pm 2,...$.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (7.9)-(7.10) возможны лишь при значениях

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, n=1,2,... . \qquad (7.12)$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X(x)=X_n(x)=C_2 sin\frac{\pi n}{\ell}x, n=1,2,... \qquad (7.13)$$

Чтобы исключить неопределенность в выборе множителя, можно подчинить собственные функции требованию нормировки

$$\|X(x)\|^2=\int_0^{\ell} X_n^2(x)dx=1. \qquad (7.14)$$

Тогда из условия (7.14) имеем

$$C_2^2\int_0^{\ell} sin^2\frac{\pi n}{\ell}xdx=1,$$

из которого находим $C_2=\sqrt{\dfrac{2}{\ell}}$. Таким образом, собственные функции, удовлетворяющее условию (7.14), имеют вид

$$X(x)=X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\,sin\frac{\pi n}{\ell}x, n=1,2,... \qquad (7.15)$$

Учитывая собственные значения (7.12) для функции $T(t)=T_n(t)$ получим уравнения

$$T_n''(t)+\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 T_n(t)=0, \qquad (7.16)$$

решение которого имеет вид:

$$T_n(t)=A_n cos\frac{\pi n}{\ell}at+B_n sin\frac{\pi n}{\ell}at, n=1,2,... , \qquad (7.17)$$

где A_n, B_n - произвольные постоянные. Тогда решение основной вспомогательной задачи, удовлетворяющее условию (7.2) и представимое в виде (7.5), имеет вид

$$u(x,t)=u_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\left(A_n cos\frac{\pi n}{\ell}at+B_n sin\frac{\pi n}{\ell}at\right)sin\frac{\pi n}{\ell}x.$$

В силу линейности и однородности уравнения (7.1) сумма частных решений

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n cos\frac{\pi n}{\ell}at+B_n sin\frac{\pi n}{\ell}at\right)sin\frac{\pi n}{\ell}x \qquad (7.18)$$

также удовлетворяет уравнению (7.1) и граничным условиям (7.2). Постоянные A_n и B_n определим из начальных условий (7.3):

$$u(x,0)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x=\tau(x),\, 0\le x\le\ell, \tag{7.19}$$

$$u_t(x,0)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi n}{\ell}aB_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x=\nu(x),\, 0\le x\le\ell. \tag{7.20}$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0\le x\le\ell$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x, \tag{7.21}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}d\xi \tag{7.22}$$

Согласно формул (7.21)-(7.22) из (7.21)-(7.20) имеем

$$A_n=\sqrt{\frac{\ell}{2}}\int_0^{\ell}\tau(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi\,d\xi,\ B_n=\frac{1}{\pi na}\sqrt{\frac{\ell}{2}}\int_0^{\ell}\nu(\xi)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi\,d\xi. \tag{7.23}$$

Таким образом, решение первой краевой задачи (7.1)-(7.3) дается рядом (7.18), где A_n и B_n определяются формулами (7.23).

Теорема. *Если $\tau(x)\in C^2[0,\ell]$, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям*

$$\tau(0)=\tau(\ell)=0,\tau''(0)=\tau''(\ell)=0,$$
$$\nu(0)=\nu(\ell)=0,$$

то функция $u(x,t)$, определяемая рядом (7.18), имеет непрерывные производные 2-го порядка и удовлетворяет уравнению (7.1), граничным условиям (7.2) и начальным условиям (7.3). При этом возможно почленное дифференцирование ряда (7.18) по x и t два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0\le x\le\ell$ и любом t.

8. Задачи с данными на характеристиках. Функция Римана.

8.1. Постановка задачи Гурса. Формула Грина.

В области $D=\{(x,y):0<x<\infty, 0<y<\infty\}$ мы выведем интегральную формулу решения задачи Гурса для уравнения гиперболического типа

$$L(u)=u_{xy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y) \qquad (8.1)$$

где a, b, c, f - заданные функции.

Задача Гурса. *Найти в области D решение уравнения (8.1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{aligned} &u(0,y)=\varphi(y), 0\le y<\infty,\\ &u(x,0)=\psi(x), 0\le x<\infty, \end{aligned} \qquad (8.2)$$

где заданные функции $\varphi(y)\in C^1[0,\infty), \psi(x)\in C^1[0,\infty)$, причем выполняется условие согласования

$$\varphi(0)=\psi(0). \qquad (8.3)$$

Задача Гурса часто называется характеристической задачей, так как граничные условия (8.2) задаются на характеристиках уравнения (8.1).

Пусть $\vartheta(x,y)$ - произвольная функция, заданная в области D. Умножаем уравнение (8.1) на ϑ и перебросим производные от u на ϑ:

$$\vartheta u_{xy}=(\vartheta u_x)_y-\vartheta_y u_x=(\vartheta u_x)_y-(\vartheta_y u)_x+\vartheta_{xy}u=[(\vartheta u)_x-\vartheta_x u]_y-(\vartheta_y u)_x+\vartheta_{xy}u$$

Чтобы обеспечить симметричность в выведенной формуле, рассмотрим также выражение

$$\vartheta u_{xy}=(\vartheta u_y)_x-\vartheta_x u_y=(\vartheta u_y)_x-(\vartheta_x u)_y+\vartheta_{xy}u=[(\vartheta u)_y-\vartheta_y u]_x-(\vartheta_x u)_y+\vartheta_{xy}u$$

Суммируя полученные выше выражения, получим

$$\vartheta u_{xy}=[\frac{1}{2}(\vartheta u)_y-\vartheta_y u]_x-[-\frac{1}{2}(\vartheta u)_x+\vartheta_x u]_y+\vartheta_{xy}u$$

Далее имеем $\vartheta a u_x=(a\vartheta u)_x-(a\vartheta)_x u$, $\vartheta b u_y=(b\vartheta u)_y-(b\vartheta)_y u$, $\vartheta c u=c\vartheta u$.

Тогда имеет место тождество Лагранжа

$$\begin{aligned} \vartheta L(u)-uL*(\vartheta)=[\frac{1}{2}(\vartheta u)_y-(\vartheta_y-a\vartheta)u]_x-\\ -[-\frac{1}{2}(\vartheta u)_x+(\vartheta_x-b\vartheta)u]_y, \end{aligned} \qquad (8.4)$$

где $L^*(\vartheta)=\vartheta_{xy}-(a\vartheta)_x-(b\vartheta)_y+c\vartheta$ - сопряженный дифференциальный оператор. Запишем тождество (8.4) на языке переменных ξ и η.

$$\begin{aligned} \vartheta L(u)-uL*(\vartheta)=[\frac{1}{2}(\vartheta u)_\eta-(\vartheta_\eta-a\vartheta)u]_\xi-\\ -[-\frac{1}{2}(\vartheta u)_\xi+(\vartheta_\xi-b\vartheta)u]_\eta. \end{aligned} \qquad (8.5)$$

В плоскости $O\xi\eta$ выберем область $D^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x, 0<\eta<y\}$ с вершинами $A(0,0), B(x,0), C(x,y), E(0,y)$. Здесь точка $C(x,y)$ выбрана произвольным образом (см. Рис. 1).

Интегрируя тождество (8.5) по области D^* и с учетом формулы Грина, имеем

$$\iint_{D^*} \vartheta L(u) - u L*(\vartheta) d\xi d\eta = \int_{\partial D} [-\frac{1}{2}(\vartheta u)_\xi + (\vartheta_\xi - b\vartheta)u] d\xi + \qquad (8.6)$$
$$+ [\frac{1}{2}(\vartheta u)_\eta - (\vartheta_\eta - a\vartheta)u] d\eta.$$

где ∂D^* - означает границы области D^*.

8.2. Вычисление криволинейного интеграла.

Очевидно, что $D^* = AB \cup \cup BC \cup CE \cup EA$. Тогда по свойству криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\int_{\partial D^*} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CE} + \int_{EA}$$

Уравнения путей интегрирования имеют вид:

$AB: \eta = 0, d\eta = 0, 0 < \xi < x;$

$BC: \xi = x, d\xi = 0, 0 < \eta < y;$

$EC: \eta = y, d\eta = 0, 0 < \xi < x;$

$AE: \xi = 0, d\xi = 0, 0 < \eta < y;$

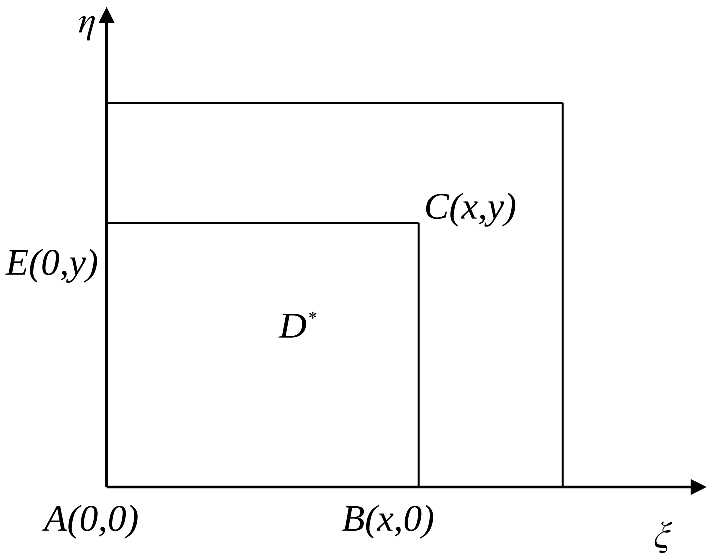


Рис. 1.

Криволинейные интегралы сведем к определенным интегралам, учитывая при этом граничные условия (8.2):

1). $\int_{AB} [-\frac{1}{2}(\vartheta u)_\xi + (\vartheta_\xi - b\vartheta)u] d\xi = \int_0^x [-\frac{1}{2}(\vartheta u)_\xi + (\vartheta_\xi - b\vartheta)u]|_{\eta=0} d\xi =$

$$= -\frac{1}{2}\vartheta(\xi,0)u(\xi,0)|_{\xi=0}^{\xi=x} + \int_0^x (\vartheta_\xi - b\vartheta)u]|_{\eta=0} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2}\vartheta(x,0)u(x,0) + \frac{1}{2}\vartheta(0,0)u(0,0) + \int_0^x (\vartheta_\xi - b\vartheta)|_{\eta=0} u(\xi,0) d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2}\vartheta(x,0)\psi(x) + \frac{1}{2}\vartheta(0,0)\psi(0) + \int_0^x (\vartheta_\xi - b\vartheta)|_{\eta=0} \psi(\xi) d\xi.$$

2). $\int_{EA} [\frac{1}{2}(\vartheta u)_\eta - (\vartheta_\eta - a\vartheta)u] d\eta = -\int_0^y [\frac{1}{2}(\vartheta u)_\eta + (\vartheta_\eta - a\vartheta)u]|_{\xi=0} d\eta =$

$$= -\frac{1}{2}\vartheta(0,\eta)u(0,\eta)|_{\eta=0}^{\eta=y} + \int_0^y (\vartheta_\eta - a\vartheta)u]|_{\xi=0} d\eta =$$

$$= -\frac{1}{2}\vartheta(0,y)u(0,y) + \frac{1}{2}\vartheta(0,0)u(0,0) + \int_0^y (\vartheta_\eta - a\vartheta)|_{\xi=0} u(0,\eta) d\eta =$$

$$= -\frac{1}{2}\vartheta(0,y)\varphi(y) + \frac{1}{2}\vartheta(0,0)\varphi(0) + \int_0^y (\vartheta_\eta - a\vartheta)|_{\xi=0} \varphi(\eta) d\eta.$$

3). $\int\limits_{BC}[\frac{1}{2}(\vartheta u)_\eta-(\vartheta_\eta-a\vartheta)u]d\eta=\int\limits_0^y[\frac{1}{2}(\vartheta u)_\eta-(\vartheta_\eta-a\vartheta)u]\big|_{\xi=x}d\eta=$

$$=\frac{1}{2}\vartheta(x,\eta)u(x,\eta)\big|_{\eta=0}^{\eta=y}-\int\limits_0^y(\vartheta_\eta-a\vartheta)u]\big|_{\xi=x}d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\vartheta(x,y)u(x,y)-\frac{1}{2}\vartheta(x,0)u(x,0)-\int\limits_0^y(\vartheta_\eta-a\vartheta)\big|_{\xi=x}u(x,\eta)d\eta.$$

Так как на отрезке BC искомая функция не задана, поэтому выберем условия

$$BC:\ \vartheta_\eta(x,\eta)-a(x,\eta)\vartheta(x,\eta)=0,\ 0<\eta<y. \qquad (8.7)$$

Если к уравнению (8.7) присоединяем начальное условие

$$\vartheta(x,\eta)\big|_{\eta=y}=1, \qquad (8.8)$$

то решение задачи (8.7)-(8.8) однозначно определяется в виде

$$\vartheta(x,\eta)=exp\left(-\int\limits_\eta^y a(x,t)dt\right),0\le\eta\le y \qquad (8.9)$$

Тогда

$$\int\limits_{BC}[\frac{1}{2}(\vartheta u)_\eta-(\vartheta_\eta-a\vartheta)u]d\eta=\frac{1}{2}\vartheta(x,y)u(x,y)-\frac{1}{2}\vartheta(x,0)\psi(x). \qquad (8.10)$$

4). $\int\limits_{CE}[-\frac{1}{2}(\vartheta u)_\xi+(\vartheta_\xi-b\vartheta)u]d\xi=-\int\limits_0^x[-\frac{1}{2}(\vartheta u)_\xi+(\vartheta_\xi-b\vartheta)u]\big|_{\eta=y}d\xi=$

$$=\frac{1}{2}\vartheta(\xi,y)u(\xi,y)\big|_{\xi=0}^{\xi=x}-\int\limits_0^x(\vartheta_\xi-b\vartheta)u]\big|_{\eta=y}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\vartheta(x,y)u(x,y)-\frac{1}{2}\vartheta(0,y)u(0,y)-\int\limits_0^x(\vartheta_\xi-b\vartheta)\big|_{\eta=y}u(\xi,y)d\xi.$$

На отрезке CE искомая функция также не задана, поэтому выберем условия

$$CE:\ \vartheta_\xi(\xi,y)-b(\xi,y)\vartheta(\xi,y)=0,\ 0<\xi<x. \qquad (8.11)$$

Как и выше, присоединяя к уравнению (8.10) начальное условие

$$\vartheta(\xi,y)\big|_{\xi=x}=1, \qquad (8.12)$$

найдем решение задачи (8.11)-(8.12) в виде

$$\vartheta(\xi,y)=exp\left(-\int\limits_\xi^x b(x,t)dt\right),0\le\xi\le x\,. \qquad (8.13)$$

Тогда

$$\int\limits_{CE}[\frac{1}{2}(\vartheta u)_\xi+(\vartheta_\xi-b\vartheta)u]d\eta=\frac{1}{2}\vartheta(x,y)u(x,y)-\frac{1}{2}\vartheta(0,y)\varphi(y). \qquad (8.14)$$

Используя полученные результаты из формулы (8.6) имеем

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D^*}\vartheta L(u)-u\,L*(\vartheta)d\xi d\eta=-\frac{1}{2}\vartheta(x,0)\psi(x)+\frac{1}{2}\vartheta(0,0)\psi(0)+\\&+\int\limits_0^x(\vartheta_\xi-b\vartheta)\big|_{\eta=0}\psi(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\vartheta(0,y)\varphi(y)+\frac{1}{2}\vartheta(0,0)\varphi(0)+\\&+\int\limits_0^y(\vartheta_\eta-a\vartheta)\big|_{\xi=0}\varphi(\eta)d\eta+\frac{1}{2}\vartheta(x,y)u(x,y)-\frac{1}{2}\vartheta(x,0)\psi(x)+\end{aligned} \qquad (8.15)$$

$$+\frac{1}{2}\vartheta(x,y)u(x,y)-\frac{1}{2}\vartheta(0,y)\varphi(y).$$

8.3. Функция Римана.

Пусть $\vartheta(\xi,\eta)$ - решение сопряженного уравнения

$$L^*(\vartheta)=\vartheta_{\xi\eta}-(a\vartheta)_\xi-(b\vartheta)_\eta+c\vartheta=0, \qquad (8.16)$$

удовлетворяющее условиям

$$\vartheta(\xi,\eta)|_{\xi=x}=exp\left(-\int_\eta^y a(x,t)dt\right), 0\le\eta\le y, \qquad (8.17)$$

$$\vartheta(\xi,\eta)|_{\eta=y}=exp\left(-\int_\xi^x b(x,t)dt\right), 0\le\xi\le x. \qquad (8.18)$$

Решение задачи (8.16)-(8.18) назовем функцией Римана. Из (8.8) и (8.12) следует, что

$$\vartheta(x,y)=1. \qquad (8.19)$$

В силу того, что точка $C(x,t)$ выбрана произвольно, естественно считать, что функция Римана зависит не только от переменных ξ и η, но и от x и y. Поэтому ее обозначим в виде $\vartheta=\vartheta(x,y;\xi,\eta)$.

Теорема. *Если* $a_\xi, b_\eta\, c\in C$, *функция Римана существует.*

8.4. Представление решение задачи Гурса.

С помощью функции Римана из (8.15) получим представление решение задачи Гурса

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\vartheta(x,y;0,y)\varphi(y)+\vartheta(x,y;x,0)\psi(x)+\vartheta(x,y;0,0)\varphi(0)+\\&+\int_0^x[\vartheta_\xi(x,y;\xi,0)-b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)]\psi(\xi)d\xi+\\&+\int_0^y[\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)-a(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)]\varphi(\eta)d\eta+\\&+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta.\end{aligned} \qquad (8.20)$$

Пример 1. *Построить функции Римана в случае, когда* $a=b=c=0$.

Решение. В этом случае задача (8.16)-(8.18) запишется в виде:

$$L^*(\vartheta)=\vartheta_{\xi\eta}=0 \qquad (8.21)$$

$$\vartheta(\xi,\eta)|_{\xi=x}=1, 0\le\eta\le y \qquad (8.22)$$

$$\vartheta(\xi,\eta)|_{\eta=y}=1, 0\le\xi\le x. \qquad (8.23)$$

Общее решение уравнения (8.21) имеет вид

$$\vartheta(\xi,\eta)=f(\xi)+f(\eta), \qquad (8.24)$$

Из условий (8.22), (8.23) имеем

$$\begin{aligned}&\vartheta(\xi,\eta)|_{\xi=x}=f(x)+f(\eta)=1, 0\le\eta\le y,\ f(\eta)=1-f(x),\\&\vartheta(\xi,\eta)|_{\eta=y}=f(\xi)+f(y)=1, 0\le\xi\le x,\ f(\xi)=1-f(y).\end{aligned} \qquad (8.25)$$

Тогда из (8.24) получим, что $\vartheta(\xi,\eta)= f(\xi)+ f(\eta)=1- f(x)+1- f(y)= =2- f(x)- f(y)$. Но из (8.25) получим также равенство $f(x)+ f(y)=1$. Тогда $\vartheta(\xi,\eta)\equiv 1$. Итак, функция Римана существует и имеет вид

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\equiv 1.$$

Поэтому решение задачи Гурса для уравнения

$$L(u)=u_{xy} = f(x,y) \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned} &u(0,y)=\varphi(y), 0\le y<\infty,\\ &u(x,0)=\psi(x), 0\le x<\infty, \end{aligned} \tag{8.2}$$

Представимо в виде

$$u(x,y)=\varphi(y)+\psi(x)+\varphi(0)+\int_0^x d\xi\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta.$$

9. Задачи, приводящиеся к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач.

9.1. Вывод уравнения теплопроводности.

Рассмотрим вопрос распространения тепла в однородном стержне конечной длины ℓ, температура которого в каждой точке x определяется функцией $u(x,t)$ в момент времени t. Тогда функция $u = u(x,t)$ дает закон распределения температуры в стержне. Выведем дифференциальное уравнение для этой функции.

Вывод уравнения теплопроводности базируется на законе Фурье: *Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будут происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым частям тела.*

Выберем ось x (направив ее по оси стержня) так, чтобы стержень совпадал с отрезком $[0,\ell]$ оси x.

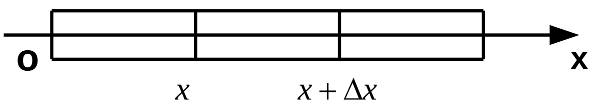


Рис. 5.

Выделим элемент стержня $[x, x+\Delta x]$ и составим для него уравнение теплового баланса, согласно которому скорость изменения количества тепла в рассматриваемом объеме, равна количеству тепла, поступившему в этот объем в единицу времени.

$$\boxed{\text{Скорость изменения тепла}} \; = \; \boxed{\text{Количества тепла}}$$

1). Скорость изменения тепла. Скорость изменения тепла в выделенном элементе стержня равна $\int\limits_x^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx$, где c – теплоемкость материала стержня; ρ – плотность; S – площадь поперечного сечения. Применяя к этому интегралу теорему о среднем, получим $\int\limits_x^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = c\rho S \frac{\partial u(x+\theta_1 \Delta x,t)}{\partial t} \Delta x$, где $0 < \theta_1 < 1$.

2). Количества тепла. Теперь найдем количества тепла, поступившее в выделенный элемент стержня за единицу времени. Известно, что количество тепла, протекающее через сечение S с абсциссой x за единицу времени, равно $-k \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} S$, где k – коэффициент теплопроводности, а S – площадь сечения. Поэтому искомое количество тепла равно (*знак "-" означает, что тепло переходит от более нагретых точек к менее нагретым*)

$$Q_1 = -k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S - \left(-k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\right) =$$
$$= kS\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = kS\frac{\partial^2 u(x+\theta_2 \Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x$$

где $0 < \theta_2 < 1$. (Здесь применяется формула конечных приращений Лагранжа к функции $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$).

3). Тепловые источники. Выделение тепла может быть характеризовано плотностью тепловых источников $f(x,t)$ в точке x в момент времени t. В результате действия этих источников на участке стержня $[x, x+\Delta x]$ выделится количество тепла

$$Q_2 = \int_x^{x+\Delta x} S\, f(x,t)dx = S\, f(x+\theta_3 \Delta x,t)\Delta x .$$

Составим уравнение теплового баланса

$$c\rho S\frac{\partial u(x+\theta_1 \Delta x,t)}{\partial t}\Delta x = kS\frac{\partial^2 u(x+\theta_2 \Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x + S\, f(x+\theta_3 \Delta x,t)\Delta x$$

Разделим обе части этого уравнения на $S\,\Delta\,x$ (объем выделенного элемента стержня) и устремим Δx к нулю (стягивая выделенный элемент стержня к сечению). Получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t), \qquad (1)$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}, F(x,t) = \frac{1}{c\rho} f(x,t)$.

Это уравнение называется уравнением теплопроводности для однородного стержня. Величина $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ называется коэффициентом температуропроводности.

Если источники тепла отсутствуют, т.е. $F(x,t) = 0$, то уравнение теплопроводности принимает простой вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (2)$$

9.2. Уравнение диффузии.

Если среда неравномерна заполнена газом, то имеет место диффузия его из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление имеет место и в растворах, если концентрация растворенного вещества в объеме не постоянна.

Процесс диффузии в трубке, заполненной пористой средой описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)=c\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2)$$

где D - коэффициент диффузии, c - коэффициент пористости.

Уравнение (1) называется уравнением диффузии. Оно вполне аналогично уравнению теплопроводности.

Если коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (3)$$

где $a^2 = \frac{D}{c}$.

9.3. Математические модели начальных и граничных условий.

Все физические процессы начинаются в некоторый момент времени. Начальный момент времени обычно берется нулем: $t = 0$. Поскольку мы стали следить за температурой с того момента, когда стержень обладал с постоянной температурой T_0, то имеем

$$u(x,0) = T_0,\ 0 \le x \le \ell. \qquad (4)$$

Условие (4) называется начальным условием.

Если температура концов изменяется по законам $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, то получим

$$u(0,t) = \varphi_1(t),\ u(\ell,t) = \varphi_2(t), 0 \le t \le T. \qquad (5)$$

Условия (5) называются граничными условиями первого рода, физическим смыслом которого является ***задание температурного режима***.

Если концы стержня теплоизолированы, то есть не проходит никакой поток, то нормальная производная должна обращаться в нуль на границе. Тогда граничные условия имеют вид:

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\ell,t) = 0, 0 \le t \le T. \qquad (6)$$

Условия (6) называются граничными условиями второго рода. Если концы стержня не теплоизолированы, то есть, задан режим теплового потока, граничные условия запишется в виде

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t),\ u_x(\ell,t) = \varphi_2(t), 0 \le t \le T \qquad (7)$$

Если на концах стержня задается температура окружающей среды (теплообмен), то граничные условия имеют вид

$$u_x(0,t) + \gamma_1 u(0,t) = \varphi_1(t),\ u_x(\ell,t) + \gamma_1 u(\ell,t) = \varphi_2(t), 0 \le t \le T \qquad (8)$$

Условия (8) называются граничными условиями третьего рода.

9.4. Постановка краевых задач.

В зависимости от граничных условий ставятся следующие корректные краевые задачи.

Первая краевая задача. *Найти решение уравнения теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < \ell, 0 < t \le T,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x), 0 \le x \le \ell,$$

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\ u(\ell,t)=\varphi_2(t), 0 \le t \le T,$$

где $\tau(x), \varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *- заданные функции.*

Вторая краевая задача. *Найти решение уравнения теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < \ell, 0 < t \le T,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x), 0 \le x \le \ell,$$

$$u_x(0,t)=\varphi_1(t),\ u_x(\ell,t)=\varphi_2(t), 0 \le t \le T,$$

где $\tau(x), \varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *- заданные функции.*

Третья краевая задача. *Найти решение уравнения теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < \ell, 0 < t \le T,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x), 0 \le x \le \ell,$$

$$u_x(0,t)+\gamma_1 u(0,t)=\varphi_1(t),\ u_x(\ell,t)+\gamma_1 u(\ell,t)=\varphi_2(t), 0 \le t \le T,$$

где $\gamma_1, \gamma_2 = const,\ \tau(x), \varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *- заданные функции.*

Если стержень бесконечна, то граничные режимы не влияют на тепловые процессы и корректна следующая

Задача Коши. *Найти решение уравнения теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < \infty, 0 < t \le T,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x), -\infty < x < \infty,$$

где $\tau(x)$ *- заданная ограниченная функция.*

10. Принцип максимума. Теорема единственности для уравнения теплопроводности.

10.1. Принцип максимума.

В области $D=\{(x,t):0<x<\ell, 0<t\le h\}$ рассмотрим уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (10.1)$$

Границы области D обозначим следующим образом:

$AB=\{(x,y):0\le x\le \ell, t=0\}$,

$BB_0=\{(x,y):x=\ell, 0\le t\le h\}$,

$A_0B_0=\{(x,y):0\le x\le \ell, t=h\}$,

$BB_0=\{(x,y):x=0, 0\le t\le h\}$.

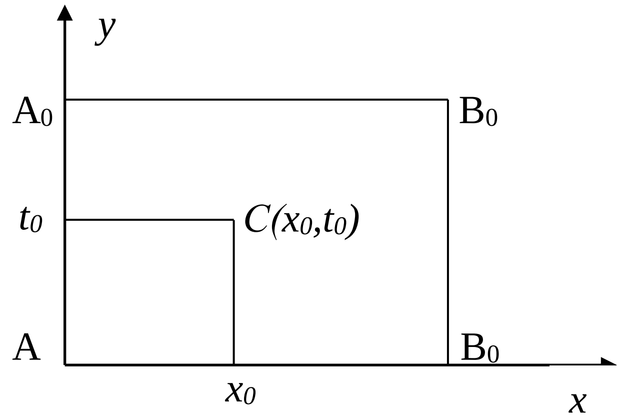


Рис. 1

Имеет место следующая

Теорема 1 (Принцип экстремума). *Если функция $u(x,t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, удовлетворяет уравнению теплопроводности в точках области D, то максимальное и минимальное значения функции $u(x,t$ достигаются или в начальный момент, или в точках границы $x=0$ или $x=\ell$.*

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Пусть M означает максимальное значение $u(x,t)$ на отрезках AB, BB_0 или AA_0: $M=max\{\max\limits_{0\le x\le\ell} u(x,0)\}, \max\limits_{0\le t\le h} u(0,t), \max\limits_{0\le t\le h} u(\ell,t)\}$.

Предположим, что в некоторой точке $C(x_0,y_0)$ $0<x_0<\ell$, $0<t\le h$ функция $u(x,t)$ достигает своего максимального значения, равного

$$u(x_0,t_0)=M+\varepsilon, \qquad (10.2)$$

превышающего чем M .

Сравним знаки левой и правой частей уравнения (10.1) в точке $C(x_0,t_0)$. Так как в точке $C(x_0,t_0)$ функция достигает своего максимального значения, то

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x^2}\le 0 \qquad (10.3)$$

Так как $u(x_0,t)$ достигает максимального значения при $t=t_0$, то

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t}\ge 0. \qquad (10.4)$$

Сравнивая знаки правой и левой части уравнения (10.1), мы видим, что они различны. Однако это рассуждение еще не доказывает теоремы, так как правая и левая части могут быть равны нулю, что не влечет за собой противоречия.

Для полного доказательства найдем точку $C(x_1,t_1)$, в которой $\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial x^2} \le 0$ и $\frac{\partial u(x_1,t_1)}{\partial t} > 0$. Для этого рассмотрим вспомогатель-ную функцию

$$\vartheta(x,t) = u(x,t) + k(t_0 - t) \qquad (10.5)$$

где k - некоторое постоянное число. Заметим, что функция $\vartheta(x,t)$ не является решением уравнения теплопроводности. Очевидно, что

$$\vartheta(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M + \varepsilon,$$
$$k(t_0 - t) \le k\,t_0 \le k\,h.$$

Выберем $k > 0$ так, чтобы kh был меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, то есть $k < \frac{\varepsilon}{2h}$. Тогда максимальное значение $\vartheta(x,t)$ при $t = 0$ или при $x = 0$, $x = \ell$ не будет превосходить $M + \frac{\varepsilon}{2}$, то есть

$$\vartheta(x,t) \le M + \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } t = 0 \text{ или } x = 0, \text{ или } x = \ell, \qquad (10.6)$$

так как для этих аргументов первое слагаемое формулы (10.5) не превосходит M, а второе - $\frac{\varepsilon}{2}$. В силу непрерывности функции $\vartheta(x,t)$ она должна в некоторой точке (x_1,t_1) достигать своего максимального значения. Очевидно, что

$$\vartheta(x_1,t_1) \ge \vartheta(x_0,t_0) = M + \varepsilon \qquad (10.7)$$

Поэтому $t_1 > 0$ и $0 < x_1 < \ell$, так как при $t = 0$ или при $x = 0$, $x = \ell$ имеет место неравенство (10.6). В точке (x_1,t_1), по аналогии с (10.3) и (10.4), должно быть $\frac{\partial^2 \vartheta(x_1,t_1)}{\partial x^2} \le 0$, $\frac{\partial \vartheta(x_1,t_1)}{\partial t} \ge 0$.

Из (10.5) имеем $u(x,t) = \vartheta(x,t) + k(t - t_0)$. Тогда

$$\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vartheta(x_1,t_1)}{\partial x^2} \le 0, \quad \frac{\partial u(x_1,t_1)}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta(x_1,t_1)}{\partial t} + k \ge k > 0$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u(x_1,t_1)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial x^2} \ge k > 0,$$

то есть уравнение (10.1) во внутренней точке (x_1,t_1) не удовлетворяется.

Аналогично может быть доказана и вторая часть теоремы о минимальном значении. Впрочем, это не требует отдельного доказательства, так как функция $u_1 = -u$ имеет максимальное значение там, где u минимальное.

Тем самым доказано, что решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности (10.1) внутри области не может принимать значений, превосходящих наибольшее значение $u(x,t)$ на границе (то есть при $t = 0,\ x = 0,\ x = \ell$).

10.2. Теорема единственности для уравнения теплопроводности.

Теорема 2 (Единственность). *Если две функции, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ определенные и непрерывные в замкнутой области $\overline{D}$, удовлетворяют уравнению теплопроводности с начальными и краевыми условиями*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f(x,t),\ i = 1,2,\ (x,t) \in D,$$

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell,$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \varphi_1(t),\ 0 \le t \le h,$$

$$u_1(\ell,t) = u_2(\ell,t) = \varphi_2(t),\ 0 \le t \le h,$$

то $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Рассмотрим функцию $\vartheta(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Функция $\vartheta(x,t)$ является решением однородного уравнения теплопроводности в этой области D:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2},\ (x,t) \in D,$$

$$\vartheta(x,0) = 0,\ 0 \le x \le \ell,\ \vartheta(0,t) = \vartheta(\ell,t) = 0,\ 0 \le t \le h.$$

Надо доказать, что однородное уравнение с однородными условиями имеет только тривиальное (то есть равное нулю) решение. Для доказательства будем использовать принцип экстремума.

По принципу экстремума максимальное и минимальное значение функции $\vartheta(x,t)$ достигается на границе при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = \ell$. Однако, по условию мы имеем:

$$\vartheta(x,0) = 0,\ 0 \le x \le \ell,\ \vartheta(0,t) = \vartheta(\ell,t) = 0,\ 0 \le t \le h$$

Поэтому $\vartheta(x,t) \equiv 0$, то есть $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. Отсюда следует, что решение первой краевой задачи единственно.

Теорема 2 доказана.

10.3. Устойчивость решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Из принципа экстремума вытекает

Следствие 1. *Если для двух решений уравнения теплопроводности $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ имеет место неравенство*

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)| \le \varepsilon \; \textit{для} \; t=0,\, x=0,\, x=\ell,$$

то

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)| \le \varepsilon$$

тождественно, то есть имеет место для всех $x,t:\ 0 \le x \le \ell, 0 \le t \le h$.

Следствие 1 позволяет установить устойчивость решения задачи, то есть непрерывную зависимость решения первой краевой задачи от начального и граничных условий.

В самом деле, если $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ решения следующих задач:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x,t)\in D, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t), (x,t)\in D,$$

$$u_1(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell, \qquad u_2(x,0) = \tau^*(x),\ 0 \le x \le \ell,$$

$$u_1(0,t) = \varphi_1(t),\ 0 \le t \le h, \qquad u_2(0,t) = \varphi_1^*(t),\ 0 \le t \le h,$$

$$u_1(\ell,t) = \varphi_2(t),\ 0 \le t \le h \qquad u_2(\ell,t) = \varphi_2^*(t),\ 0 \le t \le h$$

и выполнены условия $|\tau(x)-\tau^*(x)| \le \varepsilon$, $|\varphi_1(x)-\varphi_1^*(x)| \le \varepsilon$, $|\varphi_2(x)-\varphi_2^*(x)| \le \varepsilon$, то

$$\forall (x,t)\in \overline{D}:\quad |u_1(x,t)-u_2(x,t)| \le \varepsilon .$$

11. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.

Задача о распространении тепла в стержне длины ℓ приводится к нахождению решения уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (11.1)$$

в области $D = \{(x,t): 0 < x < \ell, 0 < t < \infty\}$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell \qquad (11.2)$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = \varphi_1(t), u(\ell,t) = \varphi_2(t), 0 \le t < +\infty. \qquad (11.3)$$

11.1. Сведение задачи к однородным граничным условиям.

Введем замены искомой функции $u(x,t)$ по формуле

$$u(x,t) = \vartheta(x,t) + \varphi_1(t) + \frac{x}{\ell}[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)], \qquad (11.4)$$

где $\vartheta(x,t)$ – новая неизвестная функция. Так как $u_t = = \vartheta_1(x,t) + \varphi_1'(t) + \frac{x}{\ell}[\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)]$, $u_{xx} = \vartheta_{xx}$, то функция $\vartheta(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\vartheta_t = a^2 \vartheta_{xx} + f_1(x,t) \qquad (11.5)$$

где $f_1(x,t) = f(x,t) - \varphi_1'(t) - \frac{x}{\ell}[\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)]$.

Из (11.2) и (11.4) имеем, что

$$\vartheta(x,t) = \tau_1(x), \qquad (11.6)$$

где $\tau_1(x) = \tau(x) - \varphi_1(0) - \frac{x}{\ell}[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)]$. Далее из (11.3) и (11.4) следует, что

$$\vartheta(0,t) = 0,\ \vartheta(\ell,t) = 0, 0 \le t < +\infty.$$

Таким образом, достаточно найти решение уравнения (11.5), удовлетворяющее начальному условию (11.6) и однородным граничным условиям

$$\vartheta(0,t) = 0,\ \vartheta(\ell,t) = 0,\ 0 \le t < +\infty. \qquad (11.7)$$

11.2. Решение задачи для однородного уравнения с однородными граничными условиями.

Сначала найдем решение однородного уравнения

$$\vartheta_t = a^2 \vartheta_{xx}, \qquad (11.8)$$

удовлетворяющее начальному условию (11.6) и однородным граничным условиям (11.7).

Как и в случае волнового уравнения, будем искать решение уравнения (11.8) в виде произведения двух функций

$$\vartheta(x,t)=X(x)T(t), \qquad (11.9)$$

одна из которых зависит только от *x*, а другая – только от *t;* причем $X(x)\neq 0$ и $T(t)\neq 0$, ибо в противном случае $\vartheta(x,t)\equiv 0$, что невозможно: функция $\vartheta\equiv 0$ не удовлетворяет начальному условию (11.6), поскольку предполагается, что $\tau_1(x)\neq 0$.

В силу граничных условий функция $X(x)$ должна обращаться в нуль на концах интервала $[0,\ell]$: $X(0)=0, X(\ell)=0.$ Подставляя (11.9) в (11.8), получим $X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$ или $\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$ Отсюда заключаем, что функции $X(x)$ и $T(t)$ должны быть решениями однородных линейных дифференциальных уравнений

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (11.10)$$

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \qquad (11.11)$$

Ненулевые решения уравнения (11.10) существуют только при $\lambda=\lambda_n$, где $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{\ell}\right)^2 \quad (n=1,2,..)$, причем в качестве этих решений можно взять функции $X_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\ell}}\sin\dfrac{\pi n}{\ell}x \quad (n=1,2,...).$ Заменяя в уравнении (11.11) λ на λ_n, получаем уравнение

$$T_n'(t)+\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2T_n(t)=0.$$

Его общим решением будет $T_n(t)=C_ne^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2t}$, где C_n – произвольная постоянная, соответствующая взятому значению n.

Подставляя найденные значения $X(x)=X_n(x)$ и $T(t)=T_n(t)$ в (11.9), получим решение уравнения (11.8) в виде

$$u_n(x,t)=C_n\sqrt{\frac{2}{\ell}}e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2t}\sin\frac{\pi n}{\ell}x \quad (n=1,2,..) \qquad (11.12)$$

Каждая из функций (11.12) удовлетворяет граничным условиям. Можно показать, что функция

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2t}\sin\frac{\pi n}{\ell}x \qquad (11.13)$$

тоже является решением уравнения (11.8), удовлетворяющим граничным условиям.

Выберем теперь коэффициенты C_n таким образом, чтобы функция (11.13) удовлетворяла и начальному условию (11.6). Полагая $t=0$ в (11.13), получим

$$\tau_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x \qquad (11.14)$$

Известно, что если функция $f(x)$ разложима в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по синусам

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x. \qquad (11.15)$$

то $b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}xdx.$ Сравнивая (11.14) и (11.15), видим, что $b_n=\sqrt{\frac{2}{\ell}}C_n$, то есть $C_n=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\int_0^{l}\tau_1(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}xdx,$ чем и завершается решение задачи.

11.3. Решение задачи для неоднородного уравнения.

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$$

с начальным условием

$$u(x,0)=0$$

и граничными условиями

$$u(0,t)=0,\ u(\ell,t)=0.$$

Решение задачи будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям $\{\sin\frac{\pi n}{\ell}x\}$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{\ell}x.$$

Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n}{\ell}x,$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{\ell}\xi\,d\xi.$$

Тогда решение задачи представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{t}exp\left(-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2a^2(t-\eta\right)f_n(\eta)d\eta\right]\sin\frac{\pi n}{\ell}x.$$

Пример 1. Найти решение уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ при граничных условиях $u(0,t) = 0,\ u(\ell,t) = 0$ и начальном условии

$$u(x,0) = \begin{cases} x, \text{åñëè}\ \ 0 \le x < \dfrac{\ell}{2}, \\ \ell - x,\ \text{åñëè}\ \ \dfrac{\ell}{2} \le x \le \ell. \end{cases}$$

Решение. Решение определяется формулой

$u(x,t) = \sqrt{\dfrac{2}{\ell}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2 t}{l^2}} \sin\dfrac{\pi n x}{\ell}$, где C_n вычисляется по формулам

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \left(\int_0^{1/2} x \sin\frac{\pi\, nx}{\ell}\,dx + \int_{1/2}^{l} (\ell - x) \sin\frac{\pi\, nx}{\ell}\,dx \right).$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$\int_0^{1/2} x \sin\frac{\pi\, nx}{\ell}\,dx = -\frac{\ell^2}{2\pi\, n} \cos\frac{\pi\, n}{2} + \frac{\ell^2}{\pi^2 n^2} \sin\frac{\pi\, n}{2},$$

$$\int_{1/2}^{l} (\ell - x) \sin\frac{\pi\, nx}{\ell}\,dx = \frac{\ell^2}{2\pi\, n} \cos\frac{\pi\, n}{2} + \frac{\ell^2}{\pi^2\, n^2} \sin\frac{\pi\, n}{2}.$$

Складывая вычисленные интегралы, найдем, что $C_n = \dfrac{(2\ell)^{3/2}}{\pi^2\, n^2} \sin\dfrac{\pi\, n}{2}$. Так как $\sin\pi\, n = 0$, то и $C_{2n} = 0$. Далее имеем $C_{2n-1} = \dfrac{(2\ell)^{3/2}}{\pi^2} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$.

Решение задачи запишется так:

$$u(x,t) = \frac{(2\ell)^{3/2}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a^2 (2n-1)^2}{\ell^2} t} \sin\frac{\pi(2n-1)}{\ell} x.$$

12. Задачи на бесконечной прямой. Функция Грина

12.1. Автомодельное решение уравнения теплопроводности.

Задача о распределении температуры в неограниченном однородном стержне описывается уравнением теплопроводности и начальным условием (задача Коши для уравнения теплопроводности).

Задача Коши. *В верхней полуплоскости найти решение уравнения*

$$a^2u_{xx} - u_t = 0, \qquad (10.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \tau(x), -\infty < x < \infty. \qquad (10.2)$$

Рассмотрим сначала частный случай начального условия в виде

$$u(x,0) = \tau(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 0, \\ 1, 0 < x < \infty. \end{cases} \qquad (10.3)$$

Решение задачи будем искать в виде:

$$u(x,t) = f(z),\ z = \frac{x}{t^{\alpha}}, \alpha \in R \qquad (10.4)$$

Так как $z_x = \frac{1}{t^{2\alpha}}$, $z_t = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}x$, то $u_{xx} = f''(z)\cdot\frac{1}{t^{\alpha}}$, $u_t = -\frac{\alpha}{t}z\,f'(z)$. туундуларын эсептеп (10.1) теңдемеге койсок, төмөнкү барабардык келип чыгат

$$a^2u_{xx} - u_t = f''(z)\cdot\frac{1}{t^{2\alpha}} + \frac{\alpha}{t}z\,f'(z) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t^{2\alpha-1}}f''(z) + \frac{\alpha}{a^2}z\,f'(z)\right].$$

Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то:

$$f''(z) + \frac{z}{2a^2}f'(z) = 0 \qquad (10.5)$$

Пусть $f'(z) = \theta(z)$, тогда из (10.5) имеем $\theta'(z) + \frac{z}{2a^2}\theta(z) = 0$. Разделяя переменные, получим $\frac{d\theta(z)}{\theta(z)} = -\frac{z}{2a^2}$. Интегрируя это уравнение, найдем $ln|\theta(z)| = -\frac{z^2}{4a^2} + lnC_1, C_1 > 0$. Отсюда имеем $\theta(z) = Ce^{-\frac{z^2}{4a^2}}, C \in R$. Следовательно,

$$f'(z) = Ce^{-\frac{z^2}{4a^2}}. \qquad (10.6)$$

Из (10.2) получим условия

$$f(-\infty) = 0,\ f(+\infty) = 1 \qquad (10.7)$$

Интегрируя равенство (10.6) от $-\infty$ до z имеем $f(z) - f(-\infty) = C\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi$. Если учесть первого условия (10.7): $f(-\infty) = 0$, то $f(z) = C\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi$. Если учесть второго условия (10.7): $f(+\infty) = 1$, то $f(+\infty) = 1 = C\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi$. Введя замену $\frac{\xi}{2a} = s$. Тогда $\xi = 2as,\ d\xi = 2a\,ds$. Поэтому предыдущее равенство примет вид $1 = 2aC\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$, то $C = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}$. Таким образом, $f(z) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}} d\xi$. Введя замену $\frac{\xi}{2a} = s$, получим

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{2a}} e^{-s^2} ds$$

Тогда в силу (10.4) получим решение задачи Коши (10.1), (10.3) в виде

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds \qquad (10.8)$$

Функция (10.8) называется автомодельным решением уравнения теплопроводности.

12.2. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Интеграл (10.8) можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-s^2} ds + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds$$

Если введем функцию $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-s^2} ds$, так называемое интегралом вероятности (или интегралом ошибок), то решение (10.8) запишется в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \qquad (10.9)$$

Производя дифференцирование, находим

$$u_x(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \qquad (10.10)$$

Заметим, что функция (10.10) также является решением уравнения (10.1). Поэтому функцию

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \qquad (10.11)$$

часто называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

12.3. Решение задачи Коши.

С помощью фундаментального решения (10.11) решение задачи Коши представимо в виде

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}U(x-\xi,t)\tau(\xi)d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (10.12)$$

В самом деле, функция (10.12) удовлетворяет уравнения теплопроводности, так как $a^2U_{xx}(x-\xi,t)-U_t(x-\xi,t)=0$.

Теперь докажем, что функция (10.12) удовлетворяет начальному условию (10.2). Для этого введем замену

$\dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=s$. Тогда $\xi=x-2a\sqrt{t}s,\ d\xi=-2a\sqrt{t}\,ds$. При $\xi=-\infty$ имеем $s=\infty$, а при $\xi=\infty$ имеем $s=-\infty$. Поэтому интеграл можно записать в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\infty}^{-\infty}\tau(x-2a\sqrt{t}s)e^{-s}(-2)a\sqrt{t}\,ds=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tau(x-2a\sqrt{t}s)e^{-s}ds$$

Отсюда, переходя к пределу при $t=0$ и учитывая формулу Пуассона имеем

$$u(x,0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tau(x)e^{-s}ds=\tau(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s}ds=\tau(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\tau(x).$$

Это означает, что начальное условие выполняется.

12.4. Функция Грина для бесконечной прямой.

Функция

$$G(x,t;\xi,\eta)=U(x-\xi,t-\eta)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\eta)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \qquad (10.13)$$

называется функцией Грина уравнения теплопроводности для бесконечной прямой.

Эта функция по переменным x,t удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$a^2G_{xx}(x,t;\xi,\eta)-G_t(x,t;\xi,\eta)=0,$$

а по переменным ξ,η удовлетворяет сопряженному уравнению теплопроводности

$$a^2G_{\xi\xi}(x,t;\xi,\eta)+G_\eta(x,t;\xi,\eta)=0.$$

Решение задачи Коши через функции Грина запишется в виде

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;\xi,0)\tau(\xi)d\xi. \qquad (10.14)$$

12.5. Функция Грина для конечного отрезка.

Функция для конечного отрезка $[0,\ell]$ имеет вид

$$G(x,t;\xi,\eta)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi-2n\ell)^2}{4a^2(t-\eta)}}-e^{-\frac{(x+\xi-2n\ell)^2}{4a^2(t-\eta)}}\right].$$

Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$a^2u_{xx}-u_t=0,\ 0<x<\ell,\ 0<y<h,$$
$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$
$$u(x,0)=\tau(x),\ 0<x<\ell$$

имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^t G_\xi(x,t;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int_0^t G_\xi(x,t;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^\ell G(x,t;\xi,0)\tau(\xi)d\xi.$$

13. Задачи, приводящие к уравнению эллиптического типа. Постановка внутренних и внешних задач.

13.1. Задачи, приводящие к уравнению эллиптического типа.

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа.

1). Стационарное тепловое поле. Температура стационарного теплового поле удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (13.1)$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

При наличии источника тепла получаем неоднородное уравнение Лапласа

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), \qquad (13.2)$$

которое называется уравнением Пуассона.

2). Потенциальное течение жидкости. Рассмотрим стационарное течение несжимающее жидкости (плотность $\rho = const$), характеризуемое скоростью $\vec{\upsilon}(x,y)$. Если течение жидкости не вихревое, то скорость $\vec{\upsilon}(x,y)$ является потенциальным вектором, то есть

$$\vec{\upsilon}(x,y) = -grad\,\varphi(x,y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j},$$

где $\varphi(x,y)$ - скалярная функция, называемая потенциалом скорости.

Если отсутствуют источники, то

$$div\,\vec{\upsilon}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Следовательно, потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

13.2. Постановка внутренних и внешних задач.

Рассмотрим область D, ограниченной замкнутой кривой Γ. Задача о стационарном распределении температуры $u(x,y)$ внутри области D формулируется как следующие краевые задачи.

Первая внутренняя краевая задача. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую внутри области D уравнению*

$$\Delta u = f(x,y) \tag{13.3}$$

и граничному условию

$$u(x,y)|_{\Gamma} = \varphi_1(x,y), (x,y) \in \Gamma, \tag{13.4}$$

где $\varphi_1(x,y)$ - заданная функция.

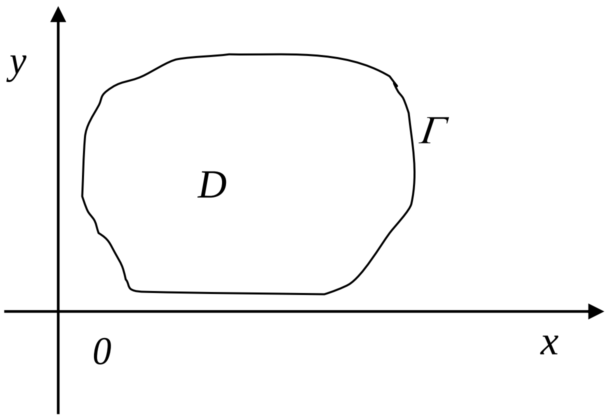
Эту задачу часто называют внутренней задачей Дирихле.

Вторая внутренняя краевая задача. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую внутри области D уравнению*

$$\Delta u = f(x,y) \tag{13.3}$$

граничному условию

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi_2(x,y), (x,y) \in \Gamma, \tag{13.5}$$



где $\varphi_2(x,y)$ - заданная функция, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к кривой Γ.

Эту задачу часто называют внутренней задачей Неймана.

Третья внутренняя краевая задача. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую внутри области D уравнению*

$$\Delta u = f(x,y) \tag{13.3}$$

граничному условию

$$\left.\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} + h u(x,y)\right)\right|_{\Gamma} = \varphi_3(x,y), (x,y) \in \Gamma, \tag{13.6}$$

где $\varphi_2(x,y)$ - заданная функция, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к кривой Γ.

Пусть D_0 - означает внешнюю область по отношению к замкнутой кривой Γ. Если решение уравнения ищется во внешней области D_0, то задачи называются внешними.

Первая внешняя краевая задача. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую во внешней области D_0 уравнению*

$$\Delta u = f(x,y) \tag{13.3}$$

граничному условию

$$u(x,y)|_{\Gamma} = \varphi_1(x,y), (x,y) \in \Gamma, \tag{13.4}$$

где $\varphi_1(x,y)$ - заданная функция.

Эту задачу часто называют внешней задачей Дирихле.

Вторая внешняя краевая задача. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую во внешней области* D_0 *уравнению*

$$\Delta u = f(x,y) \qquad (13.3)$$

граничному условию

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi_2(x,y), (x,y) \in \Gamma, \qquad (13.5)$$

где $\varphi_2(x,y)$ - *заданная функция,* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - *производная по внешней нормали к кривой* Γ.

Эту задачу часто называют внешней задачей Неймана.

Третья внешняя краевая задача. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую во внешней области* D *уравнению*

$$\Delta u = f(x,y) \qquad (13.3)$$

граничному условию

$$\left.\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} + hu(x,y)\right)\right|_{\Gamma} = \varphi_3(x,y), (x,y) \in \Gamma, \qquad (13.6)$$

где $\varphi_2(x,y)$ - *заданная функция,* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - *производная по внутренней нормали к кривой* Γ.

14. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Гармонические функции и их свойства.

14.1. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

При решении ряда задач уравнение Лапласа записывают в полярной системе координат, определяемые по формуле

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, 0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi . \qquad (14.1)$$

Тогда $u(x,y) = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \vartheta(\rho,\varphi)$. Так как $x_\rho = \cos\varphi,\ x_\varphi = -\rho\sin\varphi,\ y_\rho = \sin\varphi,\ y_\varphi = \rho\cos\varphi$, то $J = x_\rho y_\varphi - x_\varphi y_\rho = \rho^2$. Если $\rho \ne 0$, то замена переменных не особенна, и существует обратное преобразование, представимое в виде:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad (14.2)$$

Нетрудно заметить, что

$$\rho_x = \frac{x}{\rho},\ \rho_{xx} = \frac{y^2}{\rho^3}, \rho_y = \frac{y}{\rho},\ \rho_{yy} = \frac{x^2}{\rho^3} \qquad (14.3)$$

Если дифференцируем по x и по y соотношение $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, имеем

$\dfrac{1}{\cos^2\varphi}\varphi_x = -\dfrac{y}{x^2}$, $\quad \dfrac{1}{\cos^2\varphi}\varphi_y = \dfrac{1}{x}$. Отсюда с учетом (14.1) найдем

$$\varphi_x = -\frac{y}{\rho^2},\ \varphi_{xx} = \frac{2xy}{\rho^3},\ \varphi_y = \frac{x}{\rho^2}, \varphi_{yy} = -\frac{2xy}{\rho^3}. \qquad (14.4)$$

Воспользуясь формулой дифференцирования сложной функции имеем:

$$\upsilon_x = \upsilon_\rho\rho_x + \upsilon_\varphi\varphi_x,\ \upsilon_y = \upsilon_\rho\rho_y + \upsilon_\varphi\varphi_y,$$

$$\upsilon_{xx} = \upsilon_{\rho\rho}\rho_x^2 + 2\upsilon_{\rho\varphi}\rho_x\varphi_x + \upsilon_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + \upsilon_\rho\rho_{xx} + \vartheta_\varphi\varphi_{xx} =$$

$$= \upsilon_{\rho\rho}\frac{x^2}{\rho^2} - 2\frac{xy}{\rho^3}\upsilon_{\rho\varphi} + \upsilon_{\varphi\varphi}\frac{y^2}{\rho^4} + \upsilon_\rho\frac{y^2}{\rho^3} + \vartheta_\varphi\frac{2xy}{\rho^3} \quad ,$$

$$\upsilon_{yy} = \upsilon_{\rho\rho}\rho_y^2 + 2\upsilon_{\rho\varphi}\rho_y\varphi_y + \upsilon_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + \upsilon_\rho\rho_{yy} + \upsilon_\varphi\varphi_y^2 =$$

$$= \upsilon_{\rho\rho}\frac{y^2}{\rho^2} - 2\frac{xy}{\rho^3}\upsilon_{\rho\varphi} + \upsilon_{\varphi\varphi}\frac{x^2}{\rho^4} + \upsilon_\rho\frac{x^2}{\rho^3} - \upsilon_\varphi\frac{2xy}{\rho^3}$$

Тогда

$$\upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} = \vartheta_{\rho\rho} + \vartheta_{\varphi\rho}\frac{1}{\rho^2} + \vartheta_\rho\frac{1}{\rho} =$$

$$= \vartheta_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\vartheta_\rho + \frac{1}{\rho^2}\vartheta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\vartheta}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\vartheta_{\varphi\varphi}.$$

Таким образом, уравнение Лапласа в полярной системе координат запишется в виде:

$$\Delta \upsilon = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \upsilon}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (14.5)$$

Будем искать решение, зависящее только от ρ: $\upsilon(\rho,\varphi) = w(\rho)$. Тогда из (14.5) получим обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d\,w}{d\rho} \right) = 0$. Интегрируя это уравнение по ρ, будем иметь $\rho \frac{d\,w}{d\rho} = C_1$. Тогда $\frac{d\,w}{d\rho} = \frac{C_1}{\rho}$. Перепишем это уравнение в виде $dw = C_1 \frac{d\rho}{\rho}$. Отсюда после интегрирования по ρ, получим

$$w(\rho) = \tilde{N}_1 \ln\rho + C_2, C_1, C_2 = const.$$

Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда это решение имеет особенности при $\rho = 0$ и является сингулярным решением уравнения Лапласа. Выбирая, $C_1 = -1, C_2 = 0$ будем иметь

$$\upsilon(\rho,\varphi) = \ln\frac{1}{\rho}. \qquad (14.6)$$

Решение (14.6) называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости (для двух независимых переменных).

14.2. Гармонические функции. Условия Коши – Римана.

Весьма общим методом решения двумерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий функции комплексного переменного.

Пусть

$$w = f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$$

- некоторая функция комплексного переменного $z = x + iy$, причем $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ являются вещественными функциями переменных x и y.

Функция $f(z)$ называется аналитической, если существует производная

$$\frac{d\,w}{d\,z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ может стремиться к нулю многими способами. Однако, если функция $f(z)$ аналитическая, то предел $\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ не зависит от выбора пути.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции являются так называемые условия Коши – Римана

$$\begin{cases} u_x = \upsilon_y, \\ u_y = -\upsilon_x. \end{cases} \qquad (14.7)$$

Если функция в некоторой области D плоскости $z = x + iy$ аналитическая, то в этой области имеет производные всех порядков и разлагается в степенной ряд.

В частности, для такой функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ имеют производные 2-го порядка по x и y.

Дифференцируя первое равенство формулы (14.7) по x, а второе по y, получим:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ или } \Delta u = 0$$

Подобным же образом, меняя порядок дифференцирования, находим:

$$\upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} = 0 \text{ или } \Delta \upsilon = 0$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа.

Обычно говорят, что $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$, удовлетворяющие условию Коши-Римана, являются сопряженными гармоническими функциями.

Определение 1. *Функция $u(x,t)$ называется гармонической в области D, если она*

1) непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка,

2) удовлетворяет уравнению Лапласа.

14.3. Интегральное представление гармонических функций.

В области D, ограниченной замкнутой кривой Γ, рассмотрим уравнение

$$\Delta u = f(x,y) \qquad (14.8)$$

Пусть $\upsilon(x,y) \in C^2(D)$ произвольная функция. Рассмотрим выражение $\upsilon\Delta u$ и перебросим производные от υ на u:

$$\upsilon u_{xx} = (\upsilon u_x)_x - \upsilon_x u_x = (\upsilon u_x)_x - (\upsilon_x u)_x + \upsilon_{xx} u = (\upsilon u_x - \upsilon_x u)_x + \upsilon_{xx} u,$$

$$\upsilon u_{yy} = (\upsilon u_y)_y - \upsilon_y u_y = (\upsilon u_y)_y - (\upsilon_y u)_y + \upsilon_{yy} u = (\upsilon u_y - \upsilon_y u)_y + \upsilon_{yy} u.$$

Тогда $\upsilon\Delta u = (\upsilon u_x - \upsilon_x u)_x - (\upsilon_y u - \upsilon u_y)_y + u\Delta\upsilon$ или

$$\upsilon\Delta u - u\Delta\upsilon = (\upsilon u_x - \upsilon_x u)_x - (\upsilon_y u - \upsilon u_y)_y \qquad (14.9)$$

Интегрируя тождество (14.9) по области D имеем

$$\iint_D (\upsilon\Delta u - u\Delta\upsilon) d\xi d\eta = \int_\Gamma (\upsilon_\eta u - \upsilon u_\eta) d\xi + (\upsilon u_\xi - \upsilon_\xi u) d\eta.$$

Если учесть равенства $\upsilon_\eta d\xi - \upsilon_\xi d\eta = \frac{\partial \upsilon}{\partial n}$, $u_\eta d\xi - u_\xi d\eta = \frac{\partial u}{\partial n}$, то из предыдущего равенства получим формулу Грина:

$$\iint_D (\upsilon \Delta u - u \Delta \upsilon) d\xi d\eta = \int_\Gamma \left(u \frac{\partial \upsilon}{\partial n} - \upsilon \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \qquad (14.10)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial \upsilon}{\partial n}$ - производные по направлению внешней нормали к Γ.

Теорема. *Если D - некоторая конечная область с кусочно-гладкой границей Γ, функция $u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, а $\upsilon(\rho,\varphi) = \ln\frac{1}{\rho}$, $\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа с параметрической точкой $(\xi,\eta) \in D$, то имеет место интегральное представление*

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n} \ln\frac{1}{\rho} - u(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial n} \ln\frac{1}{\rho} \right) ds - \frac{1}{2\pi} \iint_D \ln\frac{1}{\rho} \Delta u \, d\xi \, d\eta. \qquad (14.10)$$

14.4. Принцип экстремума.

Теорема (Принцип экстремума). *Если функция $u(x,y)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ внутри D, то максимальные и минимальные значения функции $u(x,y)$ достигаются на границе Γ.*

15. Метод функции Грина для задачи Дирихле. Принцип экстремума.

15.1. Метод функции Грина для задачи Дирихле.

В области D, рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (14.1)$$

$$u(x,y)|_{\Gamma} = \varphi(x,y), (x,y) \in \Gamma \qquad (14.2)$$

Пусть $\upsilon(x,y)$ - решение задачи Дирихле для области D с краевым условием

$$\Delta \upsilon = \upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} = 0 \qquad (14.3)$$

$$\upsilon(x,y)|_{\Gamma} = u(x,y)|_{\Gamma} \qquad (14.4)$$

Определение. *Функция $G(x,y;\xi,\eta)$, определяемая равенством*

$$G(x,y;\xi,\eta) = -\ln\frac{1}{\rho} + \upsilon(x,y;\xi,\eta), \qquad (14.5)$$

где $\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, называется функцией Грина.

Функция Грина для задачи Дирихле обладает следующими свойствами.

1^0. Удовлетворяет уравнению Лапласа:

$\Delta_{(x,y)}(G) = G_{xx}(x,y;\xi,\eta) + G_{yy}(x,y;\xi,\eta) = 0$,

$\Delta_{(\xi,\eta)}(G) = G_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta) + G_{\eta\eta}(x,y;\xi,\eta) = 0$;

2^0. Обладает свойством симметрии, те есть

$G(x,y;\xi,\eta) = G(\xi,\eta;x,y)$;

3^0. На границе Γ области D обращается в нуль:

$G(x,y;\xi,\eta)|_{\Gamma} = 0$.

Из формулы (14.10) с помощью функции Грина получим решение задачи Дирихле в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\varphi(\xi,\eta)ds \qquad (14.6)$$

Мы будем искать решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных. Решение краевых задач для уравнения Лапласа может быть найдено методом разделения переменных в случае некоторых простейших областей (круг, прямоугольник, шар, цилиндр и др.).

15.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Найти функцию *U*, удовлетворяющую уравнению:

$\Delta u = 0$ внутри круга (1)

и граничному условию

$u(R,\varphi)=\mu(\varphi)$ на границе круга, (2)

где $\mu(\varphi)$ - заданная функция, φ - полярный угол.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Введем полярную систему координат (ρ,φ) с началом в центре круга.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$ -полярные координаты.

Уравнение (1) в полярных координатах имеет вид

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}. \qquad (3)$$

Решим уравнение методом разделения переменных, то есть будем искать частное решение уравнения (1), вида

$$U(\rho,\varphi)=P(\rho)\Phi(\varphi)\not\equiv 0.$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (3), получим

$$\Delta U=P''(\rho)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho}P''(\rho)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Phi''(\varphi)=0$$

$$\Phi(\varphi)[P''(\rho)+\frac{1}{\rho}P'(\rho)]=-\frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Phi''(\varphi)$$

$$\frac{\rho^2(P''(\rho)+\frac{1}{\rho}P'(\rho))}{P(\rho)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda=const.$$

Отсюда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} \rho^2(P''(\rho)+\frac{1}{\rho}P'(\rho))=\lambda P(\rho), \quad P\not\equiv 0, & (4) \\ \Phi''(\varphi)=-\lambda\Phi(\varphi), \qquad \Phi\not\equiv 0. & (5) \end{cases}$$

Определим знак λ:

<u>1 случай</u> Пусть $\lambda<0$, например $\lambda=-q^2$.

Рассмотрим уравнение (5)

$$\Phi''(\varphi) = q^2\Phi(\varphi).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\omega^2 - q^2 = 0$$
$$\omega = \pm q.$$

$\Phi(\varphi) = Ae^{q\varphi} + Be^{-q\varphi}$ -это решение не подходит, так как при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $U(\rho,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению $U(\rho,\varphi+2\pi) = U(\rho,\varphi)$ (условие периодичности).

Отсюда следует, что $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$, то есть $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией

угла φ с периодом 2π.

<u>2 случай</u> Пусть $\lambda = 0$, тогда

$$\Phi''(\varphi) = 0$$

$\Phi(\varphi) = A\varphi + B$ -это решение подходит для уравнения (5) системы при условии, что A=0.

Рассмотрим уравнение (4) системы:

$$\rho^2\left(P''(\rho) + \frac{1}{\rho}P'(\rho)\right) = 0$$
$$P''(\rho) + \frac{1}{\rho}P'(\rho) = 0$$

Пусть $P'(\rho) = V$, тогда:

$$V' + \frac{1}{\rho}V = 0$$
$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{V}{\rho}$$
$$\int\frac{dV}{V} = -\int\frac{d\rho}{\rho}$$
$$\ln V = \ln\frac{1}{\rho} + \ln C_1, V = \frac{C_1}{\rho}$$
$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{C_1}{\rho}, P = \int\frac{C_1}{\rho}d\rho = C_1\ln\rho = C_1\ln\rho + C_2$$

Таким образом получаем : $U = C\ln\rho + D$-решение уравнения в общем случае.

<u>3 случай</u> Пусть $\lambda > 0$, например $\lambda = q^2$.

Решение уравнения (5):

$\Phi(\varphi) = A\cos q\varphi + B\sin q\varphi$, причем $q \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим уравнение (4) системы:

$$\rho^2\left(P''(\rho) + \frac{1}{\rho}P'(\rho)\right) = q^2 P(\rho).$$

Функцию $P(\rho)$ будем искать в виде $P(\rho) = \rho^a$.

Подставим $P(\rho) = \rho^a$ в уравнение (4):

$$\rho^2\left(a(a-1)\rho^{a-2} + a\rho^{a-2}\right) = q^2\rho^a$$

$$a(a-1)\rho^a + a\rho^a = q^2\rho^a$$
$$a^2 - a + a = q^2$$
$$a^2 = q^2$$
$$a = \pm q.$$

Следовательно, $P(\rho) = C\rho^q + D\rho^{-q}$- решение уравнения, где *C* и *D* – постоянные.

Для решения внутренней задачи надо положить $P(\rho) = C\rho^q$, так как, если $D \neq 0$, то

функция $U(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $\rho = 0$ и не является

гармонической функцией внутри круга. Итак, частные решения нашей задачи найдены:

$U(\rho,\varphi) = (A\cos q\varphi + B\sin q\varphi)\cdot C\rho^q$,

$$U(\rho,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)\rho^n \qquad (6)$$
-вид общего решения.

Удовлетворим краевому условию:

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)R^n=\mu(\varphi).$$

Считая, что μ задана как функция угла φ, возьмем ее разложение в ряд Фурье

$$\mu(\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$$ где

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\,d\theta,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\cos n\theta\,d\theta,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\sin n\theta\,d\theta.$$

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу (6) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\frac{\rho^n}{R^n}\left(\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi\right)d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)d\theta=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)d\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\cos\left(n\left(\varphi-\theta\right)\right)+\frac{1}{2}\right). \qquad (8)$$

Произведем следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\cos n(\varphi-\theta)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\cdot\left[e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}\right)^n+\left(\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}\right)^n\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}+\frac{\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi-\theta)+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}.$$

Подставляя полученный результат в равенство (8), получаем

$U(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu(\theta)d\theta\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)}$ -интегральная формула, дающая решение задачи.

$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)}$ -ядро Дирихле.

3.3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце

Найти функцию *U*, удовлетворяющую уравнению

$\Delta U=0$ внутри кольца. (1)

Необходимо поставить краевые условия на каждой из границ:

$$\begin{cases}U(R_1,\varphi)=f_1(\varphi)\\U(R_2,\varphi)=f_2(\varphi),\end{cases}\qquad(2)$$

где $f_1(x),f_2(x)$ -заданные функции, φ -полярный угол.

Для простоты вычислений возьмем $R_1=1,\quad R_2=2$ и $f_1(x)=1,\quad f_2(x)=2$,

тогда краевые условия примут вид

$$\begin{cases}U(1,\varphi)=1\\U(2,\varphi)=2.\end{cases}\qquad(2^*)$$

Запишем уравнение (1) в полярных координатах

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}.$$

Решим уравнение методом разделения переменных, то есть будем искать решение уравнения (1) вида

$$U(\rho,\varphi)=P(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\not\equiv 0.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\Delta U=P''(\rho)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho}P'(\rho)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Phi''(\varphi)=0$$

$$\frac{\rho^2\left(P''+\frac{1}{\rho}P'\right)}{P}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda=const.$$

Отсюда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$\begin{cases}\rho^2\left(P''+\frac{1}{\rho}P'\right)=\lambda P & (3)\\ \Phi''=-\lambda\Phi & (4)\end{cases}$$

Необходимо определить знак λ. В уравнении Лапласа в круге мы выяснили, что $\lambda>0$ и решения уравнений (3)-(4) имеет вид

$$\Phi(\varphi)=A\cos q\varphi+B\sin q\varphi,\ \text{причем}\ q\in\mathbb{Z}$$
$$P(\rho)=C\rho^q+D\rho^{-q},\ \text{причем}\ q>0$$

и при $\lambda=0$ получили

$$P(\rho)=D_0\ln\rho+C_0,\quad q=0.$$

Общее решение имеет вид

$$U(\rho,\varphi)=\frac{C_0}{2}+D_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\cdot\left(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}\right)$$

Удовлетворим краевым условиям (2*). Необходимо выяснить, какие из коэффициентов являются лишними.

$$U(1,\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n(C_n + D_n)\cos n\varphi + B_n(C_n + D_n)\sin n\varphi\right) = 1$$

$$A_n(C_n + D_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{n\pi}\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$B_n(C_n + D_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot \sin n\varphi d\varphi = -\frac{1}{n\pi}\cos n\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot d\varphi = 1;$$

$$U(2,\varphi) = C_0 + D_0\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right)\cos n\varphi + B_n\left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right)\sin n\varphi\right) = 2,$$

$$A_n\left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\cdot \cos n\varphi d\varphi = 0,$$

$$B_n\left(C_n 2^n + D_n 2^{-n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\cdot \sin n\varphi d\varphi = 0,$$

$$C_0 + D_0\ln 2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2d\varphi = 2.$$

Итак, получили

$$\begin{cases} U(1,\varphi) = C_0 = 1 \\ U(2,\varphi) = C_0 + D_0\ln 2 = 2. \end{cases}$$

$$U(\rho,\varphi) = 1 + \frac{\ln\rho}{\ln 2}\text{ - решение задачи.}$$

3.4. Уравнение Лапласа в прямоугольнике

Для решения уравнения Лапласа в прямоугольнике необходимо рассмотреть **вспомогательную задачу.**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 & (1) \\ U(0,y) = f_1(y) & (2) \\ U(a,y) = f_2(y) & (3) \\ U(x,0) = U(x,b) = 0 & (4) \end{cases}$$

Условие (4) необходимо. Оно нам поможет при решении.

Решим уравнение (1) методом разделения переменных

$$U(x, y) = X(x)Y(y).$$

Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}X = 0$$
$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = \lambda = const.$$

Отсюда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$\begin{cases} Y'' = -\lambda Y & (5) \\ X'' = \lambda X & (6) \end{cases}.$$

Необходимо определить знак λ.

<u>1 случай</u>. Пусть $\lambda < 0$, например, $\lambda = -p^2$.

Рассмотрим уравнение (5):

$$Y'' + \lambda Y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\xi^2 - p^2 = 0$$
$$\xi = \pm p$$
$$Y(y) = Ce^{py} + De^{-py} - \text{решение уравнения (5).}$$

Рассмотрим уравнение (6)

$$X'' - \lambda X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2 + p^2 = 0$$
$$\omega^2 = -p^2$$
$$\omega = \pm ip$$
$$X(x) = A\cos px + B\sin px - \text{решение уравнения (6).}$$

Таким образом,

$$U(x,y)=X(x)\cdot Y(y)=(A\cos px+B\sin px)\cdot(Ce^{py}+De^{-py}).$$

Удовлетворим краевым условиям (4):

1) $U(x,0)=(A\cos px+B\sin px)\cdot(C+D)=0$

$U(x,0)=X(x)\cdot(C+D)=0.$

$X(x)\neq 0,$ так как мы ищем ненулевые решения уравнения (1), тогда $C+D=0$, отсюда $C=-D$.

2) $U(x,b)=X(x)\cdot(Ce^{pb}+De^{-pb})=0.$

Учитывая, что $C=-D$ имеем:

$$-De^{pb}+De^{-pb}=0$$
$$D(e^{-pb}-e^{pb})=0.$$

$D\neq 0,$ следовательно, $e^{-pb}=e^{pb}$ это возможно только при $p=0,$ но тогда мы получим решение уравнения равное постоянной, а это не удовлетворяет условиям (2), (3).

2 случай. Пусть $\lambda>0,$ например, $\lambda=p^2.$

Рассмотрим уравнение (6)

$$X''-\lambda X=0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2-p^2=0$$
$$\omega^2=p^2$$
$$\omega=\pm p$$
$X(x)=Ae^{px}+Be^{-px}$ – решение уравнения (6).

Рассмотрим уравнение (5):

$$Y''+\lambda Y=0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\xi^2+p^2=0$$
$$\xi=\pm ip$$
$Y(y)=C\cos py+D\sin py$ – решение уравнения (5).

Удовлетворим начальному условию (4).

$$U(x,y)=X(x)\cdot Y(y)=(Ae^{px}+Be^{-px})\cdot(C\cos py+D\sin py)$$

1) $U(x,0)=X(x)\cdot C=0$

$X(x)\neq 0$, следовательно, $C=0$

2) $U(x,b)=X(x)\cdot(C\cos pb+D\sin pb)=0.$

Так как C=0 То,

$$D\sin pb=0.$$

Если D=0, то решение тождественно равно нулю, а нам это не подходит, значит

$$\sin bp=0$$

$$bp=\pi n$$

$$p=\frac{\pi n}{b},\ \text{где}\ n\in\mathbb{Z}.$$

Запишем решение задачи в виде ряда:

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{\frac{\pi nx}{b}}+B_ne^{-\frac{\pi nx}{b}})\sin\frac{\pi ny}{b} \tag{7}$$

Удовлетворим начальным условиям (2), (3). Подставим в выражение (7) начальное условие (2):

$$U(0,y)=f_1(y).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{\pi ny}{b}=f_1(y)$$

$$A_n+B_n=\frac{2}{b}\int_0^b f_1(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy. \tag{8}$$

Удовлетворим начальному условию (3): $U(a,y)=f_2(y).$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{\frac{\pi na}{b}}+B_ne^{-\frac{\pi na}{b}})\sin\frac{\pi ny}{b}=f_2(y)$$

$$A_ne^{\frac{\pi na}{b}}+B_ne^{-\frac{\pi na}{b}}=\frac{2}{b}\int_0^b f_2(y)\sin\frac{\pi ny}{b}dy. \tag{9}$$

Для нахождения коэффициентов A_n и B_n необходимо решить систему уравнений (8), (9):

$$\begin{cases} A_n + B_n = \dfrac{2}{b}\int\limits_0^b f_1(y)\sin\dfrac{\pi n y}{b}dy \\ A_n e^{\frac{\pi n a}{b}} + B_n e^{-\frac{\pi n a}{b}} = \dfrac{2}{b}\int\limits_0^b f_2(y)\sin\dfrac{\pi n y}{b}dy. \end{cases}$$

Подставив полученные коэффициенты в (7) получим решение задачи.

Рассмотрим **ненулевые краевые условия для уравнения Лапласа в прямоугольнике**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \\ U(0,y) = f_1(y) \\ U(a,y) = f_2(y) \\ U(x,0) = f_3(x) \\ U(x,b) = f_4(x) \end{cases}$$

Ищем решение задачи в виде суммы двух функций

$$U(x,y) = V(x,y) + W(x,y).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \\ V(0,y) = f_1(y) \\ V(a,y) = f_2(y) \\ V(x,0) = 0 \\ V(x,b) = 0 \end{cases} \qquad (10) \qquad\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \\ W(0,y) = 0 \\ W(a,y) = 0 \\ W(x,0) = f_3(x) \\ W(x,b) = f_4(x) \end{cases} \qquad (11)$$

Задача (10) уже решен, а чтобы найти решение задачи (11) необходимо просто заменить соответствующие буквы и цифры в решении для $V(x,t)$, то есть $1 \to 3,\ \ 2 \to 4,\ \ x \to y,\ \ b \to a.$

Практические занятия

1. Приведите к каноническому виду

1). $a^2u_{xx} - u_{tt} = 0, a = const$. Здесь $A = a^2, B = 0, C = -1$. Тогда $\delta = B^2 - AC = a^2 > 0$.

2). $a^2u_{xx} - u_t = 0, a = const$. Здесь $A = a^2, B = 0, C = 0$.

3). $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Здесь $A = 1, B = 0, C = 1$.

4). $yu_{xx} + u_{yy} = 0$. Здесь $A = y, B = 0, C = 1$.

2. Найдите канонический вид уравнения

$u_{xx} - u_{xy} - 2yu_x = 0$.

$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - xu_y = 0$.

$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$.

3. Найдите канонический вид следующих уравнений

$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$

$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$

$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$

$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$

$9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y =$

$u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0.$

4. Найдите общее решение

$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$

$3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \frac{5}{16}u = 0.$

$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + \frac{1}{16}u - 16xe^{-\frac{x+y}{16}} = 0.$

$u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x.$

$u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + 4e^{5x + \frac{3}{2}y} = 0.$

$u_{xx} - 2\cos x\, u_{xy} - (3 + \sin^2 x)\, u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)\, u_y = 0.$

$e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} - e^{-2x}u_x + e^{-2y}u_y + 8e^y = 0.$

$u_{xy} + yu_y - u = 0.$

$u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0.$

$\operatorname{ch} x\, u_{xy} + (\operatorname{sh} x + y \operatorname{ch} x)u_y - \operatorname{ch} x\, u = 0.$

$\frac{\partial}{\partial y}(u_x + u) + 2x^2y\,(u_x + u) = 0.$

$\frac{\partial}{\partial y}(u_x + u) + x\,(u_x + u) + x^2y = 0.$

5. Решить следующие задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty.$$
$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty.$$
$$u_t = a^2 a_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty.$$
$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty.$$
$$u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty.$$
$$u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

6. Найдите решения следующих задач

$$u_{xx} = u_{tt},$$
$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t),$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t),$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0.$$

$$u_{xx} = u_{tt} + f(x, t),$$
$$u(0, t) = \mu(t), \; u_x(l, t) + hu(l, t) = \nu(t), \; h > 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \; u_t(x, 0) = \psi(x).$$

$$u_{xx} = u_{tt} + f(x, t),$$
$$u_x(0, t) - hu(0, t) = \mu(t), \quad h > 0, \quad u_x(l, t) = \nu(t),$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

$$u_{xx} = u_{tt},$$
$$u_x(0, t) - hu(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) + gu(l, t) = \nu(t),$$
$$h > 0, \quad g > 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

7. Найдите решения следующих задач

$u(0,\ t)=u(l,\ t)=0, \quad u(x,\ 0)=Ax.$
$u(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0, \quad u(x,\ 0)=\varphi(x).$
$u_x(0,\ t)=u(l,\ t)=0, \quad u(x,\ 0)=A(l-x).$
$u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0, \quad u(x,\ 0)=U.$
$u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t)+hu(l,\ t)=0, \quad u(x,\ 0)=\varphi(x), \quad h>0.$
$u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=u(l,\ t)=0, \quad u(x,\ 0)=U, \quad h>0.$
$u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=u_x(l,\ t)+hu(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=U, \quad h>0.$

8. Методом интегрального преобразования Фурье найдите решения следующих задач

$u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x).$
$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad u(x,0)=u_t(x,0)=0.$
$u_t=a^2u_{xx}, \quad u(x,0)=\varphi(x).$
$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad u(x,0)=0.$

Задания для самостоятельной работы

1. Определение положительной определенности квадратичной формы критерием Сильвестра.

2. Приведение к каноническому виду квадратичной формы методом выделения полного квадрата (Метод Лагранжа).

3. Применение производных при приведении к каноническому виду квадратичной формы.

4. Алгоритм приведения к каноническому виду квадратичной формы.

5. Характеристические формы. Уравнения характеристик. Характеристические поверхности.

6. Задачи, приводящиеся к волновым уравнениям.

7. Задачи, приводящиеся к уравнениям Лапласа и Пуассона.

8. Задачи, приводящиеся к уравнениям теплопроводности.

9. Гармонические функции и их поведения на бесконечности.

10. Формула Остроградского и Грина.

11. Площадь n-мерной единичной сферы.

12. Производная по направлению нормали.

13. Понятия сопряженных операторов.

14. Принцип экстремума для уравнения теплопроводности.

15. Формула Кирхгофа и метод спуска.

16. Свойства тепловых потенциалов.

17. Свойства потенциалов простого и двойного слоя.

18. Объемный потенциал и его свойства.

19. Уравнение Гельмгольца.

20. Принцип экстремума.

21. Построение функции Грина.

22. Интегральное уравнение Абеля.

23. Гамма функция и его свойства.

24. Функции Бесселя и их свойства.

25. Гипергеометрические функции их свойства.

26. Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат.

27. Уравнение Лапласа в сферической системе координат.

28. Решение уравнений в частных производных в системе Maple.