

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

СОГЛАСОВАНО

**Председатель УМС института
доцент Мамазиева Э.А.**



Протокол №6, 24.01.2025г.

УТВЕРЖДЕНО

**Заведующий кафедрой
Борбоева Г.М.**



Протокол №7, 18.02.2025г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

по дисциплине «Наглядная геометрия и топология »

Учебно-методический комплекс составлен в соответствии с требованиями ГОС
ВПО КР, на основе бюллетеня №19 ОшГУ и ООП специальности по
направлению PhD-докторантура: 510100 Математика

Составитель



профессор Матиева Г.

Ош-2025

Данные о преподавателе:

Матиева Гулбадан Матиевна – д.ф.-м., профессор, член-корреспондент НАН КР, профессор кафедры Алгебры и геометрии института математики, физики, техники и информационных технологий ОшГУ.

Стаж работы - 48 лет.

Образование:

- Высшее, ОГПИ, физико-математический факультет, 1976 г.;

Рабочее место: главный корпус ОшГУ, ул. Ленина 331, кабинет - 317.

Контактная информация:

Моб. телефон: +996777009371

E-mail: gulbadan_57@gmail.ru

Оглавление

АННОТАЦИЯ К ДИСЦИПЛИНЕ “Наглядная геометрия и топология”	4
II. Внутренняя и внешняя рецензии на УМК	5
IV. СИЛЛАБУС.....	7
V. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ	18
Глоссарий по дисциплине "Наглядная геометрия и топология"	24
VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ .	25
VIII. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ТЕСТЫ.....	26
IX. ЛЕКЦИИ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ	32

АННОТАЦИЯ К ДИСЦИПЛИНЕ “Наглядная геометрия и топология”

1. Цель дисциплины:

Сформировать у студентов **геометрическую и топологическую интуицию**, развить **пространственное мышление** и научить применять методы геометрии и топологии в **реальных задачах** — от компьютерных наук до теоретической физики.

Конкретные задачи курса:

1. **Дать наглядное понимание** ключевых геометрических и топологических концепций через визуализацию и примеры.
2. **Научить работать** с многогранниками, поверхностями, узлами и другими объектами, используя как ручные построения, так и программные инструменты (GeoGebra, Blender, Python).
3. **Познакомить с топологическими инвариантами** (эйлерова характеристика, фундаментальная группа) и их ролью в классификации объектов.
4. **Показать приложения** в смежных областях:
 - Компьютерная графика (трехмерное моделирование).
 - Анализ данных (топологический анализ данных, персистентные гомологии).
 - Физика (космология, теория поля, фазовые переходы).
5. **Подготовить к углубленному изучению** алгебраической топологии, дифференциальной геометрии и других продвинутых математических дисциплин.

Уникальность курса:

Акцент на **визуализацию и практическое применение**, а не на формальные доказательства, что делает материал доступным даже для студентов с прикладными интересами.

Пример связи с другими дисциплинами:

- Для **программистов**: полезен в компьютерной графике и ML (например, распознавание форм).
- Для **физиков**: объясняет основы теории струн, космологических моделей.
- Для **математиков**: база для дальнейшего изучения топологии и геометрии.

Результаты обучения дисциплины основывается на ООП:

РО-1: Демонстрирует современные знания в области математики и прикладной математики.

Обоснование: Наглядная геометрия и топология — это современные разделы математики, которые активно развиваются и применяются в различных областях (компьютерная графика, машинное обучение, физика и др.).

РО-2: Способен проводить научные исследования в области математики (прикладной математики) и опубликовать результаты.

Обоснование: Топология и геометрия — активно исследуемые направления, и результаты могут публиковаться в научных журналах (Scopus/WoS).

РО-4: Способен использовать методологию научного исследования для решения конкретных задач производства.

Обоснование: Методы топологии и геометрии применяются в компьютерном зрении, моделировании, робототехнике и других прикладных областях

II. Внутренняя и внешняя рецензии на УМК

РЕЦЕНЗИЯ

Внутренняя и внешняя рецензии на УМК дисциплины "Наглядная геометрия и топология"

1. Внутренняя рецензия

Рецензент:

Зав. Каф.



к.ф.-м.н., доцент Борбоева Г.М.

Оценка УМК:

1. Соответствие ГОС и ОП:

- УМК соответствует требованиям образовательного стандарта по направлению подготовки (510100 "Математика")
- Логично вписывается в учебный план, дополняя курсы "Алгебра", "Дискретная математика" и "Компьютерная геометрия".

2. Структура и содержание:

- Программа хорошо сбалансирована: сочетает теорию (топологические инварианты) и практику (визуализация в GeoGebra).
- Замечание: раздел "Приложения" стоит расширить примерами из биоинформатики (анализ ДНК, белковых структур).

3. Методическое обеспечение:

- Имеются подробные конспекты лекций и практические задания.
- Рекомендация: добавить видеоразборы задач по работе с Blender для 3D-моделирования.

4. Литература:

- Основные учебники (Прасолов, Фоменко) покрывают материал, но не хватает свежих работ по TDA (топологический анализ данных).

Заключение:

УМК рекомендуется к использованию после доработки:

- Добавить примеры приложений в биологии.
- Включить ссылки на открытые курсы (Coursera, Stepik) по вычислительной топологии.

2. Внешняя рецензия

Рецензент: директор профессионального колледжа
Кыргызско-Узбекского университета им. Б.Сыдыкова,
д.ф.-м.н., профессор



Абдуллаева Ч.Х.

Оценка УМК:

1. Актуальность:

- Курс отвечает современным тенденциям междисциплинарности (математика + data science).
- Сильная сторона — упор на визуализацию, что редко встречается в традиционных программах.

2. Глубина проработки:

- Разделы по классификации поверхностей и узлам изложены ясно, но не хватает строгих доказательств (например, теоремы о классификации поверхностей).
- Предложение: вынести доказательства в дополнительный блок для мат. спецгрупп.

3. Практическая значимость:

- Отличная подборка ПО для визуализации (Python + Blender).
- Недостаток: нет лабораторных работ с реальными данными (например, анализ топологии нейросетей).

4. Инновационность:

- УМК опережает аналоги за счет включения персистентных гомологий.
- Риск: для студентов-прикладников некоторые темы (фундаментальная группа) могут оказаться сложными без дополнительных примеров.

Заключение: УМК заслуживает высокой оценки, но требует:

- Разделения на "базовый" и "продвинутый" уровни.
- Дополнения кейсами из машинного обучения.

Итоговые рекомендации:

1. Расширить блок приложений (ML, биоинформатика).
2. Добавить модули разного уровня сложности.
3. Включить лабораторные работы с открытыми datasets.

IV. СИЛЛАБУС

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

СОГЛАСОВАНО

Председатель УМС института
доцент Мамазиева Э.А.



Протокол №6, 24.01.2025г.

УТВЕРЖДЕНО

Заведующий кафедрой
Борбоева Г.М.



Протокол №7, 18.02.2025г.

ПРОГРАММА ОБУЧЕНИЯ (SYLLABUS)

Специальность (направление)	510100 Математика	Код курса	
Язык обучения	Русский, кыргызский	Дисциплина	Наглядная геометрия и топология
Акад. год	2023-2024-г.	Количество кредитов	4
Преподаватель	Профессор Матиева Г.	Семестр	2
E-Mail		Расписание по ссылке <a href="https://myedu.o
shsu.kg/">https://myedu.o shsu.kg/	
Консультации (время/ауд)	Вторник, 318 кабинет, время: 16:00-18:00	Место (здание/ауд.)	ОшГУ глав.корпус, 318 кабинет
Форма обучения Phd докторантура	Дневная	Тип курса: (обязательный/ элективный)	Обязательный

Ош, 2025

1. Цель курса

Цель курса — углублённое изучение ключевых концепций наглядной (визуальной) геометрии и топологии, развитие пространственного мышления, а также освоение современных методов исследования в этих областях. Курс направлен на формирование у докторантов навыков:

- Анализа геометрических и топологических структур с использованием визуальных и алгебраических методов.
- Применения топологических идей в различных разделах математики и смежных науках (физика, компьютерная графика, машинное обучение).
- Проведения самостоятельных научных исследований в области геометрии и топологии.

2. Ключевые темы

1. Основы наглядной геометрии:

- Визуализация многомерных объектов.
- Проективные и неевклидовы геометрии.
- Дискретная и вычислительная геометрия.

2. Топологические концепции:

- Основные топологические пространства (многообразия, CW-комплексы).
- Гомотопия и гомологии.
- Теория узлов и её приложения.

3. Современные приложения:

- Топология в физике (космология, теория поля).
- Геометрические методы в data science и компьютерном зрении.

Результаты обучения дисциплины		
К концу курса студент:		
РО (результат обучения) ООП	РО дисциплины	Компетенции
РО-1: Демонстрирует современные знания в области математики и прикладной математики. (ОК-1, ПК-1, ПК-6, ПК-10) РО-4: Способен использовать методологию научного исследования для решения конкретных задач производства. (ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-7, ПК-11)	Выпускник: Владеет фундаментальными понятиями геометрии и топологии (многогранники, поверхности, топологические инварианты). Понимает приложения топологии в анализе данных, компьютерной графике и физике. Знает современные методы визуализации геометрических и топологических структур.	✓ПК-1, ПК-6, ПК-10 (моделирование, алгоритмы, IT). ✓(ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-7, ПК-11) ✓ИК-2, СЛК-1 (работа с данными, командные проекты).

Календарно-тематический план лекционных и практических занятий

№	Название темы	Количество часов/баллы	Литер.
---	---------------	------------------------	--------

		Лекц. 20 ч.	ТКср. 10 балл	Прак. 28 ч.	СРСР 12 балл	
1	<p>№1 Лекция. Введение в наглядную геометрию и топологию</p> <p>№1 Практическая работа. Визуализация двумерных поверхностей (тор, сфера, бутылка Клейна).</p>	2	1	2		<p>ЭР [1,2]</p> <p>ЭУ [1:7-16 стр.]</p>
2	<p>№2 лекция Геометрические поверхности и их классификация</p> <p>№2 Практическая работа. Построение и анализ графов на поверхностях.</p>	2	1	2		<p>ЭР [1]</p> <p>ЭУ [1:7-10 стр.]</p>
3	<p>№3. Лекция. Графы и их вложение в поверхности</p> <p>№3. Практическая работа. Вычисление эйлеровой характеристики для различных многообразий.</p>	2	1	2		<p>ЭР [6,7]</p> <p>ЭУ [1:17-23 стр.]</p>
4	<p>№4. Лекция. Геометрические преобразования и симметрии</p> <p>№4. Практическая работа. Создание элементов справочника.</p>	2	1	2		<p>ЭР [5]</p> <p>ЭУ [1:23-46 стр.]</p>
5	<p>№5. Лекция. Введение в топологию. Топологические инварианты</p> <p>№5. Практическая работа Работа с фундаментальной группой (примеры вычислений).</p>	2	1	2		<p>ЭР [4]</p> <p>ЭУ [1:4761стр.]</p>
6	<p>№6. Лекция Многомерная геометрия и визуализация</p> <p>№6. Практическая работа. Триангуляция поверхностей и её применение.</p>	2	1	2		<p>ЭР [3,4]</p> <p>ЭУ [2:293-323стр.] ЭУ [1:7580стр.]</p>

7	<p>№7. Лекция. Геометрические структуры на многообразиях</p> <p>№7. Практическая работа. Визуализация 3D- и 4D-объектов с помощью проекций.</p>	2	1	2		ЭР [3,4] ЭУ [2:293-323стр.] ЭУ [1:8190стр.]
8	<p>№8. Лекция. Динамические системы и геометрическая топология</p> <p>№8. Практическая работа. Исследование узлов и зацеплений.</p>	2	1	4		ЭР [3,4] ЭУ [2:293-323стр.] ЭУ [1:8190стр.]
9	<p>№9. Лекция. Геометрические структуры на многообразиях</p> <p>№9. Практическая работа. Построение аттракторов простых динамических систем.</p>	2	1	4		ЭР [3,4] ЭУ [2:293-323стр.] ЭУ [1:8190стр.]
10	<p>№10. Лекция. Современные проблемы и открытые вопросы</p> <p>№10. Практическая работа. Подготовка научного доклада по выбранной теме.</p>	2	1	4		ЭР [3,4] ЭУ [2:293-323стр.] ЭУ [1:8190стр.]
	Всего	20	10	28		

План организации СРСП (12 часов)

№	Тема занятия	Содержание деятельности и студентов	Форма контроля	Объем часов	Планируемый результат обучения
1	Основы проективной геометрии	Разбор модели проективной плоскости Фано. Совместное построение. Проверка аксиом.	Устный опрос, мини-доклад	2	Владение базовыми моделями проективной геометрии, понимание аксиом
2	Топологии на конечных множествах	Построение и анализ топологий на 3-х элементах. Диаграмма включения.	Мини-презентация результатов	2	Навыки классификации и визуализации топологических структур
3	Топологические инварианты	Работа с 3D-моделями: сфера, тор, бутылка Клейна. Сравнение по числу Эйлера, ориентируемости и др.	Обсуждение, защита проекта	2	Умение различать поверхности по инвариантам, навыки визуализации
4	Классификация поверхностей	Изготовление моделей (тор, бутылка Клейна). Определение числа Эйлера, ориентируемости, границ.	Защита модели, устный опрос	2	Навыки моделирования, понимание классификации поверхностей
5	Фундаментальная группа	Анализ тора через многоугольник с идентификацией сторон. Построение группы.	Решение задач, групповая работа	2	Понимание понятий фундаментальной группы и её вычисление
6	Универсальное накрытие	Построение решётки — накрытия тора. Интерпретация петель.	Работа на доске, мини-доклад	2	Навыки визуализации накрытия, понимание связи с группой

План организации СРС (60 часов)

№	Тема	Задание для СРС	Часы	Оценочные средства	Балл Лек./лаб	Литер., сайт ссылка	Срок сдачи
1	Тема 1: Основы наглядной геометрии СРС: Исследуйте свойства проективной плоскости с помощью модели проективной плоскости Фано. Создайте визуальную модель в любой графической программе или вручную. Объясните, каким образом соблюдаются аксиомы проективной геометрии в данной модели. Сравните с другими моделями (например, моделью на сфере).	Доклад с иллюстрациями (презентация + текстовый отчет)	12	Дифференцированная проверочная работа	1/1	ЭР [2] ЭУ [2]	10.03-15.03
2	Тема 2: Топологические пространства и непрерывные отображения СРС: Проанализируйте различные топологии на конечном множестве (например, множестве из трёх элементов). Постройте гистограмму или	Таблица, пояснительная записка, визуализация	12	Дифференцированная проверочная работа	1/1	ЭР [3] ЭУ [2]	10.03-15.03

	<p>диаграмму, отражающую соотношения между ними (по включению). Исследуйте, какие топологии являются базисными и какие нет. Оформите результаты в виде таблицы и выводов.</p>						
3	<p>Тема 3: Визуализация и топологические инварианты</p> <p>СРС: Рассмотрите три разные поверхности: сферу, тор и бутылку Клейна. Визуализируйте их с помощью 3D-графики или моделей. Сравните их по числу Эйлера, ориентируемости, числу дыр и фундаментальной группе. Подготовьте презентацию с визуализациями и пояснениями по каждому топологическому инварианту. анимацию, иллюстрирующую деформацию.</p>	Видеоурок, проект слайды +	12	Дифференцированная проверочная работа		ЭР [1] ЭУ [2]	10.03-15.03
4	<p>Тема 4: Поверхности и их классификация</p> <p>СРС: Создайте модель (физическую или цифровую)</p>	Видеоурок, проект слайды +	12	Дифференцированная проверочная работа	1/1	ЭР [3] ЭУ [1]	10.03-15.03

	<p>неориентируемой поверхности (например, бутылки Клейна или проективной плоскости). Проведите анализ: найдите число Эйлера, определите ориентируемость, границы, фундаментальную группу. Сравните с ориентируемой поверхностью той же топологической сложности (например, тором).</p>						
5	<p>Тема 5: Фундаментальная группа и универсальное накрытие</p> <p>СРС: Исследуйте фундаментальную группу тора. Выведите её с помощью сокращения многоугольника с идентификацией сторон. Постройте соответствующее универсальное накрытие (решётка в плоскости). Визуализируйте его и отразите, как петли на торе отображаются в перемещения на плоскости.</p>	Проект, визуализация, краткий отчет	12	Дифференцируемая проверочная работа	1/1	ЭР [3] ЭУ [2]	10.03-15.03
	1 модуль СРС1	Средние накопленные баллы			4/4		

Политика курса

Политика курса для PhD докторантов по дисциплине "Наглядная геометрия и топология"

1. Основные требования к обучению

- **Обязательное участие** в 80% лекций и практических занятий (допускается дистанционное подключение с ведением конспекта).
- **Самостоятельная работа (СРС)** должна включать не менее **2 научных статьи** по тематике курса (обзор + критический анализ).
- **Практические задания** выполняются с использованием специализированного ПО (Python, Mathematica, Blender и др.).

2. Компоненты курса и их вес в оценке

Компонент	Форма отчетности	Вес в итоговой оценке	Требования
Лекции	Конспект + вопросы для дискуссии	10%	Активность, глубина вопросов
Практика	5 выполненных проектов	30%	Код/модель + пояснительная записка
СРС	Научный доклад (10-15 стр.)	25%	Соответствие стандартам LaTeX, наличие оригинальных идей
Экзамен	Защита исследовательского проекта	35%	Публичная презентация + ответы на вопросы комиссии

3. Требования к академической честности

- Все работы проверяются на плагиат (**≤15% совпадений**, система Turnitin).
- Использование ChatGPT/LLM допускается **только для генерации идей** с обязательной проверкой корректности.
- Коллективные проекты требуют четкого распределения ролей (указывается в отчете).

4. Правила пересдач и апелляций

- **Пересдача** возможна 1 раз в течение 2 недель после объявления результатов.
- **Апелляция** подается в письменной форме с обоснованием в течение 3 дней.

- Система оценки • *Баллы за курс состоят из (100 баллов):*

Название контроля	Баллы
ТК ср.	8
СРСП	16
СРС	8
РК	18
Экзамен (50 б.)	100
ИЭ=М1+Э	

Образовательные ресурсы

(используйте полную ссылку и укажите, где можно получить доступ к текстам/материалам)	
Электронные ресурсы 1-4 на этих ресурсе имеются курсы, которые включают в себя теорию и практические задания.	1. https://www.youtube.com/playlist?list=PL3EED4C1D684D3ADF 2. https://www.youtube.com/c/Mathologer 3. https://www.youtube.com/@3blue1brown 4. https://www.blender.org/
Электронные учебники	1. <i>Рашевский П.К.</i> Курс дифференциальной геометрии. И- ние 5- е, а. М... Издательство ЛКИ/URSS, 2013 2. <i>Розендорн Э.Р.</i> Задачи по дифференциальной геометрии. — М.: Науч 3. <i>Понтрягин Л. С.</i> Гладкие многообразия и их применения в теории го 4. <i>Милнор ДЖ.</i> Теория Морса. Изд. 3-е. — М.: Издательство ЛКИ/URSS 5. <i>Фиников С. П.</i> Курс дифференциальной геометрии. Изд. 4-е — М.: Ко 6. <i>Мищенко А. С., Фоменко А. Т.</i> Курс дифференциальной геометрии и т Краснодар:Издательский Лань, 2010 . 7. <i>Мищенко А. С. Саловьев Ю. П. Фоменко А. Т</i> Сборник задач по дифф 2-е, перераб. и доп. М.: Лананд/URSS, 2016. 8. <i>Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.</i> Курс гомотопической топологии. Изд. 2-е. 9. <i>Ошемков А. А., Попеленский Ф. Ю., Тужилин А. А., Фоменко А. Т., Ш</i> топологии. Изд. 2-е., испр. — М.: ЛЕНАНД/URSS, 2016. 10. <i>Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.</i> Современная геометрия поверхностей, группы преобразования и поля. Т. 2: Геометрия и топо Изд 6-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»/URSS, 2013. 11. <i>Фоменко А. Т.</i> Дифференциальная геометрия и топология: Дополни М.:Ленинд ЛЕНАНД/URSS, 2016. 12. <i>Фоменко А. Т.</i> Наглядная геометрия и топология. Математические об доп. — М.: Изд-во МГУ, 1998. 13. <i>Матвеев С. В. Фоменко А.Т.</i> Алгоритмические и компьютерные мето МГУ, 1991 14. <i>Погорелов А. В.</i> Дифференциальная геометрия. Изд. 6-е. М.: Наука, 15. <i>Тайманов Н. А.</i> Лекции по дифференциальную геометрию. Ижевск: 2002. 16. <i>Бляшке В.</i> Введение в дифференциальную геометрию. Изд. 2-е, испр. университет», 2000.

V. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по направлению 510100 «Математика»

Квалификация выпускника – Phd докторантура

по дисциплине: Наглядная геометрия и топология

Кафедра алгебра и геометрия

УТВЕРЖДЕН

на заседании кафедры «09» сентябрь 2025 г.

протокол №1

зав. кафедрой



к.ф.-м.н., доцент Борбоева Г.М.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

“Наглядная геометрия и топология”

по направлению **510100** - «Алгебра и геометрия »

Квалификация (степень) выпускника – Phd докторантура

Паспорт

фонда оценочных средств по дисциплине “Наглядная геометрия и топология”

Компетенции, в развитие которых вносит вклад данная дисциплина

(Код контролируемой компетенции)

ОПК-4. Готов проектировать объекты, среды и системы, используя современные технологии, графические средства и методы проектирования, с учётом принципов композиции и колористики.

ПК-3. Способен использовать изобразительные средства и цифровые технологии для создания поисковых эскизов, графических изображений или объёмных моделей проектируемых объектов.

ПК-18. Способность разрабатывать графику для интернет-ресурсов и мобильных приложений.

Примерный перечень оценочных средств

№	Вид деятельности	Определение	Примеч.
1	Тестирование	Проверка знаний по ключевым понятиям геометрии и топологии (многообразия, гомотопии, узлы и др.)	Может включать задачи на визуальную идентификацию объектов (например, поверхности в 3D).
2	Проектная работа	Создание 3D-моделей геометрических объектов (в Blender, Mathematica), визуализация топологических структур.	Пример: проекция 4D-объекта в 3D, анимация гомотопических преобразований.
3	Индивидуальные задания	Анализ научных статей по топологии, написание обзоров или доказательств теорем, сравнение методов (например, алгебраической и геометрической топологии).	Для PhD-докторантов — акцент на исследовательские задачи.
4	Исследовательский модуль:	Мини-статья с применением топологии в своей научной области (физика, ML, биология).	

Критерии оценивания по дисциплине “Наглядная геометрия и топология”

	Вид деятельности	Критерии оценивания	Баллы
1.	Тестирование	Количество правильных ответов. - Умение визуализировать абстрактные понятия (например, гомотопии, многообразия).	30
2.	Проектная работа	Глубина исследования (например, анализ топологических свойств объекта). - Креативность в подаче (анимации, интерактивные графики). - Использование специализированного ПО (Mathematica, Python, Blender).	30
3.	Индивидуальные задания	Логичность доказательств теорем. - Научная новизна (для PhD - связь с темой диссертации). - Чёткость аргументации.	20
4.	Активность на занятиях	- Участие в дискуссиях (например, обсуждение гипотез). - Решение задач у доски. - Вовлечённость в разбор кейсов	20



Разработала: Профессор кафедры АИГ

Матиева Г.

V.I. Оценочные средства по темам дисциплины

№	Наименование разделов, тем дисциплины	Оценоч. средства/ Код компетенции	Планируемые РОд
1	№1 Лекция. Введение в наглядную геометрию и топологию №1 Практическая работа. Визуализация двумерных поверхностей (тор, сфера, бутылка Клейна).	Визуализация, мини-доклад ПК-1, ПК-6, ПК-10	Студент демонстрирует современное понимание геометрических и топологических концепций. Способен объяснять и применять фундаментальные понятия многогранников, поверхностей и топологических инвариантов. Студент владеет современными методами визуализации геометрических объектов, таких как торы, сферы и бутылки Клейна.

2	<p>№2 лекция Геометрические поверхности и их классификация</p> <p>№2 Практическая работа. Построение и анализ графов на поверхностях.</p>	<p>Задание, презентация</p> <p>ПК-4, ПК-6, ИК-2</p>	<p>Применяет математические методы для анализа различных геометрических структур и их свойств.</p>
3	<p>№3. Лекция. Графы и их вложение в поверхности</p> <p>№3. Практическая работа. Вычисление эйлеровой характеристики для различных многообразий.</p>	<p>Решение задач, отчёт</p> <p>ПК-3, ПК-4, ПК-6</p>	<p>Может работать с графами на поверхностях, строить их и анализировать.</p> <p>Способен вычислять эйлерову характеристику для различных многообразий и анализировать топологические свойства объектов.</p>
4	<p>№4. Лекция. Геометрические преобразования и симметрии</p> <p>№4. Практическая работа. Создание элементов справочника.</p>	<p>Электронный справочник</p> <p>ПК-10, ИК-2</p>	<p>Докторант применяет методологию научного исследования для решения практических задач в области геометрии и топологии.</p> <p>Докторант умеет применять топологические инварианты (например, эйлерову характеристику, фундаментальную группу, гомологии) для классификации топологических объектов.</p>
5	<p>№5. Лекция. Введение в топологию. Топологические инварианты</p> <p>№5. Практическая работа Работа с фундаментальной группой (примеры вычислений).</p>	<p>Решение задач, защита решения</p> <p>ПК-2, ПК-3, ПК-4</p>	<p>Докторант объясняет ключевые понятия топологии, такие как открытые множества, непрерывные функции и топологические пространства.</p> <p>Докторант понимает важность топологических инвариантов и их роль в анализе пространств.</p>

6	<p>№6. Лекция Многомерная геометрия и визуализация</p> <p>№6. Практическая работа. Триангуляция поверхностей и её применение.</p>	<p>Практическое задание</p> <p>ПК-6, ПК-10</p>	<p>Докторант применяет полученные знания для решения более сложных задач, например, вычисления групп для более сложных многообразий или анализа связности пространства.</p>
7	<p>№7. Лекция. Геометрические структуры на многообразиях</p> <p>№7. Практическая работа. Визуализация 3D- и 4D-объектов с помощью проекций.</p>	<p>Демонстрация, анализ моделей</p> <p>ПК-6, ПК-10</p>	<p>Способен работать с многомерными объектами, проводить их визуализацию и проекции в 3D и 4D пространствах.</p>
8	<p>№8. Лекция. Динамические системы и геометрическая топология</p> <p>№8. Практическая работа. Исследование узлов и зацеплений.</p>	<p>Математический эксперимент</p> <p>ПК-4, ПК-7</p>	<p>Применяет геометрические структуры для решения задач в разных контекстах (математика, физика, информатика).</p> <p>Способен критически оценивать современные проблемы и открытые вопросы в области геометрии и топологии.</p>
9	<p>№9. Лекция. Геометрические структуры на многообразиях</p> <p>№9. Практическая работа. Построение аттракторов простых динамических систем.</p>	<p>Компьютерная модель, защита</p> <p>ПК-6, ПК-11</p>	<p>Докторант способен выбрать актуальную научную тему для исследования и подготовить научный доклад.</p>
10	<p>№10. Лекция. Современные проблемы и открытые вопросы</p> <p>№10. Практическая работа. Подготовка научного доклада по выбранной теме.</p>	<p>Научный доклад, обсуждение</p> <p>ПК-2, ПК-11, СЛК-1, ИК-2</p>	<p>Докторант умеет работать в команде при решении лабораторных заданий и создании совместных проектов.</p> <p>Способен эффективно взаимодействовать с коллегами, организовывать рабочий процесс и делиться знаниями.</p> <p>Развивает навыки научной коммуникации, работы с данными и написания научных материалов.</p>

Основные понятия

1. **Наглядная геометрия** — раздел математики, изучающий геометрические объекты через визуализацию и пространственное мышление.
2. **Топология** — раздел математики, изучающий свойства объектов, сохраняющиеся при непрерывных деформациях.
3. **Топологический инвариант** — характеристика объекта, неизменная при гомеоморфизмах (например, эйлерова характеристика, фундаментальная группа).
4. **Гомотопия** — непрерывная деформация одного объекта в другой.
5. **Фундаментальная группа** — алгебраическая структура, описывающая "дыры" в топологическом пространстве.

Геометрические объекты

6. **Многообразие** — топологическое пространство, локально похожее на евклидово пространство (например, сфера, тор).
7. **Тор** — поверхность, имеющая форму бублика; пример двумерного многообразия.
8. **Бутылка Клейна** — неориентируемая поверхность без края.
9. **Проективная плоскость** — неориентируемая поверхность, получаемая склеиванием противоположных точек сферы.
10. **Узел** — вложение окружности в трёхмерное пространство.

Топологические инварианты

11. **Эйлерова характеристика** — числовая характеристика поверхности, вычисляемая по формуле $V - E + F$, где V — вершины, E — рёбра, F — грани.
12. **Genus (род поверхности)** — число "ручек" на поверхности; для тора genus равен 1.
13. **Ориентируемость** — свойство поверхности иметь две стороны (например, сфера ориентируема, бутылка Клейна — нет).

Методы и инструменты

14. **Визуализация** — представление геометрических и топологических объектов в графическом виде (с помощью Blender, GeoGebra, Python).
15. **Триангуляция** — разбиение поверхности на треугольники для анализа.
16. **Персистентные гомологии** — метод топологического анализа данных, выявляющий устойчивые структуры.

17. **Группы симметрий** — набор преобразований, сохраняющих структуру объекта (например, кристаллографические группы).

Ключевые теоремы

18. **Теорема о классификации поверхностей** — любая замкнутая поверхность гомеоморфна сфере с ручками или проективной плоскости с ручками.

19. **Теорема о четырёх красках** — любую карту на плоскости можно раскрасить четырьмя цветами так, чтобы соседние области не совпадали по цвету.

Термины из практических занятий

27. **СРС (Самостоятельная работа студентов)** — задания для самостоятельного изучения темы.

28. **СРСП (Самостоятельная работа студента под руководством преподавателя)** — практические занятия с консультацией преподавателя.

29. **РО (Результат обучения)** — знания и навыки, которые студент должен продемонстрировать по итогам курса.

VII. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина: Наглядная геометрия и топология

Изучение курса «Наглядная геометрия и топология» требует от студентов системного подхода, логического мышления и способности к абстракции. Данная дисциплина является базовой для понимания многих современных направлений математики, физики, информатики и инженерных наук. Для успешного освоения курса рекомендуется следующее:

1. Активное участие в учебном процессе

- Регулярно посещать лекции и практические занятия.
- Записывать основные определения, утверждения и доказательства.
- Участвовать в обсуждении топологических задач и примеров.

2. Работа с учебной и дополнительной литературой

- Изучать рекомендуемую литературу, особенно по основам топологии (например, понятия открытых и замкнутых множеств, непрерывности, топологических инвариантов).
- Использовать визуальные пособия (модели, интерактивные программы, графику) для лучшего понимания наглядных объектов (тор, сфера, проективная плоскость и др.).

3. Решение задач и выполнение домашних заданий

- Регулярно решать предложенные задачи по темам: гомеоморфизм, фундаментальные группы, классификация поверхностей.
- В случае трудностей — консультироваться с преподавателем и другими студентами.

4. Подготовка к контрольным и зачетным мероприятиям

- Повторять основные определения, теоремы и методы доказательства.
- Решать типовые задания из методических пособий.
- Анализировать допущенные ошибки и непонимания.

5. Развитие визуального и пространственного мышления

- Регулярно тренировать представление в уме топологических преобразований.
- Использовать программы и онлайн-сервисы (например, GeoGebra, TopoInVis) для моделирования.

6. Самостоятельная работа и исследовательская активность

- Выполнять творческие задания: составление собственных задач, поиск примеров и контрпримеров.
- Участвовать в мини-проектах и научно-исследовательской работе, связанной с визуальной геометрией и топологией.

VIII. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ТЕСТЫ

Тест 1. Основы наглядной геометрии

1. Какой объект является моделью проективной плоскости?

- a) Цилиндр
- b) Бутылка Клейна
- c) Граф $K5K5$

2. Чему равна эйлерова характеристика проективной плоскости?

- a) 2
- b) 1
- c) 0

3. Какая аксиома неверна для проективной геометрии?

- a) Любые две прямые пересекаются
- b) Через точку вне прямой можно провести ровно одну параллельную
- c) Существует хотя бы одна прямая

4. **Объясните, почему лист Мёбиуса — неориентируемая поверхность (1-2 предложения).**

5. **Задача:** Постройте модель проективной плоскости, отождествив стороны квадрата $aba-1baba-1b$. Какая это поверхность?

Тест 2. Топологические пространства

1. **Минимальная топология на множестве $\{1,2\}$:**

- a) $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$
- b) $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$
- c) Все подмножества

2. **Дискретная топология:**

- a) Содержит все подмножества
- b) Содержит только \emptyset и всё пространство
- c) Определяется метрикой

3. **Пример хаусдорфова пространства:**

- a) \mathbb{R} с обычной топологией
- b) Произвольное бесконечное множество с тривиальной топологией
- c) Проективная плоскость

4. **Приведите пример топологии, которая не является хаусдорфовой.**

5. **Задача:** Постройте диаграмму Хассе для всех топологий на множестве $\{x,y\}$.

Тест 3. Топологические инварианты

1. **Эйлерова характеристика тора:**

- a) 1
- b) 0
- c) 2

2. **Фундаментальная группа сферы S^2 :**

- a) \mathbb{Z}

b) Тривиальная

c) \mathbb{Z}^2

3. Какой инвариант отличает тор от сферы?

a) Фундаментальная группа

b) Число компонент связности

c) Компактность

4. Почему бутылка Клейна и проективная плоскость имеют одинаковую χ ?

5. **Задача:** Вычислите эйлерову характеристику поверхности, заданной словом $aabcb^{-1}caabcb^{-1}c$.

Тест 4. Классификация поверхностей

1. Ориентируемая поверхность с $\text{genus}=2$:

a) Сфера с двумя ручками

b) Бутылка Клейна

c) Проективная плоскость

2. Неориентируемая поверхность без границы:

a) Тор

b) Проективная плоскость

c) Лист Мёбиуса

3. Какая поверхность соответствует слову $abab^{-1}abab^{-1}$?

a) Тор

b) Бутылка Клейна

c) Сфера

4. Почему бутылка Клейна не вкладывается в \mathbb{R}^3 ?

5. **Задача:** Классифицируйте поверхность, полученную склеиванием сторон шестиугольника по слову $abcabcabcabc$.

Тест 5. Фундаментальная группа

1. π_1 бутона двух окружностей:

a) \mathbb{Z}

b) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

c) \mathbb{Z}^2

2. **Универсальное накрытие для тора:**

a) Окружность

b) Плоскость \mathbb{R}^2

c) Сфера

3. **Как связаны $\pi_1 \pi_1$ и накрывающие пространства?**

a) Группа накрытий изоморфна $\pi_1 \pi_1$

b) Нет связи

c) $\pi_1 \pi_1$ — подгруппа группы накрытий

4. **Сформулируйте теорему ван Кампена для "восьмёрки".**

5. **Задача:** Вычислите $\pi_1 \pi_1$ для пространства, полученного склеиванием двух торов по одной окружности.

Критерии оценки:

- **MCQ (1-3):** 1 балл за верный ответ.
- **Открытый вопрос (4):** 0-2 балла (корректность, ясность).
- **Задача (5):** 0-3 балла (ход решения, результат).
- **Максимум:** 10 баллов за тест.

Лекция 1: Основы наглядной геометрии

1. **Теоретический:** Какие аксиомы отличают проективную геометрию от евклидовой? Приведите примеры.

2. **Практический:** Как визуализировать проективную плоскость Фано? Назовите её ключевые свойства.

3. **Аналитический:** Почему проективная плоскость не может быть реализована в \mathbb{R}^3 без самопересечений?

Лекция 2: Топологические пространства

1. **Теоретический:** Дайте определение топологии на множестве. Чем хаусдорфово пространство отличается от неметризуемого?

2. **Практический:** Постройте все возможные топологии на множестве из двух элементов. Какие из них являются базисными?
 3. **Аналитический:** Как топология связана с понятием непрерывности? Приведите пример из анализа данных.
-

Лекция 3: Топологические инварианты

1. **Теоретический:** Что такое эйлерова характеристика? Как её вычислить для поверхности рода g ?
 2. **Практический:** Сравните фундаментальные группы сферы S^2 и тора T^2 .
 3. **Аналитический:** Почему гомологии являются более "грубым" инвариантом, чем гомотопия?
-

Лекция 4: Классификация поверхностей

1. **Теоретический:** Сформулируйте теорему классификации замкнутых поверхностей.
 2. **Практический:** Какая поверхность соответствует склейке $aba^{-1}b^{-1}c_1c_1^{-1}c_2c_2^{-1}$? Ответ обоснуйте.
 3. **Аналитический:** Как ориентируемость поверхности влияет на её фундаментальную группу?
-

Лекция 5: Фундаментальная группа

1. **Теоретический:** Дайте определение фундаментальной группы. Чем она отличается для односвязных и не односвязных пространств?
 2. **Практический:** Вычислите π_1 для тора.
 3. **Аналитический:** Как универсальное накрытие связано с монодромией?
-

Лекция 6: Многомерная геометрия

1. **Теоретический:** Какие методы используются для визуализации 4D-объектов?
2. **Практический:** Постройте сечение гиперкуба $t=0.5$ и опишите его топологию.

3. **Аналитический:** Почему в размерностях $n \geq 4$ возможны экзотические гладкие структуры?
-

Лекция 7: Геометрические структуры

1. **Теоретический:** Что такое риманова метрика? Приведите пример на сфере.
 2. **Практический:** Как выглядит метрика Лобачевского на модели Пуанкаре?
 3. **Аналитический:** Чем псевдоримановы многообразия отличаются от римановых?
-

Лекция 8: Динамические системы

1. **Теоретический:** Как аттракторы связаны с топологией фазового пространства?
 2. **Практический:** Постройте фазовый портрет маятника с трением.
 3. **Аналитический:** Какие топологические инварианты используются в теории бифуркаций?
-

Лекция 9: Приложения

1. **Теоретический:** Как персистентные гомологии применяются в анализе данных?
 2. **Практический:** Визуализируйте кластеризацию датасета MNIST методами TDA.
 3. **Аналитический:** Какие ограничения имеет топологический подход в машинном обучении?
-

Лекция 10: Современные проблемы

1. **Теоретический:** В чём суть гипотезы Пуанкаре для размерностей $n > 3$?
 2. **Практический:** Приведите пример открытой задачи в низкоразмерной топологии.
 3. **Аналитический:** Как методы топологии используются в квантовой теории поля?
-

Критерии оценки ответов:

- **Теоретические вопросы:** Полнота определения, корректность терминологии (0–2 балла).

- **Практические вопросы:** Чёткость алгоритма, наличие визуализации (0–3 балла).
- **Аналитические вопросы:** Глубина аргументации, связь с другими областями (0–3 балла).

Пример ответа на вопрос 1.3:

"Проективная плоскость RP^2 не вкладывается в \mathbb{R}^3 без самопересечений, так как её эйлерова характеристика $\chi=1$ противоречит теореме о вложении для замкнутых поверхностей (где $\chi \leq 2\chi \leq 2$). Альтернативное доказательство – невозможность устранить пересечения в модели Клейна."

IX. ЛЕКЦИИ И ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Лекция 1. Введение в наглядную геометрию и топологию

Цель: Сформировать представление о предмете, его истории и связи с другими науками.

Ключевые вопросы:

- Определение наглядной геометрии и топологии.
- Основные исторические этапы развития.
- Примеры приложений в физике, биологии, компьютерных науках.

Методы: Лекция с презентацией, разбор примеров.

Задания:

1. Написать эссе (1–2 страницы) о роли топологии в современной науке.
2. Подготовить пример топологической задачи из своей области исследований.

Литература:

- Г. Перельман, "Наглядная топология" (глава 1).
- J. Stillwell, "Classical Topology and Combinatorial Group Theory" (введение).

Лекция 2. Геометрические поверхности и их классификация

Цель: Изучить основные типы поверхностей и их свойства.

Ключевые вопросы:

- Ориентируемые и неориентируемые поверхности.
- Эйлерова характеристика и её вычисление.
- Классификация замкнутых поверхностей.

Методы: Интерактивная лекция с построением моделей (использование 3D-редакторов).

Задания:

1. Вычислить эйлерову характеристику для:
 - Сферы с n ручками.
 - Проективной плоскости.

2. Построить модель бутылки Клейна в программе **Blender** и объяснить её свойства.

Литература:

- A. Hatcher, "Algebraic Topology" (раздел 1.1).

Лекция 3. Графы и их вложение в поверхности

Цель: Изучить связь теории графов с топологией поверхностей.

Ключевые вопросы:

- Планарные и непланарные графы.
- Теорема о четырёх красках.
- Genus графа и его вычисление.

Методы: Лекция с решением задач, использование **Python** (библиотека networkx).

Задания:

1. Проверить планарность графа $K_{3,3}K_{3,3}$ с помощью алгоритма.
2. Построить вложение графа в тор, используя **Mathematica**.

Литература:

- B. Mohar, C. Thomassen, "Graphs on Surfaces".

Лекция 4. Геометрические преобразования и симметрии

Цель: Изучить группы симметрий и их применение.

Ключевые вопросы:

- Группы движений плоскости и пространства.
- Кристаллографические группы.
- Теорема Белого.

Методы: Лекция с визуализацией в **Geogebra**.

Задания:

1. Найти группу симметрий правильного додекаэдра.
2. Построить орнамент с заданной группой симметрии.

Литература:

- M. Armstrong, "Groups and Symmetry".

Лекция 5. Топологические инварианты

Цель: Познакомиться с основными инвариантами (фундаментальная группа, гомологии).

Ключевые вопросы:

- Гомотопия и гомотопическая эквивалентность.
- Фундаментальная группа окружности.

- Гомологии сферы и тора.

Методы: Лекция с вычислениями, использование **SageMath**.

Задания:

1. Вычислить фундаментальную группу листа Мёбиуса.
2. Построить цепной комплекс для треугольника.

Литература:

- A. Hatcher, "Algebraic Topology" (глава 2).

2. Практические занятия

Каждое занятие включает:

- **Цель**
- **Необходимый софт**
- **Конкретные задачи**
- **Критерии оценки**

Практика 1. Визуализация поверхностей

Цель: Научиться строить 3D-модели поверхностей.

Софт: Blender, Mathematica.

Задачи:

1. Создать модель тора и бутылки Клейна.
2. Вычислить эйлерову характеристику для этих моделей.

Критерии: Корректность модели, точность вычислений.

Практика 5. Фундаментальная группа

Цель: Научиться вычислять фундаментальную группу.

Софт: SageMath.

Задачи:

1. Вычислить фундаментальную группу для "восьмёрки".
2. Проверить связь с теорией графов.

Критерии: Правильность вычислений, объяснение шагов.

Практика 10. Топологический анализ данных

Цель: Применить методы TDA к реальным данным.

Софт: Python (библиотеки gudhi, scikit-learn).

Задачи:

1. Проанализировать датасет (например, MNIST) с помощью персистентных гомологий.
2. Визуализировать результаты.

Критерии: Качество анализа, интерпретация результатов.

3. Итоговая аттестация

- **Экзамен (устный):** Защита проекта по выбранной теме.
 - **Научная статья:** Требуется представить работу по применению топологии в своей области.
-