

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ

## АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

СОГЛАСОВАНО

Председатель УМС института  
доцент Мамазиаева Э.А.

Протокол №6, 24.01.2025г.

УТВЕРЖДЕНО

Заведующий кафедрой  
Борбоева Г.М.

Протокол №7, 18.02.2025г.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

по дисциплине «**Наглядная геометрия и топология** »

Учебно-методический комплекс составлен в соответствии с требованиями ГОС ВПО КР, на основе бюллетеня №19 ОшГУ и ООП специальности по направлению PhD-докторантура: 510100 Математика

Составитель

профессор Матиева Г.

Ош-2025

**Данные о преподавателе:**

**Матиева Гулбадан Матиевна** – д.ф.-м., профессор, член-корреспондент НАН КР, профессор кафедры Алгебры и геометрии института математики, физики, техники и информационных технологий ОшГУ.

Стаж работы - 48 лет.

Образование:

- Высшее, ОГПИ, физико-математический факультет, 1976 г.;  
Рабочее место: главный корпус ОшГУ, ул. Ленина 331, кабинет - 317.

Контактная информация:

Моб. телефон: +996777009371

E-mail: gulbadan\_57@gmail.ru

## **Оглавление**

АННОТАЦИЯ К ДИСЦИПЛИНЕ “Наглядная геометрия и топология” .....	4
II. Внутренняя и внешняя рецензии на УМК .....	5
IV. СИЛЛАБУС .....	7
V. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ .....	18
Глоссарий по дисциплине "Наглядная геометрия и топология" .....	24
VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ .	25
VIII. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ТЕСТЫ.....	26
IX. ЛЕКЦИИ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ .....	32

## **АННОТАЦИЯ К ДИСЦИПЛИНЕ “Наглядная геометрия и топология”**

### **1. Цель дисциплины:**

Сформировать у студентов **геометрическую и топологическую интуицию**,  
развить **пространственное мышление** и научить применять методы геометрии и топологии  
в **реальных задачах** — от компьютерных наук до теоретической физики.

### **Конкретные задачи курса:**

1. **Дать наглядное понимание** ключевых геометрических и топологических концепций через визуализацию и примеры.
2. **Научить работать** с многогранниками, поверхностями, узлами и другими объектами, используя как ручные построения, так и программные инструменты (GeoGebra, Blender, Python).
3. **Познакомить с топологическими инвариантами** (эйлерова характеристика, фундаментальная группа) и их ролью в классификации объектов.
4. **Показать приложения** в смежных областях:
  - Компьютерная графика (трехмерное моделирование).
  - Анализ данных (топологический анализ данных, персистентные гомологии).
  - Физика (космология, теория поля, фазовые переходы).
5. **Подготовить к углубленному изучению** алгебраической топологии, дифференциальной геометрии и других продвинутых математических дисциплин.

### **Уникальность курса:**

Акцент на **визуализацию и практическое применение**, а не на формальные доказательства, что делает материал доступным даже для студентов с прикладными интересами.

---

### **Пример связи с другими дисциплинами:**

- Для **программистов**: полезен в компьютерной графике и ML (например, распознавание форм).
- Для **физиков**: объясняет основы теории струн, космологических моделей.
- Для **математиков**: база для дальнейшего изучения топологии и геометрии.

### **Результаты обучения дисциплины основываются на ООП:**

#### **РО-1: Демонстрирует современные знания в области математики и прикладной математики.**

*Обоснование:* Наглядная геометрия и топология — это современные разделы математики, которые активно развиваются и применяются в различных областях (компьютерная графика, машинное обучение, физика и др.).

#### **РО-2: Способен проводить научные исследования в области математики (прикладной математики) и опубликовать результаты.**

*Обоснование:* Топология и геометрия — активно исследуемые направления, и результаты могут публиковаться в научных журналах (Scopus/WoS).

**РО-4: Способен использовать методологию научного исследования для решения конкретных задач производства.**

*Обоснование:* Методы топологии и геометрии применяются в компьютерном зрении, моделировании, робототехнике и других прикладных областях

## **II. Внутренняя и внешняя рецензии на УМК**

### **РЕЦЕНЗИЯ**

#### **Внутренняя и внешняя рецензии на УМК дисциплины "Наглядная геометрия и топология"**

##### **1. Внутренняя рецензия**

**Рецензент:**

Зав. Каф.



к.ф.-м.н., доцент Борбоева Г.М.

**Оценка УМК:**

##### **1. Соответствие ГОС и ОП:**

- УМК соответствует требованиям образовательного стандарта по направлению подготовки (510100 "Математика")
- Логично вписывается в учебный план, дополняя курсы "Алгебра", "Дискретная математика" и "Компьютерная геометрия".

##### **2. Структура и содержание:**

- Программа хорошо сбалансирована: сочетает теорию (топологические инварианты) и практику (визуализация в GeoGebra).
- Замечание: раздел "Приложения" стоит расширить примерами из биоинформатики (анализ ДНК, белковых структур).

##### **3. Методическое обеспечение:**

- Имеются подробные конспекты лекций и практические задания.
- Рекомендация: добавить видеоразборы задач по работе с Blender для 3D-моделирования.

##### **4. Литература:**

- Основные учебники (Прасолов, Фоменко) покрывают материал, но не хватает свежих работ по TDA (топологический анализ данных).

**Заключение:**

УМК рекомендуется к использованию после доработки:

- Добавить примеры приложений в биологии.
- Включить ссылки на открытые курсы (Coursera, Stepik) по вычислительной топологии.

## 2. Внешняя рецензия

Рецензент: директор профессионального колледжа  
Кыргызско-Узбекского университета им. Б.Сыдыкова,  
д.ф.-м.н., профессор



Абдуллаева Ч.Х.

### Оценка УМК:

#### 1. Актуальность:

- Курс отвечает современным тенденциям междисциплинарности (математика + data science).
- Сильная сторона — упор на визуализацию, что редко встречается в традиционных программах.

#### 2. Глубина проработки:

- Разделы по классификации поверхностей и узлам изложены ясно, но не хватает строгих доказательств (например, теоремы о классификации поверхностей).
- Предложение: вынести доказательства в дополнительный блок для мат. спецгрупп.

#### 3. Практическая значимость:

- Отличная подборка ПО для визуализации (Python + Blender).
- Недостаток: нет лабораторных работ с реальными данными (например, анализ топологии нейросетей).

#### 4. Инновационность:

- УМК опережает аналоги за счет включения персистентных гомологий.
- Риск: для студентов-прикладников некоторые темы (фундаментальная группа) могут оказаться сложными без дополнительных примеров.

**Заключение:** УМК заслуживает высокой оценки, но требует:

- Разделения на "базовый" и "продвинутый" уровни.
- Дополнения кейсами из машинного обучения.

---

### Итоговые рекомендации:

1. Расширить блок приложений (ML, биоинформатика).
2. Добавить модули разного уровня сложности.
3. Включить лабораторные работы с открытыми datasets.

#### **IV. СИЛЛАБУС**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ**

#### **АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ**

**СОГЛАСОВАНО**

**Председатель УМС института  
доцент Мамазиаева Э.А.**

**Протокол №6, 24.01.2025г.**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Заведующий кафедрой  
Борбоева Г.М.**

**Протокол №7, 18.02.2025г.**

#### **ПРОГРАММА ОБУЧЕНИЯ (SYLLABUS)**

Специальность (направление)	510100 Математика	Код курса	
Язык обучения	Русский, кыргызский	Дисциплина	Наглядная геометрия и топология
Акад. год	2023-2024-г.	Количество кредитов	4
Преподаватель	Профессор Матиева Г.	Семестр	2
E-Mail		Расписание по ссылке <a href="https://myedu.o shsu.kg/">https://myedu.o shsu.kg/</a>	
Консультации (время/ауд)	Вторник, 318 кабинет, время: 16:00-18:00	Место (здание/ауд.)	ОшГУ глав.корпус, 318 кабинет
Форма обучения Phd докторантурा	Дневная	Тип курса: (обязательный/ элективный)	Обязательный

Ош, 2025

## 1. Цель курса

Цель курса — углублённое изучение ключевых концепций наглядной (визуальной) геометрии и топологии, развитие пространственного мышления, а также освоение современных методов исследования в этих областях. Курс направлен на формирование у докторантов навыков:

- Анализа геометрических и топологических структур с использованием визуальных и алгебраических методов.
- Применения топологических идей в различных разделах математики и смежных науках (физика, компьютерная графика, машинное обучение).
- Проведения самостоятельных научных исследований в области геометрии и топологии.

## 2. Ключевые темы

### 1. Основы наглядной геометрии:

- Визуализация многомерных объектов.
- Проективные и неевклидовы геометрии.
- Дискретная и вычислительная геометрия.

### 2. Топологические концепции:

- Основные топологические пространства (многообразия, CW-комплексы).
- Гомотопия и гомологии.
- Теория узлов и её приложения.

### 3. Современные приложения:

- Топология в физике (космология, теория поля).
- Геометрические методы в data science и компьютерном зрении.

## Результаты обучения дисциплины

### К концу курса студент:

РП (результат обучения) ООП	РП дисциплины	Компетенции
<b>РП-1:</b> Демонстрирует современные знания в области математики и прикладной математики. (ОК-1, ПК-1, ПК-6, ПК-10)	<b>Выпускник:</b> Владеет фундаментальными понятиями геометрии и топологии (многогранники, поверхности, топологические инварианты). <b>Понимает</b> приложения топологии в анализе данных, компьютерной графике и физике. <b>Знает</b> современные методы визуализации геометрических и топологических структур.	✓ПК-1, ПК-6, ПК-10 (моделирование, алгоритмы, ИТ). ✓( ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-7, ПК-11) ✓ИК-2, СЛК-1 (работа с данными, командные проекты).
<b>РП-4:</b> Способен использовать методологию научного исследования для решения конкретных задач производства .( ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-7, ПК-11)		

## Календарно-тематический план лекционных и практических занятий

№	Название темы	Количество часов/баллы	Литер.
---	---------------	------------------------	--------

		<b>Лекц. 20 ч.</b>	<b>ТКср. 10 балл</b>	<b>Прак. 28 ч.</b>	<b>СРСП 12 балл</b>	
1	<b>№1 Лекция.</b> Введение в наглядную геометрию и топологию  <b>№1 Практическая работа.</b> Визуализация двумерных поверхностей (тор, сфера, бутылка Клейна).	2	1	2		ЭР [1,2] ЭУ [1:7-16 стр.]
2	<b>№2 лекция Геометрические поверхности и их классификация</b>  <b>№2 Практическая работа.</b> Построение и анализ графов на поверхностях.	2	1	2		ЭР [1] ЭУ [1:7-10 стр.]
3	<b>№3. Лекция. Графы и их вложение в поверхности</b>  <b>№3. Практическая работа.</b> Вычисление эйлеровой характеристики для различных многообразий.	2	1	2		ЭР [6,7] ЭУ [1:17-23 стр.]
4	<b>№4. Лекция.</b> Геометрические преобразования и симметрии  <b>№4. Практическая работа.</b> Создание элементов справочника.	2	1	2		ЭР [5] ЭУ [1:23-46 стр.]
5	<b>№5. Лекция.</b> Введение в топологию. Топологические инварианты  <b>№5. Практическая работа</b> Работа с фундаментальной группой (примеры вычислений).	2	1	2		ЭР [4] ЭУ [1:4761стр.]
6	<b>№6. Лекция</b> Многомерная геометрия и визуализация  <b>№6. Практическая работа.</b> Триангуляция поверхностей и её применение.	2	1	2		ЭР [3,4] ЭУ [2:293-323стр.] ЭУ [1:7580стр.]

7	<b>№7. Лекция.</b> Геометрические структуры на многообразиях  <b>№7. Практическая работа.</b> Визуализация 3D- и 4D-объектов с помощью проекций.	2	1	2		ЭР [3,4] ЭУ [2:293- 323стр.] ЭУ [1:8190стр.]
8	<b>№8. Лекция.</b> Динамические системы и геометрическая топология  <b>№8. Практическая работа.</b> Исследование узлов и зацеплений.	2	1	4		ЭР [3,4] ЭУ [2:293- 323стр.] ЭУ [1:8190стр.]
9	<b>№9. Лекция.</b> Геометрические структуры на многообразиях  <b>№9. Практическая работа.</b> Построение аттракторов простых динамических систем.	2	1	4		ЭР [3,4] ЭУ [2:293- 323стр.] ЭУ [1:8190стр.]
10	<b>№10. Лекция.</b> Современные проблемы и открытые вопросы  <b>№10. Практическая работа.</b> Подготовка научного доклада по выбранной теме.	2	1	4		ЭР [3,4] ЭУ [2:293- 323стр.] ЭУ [1:8190стр.]
<b>Всего</b>		<b>20</b>	<b>10</b>	<b>28</b>		

## План организации СРСП (12 часов)

<b>№</b>	<b>Тема занятия</b>	<b>Содержание деятельности и студентов</b>	<b>Форма контроля</b>	<b>Объем часов</b>	<b>Планируемый результат обучения</b>
1	Основы проективной геометрии	Разбор модели проективной плоскости Фано. Совместное построение. Проверка аксиом.	Устный опрос, мини-доклад	2	Владение базовыми моделями проективной геометрии, понимание аксиом
2	Топологии на конечных множествах	Построение и анализ топологий на 3-х элементах. Диаграмма включения.	Мини-презентация результатов	2	Навыки классификации и визуализации топологических структур
3	Топологические инварианты	Работа с 3D-моделями: сфера, тор, бутылка Клейна. Сравнение по числу Эйлера, ориентируемости и др.	Обсуждение, защита проекта	2	Умение различать поверхности по инвариантам, навыки визуализации
4	Классификация поверхностей	Изготовление моделей (тор, бутылка Клейна). Определение числа Эйлера, ориентируемости, границ.	Защита модели, устный опрос	2	Навыки моделирования, понимание классификации поверхностей
5	Фундаментальная группа	Анализ тора через многоугольник с идентификацией сторон. Построение группы.	Решение задач, групповая работа	2	Понимание понятий фундаментальной группы и её вычисление
6	Универсальное накрытие	Построение решётки — накрытия тора. Интерпретация петель.	Работа на доске, мини-доклад	2	Навыки визуализации накрытия, понимание связи с группой

### План организации СРС (60 часов)

№	Тема	Задание для СРС	Часы	Оценочные средства	Балл Лек./лаб	Литер., сайт ссылка	Срок сдачи
1	<p><b>Тема 1: Основы наглядной геометрии</b></p> <p><b>СРС:</b> Исследуйте свойства проективной плоскости с помощью модели проективной плоскости Фано. Создайте визуальную модель в любой графической программе или вручную. Объясните, каким образом соблюдаются аксиомы проективной геометрии в данной модели. Сравните с другими моделями (например, моделью на сфере).</p>	Доклад с иллюстрациями (презентация + текстовый отчет)	12	Дифференцированная проверочная работа	1/1	ЭР [2] ЭУ [2]	10.03-15.03
2	<p><b>Тема 2: Топологические пространства и непрерывные отображения</b></p> <p><b>СРС:</b> Проанализируйте различные топологии на конечном множестве (например, множестве из трёх элементов). Постройте гистограмму или</p>	Таблица, пояснительная записка, визуализация	12	Дифференцированная проверочная работа	1/1	ЭР [3] ЭУ [2]	10.03-15.03

	диаграмму, отражающую соотношения между ними (по включению). Исследуйте, какие топологии являются базисными и какие нет. Оформите результаты в виде таблицы и выводов.					
3	<p><b>Тема 3:</b>  <b>Визуализация и топологические инварианты</b></p> <p><b>CPC:</b>  Рассмотрите три разные поверхности: сферу, тор и бутылку Клейна.  Визуализируйте их с помощью 3D-графики или моделей. Сравните их по числу Эйлера, ориентируемости, числу дыр и фундаментальной группе. Подготовьте презентацию с визуализациями и пояснениями по каждому топологическому инварианту. анимаци ю, иллюстрирующую деформацию.</p>	Видеокурс, проект + слайды	12	Дифференцированная проверочная работа	ЭР [1] ЭУ [2]	10.03-15.03
4	<p><b>Тема 4:</b>  <b>Поверхности и их классификация</b></p> <p><b>CPC:</b>  Создайте модель (физическую или цифровую)</p>	Видеокурс, проект + слайды	12	Дифференцированная проверочная работа	1/1	ЭР [3] ЭУ [1] 10.03-15.03

	неориентируемой поверхности (например, бутылки Клейна или проективной плоскости). Проведите анализ: найдите число Эйлера, определите ориентируемость, границы, фундаментальную группу. Сравните с ориентируемой поверхностью той же топологической сложности (например, тором).					
5	<p><b>Тема 5:</b>  <b>Фундаментальная группа и универсальное накрытие</b></p> <p><b>СРС:</b></p> <p>Исследуйте фундаментальную группу тора. Выведите её с помощью сокращения многоугольника с идентификацией сторон. Постройте соответствующее универсальное накрытие (решётка в плоскости).</p> <p>Визуализируйте его и отразите, как петли на торе отображаются в перемещения на плоскости.</p>	Проект, визуализация, краткий отчет	12	Дифференцированная проверочная работа	1/1	ЭР [3] ЭУ [2]
<b>1 модуль СРС1</b>		<b>Средние накопленные баллы</b>		<b>4/4</b>		

## **Политика курса**

### **Политика курса для PhD докторантов по дисциплине "Наглядная геометрия и топология"**

#### **1. Основные требования к обучению**

- **Обязательное участие** в 80% лекций и практических занятий (допускается дистанционное подключение с ведением конспекта).
- **Самостоятельная работа (СРС)** должна включать не менее **2 научных статьи** по тематике курса (обзор + критический анализ).
- **Практические задания** выполняются с использованием специализированного ПО (Python, Mathematica, Blender и др.).

#### **2. Компоненты курса и их вес в оценке**

Компонент	Форма отчетности	Вес в итоговой оценке	Требования
Лекции	Конспект + вопросы для дискуссии	10%	Активность, глубина вопросов
Практика	5 выполненных проектов	30%	Код/модель + пояснительная записка
СРС	Научный доклад (10-15 стр.)	25%	Соответствие стандартам LaTeX, наличие оригинальных идей
Экзамен	Защита исследовательского проекта	35%	Публичная презентация + ответы на вопросы комиссии

#### **3. Требования к академической честности**

- Все работы проверяются на плагиат (**≤15% совпадений**, система Turnitin).
- Использование ChatGPT/LLM допускается **только для генерации идей** с обязательной проверкой корректности.
- Коллективные проекты требуют четкого распределения ролей (указывается в отчете).

#### **4. Правила пересдач и апелляций**

- **Пересдача** возможна 1 раз в течение 2 недель после объявления результатов.
- **Апелляция** подается в письменной форме с обоснованием в течение 3 дней.

- **Система оценки • Баллы за курс состоят из (100 баллов):**

Название контроля	Баллы
ТК спр.	8
СРСП	16
СРС	8
РК	18
Экзамен (50 б.)	
<b>ИЭ=М1+Э</b>	<b>100</b>

## Образовательные ресурсы

(используйте полную ссылку и укажите, где можно получить доступ к текстам/материалам)

<b>Электронные ресурсы</b> 1-4 на этих ресурсе имеются курсы, которые включают в себя теорию и практические задания.	<ol style="list-style-type: none"><li>1. <a href="https://www.youtube.com/playlist?list=PL3EED4C1D684D3ADF">https://www.youtube.com/playlist?list=PL3EED4C1D684D3ADF</a></li><li>2. <a href="https://www.youtube.com/c/Mathologer">https://www.youtube.com/c/Mathologer</a></li><li>3. <a href="https://www.youtube.com/@3blue1brown">https://www.youtube.com/@3blue1brown</a></li><li>4. <a href="https://www.blender.org/">https://www.blender.org/</a></li></ol>
<b>Электронные учебники</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. <i>Рашевский П.К.</i> Курс дифференциальной геометрии. И- ние 5- е. М... Издательство ЛКИ/URSS, 2013</li><li>2. <i>Розендорн Э.Р.</i> Задачи по дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1980.</li><li>3. <i>Понtryгин Л. С.</i> Гладкие многообразия и их применения в теории гравитации. — М.: Наука, 1985.</li><li>4. <i>Милнор Дж.</i> Теория Морса. Изд. 3-е. — М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2000.</li><li>5. <i>Фиников С. П.</i> Курс дифференциальной геометрии. Изд. 4-е — М.: Компьютерная литература, 2000.</li><li>6. <i>Мищенко А. С., Фоменко А. Т.</i> Курс дифференциальной геометрии и топологии. Краснодар:Издательский Лань, 2010 .</li><li>7. <i>Мищенко А. С. Саловьев Ю. П. Фоменко А. Т</i> Сборник задач по дифференциальной геометрии. 2-е, перераб. и доп. М.: Лананд/URSS, 2016.</li><li>8. <i>Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.</i> Курс гомотопической топологии. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1986.</li><li>9. <i>Ошемков А. А., Попеленский Ф. Ю., Тужилин А. А., Фоменко А. Т.</i> III курс лекций по гомотопической топологии. Изд. 2-е., испр. — М.: ЛЕНАНД/URSS, 2016.</li><li>10. <i>Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.</i> Современная геометрия и топология. Курс лекций. Поверхности, группы преобразования и поля. Т. 2: Геометрия и топология. Изд. 6-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»/URSS, 2013.</li><li>11. <i>Фоменко А. Т.</i> Дифференциальная геометрия и топология: Дополнительный курс. М.:Ленинд ЛЕНАНД/URSS, 2016.</li><li>12. <i>Фоменко А. Т.</i> Наглядная геометрия и топология. Математические обоснования. Доп. — М.: Изд-во МГУ, 1998.</li><li>13. <i>Матвеев С. В. Фоменко А.Т.</i> Алгоритмические и компьютерные методы в геометрии. М.: МГУ, 1991</li><li>14. <i>Погорелов А. В.</i> Дифференциальная геометрия. Изд. 6-е. М.: Наука, 1988.</li><li>15. <i>Тайманов Н. А.</i> Лекции по дифференциальной геометрии. Ижевск: УдГУ, 2002.</li><li>16. <i>Бляшке В.</i> Введение в дифференциальную геометрию. Изд. 2-е, испр. М.: Университет», 2000.</li></ol>



**V. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ**

**АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ**

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**по направлению 510100 «Математика»**

**Квалификация выпускника – Phd докторантура**

**по дисциплине: Наглядная геометрия и топология**

## **Кафедра алгебра и геометрия**

УТВЕРЖДЕН

на заседании кафедры «09» сентябрь 2025 г.

протокол №1

зав. кафедрой



к.ф.-м.н., доцент Борбоева Г.М.

## **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**“Наглядная геометрия и топология”**

по направлению **510100** - «Алгебра и геометрия »

Квалификация (степень) выпускника – Phd докторантура

# Паспорт

фонда оценочных средств по дисциплине “**Наглядная геометрия и топология**”

## Компетенции, в развитие которых вносит вклад данная дисциплина

### (Код контролируемой компетенции)

**ОПК-4.** Готов проектировать объекты, среды и системы, используя современные технологии, графические средства и методы проектирования, с учётом принципов композиции и колористики.

**ПК-3.** Способен использовать изобразительные средства и цифровые технологии для создания поисковых эскизов, графических изображений или объёмных моделей проектируемых объектов.

**ПК-18.** Способность разрабатывать графику для интернет-ресурсов и мобильных приложений.

## Примерный перечень оценочных средств

№	Вид деятельности	Определение	Примеч.
1	<b>Тестирование</b>	Проверка знаний по ключевым понятиям геометрии и топологии (многообразия, гомотопии, узлы и др.)	Может включать задачи на визуальную идентификацию объектов (например, поверхности в 3D).
2	<b>Проектная работа</b>	Создание 3D-моделей геометрических объектов (в Blender, Mathematica), визуализация топологических структур.	Пример: проекция 4D-объекта в 3D, анимация гомотопических преобразований.
3	<b>Индивидуальные задания</b>	Анализ научных статей по топологии, написание обзоров или доказательств теорем, сравнение методов (например, алгебраической и геометрической топологии).	Для PhD-докторантов — акцент на исследовательские задачи.
4	<b>Исследовательский модуль:</b>	Мини-статья с применением топологии в своей научной области (физика, ML, биология).	

## Критерии оценивания по дисциплине “Наглядная геометрия и топология”

	Вид деятельности	Критерии оценивания	Баллы
1.	Тестирование	Количество правильных ответов. - Умение визуализировать абстрактные понятия (например, гомотопии, многообразия).	30
2.	Проектная работа	Глубина исследования (например, анализ топологических свойств объекта). - Креативность в подаче (анимации, интерактивные графики). - Использование специализированного ПО (Mathematica, Python, Blender).	30
3.	Индивидуальные задания	Логичность доказательств теорем. - Научная новизна (для PhD - связь с темой докторской диссертации). - Чёткость аргументации.	20
4.	Активность на занятиях	- Участие в дискуссиях (например, обсуждение гипотез). - Решение задач у доски. - Вовлечённость в разбор кейсов	20

Разработала: Профессор кафедры АИГ

Матиева Г.

### V.I. Оценочные средства по темам дисциплины

№	Наименование разделов, тем дисциплины	Оценоч. средства/ Код компетенции	Планируемые РОд
1	<b>№1 Лекция.</b> Введение в наглядную геометрию и топологию  <b>№1 Практическая работа.</b> Визуализация двумерных поверхностей (тор, сфера, бутылка Клейна).	Визуализация, мини-доклад  ПК-1, ПК-6, ПК-10	Студент демонстрирует современное понимание геометрических и топологических концепций.  Способен объяснять и применять фундаментальные понятия многогранников, поверхностей и топологических инвариантов.  Студент владеет современными методами визуализации геометрических объектов, таких как торы, сферы и бутылки Клейна.

2	<p><b>№2 лекция</b>  <b>Геометрические поверхности и их классификация</b></p> <p><b>№2 Практическая работа.</b>  Построение и анализ графов на поверхностях.</p>	Задание, презентация  ПК-4, ПК-6, ИК-2	<b>Применяет</b> математические методы для анализа различных геометрических структур и их свойств.
3	<p><b>№3. Лекция. Графы и их вложение в поверхности</b></p> <p><b>№3. Практическая работа.</b> Вычисление эйлеровой характеристики для различных многообразий.</p>	Решение задач, отчёт  ПК-3, ПК-4, ПК-6	Может <b>работать</b> с графиками на поверхностях, строить их и <b>анализировать</b> .  Способен вычислять эйлерову характеристику для различных многообразий и анализировать топологические свойства объектов.
4	<p><b>№4. Лекция.</b>  Геометрические преобразования и симметрии</p> <p><b>№4. Практическая работа.</b> Создание элементов справочника.</p>	Электронный справочник  ПК-10, ИК-2	Докторант <b>применяет</b> методологию научного исследования для решения практических задач в области геометрии и топологии.  Докторант <b>умеет</b> применять топологические инварианты (например, эйлерову характеристику, фундаментальную группу, гомологии) для классификации топологических объектов.
5	<p><b>№5. Лекция.</b> Введение в топологию. Топологические инварианты</p> <p><b>№5. Практическая работа</b> Работа с фундаментальной группой (примеры вычислений).</p>	Решение задач, защита решения  ПК-2, ПК-3, ПК-4	Докторант <b>объясняет</b> ключевые понятия топологии, такие как открытые множества, непрерывные функции и топологические пространства.  Докторант <b>понимает</b> важность топологических инвариантов и их роль в анализе пространств.

6	<b>№6. Лекция</b> Многомерная геометрия и визуализация <b>№6. Практическая работа.</b> Триангуляция поверхностей и её применение.	Практическое задание  ПК-6, ПК-10	Докторант <b>применяет</b> полученные знания для решения более сложных задач, например, вычисления групп для более сложных многообразий или анализа связности пространства.
7	<b>№7. Лекция.</b> Геометрические структуры на многообразиях <b>№7. Практическая работа.</b> Визуализация 3D- и 4D-объектов с помощью проекций.	Демонстрация, анализ моделей  ПК-6, ПК-10	Способен <b>работать</b> с многомерными объектами, проводить их визуализацию и проекции в 3D и 4D пространствах.
8	<b>№8. Лекция.</b> Динамические системы и геометрическая топология <b>№8. Практическая работа.</b> Исследование узлов и зацеплений.	Математический эксперимент  ПК-4, ПК-7	<b>Применяет</b> геометрические структуры для решения задач в разных контекстах (математика, физика, информатика).  Способен критически оценивать современные проблемы и открытые вопросы в области геометрии и топологии.
9	<b>№9. Лекция.</b> Геометрические структуры на многообразиях <b>№9. Практическая работа.</b> Построение аттракторов простых динамических систем.	Компьютерная модель, защита  ПК-6, ПК-11	Докторант способен <b>выбрать</b> актуальную научную тему для исследования и подготовить научный доклад.
10	<b>№10. Лекция.</b> Современные проблемы и открытые вопросы  <b>№10. Практическая работа.</b> Подготовка научного доклада по выбранной теме.	Научный доклад, обсуждение  ПК-2, ПК-11, СЛК-1, ИК-2	Докторант <b>умеет работать</b> в команде при решении лабораторных заданий и создании совместных проектов.  Способен эффективно взаимодействовать с коллегами, организовывать рабочий процесс и делиться знаниями.  <b>Развивает</b> навыки научной коммуникации, работы с данными и написания научных материалов.

## Основные понятия

1. **Наглядная геометрия** — раздел математики, изучающий геометрические объекты через визуализацию и пространственное мышление.
2. **Топология** — раздел математики, изучающий свойства объектов, сохраняющиеся при непрерывных деформациях.
3. **Топологический инвариант** — характеристика объекта, неизменная при гомеоморфизмах (например, эйлерова характеристика, фундаментальная группа).
4. **Гомотопия** — непрерывная деформация одного объекта в другой.
5. **Фундаментальная группа** — алгебраическая структура, описывающая "дыры" в топологическом пространстве.

## Геометрические объекты

6. **Многообразие** — топологическое пространство, локально похожее на евклидово пространство (например, сфера, тор).
7. **Тор** — поверхность, имеющая форму бублика; пример двумерного многообразия.
8. **Бутылка Клейна** — неориентируемая поверхность без края.
9. **Проективная плоскость** — неориентируемая поверхность, получаемая склеиванием противоположных точек сферы.
10. **Узел** — вложение окружности в трёхмерное пространство.

## Топологические инварианты

11. **Эйлерова характеристика** — числовая характеристика поверхности, вычисляемая по формуле  $V-E+F$ , где  $V$  — вершины,  $E$  — рёбра,  $F$  — грани.
12. **Genus (род поверхности)** — число "ручек" на поверхности; для тора genus равен 1.
13. **Ориентируемость** — свойство поверхности иметь две стороны (например, сфера ориентируема, бутылка Клейна — нет).

## Методы и инструменты

14. **Визуализация** — представление геометрических и топологических объектов в графическом виде (с помощью Blender, GeoGebra, Python).
15. **Триангуляция** — разбиение поверхности на треугольники для анализа.
16. **Персистентные гомологии** — метод топологического анализа данных, выявляющий устойчивые структуры.

17. **Группы симметрий** — набор преобразований, сохраняющих структуру объекта (например, кристаллографические группы).

### **Ключевые теоремы**

18. **Теорема о классификации поверхностей** — любая замкнутая поверхность гомеоморфна сфере с ручками или проективной плоскости с ручками.

19. **Теорема о четырёх красках** — любую карту на плоскости можно раскрасить четырьмя цветами так, чтобы соседние области не совпадали по цвету.

### **Термины из практических занятий**

27. **СРС (Самостоятельная работа студентов)** — задания для самостоятельного изучения темы.

28. **СРСП (Самостоятельная работа студента под руководством преподавателя)** — практические занятия с консультацией преподавателя.

29. **РО (Результат обучения)** — знания и навыки, которые студент должен продемонстрировать по итогам курса.

## **VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Дисциплина: Наглядная геометрия и топология**

Изучение курса «Наглядная геометрия и топология» требует от студентов системного подхода, логического мышления и способности к абстракции. Данная дисциплина является базовой для понимания многих современных направлений математики, физики, информатики и инженерных наук. Для успешного освоения курса рекомендуется следующее:

#### **1. Активное участие в учебном процессе**

- Регулярно посещать лекции и практические занятия.
- Записывать основные определения, утверждения и доказательства.
- Участвовать в обсуждении топологических задач и примеров.

#### **2. Работа с учебной и дополнительной литературой**

- Изучать рекомендуемую литературу, особенно по основам топологии (например, понятия открытых и замкнутых множеств, непрерывности, топологических инвариантов).
- Использовать визуальные пособия (модели, интерактивные программы, графику) для лучшего понимания наглядных объектов (тор, сфера, проективная плоскость и др.).

### **3. Решение задач и выполнение домашних заданий**

- Регулярно решать предложенные задачи по темам: гомеоморфизм, фундаментальные группы, классификация поверхностей.
- В случае трудностей — консультироваться с преподавателем и другими студентами.

### **4. Подготовка к контрольным и зачетным мероприятиям**

- Повторять основные определения, теоремы и методы доказательства.
- Решать типовые задания из методических пособий.
- Анализировать допущенные ошибки и непонимания.

### **5. Развитие визуального и пространственного мышления**

- Регулярно тренировать представление в уме топологических преобразований.
- Использовать программы и онлайн-сервисы (например, GeoGebra, TopoInVis) для моделирования.

### **6. Самостоятельная работа и исследовательская активность**

- Выполнять творческие задания: составление собственных задач, поиск примеров и контрпримеров.
- Участвовать в мини-проектах и научно-исследовательской работе, связанной с визуальной геометрией и топологией.

## **VIII. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ТЕСТЫ**

### **Тест 1. Основы наглядной геометрии**

**1. Какой объект является моделью проективной плоскости?**

- a) Цилиндр
- b) Бутылка Клейна
- c) Граф  $K_5K_5$

**2. Чему равна эйлерова характеристика проективной плоскости?**

- a) 2
- b) 1
- c) 0

**3. Какая аксиома неверна для проективной геометрии?**

- a) Любые две прямые пересекаются
- b) Через точку вне прямой можно провести ровно одну параллельную
- c) Существует хотя бы одна прямая

4. **Объясните, почему лист Мёбиуса — неориентируемая поверхность (1-2 предложения).**

5. **Задача:** Постройте модель проективной плоскости, отождествив стороны квадрата  $aba^{-1}bab^{-1}b$ . Какая это поверхность?

---

### Тест 2. Топологические пространства

1. **Минимальная топология на множестве  $\{1,2\}$ :**

- a)  $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$
- b)  $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$
- c) Все подмножества

2. **Дискретная топология:**

- a) Содержит все подмножества
- b) Содержит только  $\emptyset$  и всё пространство
- c) Определяется метрикой

3. **Пример хаусдорфова пространства:**

- a)  $\mathbb{R}$  с обычной топологией
- b) Произвольное бесконечное множество с тривиальной топологией
- c) Проективная плоскость

4. **Приведите пример топологии, которая не является хаусдорфовой.**

5. **Задача:** Постройте диаграмму Хассе для всех топологий на множестве  $\{x,y\}$ .

---

### Тест 3. Топологические инварианты

1. **Эйлерова характеристика тора:**

- a) 1
- b) 0
- c) 2

2. **Фундаментальная группа сферы  $S^2$ :**

- a)  $\mathbb{Z}$

b) Тривиальная

c)  $\mathbb{Z}^2$

3. Какой инвариант отличает тор от сферы?

a) Фундаментальная группа

b) Число компонент связности

c) Компактность

4. Почему бутылка Клейна и проективная плоскость имеют одинаковую  $\chi$ ?

5. Задача: Вычислите эйлерову характеристику поверхности, заданной словом  $aabcb-1caabcb-1c$ .

---

#### Тест 4. Классификация поверхностей

1. Ориентируемая поверхность с  $\text{genus}=2$ :

a) Сфера с двумя ручками

b) Бутылка Клейна

c) Проективная плоскость

2. Неориентируемая поверхность без границы:

a) Тор

b) Проективная плоскость

c) Лист Мёбиуса

3. Какая поверхность соответствует слову  $abab-1abab-1$ ?

a) Тор

b) Бутылка Клейна

c) Сфера

4. Почему бутылка Клейна не вкладывается в  $R^3$ ?

5. Задача: Классифицируйте поверхность, полученную склеиванием сторон шестиугольника по слову  $abcabca\bar{b}cabc$ .

---

#### Тест 5. Фундаментальная группа

1.  $\pi_1$  бутона двух окружностей:

a)  $\mathbb{Z}$

b)  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

c)  $\mathbb{Z}^2$

2. **Универсальное накрытие для тора:**

a) Окружность

b) Плоскость R2R2

c) Сфера

3. **Как связаны  $\pi_1\pi_1$  и накрывающие пространства?**

a) Группа накрытий изоморфна  $\pi_1\pi_1$

b) Нет связи

c)  $\pi_1\pi_1$  — подгруппа группы накрытий

4. **Сформулируйте теорему ван Кампена для "восьмёрки".**

5. **Задача:** Вычислите  $\pi_1\pi_1$  для пространства, полученного склеиванием двух торов по одной окружности.

---

**Критерии оценки:**

- **MCQ (1-3):** 1 балл за верный ответ.
- **Открытый вопрос (4):** 0-2 балла (корректность, ясность).
- **Задача (5):** 0-3 балла (ход решения, результат).
- **Максимум:** 10 баллов за тест.

**Лекция 1: Основы наглядной геометрии**

1. **Теоретический:** Какие аксиомы отличают проективную геометрию от евклидовой?

Приведите примеры.

2. **Практический:** Как визуализировать проективную плоскость Фано? Назовите её ключевые свойства.

3. **Аналитический:** Почему проективная плоскость не может быть реализована в  $\mathbb{R}^3$  без самопересечений?

---

**Лекция 2: Топологические пространства**

1. **Теоретический:** Дайте определение топологии на множестве. Чем хаусдорфово пространство отличается от неметризуемого?

- 
2. **Практический:** Постройте все возможные топологии на множестве из двух элементов. Какие из них являются базисными?
  3. **Аналитический:** Как топология связана с понятием непрерывности? Приведите пример из анализа данных.

---

### Лекция 3: Топологические инварианты

1. **Теоретический:** Что такое эйлерова характеристика? Как её вычислить для поверхности рода  $g$ ?
2. **Практический:** Сравните фундаментальные группы сферы  $S^2$  и тора  $T^2$ .
3. **Аналитический:** Почему гомологии являются более "грубым" инвариантом, чем гомотопия?

---

### Лекция 4: Классификация поверхностей

1. **Теоретический:** Сформулируйте теорему классификации замкнутых поверхностей.
2. **Практический:** Какая поверхность соответствует склейке  $aba^{-1}b^{-1}c^2aba^{-1}b^{-1}c^2$ ?  
Ответ обоснуйте.
3. **Аналитический:** Как ориентируемость поверхности влияет на её фундаментальную группу?

---

### Лекция 5: Фундаментальная группа

1. **Теоретический:** Дайте определение фундаментальной группы. Чем она отличается для односвязных и неодносвязных пространств?
2. **Практический:** Вычислите  $\pi_1\pi_1$  для бутона двух окружностей.
3. **Аналитический:** Как универсальное накрытие связано с монодромией?

---

### Лекция 6: Многомерная геометрия

1. **Теоретический:** Какие методы используются для визуализации 4D-объектов?
2. **Практический:** Постройте сечение гиперкуба  $t=0.5$  и опишите его топологию.

- 
3. **Аналитический:** Почему в размерностях  $n \geq 4$  возможны экзотические гладкие структуры?

---

### Лекция 7: Геометрические структуры

1. **Теоретический:** Что такое риманова метрика? Приведите пример на сфере.
  2. **Практический:** Как выглядит метрика Лобачевского на модели Пуанкаре?
  3. **Аналитический:** Чем псевдоримановы многообразия отличаются от римановых?
- 

### Лекция 8: Динамические системы

1. **Теоретический:** Как аттракторы связаны с топологией фазового пространства?
  2. **Практический:** Постройте фазовый портрет маятника с трением.
  3. **Аналитический:** Какие топологические инварианты используются в теории бифуркаций?
- 

### Лекция 9: Приложения

1. **Теоретический:** Как персистентные гомологии применяются в анализе данных?
  2. **Практический:** Визуализируйте кластеризацию датасета MNIST методами TDA.
  3. **Аналитический:** Какие ограничения имеет топологический подход в машинном обучении?
- 

### Лекция 10: Современные проблемы

1. **Теоретический:** В чём суть гипотезы Пуанкаре для размерностей  $n > 3$ ?
  2. **Практический:** Приведите пример открытой задачи в низкоразмерной топологии.
  3. **Аналитический:** Как методы топологии используются в квантовой теории поля?
- 

### Критерии оценки ответов:

- **Теоретические вопросы:** Полнота определения, корректность терминологии (0–2 балла).

- **Практические вопросы:** Чёткость алгоритма, наличие визуализации (0–3 балла).
- **Аналитические вопросы:** Глубина аргументации, связь с другими областями (0–3 балла).

### **Пример ответа на вопрос 1.3:**

"Проективная плоскость RP<sup>2</sup> не вкладывается в  $\mathbb{R}^3$  без самопересечений, так как её эйлерова характеристика  $\chi=1$  противоречит теореме о вложении для замкнутых поверхностей (где  $\chi \leq 2$ ). Альтернативное доказательство – невозможность устраниТЬ пересечения в модели Клейна."

## **IX. ЛЕКЦИИ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ**

### **Лекция 1. Введение в наглядную геометрию и топологию**

**Цель:** Сформировать представление о предмете, его истории и связи с другими науками.

**Ключевые вопросы:**

- Определение наглядной геометрии и топологии.
- Основные исторические этапы развития.
- Примеры приложений в физике, биологии, компьютерных науках.

**Методы:** Лекция с презентацией, разбор примеров.

**Задания:**

1. Написать эссе (1–2 страницы) о роли топологии в современной науке.
2. Подготовить пример топологической задачи из своей области исследований.

**Литература:**

- Г. Перельман, "Наглядная топология" (глава 1).
- J. Stillwell, "Classical Topology and Combinatorial Group Theory" (введение).

### **Лекция 2. Геометрические поверхности и их классификация**

**Цель:** Изучить основные типы поверхностей и их свойства.

**Ключевые вопросы:**

- Ориентируемые и неориентируемые поверхности.
- Эйлерова характеристика и её вычисление.
- Классификация замкнутых поверхностей.

**Методы:** Интерактивная лекция с построением моделей (использование 3D-редакторов).

**Задания:**

1. Вычислить эйлерову характеристику для:
  - Сфера с  $n$  ручками.
  - Проективной плоскости.

2. Построить модель бутылки Клейна в программе **Blender** и объяснить её свойства.

**Литература:**

- A. Hatcher, "Algebraic Topology" (раздел 1.1).

**Лекция 3. Графы и их вложение в поверхности**

**Цель:** Изучить связь теории графов с топологией поверхностей.

**Ключевые вопросы:**

- Планарные и непланарные графы.
- Теорема о четырёх красках.
- Genus графа и его вычисление.

**Методы:** Лекция с решением задач, использование **Python** (библиотека networkx).

**Задания:**

1. Проверить планарность графа  $K_3,3K_3,3$  с помощью алгоритма.
2. Построить вложение графа в тор, используя **Mathematica**.

**Литература:**

- B. Mohar, C. Thomassen, "Graphs on Surfaces".

**Лекция 4. Геометрические преобразования и симметрии**

**Цель:** Изучить группы симметрий и их применение.

**Ключевые вопросы:**

- Группы движений плоскости и пространства.
- Кристаллографические группы.
- Теорема Белого.

**Методы:** Лекция с визуализацией в **Geogebra**.

**Задания:**

1. Найти группу симметрий правильного додекаэдра.
2. Построить орнамент с заданной группой симметрии.

**Литература:**

- M. Armstrong, "Groups and Symmetry".

**Лекция 5. Топологические инварианты**

**Цель:** Познакомиться с основными инвариантами (фундаментальная группа, гомологии).

**Ключевые вопросы:**

- Гомотопия и гомотопическая эквивалентность.
- Фундаментальная группа окружности.

- Гомологии сферы и тора.

**Методы:** Лекция с вычислениями, использование **SageMath**.

**Задания:**

1. Вычислить фундаментальную группу листа Мёбиуса.
2. Построить цепной комплекс для треугольника.

**Литература:**

- A. Hatcher, "Algebraic Topology" (глава 2).
- 

## 2. Практические занятия

Каждое занятие включает:

- Цель
- Необходимый софт
- Конкретные задачи
- Критерии оценки

### Практика 1. Визуализация поверхностей

**Цель:** Научиться строить 3D-модели поверхностей.

**Софт:** Blender, Mathematica.

**Задачи:**

1. Создать модель тора и бутылки Клейна.
2. Вычислить эйлерову характеристику для этих моделей.

**Критерии:** Корректность модели, точность вычислений.

### Практика 5. Фундаментальная группа

**Цель:** Научиться вычислять фундаментальную группу.

**Софт:** SageMath.

**Задачи:**

1. Вычислить фундаментальную группу для "восьмёрки".
2. Проверить связь с теорией графов.

**Критерии:** Правильность вычислений, объяснение шагов.

### Практика 10. Топологический анализ данных

**Цель:** Применить методы TDA к реальным данным.

**Софт:** Python (библиотеки gudhi, scikit-learn).

**Задачи:**

1. Проанализировать датасет (например, MNIST) с помощью персистентных гомологий.

2. Визуализировать результаты.

**Критерии:** Качество анализа, интерпретация результатов.

---

### **3. Итоговая аттестация**

• **Экзамен (устный):** Защита проекта по выбранной теме.

• **Научная статья:** Требуется представить работу по применению топологии в своей области.

---