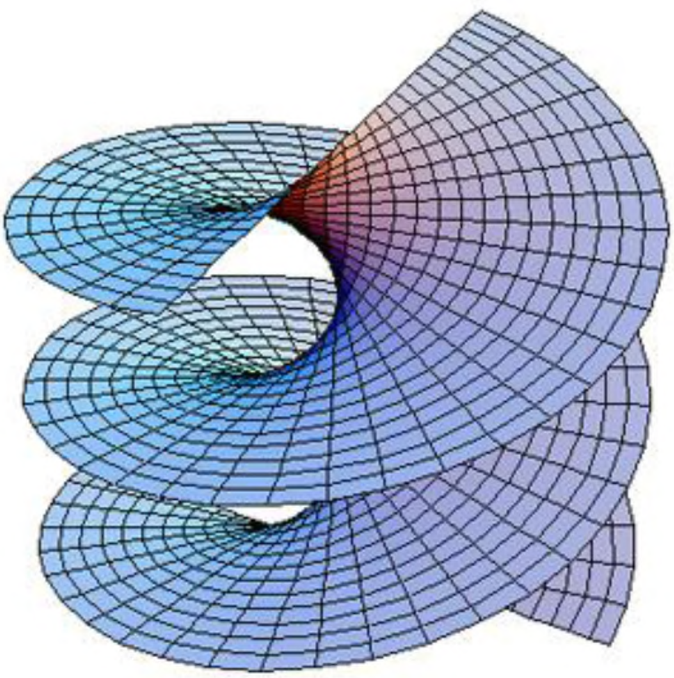
Матиева Г., Папиева Т.М., Курбанбаева Н.Н.

Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе



Ош - 2022

УДК 514
ББК 22.152
М 34

Монография издается по решению Научно-технического совета Ошского государственного университета (прот. №5 от *23.11.2022* г.)

Рецензенты:

- доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН КР Борубаев А.А.
- доктор физ.-мат. наук, профессор Алыбаев К.С.

М 34 **Матиева Г. и др.**

Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе: Монография / Г. Матиева, Т.М. Папиева, Н.Н. Курбанбаева – Ош: «Билим»ОшГУ, 2022. – 139 с.

ISBN 978-9967-18-810-5

Монография посвящена исследованию свойств частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной циклической сетью Френе. Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии заданной циклической сети являлись двойными линиями рассматриваемых отображений. Найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа заданной циклической сети Френе в каждом из рассматриваемых частичных отображениях. Исследованы задачи существования двойных (квазидвойных) линий частичных отображений четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий. Найдены необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений f_i^j пространства E_4.

Монография предназначена для научных работников, преподавателей ВУЗов, студентов и магистрантов физико-математических специальностей.

УДК 514

ISBN 978-9967-18-810-5 ББК 22.152

Оглавление

Перечень условных обозначений и основных определений

Обозначения

$\Leftrightarrow$ – эквивалентность (равносильность) высказываний;

$\|$ – коллинеарность векторов;

$\perp$ – ортогональность векторов;

E_n – n-мерное евклидово пространство;

$\vec{X} = \vec{X}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – радиус-вектор точки $X \in \Omega$;

ω^i – интегральная линия векторного поля $\vec{e}_i$;

d_i – символ дифференцирования вдоль линии ω^i (или по направлению вектора $\vec{e}_i$);

$\wedge$ – внешнее произведение;

$\Delta_2 = (X, \vec{e}_i, \vec{e}_j)$ – двумерное распределение;

$(X, \vec{e}_i)$ – прямая, проходящая через точку $X \in \Omega$ с направляющим вектором $\vec{e}_i$;

$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера (δ_{ij}, δ^{ij} – только в таком смысле);

Запись вида $a_i b^i$ обозначает, что по i производится суммирование;

«Плоскость» – собственное подпространство любой размерности основного пространства E_n;

F_i^j – псевдофокус прямой $(X, \vec{e}_i)$ $(i \neq j)$;

Δ_p – p-мерное распределение $(p < n)$;

$\vec{M}_p$ – вектор средней кривизны распределения Δ_p в E_n;

Σ_n – сеть Френе в $\Omega \subset E_n$;

$\tilde{\Sigma}_n$ – циклическая сеть Френе;

k_i^j – i-тая кривизна линии ω^j сети Σ_n;

$\vec{k}_{ij}$ – i-тый вектор кривизны линии ω^j сети Σ_n;

$\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$ – вынужденная кривизна линии ω^i вдоль направлении $\vec{e}_j$.

Основные определения

Говорят, что в области G n-мерного вещественного C^∞– многообразия M задана сеть Σ_n, если в G заданы n семейств линий таких, что через каждую точку $X \in G$ проходит одна и только одна линия каждого семейства, причем векторы, касательные к этим кривым в точке *X*, образуют базис векторного пространства T_X – касательного пространства к многообразию M в точке X [11].

Точка $S \in (X, \vec{e}_1)$, определяемая радиус-вектором $\vec{S} = \vec{X} + \nu\vec{e}_1$, называется фокусом [5] прямой $(X, \vec{e}_1)$, если $d\vec{S} \parallel \vec{e}_1$ при смещении точки X по площадке $(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (т.е. $\omega^1 = 0$).

Псевдофокусом касательной $(X, \vec{e}_i)$ к линии ω^i данной сети называется такая точка $F_i^j \in (X, \vec{e}_i)$, смещение которой принадлежит плоскости $(X, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, e_{i+1}, \dots, \vec{e}_n)$, когда точка X смещается в направлении линии $\omega^j (i \neq j)$ [5].

Линии $\omega^i, f(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f(X)$ пересекаются, либо параллельны [15].

Для линии ω^i сети Σ_p в $\Omega \subset E_4$ (все ω^k=0, кроме ω^i, i-фиксировано) ($i, j = 1,...,p$; $\alpha = p+1,...,n$; $k = p+1,...,n$) векторы $\vec{a}_{ij} = a_{ij}^k \vec{e}_k$, $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ называются соответственно вектором относительной и вектором вынужденной кривизны поля $\vec{e}_i$ вдоль линии ω^j [65].

Сеть Σ_3 в $\Omega \subset E_3$ называется сетью Френе для линии ω^1, если $(X, \vec{e}_2)$ – касательная к линии ω^2 является вектором первой кривизны для линии ω^1, $(X, \vec{e}_3)$ – касательная к линии ω^3 сети Σ_3 является вектором второй кривизны для этой же линии ω^1 сети Σ_3.

Сеть Σ_3 в $\Omega \subset E_3$ называется циклической сетью Френе, если реперы $\Re(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\Re'(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$, $\Re''(X, \vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ являются, соответст-венно, реперами Френе для линий $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ одновременно. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_3$ [48].

Полем Δ_p p-мерных подпространств или p-распределением на многообразии X_n называется соответствие

$$\Delta_p : x \in X_n \to \Delta_p(x) \subset T_x(X_n), \; p \leq n,$$

где $T_x(X_n)$ – касательное пространство многообразия X_n в точке $x \in X_n$, $\Delta_p(x)$ – p-мерное подпространство в $T_x(X_n)$ [29].

Вектор $\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda_{ij}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ $\quad (i, j = 1, 2, ..., p, \; \alpha = p+1, p+2, ..., n)$ называется вектором средней кривизны распределения Δ_p [65].

ВВЕДЕНИЕ

Данное исследование относится к значительным главам современной дифференциальной геометрии – теории отображений гладких многообразий.

Проблемами точечных соответствий пространств одинаковой размерности занимались А.П. Норден, В.В. Рыжков, М.А. Акивис, В.Т. Базылев и их ученики, а также другие геометры.

В работе В.В. Рыжкова [62] дан обзор работ по геометрии дифференцируемых, взаимно однозначных отображений пространств одинаковой размерности.

Основы геометрии плоских многомерных сетей заложены в работах В.Т. Базылева [3]-[5], [7], [9], [11]-[13], [15]. Работы [8]-[10], [14] В.Т. Базылева посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

Теория дифференцируемых отображений евклидова пространства, имеет большой интерес не только для самой геометрии, она имеет широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Значительный интерес представляют дифференцируемые, частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданной сетью, так как от выбора сети зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, а также их рациональные решения. Данные сети и ее образы в различных отображениях применяются в решении многих задач теории линейных и нелинейных волн [77].

Настоящая работа посвящена исследованию:

– частичных отображений евклидовых пространств E_4, E_n, порождаемых заданной циклической сетью Френе $\tilde{\Sigma}_4$, $\tilde{\Sigma}_n$ соответственно;

– исследованию задачи существования двойных линий частичных отображений f_i^j пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$;

– необходимых и достаточных условий вырожденности частичных отображений.

ГЛАВА 1. Некоторые сведения из теории дифференцируемых отображений и сетей

§1.1. Основные сведения из теории дифференцируемых отображений

Геометрии дифференцируемых отображений гладких многообразий посвящено большое число работ. Основные понятия и результаты дифференциальной геометрии точечных соответствий между пространствами приведены в обзорной работе В.В. Рыжкова [73].

В работах [8]-[10],[14] В.Т. Базылева рассматриваются различные вопросы дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерных проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

В работе Л.И. Алексеевой [1] найдены необходимое и достаточное условие для того, чтобы график V_3 отображения $f: E_3 \to E_3'$ был поверхностью нулевой скалярной кривизны в случае, когда основание отображения образовано характеристическими линиями отображения f. Доказано, что вторая поляра точки $X \in V_3$ будет при этом конусом второго порядка.

М.А. Чешкова в работе [79] рассматривает две гладкие поверхности M^n, $\overline{M}^n$ и диффеоморфизм $f: M^n \to \overline{M}^n$. Установлено, что если f конформное отображение, а касательные плоскости $T_p M^n$ и $T_{f(p)}\overline{M}^n$ ортогональны для всех $p \in M^n$, то в соответствующих точках поверхностей равны тензоры Риччи, а отображение $f: M^n \to \overline{M}^n$

сохраняет линии кривизны, определяемые относительно векторов средних кривизн поверхностей.

В работах [83], [84] Й. Микеша рассматривается геодезические отображения Римановых пространств и пространств аффинной связности, также геодезические отображения Риччи пространств Эйнштейна.

Т.А. Дулалаевой исследованы [27] различные вопросы дифференциальной геометрии пары гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве. Парой гиперраспределения, заданных в областях Ω и Ω' n-мерного проективного пространства называется пара$\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$, где Δ – (n-1)-мерное распределение в области Ω и $\overline{\Delta}$– в области Ω', причем области Ω и Ω' диффеоморфны. В этой работе уделяется внимание к изучению свойств сетей двойных линий отображения, инвариантно связанной с заданной парой. В работе [28] этого же автора доказано, что любая линия, принадлежащая гиперраспределению Δ, является линией пары гиперраспределений $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_i^n = 0$. Геометрический смысл этого равенства, заключается в том, что соответствуют площадки гиперраспределений $\Delta(A)$ и $\overline{\Delta}(A)$ в индуцированном отображении f_*. Обращение в нуль относительного инварианта $\left(\Lambda_n^n\right)$ является необходимым и достаточным условием принадлежности образа линии ω^n, $\omega^i = 0$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$, $\omega^n = \ell^n \theta$ в отображении f гиперраспределению $\overline{\Delta}$.

В работах [57], [58] М.Н. Марюкова рассмотрены некоторые свойства линий кривизны пары p-распределений, заданных в областях Ω и Ω' пространства E_n, между которыми установлен диффеоморфизм. Найдены необходимое и достаточное условия их соответствия в отображении $f:\Omega\to\Omega'$. Исследована геометрия пары $(f,\ \Delta_p)$ в n-мерном евклидовом пространстве. Парой $(f,\ \Delta_p)$ называется диффеоморфизм f области Ω в область Ω', где области Ω и Ω' принадлежат евклидову пространству E_n и Δ_p – распределение, заданное в области Ω. Установлены свойства новых сетей и тканей, определяемых с помощью пары $(f,\ \Delta_p)$.

В работе [37] С.В. Киреева рассматривает в проективном пространстве отображение $g:\Omega\to\Omega'$, в котором каждая линия двойная, в случае, когда области $\Omega\subset P_n$ и $\Omega'\subset P_n$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей. В работе [38] она рассматривает отображение f области Ω проективного пространства P_n в области $\Omega'\subset P_n$, переводящее точку A в точку B. Области Ω и Ω' нормализованы в смысле А.П. Нордена одним и тем же семейством плоскостей $A\to\Pi_{n-1}(A)$, $B\to\Pi_{n-1}(A)$. Исследованы объекты отображения f и его характеристические направления.

В работе [2] Н. Алиева рассматривает n-мерные евклидовы пространства E и D (E,D – ортогональные пространства собственно $2n$-мерного евклидова пространства C, имеющие одну общую точку O). Исследовано дифференцируемое взаимно-однозначное отображение $T\subset V$ в W, которое переводит область $M\subset V$ в некоторую область $N\subset W$. Если точка x описывает область M, точка $y=T(x)$ описывает область N, а точка z с радиус вектором $z=x+y$ опишет область M^* поверхности V^*, называемое графиком отображения T. Доказано, что поле вектора средней кривизны порождает на поверхности V и W одномерное распределение F и G, соответственно.

В.И. Грачева в работах [23]-[26] рассмотрела дифференцируемое биективное отображение T области Ω на $\bar{\Omega}$, где $\Omega \subset E_n, \bar{\Omega} \subset \bar{E}_n$, причем, n-мерные плоскости $E_n, \bar{E}_n$ вполне ортогональны в E_{2n} и имеют общую точку O. Если $x_1 \in \Omega$, $x_2 = T(x_1) \in \bar{\Omega}$ и x^i, $\bar{x}^i$ соответственно являются координатами точек x_1, x_2 относительно некоторых ортонормированных реперов в $E_n, \bar{E}_n$, то отображение T описывается функциями $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые считаются достаточное число раз дифференцируемыми и имеющими в области Ω отличный от нуля якобиан. Множество точек $x \in E_{2n}$, для которых $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{Ox_1} + \overrightarrow{Ox_2}$, описывает в E_{2n} n-мерную поверхность, называемую графиком отображения T. Изучены условия соответствия фокусов, а также псевдофокусов, взятых на прямых в указанных n-пространствах.

О.В. Казниной [34]-[36] рассмотрено одно из свойств сетей Σ_p и $\bar{\Sigma}_p$, сохраняющееся в отображении $f : (V_p \subset E_n) \to (\bar{V}_p \subset E_{p+r})$. Найдены признаки некоторых свойств сетей $\Sigma_p \subset V_p$ и $\bar{\Sigma}_p \subset \bar{V}_p$.

В работе [75] Г.М. Силаева исследовала связь сети двойных линий отображения поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве и ее образ при гиперсферическом изображении.

В работе [22] А.А. Борубаева и А.А. Чекеева исследованы равномерные аналоги некоторых важнейших классов топологических пространств, топологических групп и их непрерывных отображений и непрерывных гомоморфизмов.

В работах [59]-[64] Г. Матиевой изучены частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданным распределением, при этом вскрыты тесные связи между теориями отображений, сетей и распределений.

Заданием p-мерного распределения Δ_p в некоторой области Ω евклидова пространства E_n инвариантным образом определяется распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$, ортогонально дополнительное данному распределению.

Когда $p=1, n=3$ в области $\Omega \subset E_3$ имеется семейство гладких линий (интегральные линии 1-мерного распределения Δ_1) такое, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. На каждой прямой $(X, \vec{e}_i)$ (где $(X, \vec{e}_i)$-координатные прямые репера Френе для линии ω^1 заданного семейства, $i, j = 1,2,3$) инвариантным образом определяется точка $F_i^j (i \neq j)$, так называемая псевдофокусом этой прямой. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_i^j описывает свою область Ω_i^j. Получается отображение f_i^j области Ω в область Ω_i^j такое, что точка X переходит в точку F_i^j. Изучены свойства этих частичных отображений f_i^j.

При $p>1$ имеется два вектора $\vec{M}_p, \vec{\overline{M}}_{n-p}$– вектора средних кривизн распределений Δ_p, $\overline{\Delta}_{n-p}$ соответственно. Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$ точка M, определенная радиус-вектором $\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{\overline{M}}_{n-p}$, описывает свою область $\overline{\Omega}$. Получено отображение

$f:\Omega\to\bar{\Omega}$ такое, что точка X переходит в точку M. Изучены некоторые свойства этого частичного отображения.

В работах [16]-[21] Г.М. Борбоевой исследованы дифференцируемые, взаимно однозначные отображения поверхностей Φ, Φ' $\left(Dim\Phi = Dim\Phi'\right)$ в одном и том же евклидовом пространстве E, порождаемые заданной сетью Σ.

Найдены связи между геодезичностью и сопряженностью заданной сети и коразмерностью отображаемых пространств, изучена связь геометрии этого отображения с геометрией некоторых алгебраических образов в нормальной плоскости $N(X)$ поверхности Φ.

В работах [79], [82], [83] рассматривалась геометрия отображений евклидовых пространств $T:E_n\to E'_n$, обобщающие конформные отображения.

§1.2. Сеть Френе в E_n

Рассмотрим кривые в евклидовом пространстве E_n. Пространство E_n является само к себе касательным в любой своей точке и векторы сопровождающего репера $\vec{v}^{\,i}_{p}$ принадлежат самому E_n. Мы будем обозначать их $\vec{v}_p$. Абсолютные дифференциалы в формулах Френе означают дифференцирование векторов $\vec{v}_p$ в геометрическом смысле, так что формулы Френе примут вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}_0}{ds} &= \qquad\quad \chi_1\vec{v}_1,\\
\frac{d\vec{v}_1}{ds} &= \pm\chi_1\vec{v}_0 + \chi_2\vec{v}_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d\vec{v}_{n-2}}{ds} &= \pm\chi_{n-2}\vec{v}_{n-3} + \chi_{n-1}\vec{v}_{n-1},\\
\frac{d\vec{v}_{n-2}}{ds} &= \pm\chi_{n-1}\vec{v}_{n-2}.
\end{aligned}\right\}.$$

В частности, в трехмерном евклидовом пространстве

$$\frac{d\vec{v}_0}{ds} = \chi_1\vec{v}_1,\ \frac{d\vec{v}_1}{ds} = \pm\chi_1\vec{v}_0 + \chi_2\vec{v}_2,\ \frac{d\vec{v}_2}{ds} = \pm\chi_2\vec{v}_1.$$

В обычном пространстве, т.е. в евклидовом пространстве E_3, в последних двух формулах, как мы знаем, нужно выбрать из знаков $\pm$ знак $-$. Мы получаем формулы Френе в их обычной записи, где $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$– орты, направленные соответственно по касательной, главной нормали и бинормали к кривой, а χ_1, χ_2 – соответственно кривизна и кручение. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что в нашей теории χ_1, χ_2 всегда положительны, в то время как обычно принято приписывать кручению χ_2 знак $\pm$ в зависимости от "правой" или "левой" закрученности кривой. Это связано с тем, что в нашей теории сопровождающий репер будет правым для "право-закрученной" кривой и левым для "лево-закрученной"; обычно же сопровождающий репер выбирается во всех случаях правым; это и вызывает появление отрицательного кручения χ_2 в случае "лево-закрученной" кривой.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть произвольным образом заданы непрерывные, положительные функции некоторого аргумента s

$$\chi_1(s),\ \chi_2(s),\ \dots,\chi_{n-1}(s),\ s_0 \le s \le s_1 .$$

Кроме того, в каком-нибудь E_n задан ортонормированный репер $(M_0, \vec{e}_0, \vec{e}_1,\dots, \vec{e}_{n-1})$, где $\vec{e}_0, \vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1}$ – единичные и мнимоединичные векторы, чередующиеся произвольным образом. Тогда в этом E_n всегда существует кривая, и притом единственная, вдоль которой кривизны $\chi_1,\ \chi_2,\ \dots,\chi_{n-1}$ выражаются наперед заданными функциями через длину дуги s (в случае $\vec{e}_0^{\,2} = 1$) или через параметр $\sigma = \dfrac{s}{i}$ (в случае $\vec{e}_0^{\,2} = -1$) и сопровождающий репер которой при $s = s_0$ совпадает с наперед заданным репером [71].

§1.3. Обзор литератур по геометрии двойных линий отображения f пары (f,Δ_p)

Многомерные сети двойных линий исследовались в работе [15] В.Т.Базылева. Свойства сетей двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей и в соответствии A – поверхностей исследовались в работе [89] С.П. Финикова.

В работах [68], [69] М.Н. Марюкова рассмотрены некоторые свойства линий кривизны пары p-распределений, заданных в областях Ω и Ω' пространства E_n, между которыми установлен диффеоморфизм. Найдены необходимое и достаточное условия их соответствия в отображении $f:\Omega\to\Omega'$. Исследована геометрия пары $(f,\ \Delta_p)$ в n-мерном евклидовом пространстве. Парой $(f,\ \Delta_p)$ называется диффеоморфизм f области Ω в область Ω', где области Ω и Ω' принадлежат евклидову пространству E_n и Δ_p – распределение, заданное в области Ω. Установлены свойства новых сетей и тканей, определяемых с помощью пары $(f,\ \Delta_p)$.

В работе [86] Г.М. Силаевой исследована связь сети двойных линий отображения поверхностей в n- мерном евклидовом пространстве и её образ при гиперсферическом изображении.

Рассмотрены две гиперповерхности V_{n-1} и $\overline{V}_{n-1}$ в n-мерном евклидовом пространстве E_n и диффеоморфизм $f:\ V_{n-1}\to\overline{V}_{n-1}$. Предположен, что $\forall x\in V_{n-1}:\ y=f(x)\neq x$. Рассмотрена отображение S прямых (xy)на точки единичной гиперсферы S_{n-1} с центром в некоторой точке O, при котором каждой прямой ставится в соответствие точка $\tilde{x}$ гиперсферы с радиусом-вектором $\overrightarrow{O\tilde{x}}=\tilde{e}_n$, параллельным прямой (xy), называемое гиперсферическим изображением.

Доказаны, что а) если поверхность V_{n-1} отнесена к некоторой сети Σ_{n-1}, поверхность $\overline{V}_{n-1}$ - сети $f(\Sigma_{n-1})$, то сеть Σ_{n-1} является сетью двойных линий отображения f тогда и только тогда, когда $S(\Sigma_{n-1}) = S(f(\Sigma_{n-1}))$;

б) сеть $\{\omega^i\}$ на поверхности V_{n-1} в гиперсферическом изображении S переходит в сеть $\{\Omega^i\}$, где $\Omega^i = m\omega^i$, тогда и только тогда, когда сеть $\{\omega^i\}$ является сетью двойных линий отображения f.

Т.А. Дулалаевой исследованы [27] различные вопросы дифференциальной геометрии пары гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве. Парой гиперраспределения, заданных в областях Ω и Ω' n-мерного проективного пространства называется пара$(\Delta, \overline{\Delta})$, где Δ – (n-1)-мерное распределение в области Ω и $\overline{\Delta}$ – в области Ω', причем области Ω и Ω' диффеоморфны. В этой работе уделяется внимание к изучению свойств сетей двойных линий отображения, инвариантно связанной с заданной парой. В работе [28] этого же автора доказано, что любая линия, принадлежащая гиперраспределению Δ, является линией пары гиперраспределений $(\Delta, \overline{\Delta})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_i^n = 0$. Геометрический смысл этого равенства, заключается в том, что соответствуют площадки гиперраспределений $\Delta(A)$ и $\overline{\Delta}(A)$ в индуцированном отображении f_*. Обращение в нуль относительного инварианта (Λ_n^n) является необходимым и достаточным условием принадлежности образа линии ω^n, $\omega^i = 0$ $(i = \overline{1, n-1})$, $\omega^n = \ell^n\theta$ в отображении f гиперраспределению $\overline{\Delta}$.

Глава 2. Свойства частичных отображений пространства E_4, порождаемых заданной циклической сетью Френе

§2.1. Циклическая сеть Френе пространстве E_4 и ею определяемые некоторые распределения

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [71], [76] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{2.1.1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2.1.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе $\tilde{\Sigma}_4$ для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети $\tilde{\Sigma}_4$, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{2.1.3}$$

В силу последнего равенства формулы (2.1.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{2.1.4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (2.1.3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (2.1.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j .$$

В силу равенства (2.1.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [67] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = B_{ijm}^k \omega^m , \tag{2.1.5}$$

где $B_{ijm}^k = \Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{i\ell}^k \Lambda_{jm}^\ell + \Lambda_{\ell j}^k \Lambda_{im}^\ell$.

Система величин $\left\{ \Lambda_{ij}^k , \Lambda_{ijm}^k \right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$\begin{aligned} d_1\vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2 , \\ d_1\vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3 , \\ d_1\vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4 , \\ d_1\vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

и

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{31}^1 = 0 , \; \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0 , \tag{2.1.6}$$

$$\Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0 . \tag{2.1.7}$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$ - первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [5] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети $\tilde{\Sigma}_4$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (2.1.8)$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть $\tilde{\Sigma}_4$ в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [48], если реперы $\Re_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ одновременно.

Пусть сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе. Тогда репер $\Re_{\bar{i}}$ является репером Френе для линии $\omega^{\bar{i}}$ $(\bar{i} = 2,3,4)$.

Формулы Френе для линии ω^2 имеют вид:

$$\begin{aligned}
&d_2\vec{e}_2 = \Lambda_{22}^3\vec{e}_3,\\
&d_2\vec{e}_3 = \Lambda_{32}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4 = -\Lambda_{22}^3\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4,\\
&d_2\vec{e}_4 = \Lambda_{42}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{42}^3\vec{e}_3 = -\Lambda_{32}^4\vec{e}_3 + \Lambda_{42}^1\vec{e}_1,\\
&d_2\vec{e}_1 = \Lambda_{12}^4\vec{e}_4 = -\Lambda_{42}^1\vec{e}_4
\end{aligned}$$

и имеют место следующие соотношения:

$$\Lambda_{22}^1 = -\Lambda_{12}^2 = 0,\ \Lambda_{22}^4 = -\Lambda_{42}^2 = 0, \qquad (2.1.9)$$

$$\Lambda_{32}^1 = -\Lambda_{12}^3 = 0, \qquad (2.1.10)$$

где $k_1^2 = \Lambda_{22}^3$, $k_2^2 = \Lambda_{32}^4$, $k_3^2 = \Lambda_{12}^4$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$, d_2 – символ дифференцирования вдоль линии ω^2.

Так как репер $\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ является репером Френе для линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$, то имеют место следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&d_3\vec{e}_3 = \Lambda_{33}^4 \vec{e}_4, \\
&d_3\vec{e}_4 = -\Lambda_{33}^4 \vec{e}_3 + \Lambda_{43}^1 \vec{e}_1, \\
&d_3\vec{e}_1 = -\Lambda_{43}^1 \vec{e}_4 + \Lambda_{13}^2 \vec{e}_2, \\
&d_3\vec{e}_2 = -\Lambda_{13}^2 \vec{e}_1,
\end{aligned}
$$

также

$$\Lambda_{33}^1 = -\Lambda_{13}^3 = 0, \ \Lambda_{33}^2 = -\Lambda_{23}^3 = 0, \tag{2.1.11}$$

$$\Lambda_{43}^2 = -\Lambda_{23}^4 = 0, \tag{2.1.12}$$

где $k_1^3 = \Lambda_{33}^4$, $k_2^3 = \Lambda_{43}^1$, $k_3^3 = \Lambda_{13}^2$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$, d_3 – символ дифференцирования вдоль этой линии.

Репер $\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ является репером Френе для линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$. Тогда формулы Френе для этой линии имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&d_4\vec{e}_4 = \Lambda_{44}^1 \vec{e}_1, \\
&d_4\vec{e}_1 = -\Lambda_{44}^1 \vec{e}_4 + \Lambda_{14}^2 \vec{e}_2, \\
&d_4\vec{e}_2 = -\Lambda_{14}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{24}^3 \vec{e}_3, \\
&d_4\vec{e}_3 = -\Lambda_{24}^3 \vec{e}_2
\end{aligned}
$$

и имеют место соотношения:

$$\Lambda_{44}^2 = -\Lambda_{24}^4 = 0, \ \Lambda_{44}^3 = -\Lambda_{34}^4 = 0, \tag{2.1.13}$$

$$\Lambda_{14}^3 = -\Lambda_{34}^1 = 0, \tag{2.1.14}$$

где $k_1^4 = \Lambda_{44}^1$, $k_2^4 = \Lambda_{14}^2$, $k_3^4 = \Lambda_{24}^3$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$, d_4 – символ дифференцирования вдоль этой линии.

Геометрический смысл соотношений (2.1.6) заключается в том, что псевдофокусы $F_3^1 \in (X, \vec{e}_3)$, $F_4^1 \in (X, \vec{e}_4)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_4$.

Геометрический смысл соотношений (2.1.9) заключается в том, что псевдофокусы $F_1^2 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_4^2 \in (X, \vec{e}_4)$ являются бесконечно удаленными точками пространства $\overline{E}_4$.

Геометрический смысл соотношений (2.1.11) заключается в том, что псевдофокусы $F_1^3 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_2^3 \in (X, \vec{e}_2)$ уходят в бесконечность в пространстве $\overline{E}_4$.

Геометрический смысл соотношений (2.1.13) заключается в том, что псевдофокусы $F_2^4 \in (X, \vec{e}_2)$, $F_3^4 \in (X, \vec{e}_3)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_4$.

Обратно, пусть имеют место соотношения (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14). Тогда реперы $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \Re_4$ являются реперами Френе соответственно для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ одновременно, т.е. сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе.

Таким образом доказана

Теорема 2.1.1. Сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе тогда и только тогда, когда имеют места условия: (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14).

Из равенств (2.1.6), (2.1.9), (2.1.11), (2.1.13) следует, что на каждой касательной к линиям сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ существует только по одному псевдофокусу ($F_1^4 \in (X,\vec{e}_1)$, $F_2^1 \in (X,\vec{e}_2)$, $F_3^2 \in (X,\vec{e}_3)$, $F_4^3 \in (X,\vec{e}_4)$), а остальные ($F_1^2, F_1^3 \in (X,\vec{e}_1)$, $F_2^3, F_2^4 \in (X,\vec{e}_2)$, $F_3^1, F_3^4 \in (X,\vec{e}_3)$, $F_4^1, F_4^2 \in (X,\vec{e}_4)$) являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства.

Из равенств (2.1.7), (2.1.10), (2.1.12), (2.1.14) получим, что $\vec{\Lambda}_{21}$, $\vec{\Lambda}_{43} \in (X,\vec{e}_1,\vec{e}_3)$; $\vec{\Lambda}_{32}$, $\vec{\Lambda}_{14} \in (X,\vec{e}_2,\vec{e}_4)$.

Следствие 2.1.1. Если сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, то вторые и третье кривизны всех ее линий равны нулю.

Пусть сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе. Заданием в области Ω циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе определяются следующие двумерные и
трехмерные распределения:

$$\Delta_2^{(1,2)} = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2),\ \Delta_2^{(2,3)} = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3),\ \Delta_2^{(3,4)} = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4),$$

$$\Delta_2^{(2,4)} = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_4),\ \Delta_2^{(1,3)} = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_3),\ \Delta_2^{(1,4)} = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_4),$$

$$\Delta_3^{(1,2,3)} = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3),\ \Delta_3^{(2,3,4)} = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4),\ \Delta_3^{(3,4,1)} = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_4).$$

Найдем векторов средних кривизн этих распределений:

$$\vec{M}_2^{(1,2)} = \frac{1}{2}\Lambda_{22}^3\vec{e}_3 = \frac{1}{2}k_1^2\vec{e}_3 = \frac{1}{2}\vec{k}_{12}, \tag{2.1.15}$$

следовательно, вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(1,2)}$ и вектор первой кривизны линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ коллинеарны, точнее вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(1,2)}$ два раза короче, чем вектор первой кривизны линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(2,3)}$ имеет вид:

$$\vec{M}_2^{(2,3)} = \frac{1}{2}\Lambda_{33}^4\vec{e}_4 = \frac{1}{2}k_1^3\vec{e}_4 = \frac{1}{2}\vec{k}_{13}. \tag{2.1.16}$$

$\vec{M}_2^{(3,4)}$ – вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(3,4)}$ имеет следующий вид:

$$\vec{M}_2^{(3,4)} = \frac{1}{2}\Lambda_{44}^1\vec{e}_1 = \frac{1}{2}k_1^4\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{k}_{14}. \tag{2.1.17}$$

Аналогично найдем:

$$\vec{M}_2^{(2,4)} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{44}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{22}^3\vec{e}_3\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{14} + \vec{k}_{12}\right); \tag{2.1.18}$$

$$\vec{M}_2^{(1,3)} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{33}^4\vec{e}_4\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{11} + \vec{k}_{13}\right); \tag{2.1.19}$$

$$\vec{M}_2^{(1,4)} = \frac{1}{2}\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{k}_{11}; \tag{2.1.20}$$

$$\vec{M}_3^{(1,2,3)} = \frac{1}{3}\left(\Lambda_{11}^4 + \Lambda_{22}^4 + \Lambda_{33}^4\right)\vec{e}_4.$$

В силу равенств (2.1.6), (2.1.9) отсюда имеем:

$$\vec{M}_3^{(1,2,3)} = \frac{1}{3}\Lambda_{33}^4\vec{e}_4 = \frac{1}{3}\vec{k}_{13}. \tag{2.1.21}$$

Найдем:

$$\vec{M}_3^{(2,3,4)} = \frac{1}{3}\left(\Lambda_{22}^1 + \Lambda_{33}^1 + \Lambda_{44}^1\right)\vec{e}_1.$$

Учитывая (2.1.9), (2.1.11) отсюда получим:

$$\vec{M}_3^{(2,3,4)} = \frac{1}{3}\Lambda_{44}^1\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\vec{k}_{14}. \tag{2.1.22}$$

Найдем:

$$\vec{M}_3^{(1,3,4)} = \frac{1}{3}\left(\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{33}^2 + \Lambda_{44}^2\right)\vec{e}_2.$$

В силу равенств (2.1.11), (2.1.13) из последнего равенства имеем:

$$\vec{M}_3^{(1,3,4)} = \frac{1}{3}\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{k}_{11}. \tag{2.1.23}$$

Из (2.1.17), (2.1.15), (2.1.18) следует, что вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(2,4)} = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_4)$ равен сумме векторов средних кривизн двух двумерных распределений $\Delta_2^{(1,2)} = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Delta_2^{(3,4)} = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, т.е.

$$\vec{M}_2^{(2,4)} = \vec{M}_2^{(3,4)} + \vec{M}_2^{(1,2)}. \tag{2.1.24}$$

Из (2.1.19), (2.1.20), (2.1.16) получим, что

$$\vec{M}_2^{(1,3)} = \vec{M}_2^{(1,4)} + \vec{M}_2^{(2,3)}, \tag{2.1.25}$$

вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(1,3)}$ равен сумме векторов средних кривизн двух двумерных распределений: $\Delta_2^{(1,4)}$, $\Delta_2^{(2,3)}$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.1.2. Если заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, то векторы средних кривизн двумерных и трехмерных распределений определенных циклической сетью Френе удовлетворяют следующим уравнениям соответственно: (2.1.24), (2.1.25) и (2.1.21), (2.1.22), (2.1.23).

§2.2. Свойства частичного отображения, определяемого псевдофокусом $F_4^3 \in (X,\vec{e}_4)$

Рассмотрим псевдофокус $F_4^3 \in (X,\vec{e}_4)$, определяемый радиус-вектором

$$\vec{F}_4^3 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4 . \qquad (2.2.1)$$

Когда точка X смещается в области Ω, точка $F_4^3 \in \left(X, \vec{e}_4\right)$ описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_4$. Получим частичное отображение

$f: \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f\left(X\right) = F_4^3$.

Продифференцируя обычным образом равенство (2.2.1) получим:

$$d\vec{F}_4^3 = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\right)\vec{e}_4 - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}d\vec{e}_4 .$$

Учитывая (2.2.1) отсюда имеем:

$$d\vec{F}_4^3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{43}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\omega_4^i\vec{e}_i .$$

В силу равенств (2.1.3), (2.1.4) последнее равенство имеет вид:

$$d\vec{F}_4^3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\hat{A}_{43m}^3\omega^m}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{4m}^k\omega^m}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k = \left[\vec{e}_1 + \frac{\hat{A}_{431}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{41}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k\right]\omega^1 +$$

$$+\left[\vec{e}_2 + \frac{\hat{A}_{432}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{42}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k\right]\omega^2 + \left[\vec{e}_3 + \frac{\hat{A}_{433}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{43}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k\right]\omega^3 +$$

$$+\left[\vec{e}_4 + \frac{\hat{A}_{434}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{44}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k\right]\omega^4,$$

где $B_{43m}^3 = \Lambda_{43m}^3 + \Lambda_{4\ell}^3\Lambda_{3m}^\ell + \Lambda_{\ell 3}^3\Lambda_{4m}^\ell$, $d\Lambda_{43}^3 = B_{43m}^3\omega^m$.

Введем обозначения:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 + \frac{\hat{A}_{431}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{41}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k; \qquad \vec{c}_2 = \vec{e}_2 + \frac{\hat{A}_{432}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{42}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_3 = \vec{e}_3 + \frac{\hat{A}^3_{433}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^k_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k; \qquad \vec{c}_4 = \vec{e}_4 + \frac{\hat{A}^3_{434}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^k_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k.$$

Тогда получим:

$$d\vec{F}^3_4 = \omega^1\vec{c}_1 + \omega^2\vec{c}_2 + \omega^3\vec{c}_3 + \omega^4\vec{c}_4.$$

Область Ω^3_4 отнесем к подвижному реперу $\Re' = \left(F^3_4, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4\right)$.

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, координатные векторы репера $\Re'$ имеют вид:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^3_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 + \frac{\hat{A}^3_{431}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4; \quad \vec{c}_2 = -\frac{\Lambda^1_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^3_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 + \frac{\hat{A}^3_{432}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_3 = -\frac{\Lambda^1_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \frac{\hat{A}^3_{433}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4; \quad \vec{c}_4 = -\frac{\Lambda^1_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \left(1 + \frac{\hat{A}^3_{434}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\right)\vec{e}_4. \tag{2.2.2}$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $f: \Omega \to \Omega^3_4$ является невырожденным.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1, \vec{c}_1, \overrightarrow{XF^3_4} = -\left(1/\Lambda^3_{43}\right)\vec{e}_4$, где $\vec{c}_1 = f(\vec{e}_1)$. Учитывая (2.2.2), найдем: $\left(\vec{e}_1, \vec{c}_1, \overrightarrow{XF^3_4}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^3_{41} = 0$ (т.е. $k^1_3 = \Lambda^3_{41}$ третья кривизна линии ω^1 равна нулю).

Аналогичным образом рассмотрим векторы $\vec{e}_2$, $\vec{c}_2$, $\overrightarrow{XF^3_4}$. Они компланарны тогда и только тогда, когда $\Lambda^1_{42} = 0$, $\Lambda^3_{42} = 0$ (т.е. вторая и третья кривизны линии ω^2 равны нулю соответственно).

Потребуя компланарность векторов $\vec{e}_3$, $\vec{c}_3$, $\overrightarrow{XF^3_4}$ получим, что $\Lambda^1_{43} = 0$ (т.е. вторая кривизна линии ω^3 равна нулю).

Компланарность векторов $\vec{e}_4$, $\vec{c}_4$, $\overrightarrow{XF^3_4}$ очевидна. Таким образом, доказана

Теорема 2.2.1. а) Линия ω^1 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $f:\Omega\to\Omega_4^3$ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю;
б) линия ω^2 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда вторая и третья кривизны равны нулю соответственно;
в) линия ω^3 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда вторая кривизна этой линии равна нулю;
г) линия ω^4 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения f.

Найдем скалярные произведения $\vec{c}_i\cdot\vec{c}_j$ $(i\neq j)$:

$$\vec{c}_1\vec{c}_2=B^3_{431}B^3_{432}+\Lambda^3_{41}\Lambda^3_{42}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2-\Lambda^1_{42}\left(\Lambda^3_{43}\right)^3; \tag{2.2.3}$$

$$\vec{c}_1\vec{c}_3=\hat{A}^3_{431}\hat{A}^3_{433}-\Lambda^1_{43}\left(\Lambda^3_{43}\right)^3; \tag{2.2.4}$$

$$\vec{c}_1\vec{c}_4=B^3_{431}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]-\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^3; \tag{2.2.5}$$

$$\vec{c}_2\vec{c}_3=\hat{A}^3_{432}\hat{A}^3_{433}+\Lambda^1_{42}\Lambda^1_{43}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2; \tag{2.2.6}$$

$$\vec{c}_2\vec{c}_4=B^3_{432}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]+\Lambda^1_{42}\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2; \tag{2.2.7}$$

$$\vec{c}_3\vec{c}_4=B^3_{433}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]+\Lambda^1_{43}\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2. \tag{2.2.8}$$

Выясним геометрический смысл правых частей этих равенств. Рассмотрим векторы:

$$\vec{\Lambda}_{42}=d_2\vec{e}_4=\Lambda^1_{42}\vec{e}_1+\Lambda^3_{42}\vec{e}_3,\ \vec{\Lambda}_{43}=d_3\vec{e}_4=\Lambda^1_{43}\vec{e}_1+\Lambda^2_{43}\vec{e}_2+\Lambda^3_{43}\vec{e}_3.$$

Введем обозначения:

$$\vec{\Lambda}'_{42}=np_{(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2)}\vec{\Lambda}_{42};\ \vec{\Lambda}'_{43}=np_{(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2)}\vec{\Lambda}_{43}.$$

Тогда имеем:

$$\Lambda_{42}^{1}\Lambda_{43}^{1} = \vec{\Lambda}'_{42}\vec{\Lambda}'_{43}\,.$$

Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{13} = \Lambda_{33}^{4}\vec{e}_{4} = -\Lambda_{43}^{3}\vec{e}_{4}$ линии ω^{3} сети $\tilde{\Sigma}_{4}$ вдоль направлениях $\vec{e}_{2}$, $\vec{e}_{3}$, $\vec{e}_{4}$:

$$d_{2}\left(\vec{k}_{13}\right) = d_{2}\left(\Lambda_{33}^{4}\vec{e}_{4}\right) = d_{2}\left(-\Lambda_{43}^{3}\vec{e}_{4}\right) = -B_{432}^{3}\vec{e}_{4} - \Lambda_{43}^{3}\left(\Lambda_{42}^{1}\vec{e}_{1} + \Lambda_{42}^{3}\vec{e}_{3}\right);$$

$$d_{3}\left(\vec{k}_{13}\right) = d_{3}\left(\Lambda_{33}^{4}\vec{e}_{4}\right) = d_{3}\left(-\Lambda_{43}^{3}\vec{e}_{4}\right) = -B_{433}^{3}\vec{e}_{4} - \Lambda_{43}^{3}\left(\Lambda_{43}^{1}\vec{e}_{1} + \Lambda_{43}^{2}\vec{e}_{2} + \Lambda_{43}^{3}\vec{e}_{3}\right).$$

Отсюда имеем:

$$\vec{e}_{4}\cdot d_{3}\vec{k}_{13} = -B_{433}^{3};\quad \vec{e}_{4}\cdot d_{2}\vec{k}_{13} = -B_{432}^{3}\,.$$

Аналогично найдем:

$$\vec{e}_{4}\cdot d_{1}\vec{k}_{13} = -B_{431}^{3};\quad \vec{e}_{4}\cdot d_{4}\vec{k}_{13} = -B_{434}^{3}\,.$$

Учитывая последние равенства для $B_{431}^{3}, B_{432}^{3}, B_{433}^{3}, B_{434}^{3}$ равенство (2.2.6) напишем в виде:

$$\vec{c}_{2}\vec{c}_{3} = \left(\vec{e}_{4}d_{2}\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_{4}d_{3}\vec{k}_{13}\right) + \left(\vec{\Lambda}'_{42}\vec{\Lambda}'_{43}\right)\vec{k}_{13}^{\,2} \qquad (2.2.6)'$$

Аналогичным образом равенства (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), (2.2.7), (2.2.8) имеют вид:

$$\vec{c}_{1}\vec{c}_{2} = \left(\vec{e}_{4}d_{1}\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_{4}d_{2}\vec{k}_{13}\right) - \vec{k}_{13}^{\,2}\left[\vec{\Lambda}_{12}\vec{k}_{13} - \vec{\Lambda}_{41}\vec{\Lambda}_{42}\right]; \qquad (2.2.3)'$$

$$\vec{c}_{1}\vec{c}_{3} = \left(\vec{e}_{4}d_{1}\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_{4}d_{3}\vec{k}_{13}\right) - \vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{13}\vec{k}_{13}\right); \qquad (2.2.4)'$$

$$\vec{c}_{1}\vec{c}_{4} = \left(-\vec{e}_{4}d_{1}\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2} + \left(-\vec{e}_{4}d_{4}\vec{k}_{13}\right)\right] - k_{1}^{4}\left(k_{1}^{3}\right)^{3}; \qquad (2.2.5)'$$

$$\vec{c}_{2}\vec{c}_{4} = \left(-\vec{e}_{4}d_{2}\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2} + \left(-\vec{e}_{4}d_{4}\vec{k}_{13}\right)\right] + \left(\vec{\Lambda}_{42}\vec{k}_{14}\right)\vec{k}_{13}^{\,2}; \qquad (2.2.7)'$$

$$\vec{c}_{3}\vec{c}_{4} = \left(-\vec{e}_{4}d_{3}\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2} + \left(-\vec{e}_{4}d_{4}\vec{k}_{13}\right)\right] + \vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{k}_{14}\vec{\Lambda}_{43}\right). \qquad (2.2.8)'$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2.2.2. Образ данной циклической сети Френе в отображении $f:\Omega\to\Omega^3_4$ является ортогональной тогда и только тогда, когда имеют места равенства:

$$B^3_{431}B^3_{432}+\Lambda^3_{41}\Lambda^3_{42}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2-\Lambda^1_{42}\left(\Lambda^3_{43}\right)^3=0; \qquad (2.2.9)$$

$$\hat{A}^3_{431}\hat{A}^3_{433}-\Lambda^1_{43}\left(\Lambda^3_{43}\right)^3=0; \qquad (2.2.10)$$

$$B^3_{431}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]-\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^3=0; \qquad (2.2.11)$$

$$\hat{A}^3_{432}\hat{A}^3_{433}+\Lambda^1_{42}\Lambda^1_{43}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2=0; \qquad (2.2.12)$$

$$B^3_{432}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]+\Lambda^1_{42}\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2=0; \qquad (2.2.13)$$

$$B^3_{433}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]+\Lambda^1_{43}\Lambda^1_{44}\left(\Lambda^3_{43}\right)^2=0. \qquad (2.2.14)$$

Геометрический смысл этих равенств заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)=\vec{k}_{13}^{\,2}\left[\vec{\Lambda}_{12}\vec{k}_{13}-\vec{\Lambda}_{41}\vec{\Lambda}_{42}\right]; \qquad (2.2.9)'$$

$$\left(\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)=\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{13}\vec{k}_{13}\right); \qquad (2.2.10)'$$

$$\left(-\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2}+\left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right]=k^4_1\left(k^3_1\right)^3; \qquad (2.2.11)'$$

$$\left(\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)=-\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}'_{42}\vec{\Lambda}'_{43}\right); \qquad (2.2.12)'$$

$$\left(-\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2}+\left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right]=-\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{42}\vec{k}_{14}\right); \qquad (2.2.13)'$$

$$\left(-\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2}+\left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right]=-\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{k}_{14}\vec{\Lambda}_{43}\right). \qquad (2.2.14)'$$

Равенства (2.2.10)′, (2.2.12)′ можно переписать и в другом виде:

$$\left(\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)=k^3_2\left(k^3_1\right)^3; \qquad (2.2.10)''$$

$$\left(\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)=k^2_3 k^3_2\left(k^3_1\right)^2; \qquad (2.2.12)''$$

где $k_3^2 = \Lambda_{12}^4 = -\Lambda_{42}^1$ – третья кривизна линии ω^2; $k_2^3 = \Lambda_{43}^1 = -\Lambda_{13}^4$ – вторая кривизна линии ω^3.

Найдем $\vec{c}_1^{\,2} = \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1$:

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = 1 + \frac{\left(\Lambda_{41}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2} + \frac{\left(B_{431}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4}.$$

Тогда

$$\left|\vec{c}_1\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4 + \left(\Lambda_{41}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + \left(B_{431}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4}}.$$

Пусть $\left|\vec{c}_1\right| = 1$, тогда

$$\left(\Lambda_{43}^3\right)^4 + \left(\Lambda_{41}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + \left(B_{431}^3\right)^2 = \left(\Lambda_{43}^3\right)^4.$$

Отсюда имеем:

$$\left(\Lambda_{41}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 = -\left(B_{431}^3\right)^2, \qquad (2.2.15)$$

Геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left(k_3^1\right)^2\left(k_1^3\right)^2 = -\left(\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{13}\right)^2, \qquad (2.2.15)'$$

где $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3$ – третья кривизна линии ω^1, $k_1^3 = \Lambda_{33}^4 = -\Lambda_{43}^3$ – первая кривизна линии ω^3 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Найдем $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = \vec{c}_2^{\,2}$:

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = 1 + \frac{\left(B_{432}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4} + \frac{\left(\Lambda_{42}^1\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2} + \frac{\left(\Lambda_{42}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}.$$

Тогда

$$\left|\vec{c}_2\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4 + \left(B_{432}^3\right)^2 + \left(\Lambda_{42}^1\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + \left(\Lambda_{42}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4}}.$$

Пусть $\left|\vec{c}_2\right| = 1$. Тогда

$$\left(\Lambda^3_{43}\right)^4 + \left(B^3_{432}\right)^2 + \left(\Lambda^1_{42}\right)^2\left(\Lambda^3_{43}\right)^2 + \left(\Lambda^3_{42}\right)^2\left(\Lambda^3_{43}\right)^2 = \left(\Lambda^3_{43}\right)^4.$$

Отсюда имеем:

$$\left(B^3_{432}\right)^2 = -\left(\Lambda^3_{43}\right)^2\left[\left(\Lambda^1_{42}\right)^2 + \left(\Lambda^3_{42}\right)^2\right], \qquad (2.2.16)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_4 \cdot d_2\vec{k}_{13}\right)^2 = -\left(k^3_1\right)^2\left[\left(k^2_3\right)^2 + \left(k^2_2\right)^2\right], \qquad (2.2.16)'$$

где $k^2_3 = \Lambda^4_{12} = -\Lambda^1_{42}$ – третья кривизна, $k^2_2 = \Lambda^4_{32} = -\Lambda^3_{42}$ – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Равенство (2.2.16)′ можно переписать в виде:

$$\left(k^3_1\right)^2 = -\frac{\left(\vec{e}_4 \cdot d_2\vec{k}_{13}\right)}{\left(k^2_3\right)^2 + \left(k^2_2\right)^2},$$

где $k^3_1 = \Lambda^4_{33} = -\Lambda^3_{43}$ – первая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Аналогичным образом найдем:

$$\vec{c}_3 \cdot \vec{c}_3 = \frac{\left(\Lambda^1_{43}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2} + \frac{\left(B^3_{433}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^4},$$

$$\left|\vec{c}_3\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2\left(\Lambda^1_{43}\right)^2 + \left(B^3_{433}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^4}}.$$

Пусть $\left|\vec{c}_3\right| = 1$. Тогда из последнего равенства имеем:

$$\left(\Lambda^3_{43}\right)^2\left(\Lambda^1_{43}\right)^2 + \left(B^3_{433}\right)^2 = \left(\Lambda^3_{43}\right)^4$$

или

$$\left(\Lambda^1_{43}\right)^2 = \frac{\left(\Lambda^3_{43}\right)^4 - \left(B^3_{433}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}, \qquad (2.2.17)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(k_2^3\right)^2=\frac{\left(k_1^3\right)^4-\left(\vec{e}_4\cdot d_3\vec{k}_{13}\right)^2}{\left(k_1^3\right)^2}, \qquad (2.2.17)'$$

где $k_2^3=\Lambda_{43}^1=-\Lambda_{13}^4$ – вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Найдем

$$\vec{c}_4\cdot\vec{c}_4=\frac{\left(\Lambda_{44}^1\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}+\left[1+\frac{B_{434}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\right]^2,$$

$$\left|\vec{c}_4\right|=\sqrt{\frac{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2\left(\Lambda_{44}^1\right)^2+\left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2+B_{434}^3\right]^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4}}.$$

Потребуем, чтобы $\left|\vec{c}_4\right|=1$. Тогда имеем:

$$\left(\Lambda_{43}^3\right)^2\left(\Lambda_{44}^1\right)^2+\left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2+B_{434}^3\right]^2=\left(\Lambda_{43}^3\right)^4$$

или

$$\left(\Lambda_{44}^1\right)^2=\frac{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4-\left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2+B_{434}^3\right]^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}, \qquad (2.2.18)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(k_1^4\right)^2=\frac{\left(k_1^3\right)^4-\left[\left(k_1^3\right)^2+\left(-\vec{e}_4\cdot d_4\vec{k}_{13}\right)\right]^2}{\left(k_1^3\right)^2}, \qquad (2.2.18)'$$

где $k_1^4=\Lambda_{44}^1=-\Lambda_{14}^4$ – первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$. Таким образом доказана

Теорема 2.2.3. Отображение $f:\Omega\to\Omega_4^3$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия: (2.2.15) – (2.2.18).

§2.3. Свойства частичного отображения, порождаемого псевдофокусом F_2^1 на касательной к линии ω^2 заданной циклической сети Френе

Рассмотрим равенство

$$\vec{F}_2^1 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{11}^2}\vec{e}_2, \qquad (2.3.1)$$

которое определяет псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ на касательной $(X, \vec{e}_2)$ к линии ω^2 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$.

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ описывает свою область $\Omega_2^1 \subset E_4$. Получаем частичное отображение $g: \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $g(X) = F_2^1$.

Продифференцируем обычным образом равенство (2.3.1) и учитываем деривационные формулы:

$$d\vec{F}_2^1 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2\right) = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\right)\vec{e}_2 - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}d\vec{e}_2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{21}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\omega_2^i\vec{e}_i.$$

В силу равенства (2.1.4) последнее равенство имеет вид:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{21m}^1 + \Lambda_{2\ell}^1\Lambda_{1m}^\ell + \Lambda_{\ell 1}^1\Lambda_{2m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\omega_2^i\vec{e}_i.$$

Введем обозначение:

$$B_{21m}^1 = \Lambda_{21m}^1 + \Lambda_{2\ell}^1\Lambda_{1m}^\ell + \Lambda_{\ell 1}^1\Lambda_{2m}^1.$$

Тогда учитывая (2.1.3), отсюда получим:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{21m}^1\omega^m}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{2m}^i\omega^m}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_i.$$

Собирая вместе членов, содержащих дифференциальных форм ω^i $(i = 1,2,3,4)$, отсюда получим:

$$d\vec{F}_2^1 = \left[\vec{e}_1 + \frac{B^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{21}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{22}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{23}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k\right]\omega^4 .$$

Введем обозначения:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{21}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k, \qquad \vec{a}_2 = \left(1 + \frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right)\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{22}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{23}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k, \qquad \vec{a}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k .$$

Тогда имеем: $\quad d\vec{F}^1_2 = \omega^1\vec{a}_1 + \omega^2\vec{a}_2 + \omega^3\vec{a}_3 + \omega^4\vec{a}_4 .$

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= \vec{a}_1 + \frac{\hat{A}^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{a}_2 - \frac{\Lambda^3_{21}}{\Lambda^1_{21}}\vec{a}_3, \\
\vec{a}_2 &= \left(1 + \frac{\hat{A}^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right)\vec{a}_2 - \frac{\Lambda^3_{22}}{\Lambda^1_{21}}\vec{a}_3, \\
\vec{a}_3 &= -\frac{\Lambda^1_{23}}{\Lambda^1_{21}}\vec{a}_1 + \frac{\hat{A}^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{a}_2 + \vec{a}_3, \\
\vec{a}_4 &= -\frac{\Lambda^1_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{a}_1 + \frac{\hat{A}^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^3_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{a}_3 + \vec{e}_4 .
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $g:\ \Omega \to \Omega^1_2$ является невырожденным.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{a}_1$ $\overrightarrow{XF^1_2} = -\left(1 \big/ \Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2$, где $\vec{a}_1 = g\left(\vec{e}_1\right)$.

Учитывая (2.3.2) найдем:

$$\left(\vec{e}_1, \vec{a}_1, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = \frac{\Lambda_{21}^3}{\Lambda_{21}^1}.$$

Пусть линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией [64] отображения $g: \Omega \to \Omega_2^1$, $\left(\vec{e}_1, \vec{a}_1, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = 0$. Отсюда имеем: $\Lambda_{21}^3 = 0$, т.е. вторая кривизна линии ω^1 равна к нулю. Геометрический смысл последнего равенства заключается в том, что векторы $d_1\vec{e}_2 = \vec{\Lambda}_{21}$ и $\vec{e}_1$ коллинеарны.

Обратно, если векторы $\vec{\Lambda}_{21}$, $\vec{e}_1$ коллинеарны, т.е. $\Lambda_{21}^3 = 0$, то линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g: \Omega \to \Omega_2^1$.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_2$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{XF_2^1}$, где $\vec{a}_2 = g(\vec{e}_2)$. Учитывая (2.3.2) найдем:

$$\left(\vec{e}_2, \vec{a}_2, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = 0.$$

Следовательно, линия ω^2 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $g: \Omega \to \Omega_2^1$.

Теперь рассмотрим векторы $\vec{e}_3$, $\vec{a}_3$, $\overrightarrow{XF_2^1}$, где $\vec{a}_3 = g(\vec{e}_3)$ и найдем их смешанное произведение:

$$\left(\vec{e}_3, \vec{a}_3, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = \frac{\Lambda_{23}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}.$$

Пусть линия ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g: \Omega \to \Omega_2^1$, т.е. $\left(\vec{e}_3, \vec{a}_3, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = 0$. Отсюда имеем $\Lambda_{23}^1 = -\Lambda_{13}^2 = 0$, т.е. третья кривизна линии ω^3 равна нулю. Обратно, если $\Lambda_{23}^1 = -\Lambda_{13}^2 = 0$, то линия ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения g.

Геометрический смысл последнего равенства заключается в следующем: векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1$ и $\vec{e}_4$ коллинеарны.

Из условия компланарности векторов $\vec{e}_4$, $\vec{a}_4$, $\overrightarrow{XF_2^1}$ получаем: либо а) $\Lambda^1_{24} = -\Lambda^2_{14} = 0$, либо б) $\Lambda^3_{24} = -\Lambda^2_{34} = 0$, где $\Lambda^2_{14} = -\Lambda^1_{24}$ – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$, $\Lambda^3_{24} = -\Lambda^2_{34}$ – третья кривизна этой линии.

Если выполнены одно из условий а), б), то линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g:\ \Omega \to \Omega^1_2$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.3.1.

а) Линия ω^1 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения g тогда и только тогда, когда векторы $d_1\vec{e}_2,\ \vec{e}_1$ коллинеарны;

б) линия ω^2 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения g;

в) линия ω^3 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения g тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1$, $\vec{e}_4$ коллинеарны;

г) линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения g тогда и только тогда, когда выполнены одно из условий: $\Lambda^2_{14} = -\Lambda^1_{24} = 0$, $\Lambda^3_{24} = -\Lambda^2_{34} = 0$.

Найдем: $$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{B^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\left[1 + \frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right] + \frac{\Lambda^3_{21}\Lambda^3_{22}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2};$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = -\frac{\Lambda^1_{23}}{\Lambda^1_{21}} + \frac{B^1_{211}B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^4} - \frac{\Lambda^3_{21}}{\Lambda^1_{21}};$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_4 = -\frac{\Lambda^1_{24}}{\Lambda^1_{21}} + \frac{B^1_{211}B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^4} + \frac{\Lambda^3_{21}\Lambda^3_{24}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2};$$

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \frac{B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\left[1 + \frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right] - \frac{\Lambda^3_{22}}{\Lambda^1_{21}};$$

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_4 = \frac{B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\left[1 + \frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right] + \frac{\Lambda^3_{22}\Lambda^3_{24}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2};$$

$$\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_4 = \frac{\Lambda^1_{23}\Lambda^1_{24}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2} + \frac{B^1_{213}B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^4} - \frac{\Lambda^3_{24}}{\Lambda^1_{21}}.$$

Потребуя ортогональность векторов $\vec{a}_i$ получим следующие равенства:

$$B^1_{211}\left[B^1_{212} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right] + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^3_{21}\Lambda^3_{22} = 0; \qquad (2.3.3)$$

$$B^1_{211}B^1_{213} - \left(\Lambda^1_{21}\right)^3 \left(\Lambda^1_{23} + \Lambda^3_{21}\right) = 0; \qquad (2.3.4)$$

$$B^1_{211}B^1_{214} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^3_{21}\Lambda^3_{24} - \left(\Lambda^1_{21}\right)^3 \Lambda^1_{24} = 0; \qquad (2.3.5)$$

$$B^1_{213}\left[B^1_{212} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right] - \left(\Lambda^1_{21}\right)^3 \Lambda^3_{22} = 0; \qquad (2.3.6)$$

$$B^1_{214}\left[B^1_{212} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right] + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^3_{22}\Lambda^3_{24} = 0; \qquad (2.3.7)$$

$$B^1_{213}B^1_{214} + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^1_{23}\Lambda^1_{24} - \left(\Lambda^1_{21}\right)^3 \Lambda^3_{24} = 0. \qquad (2.3.8)$$

Выясним геометрический смысл этих равенств. Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{11} = \Lambda^2_{11}\vec{e}_2 = -\Lambda^1_{21}\vec{e}_2$ линии ω^1 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе вдоль направлениях $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4$:

$$d_1\vec{k}_{11} = d_1\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right) = -\left(d_1\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}d_1\vec{e}_2 = B^1_{211}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{21}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{21}\vec{e}_3\right);$$

$$d_2\vec{k}_{11} = d_2\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right) = -\left(d_2\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}d_2\vec{e}_2 = -B^1_{212}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{22}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{22}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{22}\vec{e}_4\right) =$$
$$= -B^1_{212}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\Lambda^3_{22}\vec{e}_3;$$

$$d_3\vec{k}_{11} = d_3\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right) = -\left(d_3\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}d_3\vec{e}_2 = -B^1_{213}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{23}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{23}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{23}\vec{e}_4\right) =$$
$$= -B^1_{213}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\Lambda^1_{23}\vec{e}_1;$$

$$d_4\vec{k}_{11} = d_4\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right) = -\left(d_4\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}d_4\vec{e}_2 = -B^1_{214}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{24}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{24}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{24}\vec{e}_4\right) =$$
$$= -B^1_{214}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{24}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{24}\vec{e}_3\right).$$

Из этих равенств получим:

$$\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11} = -B^1_{211}; \quad \vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11} = -B^1_{212}; \quad \vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11} = -B^1_{213}; \quad \vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11} = -B^1_{214}.$$

Найдем $\vec{k}_{11}^{\,2} = \left(-\Lambda^1_{21}\right)^2 = \left(\Lambda^1_{21}\right)^2$. Рассмотрим $\vec{k}_{12} = k^2_1\vec{e}_3 = \Lambda^3_{22}\vec{e}_3$ – вектор первой кривизны линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$, $k^1_2 = \Lambda^3_{21} = -\Lambda^2_{31}$ – вторая кривизна линии ω^1, $k^2_1 = \Lambda^3_{22} = -\Lambda^2_{32}$ – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Геометрический смысл равенств (2.3.3) – (2.3.8) заключается в следующем (соответственно)

$$\left(\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11}\right)\left[\vec{k}_{11}^{\,2} + \left(-\vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11}\right)\right] = \left(k^1_1\right)^2 k^1_2 k^2_1, \qquad (2.3.3)'$$

$$\left(\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11}\right)\left(\vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11}\right) = \left(k^1_1\right)^3\left(k^1_2 - k^3_3\right), \qquad (2.3.4)'$$

где $k^3_3 = \Lambda^2_{13} = -\Lambda^1_{23}$ – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

$$\left(\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11}\right)\left(\vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11}\right) = -\vec{k}_{11}^{\,2}\left(k^1_2 k^4_3 + k^1_1 k^4_2\right), \qquad (2.3.5)'$$

где $k^4_2 = \Lambda^2_{14} = -\Lambda^1_{24}$ – вторая кривизна, $k^4_3 = \Lambda^3_{24} = -\Lambda^2_{34}$ – третья кривизна линии ω^4 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе;

$$\left(\vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11}\right)\left[\vec{k}_{11}^{\,2} + \left(-\vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11}\right)\right] = -\left(k^1_1\right)^3 k^2_1, \qquad (2.3.6)'$$

$$\left(\vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11}\right)\left[\vec{k}_{11}^{\,2} + \left(-\vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11}\right)\right] = \vec{k}_{11}^{\,2} k^2_1 k^4_3, \qquad (2.3.7)'$$

$$\left(\vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11}\right)\left(\vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11}\right) = \left(k^1_1\right)^2\left(k^4_3 k^1_1 - k^3_3 k^4_2\right). \qquad (2.3.8)'$$

Таким образом справедлива

Теорема 2.3.2. Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $g: \Omega \to \Omega_2^1$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.3.3) – (2.3.8).

Найдем скалярные квадраты векторов $\vec{a}_i$:

$$\vec{a}_4^{\,2} = \frac{\left(\Lambda_{24}^1\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} + \frac{\left(B_{214}^1\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4} - \frac{\left(\Lambda_{24}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} + 1.$$

Найдем длину этих векторов

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4 + \left(B_{211}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{21}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4}};$$

$$|\vec{a}_2| = \sqrt{\frac{\left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{212}^1\right]^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{22}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4}};$$

$$|\vec{a}_3| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{23}^1\right)^2 + \left(B_{213}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^4}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4}};$$

$$|\vec{a}_4| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{24}^1\right)^2 + \left(B_{214}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{24}^3\right)^2\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^4}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4}}.$$

Потребуем, чтобы $|\vec{a}_1| = 1$. Тогда имеем:

$$\left(B_{211}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{21}^3\right)^2 = 0, \qquad (2.3.9)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(-\vec{e}_2 d_1 \vec{k}_{11}\right) + \left(k_1^1\right)^2\left(k_2^1\right)^2 = 0, \qquad (2.3.9)'$$

где $k_1^1 = \Lambda_{11}^2 = -\Lambda_{21}^1$ – первая кривизна, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – вторая кривизна линии ω^1 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$. Из условия $|\vec{a}_2| = 1$ имеем:

$$\left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{212}^1\right]^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{22}^3\right)^2 = \left(\Lambda_{21}^1\right)^4$$

или

$$\left(\Lambda^{3}_{22}\right)^{2}=\frac{\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{4}-\left[\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{2}+B^{1}_{212}\right]^{2}}{\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{2}}, \qquad (2.3.10)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(k^{2}_{1}\right)^{2}=\frac{\left(k^{1}_{1}\right)^{4}-\left[\left(k^{1}_{1}\right)^{2}+\left(-\vec{e}_{2}d_{2}\vec{k}_{11}\right)\right]^{2}}{\left(k^{1}_{1}\right)^{2}}. \qquad (2.3.10)'$$

Из условия $\left|\vec{a}_{3}\right|=1$ получим:

$$\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{2}\left(\Lambda^{1}_{23}\right)^{2}+\left(B^{1}_{213}\right)^{2}+\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{4}=\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{4}$$

или

$$\left(B^{1}_{213}\right)^{2}=-\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{2}\left(\Lambda^{1}_{23}\right)^{2}, \qquad (2.3.11)$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_{2}d_{3}\vec{k}_{11}\right)^{2}=-\left(k^{1}_{1}\right)^{2}\left(k^{3}_{3}\right)^{2}. \qquad (2.3.11)'$$

Из условия $\left|\vec{a}_{4}\right|=1$ имеем:

$$\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{2}\left(\Lambda^{1}_{24}\right)^{2}+\left(B^{1}_{214}\right)^{2}+\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{2}\left(\Lambda^{3}_{24}\right)^{2}+\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{4}=\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{4}$$

или

$$\left(B^{1}_{214}\right)^{2}=-\left(\Lambda^{1}_{21}\right)^{2}\left[\left(\Lambda^{3}_{24}\right)^{2}+\left(\Lambda^{1}_{24}\right)^{2}\right]. \qquad (2.3.12)$$

геометрический смысл, последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_{2}d_{4}\vec{k}_{11}\right)^{2}=-\left(k^{1}_{1}\right)^{2}\left[\left(k^{4}_{3}\right)^{2}+\left(k^{4}_{2}\right)^{2}\right]. \qquad (2.3.12)'$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.3.3. Отображение $g:\Omega\to\Omega^{1}_{2}$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.3.9) – (2.3.12).

§2.4. Свойства частичного отображения, порождаемого псевдофокусом F_1^4 на касательной к линии ω^1 заданной циклической сети Френе

Псевдофокус $F_1^4 \in (X,\vec{e}_1)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^1}\vec{e}_1, \qquad (2.4.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_1^4 описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Определяется частичное отображение $\varphi : \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $\varphi(X) = F_1^4$.

Продифференцируем обычным образом равенство (2.4.1) и учитываем деривационные формулы:

$$d\vec{F}_1^4 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1\right) = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{14}^4}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}d\vec{e}_1 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{14}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Учитывая равенство (2.1.4) отсюда имеем:

$$d\vec{F}_1^4 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{14m}^4 + \Lambda_{1\ell}^4\Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4\Lambda_{1m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Введем обозначение:

$$B_{14m}^4 = \Lambda_{14m}^4 + \Lambda_{1\ell}^4\Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4\Lambda_{1m}^\ell.$$

Тогда, в силу равенства (2.1.3), отсюда получим:

$$d\vec{F}_1^4 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{14m}^4\omega^m}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i$$

или

$$d\vec{F}_1^4=\left[\vec{e}_1+\frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i\right]\omega^1+\left[\vec{e}_2+\frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i\right]\omega^2+$$

$$+\left[\vec{e}_3+\frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i\right]\omega^3+\left[\vec{e}_4+\frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i\right]\omega^4.$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1=\left[1+\frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}_i\right]\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i; \qquad \vec{b}_2=\frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1+\vec{e}_2-\frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3=\frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i+\vec{e}_3; \qquad \vec{b}_4=\frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i+\vec{e}_4.$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}_1^4=\omega^1\vec{b}_1+\omega^2\vec{b}_2+\omega^3\vec{b}_3+\omega^4\vec{b}_4.$$

Так как заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\vec{b}_1=\left[1+\frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}_i\right]\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2;\\
&\vec{b}_2=\frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1+\vec{e}_2-\frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_4;\\
&\vec{b}_3=\frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2-\frac{\Lambda_{13}^4}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_4+\vec{e}_3;\\
&\vec{b}_4=\frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

В общем случае эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $\varphi:\Omega\to\Omega_1^4$ является невырожденным.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{b}_1$, $\overrightarrow{XF_1^4} = -\left(1 \big/ \Lambda_{14}^4 \right) \vec{e}_1$, где $\vec{b}_1 = \varphi(\vec{e}_1)$.

Найдем: $\left(\vec{e}_1, \vec{b}_1, \overrightarrow{XF_1^4} \right) = 0$, следовательно, линия ω^1 заданной циклической сети Френе всегда является двойной линией отображения $\varphi : \Omega \to \Omega_1^4$.

Теперь рассмотрим векторы $\vec{e}_2$, $\vec{b}_2$, $\overrightarrow{XF_1^4}$ и найдем

$$\left(\vec{e}_2, \vec{b}_2, \overrightarrow{XF_1^4} \right) = \frac{\Lambda_{12}^4}{\left(\Lambda_{14}^4 \right)^2}.$$

Пусть линия ω^2 является двойной линией отображения φ. Тогда имеем $\Lambda_{12}^4 = -\Lambda_{42}^1 = 0$, здесь $k_2^3 = \Lambda_{12}^4 = -\Lambda_{42}^1$ – третья кривизна линии ω^2.

Обратно, если $k_2^3 = 0$, то эта линия ω^2 является двойной линией отображения φ.

Из условия компланарности векторов $\vec{e}_3$, $\vec{b}_3$, $\overrightarrow{XF_1^4}$ получим: а) $\Lambda_{13}^2 = -\Lambda_{23}^1 = 0$ или б) $\Lambda_{13}^4 = -\Lambda_{43}^1 = 0$.

Геометрический смысл последних равенств заключается в следующем соответственно:

1) векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3 \vec{e}_1$ и $\vec{e}_4$ коллинеарны;

2) векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3 \vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ коллинеарны.

Если выполнены одно из условий 1) и 2), то линия ω^3 является двойной линией отображения φ. Обратно, если линия ω^3 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения φ, то выполняется одно из условий 1), 2).

Найдем:

$$\left(\vec{e}_4, \vec{b}_4, \overrightarrow{XF_1^4} \right) = -\Lambda_{14}^2 \Big/ \left(\Lambda_{14}^4 \right)^2 .$$

Пусть линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения φ, т.е. $\left(\vec{e}_4, \vec{b}_4, \overrightarrow{XF_1^4}\right) = 0$. Тогда имеем: $\Lambda_{14}^2 = -\Lambda_{24}^1 = 0$, здесь $k_2^4 = \Lambda_{14}^2 = -\Lambda_{24}^1$ – вторая кривизна линии ω^4. Обратно, если $k_2^4 = 0$, то линия ω^4 является двойной линией отображения φ.

Таким образом, доказана

Теорема 2.4.1. а) Линия ω^1 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения φ;

б) линия ω^2 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения φ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю;

в) линия ω^3 является двойной линией отображения φ тогда и только тогда, когда выполнены одно из условий: а) $\vec{\Lambda}_{13} = d_3 \vec{e}_1 \| \vec{e}_4$; б) $\vec{\Lambda}_{13} = d_3 \vec{e}_1 \| \vec{e}_2$;

г) линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения φ тогда и только тогда, когда ее вторая кривизна равна нулю.

Найдем: $$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right] - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4};$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right] + \frac{\Lambda_{11}^2 \Lambda_{13}^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_4 = \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right] + \frac{\Lambda_{11}^2 \Lambda_{14}^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \frac{B_{142}^4 B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} - \frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{14}^4} + \frac{\Lambda_{12}^4 \Lambda_{13}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_4 = \frac{B^4_{142} B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^4} - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}};$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_4 = \frac{B^4_{143} B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^4} - \frac{\Lambda^2_{13}\Lambda^2_{14}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}.$$

Потребуем ортогональность этих векторов. Тогда имеем:

$$B^4_{142}\left[\left(\Lambda^4_{14}\right)^2 + B^4_{141}\right] = \Lambda^2_{11}\left(\Lambda^4_{14}\right)^3; \tag{2.4.3}$$

$$B^4_{143}\left[\left(\Lambda^4_{14}\right)^2 + B^4_{141}\right] = \Lambda^2_{11}\Lambda^1_{23}\left(\Lambda^4_{14}\right)^2; \tag{2.4.4}$$

$$B^4_{144}\left[\left(\Lambda^4_{14}\right)^2 + B^4_{141}\right] = \Lambda^2_{11}\Lambda^1_{24}\left(\Lambda^4_{14}\right)^2; \tag{2.4.5}$$

$$B^4_{142} B^4_{143} = \Lambda^2_{13}\left(\Lambda^4_{14}\right)^3 - \Lambda^4_{12}\Lambda^4_{13}\left(\Lambda^4_{14}\right)^2; \tag{2.4.6}$$

$$B^4_{142} B^4_{144} = \Lambda^2_{14}\left(\Lambda^4_{14}\right)^3; \tag{2.4.7}$$

$$B^4_{143} B^4_{144} = \Lambda^1_{23}\Lambda^2_{14}\left(\Lambda^4_{14}\right)^2. \tag{2.4.8}$$

Выясним геометрический смысл этих равенств. Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{14} = \Lambda^1_{44}\vec{e}_1 = -\Lambda^4_{14}\vec{e}_1$ линии ω^4 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе вдоль направлениях $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$:

$$d_1\vec{k}_{14} = d_1\left(-\Lambda^4_{14}\vec{e}_1\right) = -\left(d_1\Lambda^4_{14}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14} d_1\vec{e}_1 = -B^4_{141}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{11}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{11}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{11}\vec{e}_4\right).$$

Учитывая (2.1.6) отсюда имеем:

$$d_1\vec{k}_{14} = -B^4_{141}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\Lambda^2_{11}\vec{e}_2. \tag{2.4.9}$$

$$d_2\vec{k}_{14} = d_2\left(-\Lambda^4_{14}\vec{e}_1\right) = -\left(d_2\Lambda^4_{14}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14} d_2\vec{e}_1 = -B^4_{142}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{12}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{12}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{12}\vec{e}_4\right).$$

В силу равенств (2.1.9), (2.1.10) отсюда получим:

$$d_2\vec{k}_{14} = -B^4_{142}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\Lambda^4_{12}\vec{e}_4. \tag{2.4.10}$$

$$d_3\vec{k}_{14} = d_3\left(-\Lambda^4_{14}\vec{e}_1\right) = -\left(d_3\Lambda^4_{14}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14} d_3\vec{e}_1 = -B^4_{143}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{13}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{13}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{13}\vec{e}_4\right).$$

Учитывая (2.1.11) отсюда имеем:

$$d_3\vec{k}_{14} = -B^4_{143}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{13}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{13}\vec{e}_4\right). \tag{2.4.11}$$

$$d_4\vec{k}_{14} = d_4\left(-\Lambda^4_{14}\vec{e}_1\right) = -\left(d_4\Lambda^4_{14}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}d_4\vec{e}_1 = -B^4_{144}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{14}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{14}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{14}\vec{e}_4\right).$$

В силу (2.1.14) отсюда получим:

$$d_4\vec{k}_{14} = -B^4_{144}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{14}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{14}\vec{e}_4\right). \tag{2.4.12}$$

Учитывая (2.4.9) – (2.4.12) выясним геометрический смысл равенств (2.4.3) – (2.4.8) в следующем соответственно:

$$\left(-\vec{e}_1 d_2\vec{k}_{14}\right)\left[\vec{k}_{14}{}^2 + \left(-\vec{e}_1 d_1\vec{k}_{14}\right)\right] = -k^1_1\left(k^4_1\right)^3, \tag{2.4.3$'$}$$

где $k^1_1 = \Lambda^2_{11}$ – первая кривизна линии ω^1, $k^4_1 = \Lambda^1_{44} = -\Lambda^4_{14}$ – первая кривизна линии ω^4 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(-\vec{e}_1 d_3\vec{k}_{14}\right)\left[\vec{k}_{14}{}^2 + \left(-\vec{e}_1 d_1\vec{k}_{14}\right)\right] = k^1_1\left(-k^3_3\right)\left(k^4_1\right)^2, \tag{2.4.4$'$}$$

где $k^3_3 = \Lambda^2_{13} = -\Lambda^1_{23}$ – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(-\vec{e}_1 d_4\vec{k}_{14}\right)\left[\vec{k}_{14}{}^2 + \left(-\vec{e}_1 d_1\vec{k}_{14}\right)\right] = k^1_1\left(k^4_1\right)^2\left(-k^4_2\right), \tag{2.4.5$'$}$$

где $k^4_2 = \Lambda^2_{14} = -\Lambda^1_{24}$ – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(\vec{e}_1 d_2\vec{k}_{14}\right)\left(\vec{e}_1 d_3\vec{k}_{14}\right) = \left(k^4_1\right)^2\left(-k^3_3 k^4_1 + k^2_3 k^3_2\right), \tag{2.4.6$'$}$$

где $k^2_3 = \Lambda^4_{12} = -\Lambda^1_{42}$ – третья кривизна линии ω^2, $k^3_2 = \Lambda^1_{43} = -\Lambda^4_{13}$ – вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(\vec{e}_1 d_2\vec{k}_{14}\right)\left(\vec{e}_1 d_4\vec{k}_{14}\right) = -k^4_2\left(k^4_1\right)^3, \tag{2.4.7$'$}$$

$$\left(\vec{e}_1 d_3\vec{k}_{14}\right)\left(\vec{e}_1 d_4\vec{k}_{14}\right) = -k^3_3\left(k^4_1\right)^2 k^4_2. \tag{2.4.8$'$}$$

где $k^4_2 = \Lambda^2_{14} = -\Lambda^1_{24}$ – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.4.2. Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $\varphi:\Omega\to\Omega_1^4$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.4.3) – (2.4.8).

Найдем скалярные квадраты векторов $\vec{b}_i$ $(i=1,2,3,4)$:

$$\vec{b}_1^{\,2}=\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1=\left[1+\frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]^2+\frac{\left(\Lambda_{11}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_2^{\,2}=\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2=\frac{\left(B_{142}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4}+1+\frac{\left(\Lambda_{12}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_3^{\,2}=\vec{b}_3\cdot\vec{b}_3=\frac{\left(B_{143}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4}+\frac{\left(\Lambda_{13}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}+\frac{\left(\Lambda_{13}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}+1;$$

$$\vec{b}_4^{\,2}=\vec{b}_4\cdot\vec{b}_4=\frac{\left(B_{144}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4}+\frac{\left(\Lambda_{14}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}.$$

Из условия $\left|\vec{b}_1\right|=1$ имеем:

$$\frac{\left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2+B_{141}^4\right]^2+\left(\Lambda_{11}^2\right)^2\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4}=1$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2+B_{141}^4\right]^2=\left(\Lambda_{14}^4\right)^2\left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2-\left(\Lambda_{11}^2\right)^2\right], \tag{2.4.13}$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left[\left(k_1^4\right)^2+\left(-\vec{e}_1 d_1\vec{k}_{14}\right)\right]^2=\left(k_1^4\right)^2\left[\left(k_1^4\right)^2-\left(k_1^1\right)^2\right], \qquad (2.4.13)'$$

где $k_1^4=\Lambda_{44}^1=-\Lambda_{14}^4$ – первая кривизна линии ω^4, $k_1^1=\Lambda_{11}^2=-\Lambda_{21}^1$ – первая кривизна, $k_2^1=\Lambda_{21}^3=-\Lambda_{31}^2$ – первая кривизна линии ω^1 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из условия $\left|\vec{b}_2\right| = 1$ получим:

$$\frac{\left(B^4_{142}\right)^2 + \left(\Lambda^4_{14}\right)^4 + \left(\Lambda^4_{12}\right)^2\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^4} = 1.$$

Отсюда получим:

$$\left(B^4_{142}\right)^2 = -\left(\Lambda^4_{12}\right)^2\left(\Lambda^4_{14}\right)^2. \tag{2.4.14}$$

Геометрический смысл равенства (2.4.14) заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_1 d_2 \vec{k}_{14}\right)^2 = -\left(k^2_3\right)^2\left(k^4_1\right)^2, \tag{2.4.14$'$}$$

где $k^2_3 = \Lambda^4_{12} = -\Lambda^1_{42}$ – третья кривизна линии ω^2, $k^4_1 = \Lambda^1_{44} = -\Lambda^4_{14}$ – первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из условия $\left|\vec{b}_3\right| = 1$ имеем:

$$\frac{\left(B^4_{143}\right)^2 + \left(\Lambda^4_{14}\right)^2\left(\Lambda^2_{13}\right)^2 + \left(\Lambda^4_{14}\right)^2\left(\Lambda^4_{13}\right)^2 + \left(\Lambda^4_{14}\right)^4}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^4} = 1$$

или

$$\left(B^4_{143}\right)^2 = -\left(\Lambda^4_{14}\right)^2\left[\left(\Lambda^2_{13}\right)^2 + \left(\Lambda^4_{13}\right)^2\right], \tag{2.4.15}$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_1 d_3 \vec{k}_{14}\right)^2 = -\left(k^4_1\right)^2\left[\left(k^3_3\right)^2 + \left(k^3_2\right)^2\right], \tag{2.4.15$'$}$$

где $k^3_3 = \Lambda^2_{13} = -\Lambda^1_{23}$ – третья кривизна, $k^3_2 = \Lambda^1_{43} = -\Lambda^4_{13}$ – вторая кривизна линии ω^3 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из условия $\left|\vec{b}_4\right| = 1$ имеем:

$$\frac{\left(B^4_{144}\right)^2 + \left(\Lambda^4_{14}\right)^2\left(\Lambda^2_{14}\right)^2}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^4} = 1$$

или

$$\left(B_{144}^{4}\right)^{2}=\left(\Lambda_{14}^{4}\right)^{2}\left[\left(\Lambda_{14}^{4}\right)^{2}-\left(\Lambda_{14}^{2}\right)^{2}\right]. \tag{2.4.16}$$

Геометрический смысл, последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_{1}d_{4}\vec{k}_{14}\right)^{2}=\left(k_{1}^{4}\right)^{2}\left[\left(k_{1}^{4}\right)^{2}-\left(k_{2}^{4}\right)^{2}\right]. \tag{2.4.16$'$}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.4.3. Для того, чтобы отображение $\varphi:\Omega\to\Omega_{1}^{4}$ было движением необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия (2.4.13) – (2.4.16).

§2.5. Свойства частичного отображения, порождаемого псевдофокусом F_3^2 на касательной к линии ω^3 заданной циклической сети Френе

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in (X,\vec{e}_3)$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3 . \qquad (2.5.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Получается частичное отображение $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $\psi(X) = F_3^2$. Присоединим к области Ω_3^2 подвижной репер $\Re' = (F_3^2, \vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4)$, где векторы $\vec{m}_i$ определяются следующим образом. Продифференцируя обычным образом равенство (2.5.1) и учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3\right) = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\right)\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}d\vec{e}_3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i .$$

В силу равенства (2.1.4) отсюда получим:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i .$$

Введем обозначение:

$$B_{32m}^2 = \Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell .$$

Тогда, в силу равенства (2.1.3), отсюда имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{32m}^2\omega^m}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i$$

или

$$d\vec{F}_3^2 = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^4.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1 &= \vec{e}_1 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;\\
\vec{m}_2 &= \vec{e}_2 + \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;\\
\vec{m}_3 &= \vec{e}_3 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;\\
\vec{m}_4 &= \vec{e}_4 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i.
\end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^1\vec{m}_1 + \omega^2\vec{m}_2 + \omega^3\vec{m}_3 + \omega^4\vec{m}_4.$$

Так как заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе (т.е. учитывая равенств (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14)) равенства (2.5.2) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;\\
\vec{m}_2 &= \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;\\
\vec{m}_3 &= \left[1 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;\\
\vec{m}_4 &= -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.
\end{aligned} \qquad (2.5.3)$$

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{m}_1$, $\overrightarrow{XF_3^2} = -\left(1 \big/ \Lambda_{32}^2 \right) \vec{e}_3$, где $\psi(\vec{e}_1) = \vec{m}_1$. Учитывая (2.5.3) найдем: $\left(\vec{e}_1, \vec{m}_1, \overrightarrow{XF_3^2} \right) = 0$ тогда и только тогда, когда имеет место одно из равенств:

а) $\Lambda_{31}^2 = -\Lambda_{21}^3 = 0$; б) $\Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3 = 0$,

где $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – вторая кривизна, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3$ – третья кривизна линии ω^1 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Следовательно, линия ω^1 является двойной линией отображения $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий а), б).

Рассмотрим векторы $\vec{e}_2$, $\vec{m}_2$, $\overrightarrow{XF_3^2}$ и найдем

$$\left(\vec{e}_2, \vec{m}_2, \overrightarrow{XF_3^2} \right) = \frac{\Lambda_{32}^4}{\left(\Lambda_{32}^2 \right)^2}.$$

Пусть линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения ψ, т.е. $\vec{e}_2$, $\vec{m}_2$, $\overrightarrow{XF_3^2}$ – компланарны. Тогда имеем $\Lambda_{32}^4 = -\Lambda_{42}^3 = 0$, здесь $\Lambda_{32}^4 = k_2^2$ – вторая кривизна линии ω^2. Обратно, если $k_2^2 = 0$, то эта линия ω^2 является двойной линией отображения ψ.

Теперь рассмотрим векторы $\vec{e}_3$, $\vec{m}_3$, $\overrightarrow{XF_3^2}$ и найдем, что $\left(\vec{e}_3, \vec{m}_3, \overrightarrow{XF_3^2} \right) = 0$, т.е. эти векторы компланарны. Следовательно, линия ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения ψ.

Из условия компланарности векторов $\vec{e}_4$, $\vec{m}_4$, $\overrightarrow{XF_3^2}$ имеем: $\left(\Lambda_{34}^2 \Big/ \left(\Lambda_{32}^2 \right)^2 \right) = 0$, т.е. $\Lambda_{34}^2 = -\Lambda_{24}^3 = 0$, здесь $k_3^4 = \Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2$ – третья кривизна линии ω^4 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$. Следовательно, если линия ω^4 является двойной линией отображения $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$, то третья кривизна этой линии равна нулю. Обратно, если третья кривизна линии ω^4 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ равна нулю, то эта линия является двойной линией отображения $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.5.1. а) Линия ω^1 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения ψ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: а) $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2 = 0$; б) $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3 = 0$;
б) линия ω^2 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения ψ тогда и только тогда, когда вторая кривизна этой линии равна нулю;
в) линия ω^3 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения ψ;
г) линия ω^4 заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения ψ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю.

Найдем скалярные произведения векторов
$\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j \ \left(i, j\right) = 1,2,3,4; \ i \neq j$

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = \frac{B_{321}^2 B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} + \frac{\Lambda_{31}^4 \Lambda_{32}^4}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}; \qquad (2.5.4)$$

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_3 = \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\left[1 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\right] + \frac{\Lambda_{31}^4 \Lambda_{33}^4}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}; \qquad (2.5.5)$$

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_4 = \frac{\Lambda^2_{31}\Lambda^2_{34}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2} + \frac{B^2_{321}B^2_{324}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^4} - \frac{\Lambda^4_{31}}{\Lambda^2_{32}}; \tag{2.5.6}$$

$$\vec{m}_2 \cdot \vec{m}_3 = \frac{B^2_{322}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\left[1 + \frac{B^2_{323}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\right] + \frac{\Lambda^4_{32}\Lambda^4_{33}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}; \tag{2.5.7}$$

$$\vec{m}_2 \cdot \vec{m}_4 = \frac{B^2_{322}B^2_{324}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^4} - \frac{\Lambda^4_{32}}{\Lambda^2_{32}}; \tag{2.5.8}$$

$$\vec{m}_3 \cdot \vec{m}_4 = \left[1 + \frac{B^2_{323}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\right]\frac{B^2_{324}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2} - \frac{\Lambda^4_{33}}{\Lambda^2_{32}}. \tag{2.5.9}$$

Потребуем ортогональность векторов $\vec{m}_i$. Тогда получим следующие равенства соответственно:

$$B^2_{321}B^2_{322} = \left(\Lambda^2_{32}\right)^2 \Lambda^4_{31}\Lambda^3_{42}; \tag{2.5.10}$$

$$B^2_{321}\left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + B^2_{323}\right] = \left(\Lambda^2_{32}\right)^2 \Lambda^4_{31}\Lambda^3_{43}; \tag{2.5.11}$$

$$B^2_{321}B^2_{324} = \Lambda^4_{31}\left(\Lambda^2_{32}\right)^3 - \Lambda^2_{31}\Lambda^2_{34}\left(\Lambda^2_{32}\right)^2; \tag{2.5.12}$$

$$B^2_{322}\left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + B^2_{323}\right] = -\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 \Lambda^4_{32}\Lambda^4_{33}; \tag{2.5.13}$$

$$B^2_{322}B^2_{324} = \Lambda^4_{32}\left(\Lambda^2_{32}\right)^3; \tag{2.5.14}$$

$$B^2_{324}\left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + B^2_{323}\right] = \Lambda^4_{33}\left(\Lambda^2_{32}\right)^3. \tag{2.5.15}$$

Выясним геометрический смысл этих равенств. Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{12} = \Lambda^3_{22}\vec{e}_3 = -\Lambda^2_{32}\vec{e}_3$ линии ω^2 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе вдоль направлениях $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$:

$$d_1\vec{k}_{12} = d_1\left(-\Lambda^2_{32}\vec{e}_3\right) = -\left(d_1\Lambda^2_{32}\right)\vec{e}_3 - \Lambda^2_{32}d_1\vec{e}_3 = -B^2_{321}\vec{e}_3 - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^1_{31}\vec{e}_1 + \Lambda^2_{31}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{31}\vec{e}_4\right).$$

Учитывая (2.1.6) отсюда имеем:

$$d_1\vec{k}_{12} = -B^2_{321}\vec{e}_3 - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^2_{31}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{31}\vec{e}_4\right). \tag{2.5.16}$$

$$d_2\vec{k}_{12} = d_2\left(-\Lambda_{32}^2\vec{e}_3\right) = -\left(d_2\Lambda_{32}^2\right)\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2 d_2\vec{e}_3 = -B_{322}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\left(\Lambda_{32}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{32}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4\right).$$

В силу равенства (2.1.10) из последнего получим:

$$d_2\vec{k}_{12} = -B_{322}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\left(\Lambda_{32}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4\right). \tag{2.5.17}$$

Найдем

$$d_3\vec{k}_{12} = d_3\left(-\Lambda_{32}^2\vec{e}_3\right) = -\left(d_3\Lambda_{32}^2\right)\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2 d_3\vec{e}_3 = -B_{323}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\left(\Lambda_{33}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{33}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{33}^4\vec{e}_4\right).$$

Учитывая (2.1.11) отсюда имеем:

$$d_3\vec{k}_{12} = -B_{323}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\Lambda_{33}^4\vec{e}_4\,. \tag{2.5.18}$$

Найдем

$$d_4\vec{k}_{12} = d_4\left(-\Lambda_{32}^2\vec{e}_3\right) = -\left(d_4\Lambda_{32}^2\right)\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2 d_4\vec{e}_3 = -B_{324}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\left(\Lambda_{34}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{34}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{34}^4\vec{e}_4\right).$$

В силу (2.1.14) отсюда получим:

$$d_4\vec{k}_{12} = -B_{324}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\Lambda_{34}^2\vec{e}_2\,. \tag{2.5.19}$$

Геометрический смысл равенств (2.5.10) – (2.5.15) заключается в следующем, соответственно:

$$\left(\vec{e}_3 d_1\vec{k}_{12}\right)\left(\vec{e}_3 d_2\vec{k}_{12}\right) = -\left(k_1^2\right)^2 k_3^1 k_2^2\,, \tag{2.5.10$'$}$$

где $k_1^2 = \Lambda_{22}^3 = -\Lambda_{32}^2$ – первая кривизна линии ω^2, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3$ – третья кривизна линии ω^1, $k_2^2 = \Lambda_{32}^4 = -\Lambda_{42}^3$ – вторая кривизна линии ω^2 заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(-\vec{e}_3 d_1\vec{k}_{12}\right)\left[\vec{k}_{12}{}^2 + \left(-\vec{e}_3 d_3\vec{k}_{12}\right)\right] = -\left(k_1^2\right)^2 k_3^1 k_1^3\,, \tag{2.5.11$'$}$$

где $k_1^3 = \Lambda_{33}^4 = -\Lambda_{43}^3$ – первая кривизна линии ω^3;

$$\left(\vec{e}_3 d_1\vec{k}_{12}\right)\left(\vec{e}_3 d_4\vec{k}_{12}\right) = \left(k_1^2\right)^2\left(k_3^1 - k_2^1 k_3^4\right), \tag{2.5.12$'$}$$

где $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – вторая кривизна линии ω^1, $k_3^4 = \Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2$ – третья кривизна линии ω^4;

$$\left(-\vec{e}_3 d_2\vec{k}_{12}\right)\left[\vec{k}_{12}{}^2 + \left(-\vec{e}_3 d_3\vec{k}_{12}\right)\right] = -\left(k_1^2\right)^2 k_2^2 k_1^3\,, \tag{2.5.13$'$}$$

$$\left(\vec{e}_3 d_2 \vec{k}_{12}\right)\left(\vec{e}_3 d_4 \vec{k}_{12}\right) = k_2^2 \left(k_1^2\right)^2, \qquad (2.5.14)'$$

$$\left(-\vec{e}_3 d_4 \vec{k}_{12}\right)\left[\vec{k}_{12}{}^2 + \left(-\vec{e}_3 d_3 \vec{k}_{12}\right)\right] = k_1^3 \left(-k_1^2\right)^3. \qquad (2.5.15)'$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.5.2. Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ является ортогональной сетью тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.5.10) – (2.5.15).

Пусть $\left|\vec{m}_i\right| = 1$, т.е. векторы $\vec{m}_i$ – единичные. Тогда из второго равенства формулы (2.5.3) найдем:

$$\vec{m}_2{}^2 = \frac{\left(B_{322}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} + \frac{\left(\Lambda_{32}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}.$$

Отсюда получим:

$$\left|\vec{m}_2\right| = \sqrt{\frac{\left(B_{322}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{32}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4}} = \frac{\sqrt{\left(B_{322}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{32}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^4\right)^2}}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}.$$

Следовательно

$$\left|\vec{m}_2\right| = 1 \Leftrightarrow \left(B_{322}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{32}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^4\right)^2 = \left(\Lambda_{32}^2\right)^4$$

или

$$\left(\Lambda_{32}^4\right)^2 = \frac{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4 - \left(B_{322}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}. \qquad (2.5.20)$$

Геометрический смысл последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(k_2^2\right)^2 = \frac{\left(k_1^2\right)^4 - \left(\vec{e}_3 d_2 \vec{k}_{12}\right)^2}{\left(k_1^2\right)^2}, \qquad (2.5.20)'$$

где $k_2^2 = \Lambda_{32}^4 = -\Lambda_{42}^3$ – вторая кривизна, $k_1^2 = \Lambda_{22}^3 = -\Lambda_{32}^2$ – первая кривизна, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из первого равенства формулы (2.5.3) найдем:

$$\vec{m}_1^{\,2} = 1 + \frac{\left(\Lambda_{31}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2} + \frac{\left(B_{321}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} + \frac{\left(\Lambda_{31}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}.$$

Тогда имеем:

$$\left|\vec{m}_1\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4 + \left(\Lambda_{31}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + \left(B_{321}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{31}^4\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} = 1$$

или

$$\left(\Lambda_{32}^2\right)^4 + \left(\Lambda_{31}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + \left(B_{321}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{31}^4\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 = \left(\Lambda_{32}^2\right)^4.$$

Отсюда получим:

$$\left(B_{321}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{31}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 = -\left(\Lambda_{31}^4\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2$$

или

$$\left(\Lambda_{31}^4\right)^2 = -\frac{\left(B_{321}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{31}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}. \qquad (2.5.21)$$

Геометрический смысл последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(k_3^1\right)^2 = -\frac{\left(-\vec{e}_3 d_1 \vec{k}_{12}\right)^2 + \left(k_2^1\right)^2\left(k_1^2\right)^2}{\left(k_1^2\right)^2}, \qquad (2.5.21)'$$

где $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3$ – третья кривизна, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Аналогично найдем:

$$\vec{m}_3^{\,2} = \left[1 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\right]^2 + \frac{\left(\Lambda_{33}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2},$$

$$|\vec{m}_3| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right]^2 + \left(\Lambda_{33}^4\right)^2 \left(\Lambda_{32}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} = 1$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right]^2 + \left(\Lambda_{33}^4\right)^2 \left(\Lambda_{32}^2\right)^2 = \left(\Lambda_{32}^2\right)^4.$$

Отсюда получим:

$$\left(\Lambda_{33}^4\right)^2 = \frac{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4 - \left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right]^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}. \tag{2.5.22}$$

Геометрический смысл последнего заключается в следующем:

$$\left(k_1^3\right)^2 = \frac{\left(k_1^2\right)^4 - \left[\left(k_1^2\right)^2 - \left(\vec{e}_3 d_3 \vec{k}_{12}\right)\right]^2}{\left(k_1^2\right)^2}, \tag{2.5.22$'$}$$

где $k_1^3 = \Lambda_{33}^4 = -\Lambda_{43}^3$ – первая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Найдем $\vec{m}_4^{\,2}$:

$$\vec{m}_4^{\,2} = \frac{\left(\Lambda_{34}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2} + \frac{\left(B_{324}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} + 1,$$

$$|\vec{m}_4| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 \left(\Lambda_{34}^2\right)^2 + \left(B_{324}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{32}^2\right)^4}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} = 1$$

или

$$\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 \left(\Lambda_{34}^2\right)^2 + \left(B_{324}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{32}^2\right)^4 = \left(\Lambda_{32}^2\right)^4.$$

Отсюда имеем:

$$\left(B_{324}^2\right)^2 = -\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 \left(\Lambda_{34}^2\right)^2. \tag{2.5.23}$$

Геометрический смысл, последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_3 d_4 \vec{k}_{12}\right)^2 = -\left(k_1^2\right)^2 \left(-k_3^4\right)^2$$

или

$$\left(k_3^4\right)^2 = -\frac{\left(\vec{e}_3 d_4 \vec{k}_{12}\right)^2}{\left(k_1^2\right)^2}, \qquad (2.5.23)'$$

где $k_3^4 = \Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2$ – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.5.3. Отображение $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия: (2.5.20) – (2.4.23).

Глава 3. Частичное отображение n- мерного евклидова пространства, порождаемое заданной циклической сетью Френе

§3.1. Циклическая сеть Френе в n – мерном евклидовом пространстве

В области Ω n-мерного евклидова пространства E_n задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1, 2, ..., n)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [60], [65] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \qquad (3.1.1)$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \qquad (3.1.2)$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_n для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_n Френе, формы ω_i^k становятся главными [11], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \qquad (3.1.3)$$

В силу последнего равенства формулы (3.1.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \qquad (3.1.4)$$

Формулы Френе для линии ω^1 примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2\vec{e}_2,\\
&d_1\vec{e}_2 = -\Lambda_{11}^2\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3\vec{e}_3,\\
&d_1\vec{e}_3 = -\Lambda_{21}^3\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4,\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&d_1\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,1}^{n-1}\vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,1}^{n}\vec{e}_n,\\
&d_1\vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,1}^{n}\vec{e}_{n-1},
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1, $k_i^{(1)} = \Lambda_{i1}^{i+1}$ – i-ая кривизна линии ω^1 заданного семейства,

$$\Lambda_{i1}^{j} = 0 \ \left(i < j, i = 1,2,...n-2;\ j = 3,4,...,\widehat{i+1},...,n\right), \tag{3.1.6}$$

$$\Lambda_{i1}^{i+1} \neq 0 \ \left(i = 1,2,...n-2\right), \tag{3.1.7}$$

(здесь знаком $\wedge$ сверху отмечен не принимаемые индексом j значения).

Псевдофокус [5] $F_i^j \ (i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_n Френе определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \left(1/\Lambda_{ij}^j\right)\vec{e}_i = \vec{X} + \left(1/\Lambda_{jj}^i\right)\vec{e}_i. \tag{3.1.8}$$

В общем случае на каждой касательной $\left(X,\vec{e}_i\right)$ существуют псевдофокусов в количестве $n-1$. Но в силу (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) на каждой из касательных $\left(X,\vec{e}_3\right)$, $\left(X,\vec{e}_4\right)$, $\dots$, $\left(X,\vec{e}_n\right)$ имеем псевдофокусов в количестве $n-2$, а точки $F_3^1 \in \left(X,\vec{e}_3\right)$, $F_4^1 \in \left(X,\vec{e}_4\right)$, $\dots$, $F_n^1 \in \left(X,\vec{e}_n\right)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_n$.

Пусть сеть Σ_n является циклической сетью Френе [48]. Тогда репер $\Re_2 = \left(X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,...,\vec{e}_n,\vec{e}_1\right)$ является репером Френе для линии ω^2 сети Σ_n, репер $\Re_3 = \left(X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,...,\vec{e}_n,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ является репером Френе для линии ω^3 сети Σ_n, и т.д., репер $\Re_n = \left(X,\vec{e}_n,\vec{e}_1,...,\vec{e}_{n-1}\right)$ является репером

Френе для линии ω^n сети Σ_n. Формулы Френе для линии ω^2 имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&d_2\vec{e}_2 = \Lambda_{22}^{3}\vec{e}_3,\\
&d_2\vec{e}_3 = -\Lambda_{22}^{3}\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^{4}\vec{e}_4,\\
&d_2\vec{e}_4 = -\Lambda_{32}^{4}\vec{e}_3 + \Lambda_{42}^{5}\vec{e}_5,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d_2\vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,2}^{n}\vec{e}_{n-1} + \Lambda_{n2}^{1}\vec{e}_1,\\
&d_2\vec{e}_1 = -\Lambda_{n2}^{1}\vec{e}_n,
\end{aligned}
$$

где d_2 – символ дифференцирования вдоль линии ω^2, $K_{\bar{i}}^{(2)} = \Lambda_{\bar{i}\,2}^{\bar{i}+1}$ – $\bar{i}$ - тая кривизна этой линии ($\bar{i} = 2,3,\dots,n-1,n$; когда $\bar{i} = n$, индекс $\bar{i}+1$ условно обозначим через 1),

$$\Lambda_{\bar{i}\,2}^{\bar{i}+1} \neq 0, \tag{3.1.9}$$

$$\Lambda_{\bar{i}\,2}^{j} = 0 \ \left(\bar{i} < j,\, \bar{i} = 2,3,\dots,n-1,n;\ \ j = 4,\dots,\bar{i}+1,\dots,n\right). \tag{3.1.10}$$

Из (3.1.9), (3.1.10), (3.1.8) следует, что псевдофокусы $F_1^2 \in \left(X,\vec{e}_1\right)$, $F_4^2 \in \left(X,\vec{a}_4\right),\dots,F_n^2 \in \left(X,\vec{a}_n\right)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\bar{E}_n$.

Напишем формулы Френе для линии ω^3 сети Σ_n:

$$
\begin{aligned}
&d_3\vec{e}_3 = \Lambda_{33}^{4}\vec{e}_4,\\
&d_3\vec{e}_4 = -\Lambda_{33}^{4}\vec{e}_3 + \Lambda_{43}^{5}\vec{e}_5,\\
&d_3\vec{e}_5 = -\Lambda_{43}^{5}\vec{e}_4 + \Lambda_{53}^{6}\vec{e}_6,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d_3\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,3}^{n-1}\vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,3}^{n}\vec{e}_n,\\
&d_3\vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,3}^{n}\vec{e}_{n-1} + \Lambda_{n3}^{1}\vec{e}_1,\\
&d_3\vec{e}_1 = -\Lambda_{n3}^{1}\vec{e}_n + \Lambda_{13}^{2}\vec{e}_2,\\
&d_3\vec{e}_2 = -\Lambda_{13}^{2}\vec{e}_1,
\end{aligned}
$$

где d_3 – символ дифференцирования вдоль линии ω^3, $K_{\tilde{i}}^{(3)} = \Lambda_{\tilde{i}3}^{\tilde{i}+1}$ – $\tilde{i}$-тая кривизна этой линии ($\tilde{i} = 3,4,..., n, n+1$; когда $\tilde{i} = n$, индекс $\tilde{i}+1$ условно обозначим через 1, когда $\tilde{i} = n+1$, индекс $\tilde{i} = n+2$ условно обозначим через 2,

$$\Lambda_{\tilde{i}3}^{\tilde{i}+1} \neq 0, \qquad (3.1.11)$$

$$\Lambda_{\tilde{i}2}^{j} = 0 \ (j = 1,2,3,...,n). \qquad (3.1.12)$$

Из (3.1.8), (3.1.11), (3.1.12) следует, что псевдофокусы $F_1^3 \in (X,\vec{a}_1), F_2^3 \in (X,\vec{a}_2), F_5^3 \in (X,\vec{a}_n)..., F_n^3 \in (X,\vec{a}_n)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_n$.

Формулы Френе для линии ω^n сети Σ_n имеют вид:

$$d_n\vec{e}_n = \Lambda_{nn}^1\vec{e}_1,$$
$$d_n\vec{e}_1 = -\Lambda_{nn}^1\vec{e}_n + \Lambda_{1n}^2\vec{e}_2,$$
$$d_n\vec{e}_2 = -\Lambda_{1n}^2\vec{e}_1 + \Lambda_{2n}^3\vec{e}_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d_n\vec{e}_{n-2} = -\Lambda_{n-3,n}^{n-2}\vec{e}_{n-3} + \Lambda_{n-2,n}^{n-1}\vec{e}_{n-1},$$
$$d_n\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,n}^{n-1}\vec{e}_{n-2},$$

где $\Lambda_{nn}^1 = -\Lambda_{1n}^n$ – первая кривизна линии ω^n сети Σ_n, $K_p^{(n)} = \Lambda_{p-1,n}^p$ – p-тая кривизна этой линии $(p = 2,3,...,n-2)$,

$$\Lambda_{p-1,n}^p \neq 0, \qquad (3.1.13)$$

$$\Lambda_{p-1,n}^j = 0 \ (p < j;\ p = 2,..., n-2;\ \ j = 3,..., n). \qquad (3.1.14)$$

Из (3.1.8), (3.1.13), (3.1.14) следует, что псевдофокусы $F_2^n \in (X,\vec{a}_2)$, $F_3^n \in (X,\vec{a}_3)$, $F_4^n \in (X,\vec{a}_4),\dots,$ $F_{n-1}^n \in (X,\vec{a}_{n-1})$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_n$.

Из выше изложенного следует следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Сеть Σ_n Френе для линии ω^1 заданного семейства является циклической сетью Френе тогда и только тогда, когда выполнены условия: (3.1.6), (3.1.7), (3.1.9), (3.1.10), …, (3.1.13), (3.1.14).

Рассмотрим p-мерные распределения Δ_p, определяемые заданной циклической сетью $\tilde{\Sigma}_n$ Френе $\left(p=2,3,...,n-1\right)$. Найдем векторы средних кривизн нескольких двумерных распределений:

$$\Delta_2^{(1,2)}=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right),\ \Delta_2^{(1,3)}=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_3\right),\ \Delta_2^{(1,4)}=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_4\right).$$

Вектор $\vec{M}_2^{(1,2)}$ средней кривизны распределения $\Delta_2^{(1,2)}$ имеет следующий вид:

$$\vec{M}_2^{(1,2)}=\frac{1}{2}\left[\left(\Lambda_{11}^3+\Lambda_{22}^3\right)\vec{e}_3+\left(\Lambda_{11}^4+\Lambda_{22}^4\right)\vec{e}_4+...+\left(\Lambda_{11}^n+\Lambda_{22}^n\right)\vec{e}_n\right].$$

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_n$ – циклическая сеть Френе, отсюда имеем:

$$\vec{M}_2^{(1,2)}=\frac{1}{2}\Lambda_{22}^3\vec{e}_3=\frac{1}{2}k_1^2\vec{e}_3=\frac{1}{2}\vec{k}_{12}. \tag{3.1.15}$$

Аналогичным образом найдем:

$$\vec{M}_2^{(1,3)}=\frac{1}{2}\left(\Lambda_{11}^2\vec{e}_2+\Lambda_{33}^4\vec{e}_4\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{k}_{11}+\vec{k}_{13}\right), \tag{3.1.16}$$

$$\vec{M}_2^{(1,4)}=\frac{1}{2}\left(\Lambda_{11}^2\vec{e}_2+\Lambda_{44}^5\vec{e}_5\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{k}_{11}+\vec{k}_{14}\right). \tag{3.1.17}$$

Для распределения $\Delta_2^{(3,4)}=\left(X,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right)$ найдем:

$$\vec{M}_2^{(3,4)}=\frac{1}{2}\vec{k}_{14}. \tag{3.1.18}$$

Распределение $\Delta_2^{(3,5)}=\left(X,\vec{e}_3,\vec{e}_5\right)$ имеет следующий вектор средней кривизны:

$$\vec{M}_2^{(3,5)} = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{13} + \vec{k}_{15}\right), \tag{3.1.19}$$

- - - - - - - - -

$$\vec{M}_2^{(3,n)} = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{13} + \vec{k}_{1n}\right). \tag{3.1.20}$$

Рассмотрим некоторые трехмерные распределения Δ_3, определяемые данной циклической сетью Френе:

$$\Delta_3^{(1,2,3)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right),\ \Delta_3^{(1,2,4)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4\right),\ \Delta_3^{(1,2,5)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_5\right),$$

$$\Delta_3^{(2,3,4)} = \left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right),\ \Delta_3^{(2,3,5)} = \left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5\right)$$

и найдем их векторы средних кривизн соответственно:

$$\vec{M}_3^{(1,2,3)} = \frac{1}{3}\vec{k}_{13}, \qquad \vec{M}_3^{(1,2,4)} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{12} + \vec{k}_{14}\right), \qquad \vec{M}_3^{(1,2,5)} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{12} + \vec{k}_{15}\right).$$

Следовательно, распределение $\Delta_3^{(1,2,2+\hat{m})} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_{2+\hat{m}}\right)$, где $\left(\hat{m} = 1,2,...,n-2\right)$ имеет вектор средней кривизны следующего вида:

$$\vec{M}_3^{(1,2,2+\hat{m})} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{12} + \vec{k}_{1,2+\hat{m}}\right). \tag{3.1.21}$$

Далее для распределений $\Delta_3^{(2,3,4)}$, $\Delta_3^{(2,3,5)}$ имеем:

$$\vec{M}_3^{(2,3,4)} = \frac{1}{3}\vec{k}_{14}, \tag{3.1.22}$$

$$\vec{M}_3^{(2,3,5)} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{13} + \vec{k}_{15}\right).$$

Следовательно, вектор средней кривизны распределения $\Delta_3^{2,3,3+\tilde{m}}$ $\left(\tilde{m} = 2,3,...,n-3\right)$ имеет вид:

$$\vec{M}_3^{(2,3,3+\tilde{m})} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{13} + \vec{k}_{1,3+\tilde{m}}\right). \tag{3.1.23}$$

Выявленную закономерность можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 3.1.2. Если данная сеть $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в области $\Omega \subset E_n$ является циклической сетью Френе, то а) векторы средних кривизн двумерных распределений $\Delta_2^{(\alpha_1,\alpha_1+1)} = \left(X, \vec{e}_{\alpha_1}, \vec{e}_{\alpha_1+1}\right)$ имеют вид:

$$\vec{M}_2^{(\alpha_1,\alpha_1+1)} = \frac{1}{2}\vec{k}_{1,\alpha_1+1}, \tag{3.1.24}$$

где $\vec{k}_{1,\alpha_1+1}$ – первая кривизна линии ω^{α_1+1} сети $\tilde{\Sigma}_n$, $\alpha_1 = 1,2,...,n-1$;

б) векторы средних кривизн двумерных распределений

$\Delta_2^{(\alpha_1,\alpha_1+\tilde{i})} = \left(X, \vec{e}_{\alpha_1}, \vec{e}_{\alpha_1+\tilde{i}}\right)$ $\left(\tilde{i} = 2,3,...,n-\alpha_1\right)$имеют вид:

$$\vec{M}_2^{(\alpha_1,\alpha_1+\tilde{i})} = \frac{1}{2}\vec{k}_{1,\alpha_1+\tilde{i}}; \tag{3.1.25}$$

б) векторы средних кривизн трехмерных распределений $\Delta_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+2)}$, $\Delta_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+\hat{i})}$ (где $\hat{i} = 3,4,...,n-\alpha_1$) имеют вид:

$$\vec{M}_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+2)} = \frac{1}{3}\vec{k}_{1,\alpha_1+2},$$

$$\vec{M}_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+\hat{i})} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{1,\alpha_1+1} + \vec{k}_{1,\alpha_1+\hat{i}}\right).$$

§3.2. Частичное отображение пространства E_n, порождаемое псевдофокусом F_1^n на касательной к линии ω^1 заданной циклической сети Френе

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (3.1.3) и применяя лемму Картана [67], получим:

$$d\Lambda_{ik}^j = \left(\Lambda_{ikm}^j + \Lambda_{i\ell}^j\Lambda_{km}^\ell + \Lambda_{\ell k}^j\Lambda_{im}^\ell\right)\omega^m. \tag{3.2.1}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ik}^j, \Lambda_{ikm}^j\right\}$ определяет геометрический объект второго порядка.

Введем обозначение:

$$B^j_{ikm} = \Lambda^j_{ikm} + \Lambda^j_{i\ell}\Lambda^\ell_{km} + \Lambda^j_{\ell k}\Lambda^\ell_{im}. \tag{3.2.2}$$

Тогда имеем:

$$d\Lambda^j_{ik} = B^j_{ikm}\omega^m. \tag{3.2.3}$$

Псевдофокус F^n_1 касательной к линии ω^1 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}^n_1 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda^n_{1n}}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda^1_{nn}}\vec{e}_1. \tag{3.2.4}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$, псевдофокус F^n_1 описывает свою область $\Omega^n_1 \subset E_n$. Определяется отображение $h: \Omega \to \Omega^n_1$ такое, что $h(X) = F^n_1$.

Дифференцируем обычным образом равенство (3.2.4):

$$d\vec{F}^n_1 = d\vec{X} + \frac{d\Lambda^n_{1n}}{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda^n_{1n}}d\vec{e}_1.$$

В силу деривационных формул и (3.2.3) последнее равенство имеет вид:

$$d\vec{F}^n_1 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B^n_{1ni}\omega^i}{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda^n_{1n}}\Lambda^k_{1i}\omega^i\vec{e}_k$$

или

$$d\vec{F}^n_1 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B^n_{1ni}\omega^i}{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2}\delta^i_1\vec{e}_i - \frac{\Lambda^k_{1i}\omega^i}{\Lambda^n_{1n}}\vec{e}_k = \left[\vec{e}_i + \frac{B^n_{1ni}\delta^i_1}{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda^k_{1i}}{\Lambda^n_{1n}}\vec{e}_k\right]\omega^i.$$

Введем обозначение:

$$\vec{c}_i = \vec{e}_i + \frac{B^n_{1ni}\delta^i_1}{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda^k_{1i}}{\Lambda^n_{1n}}\vec{e}_k$$

или

$$\vec{c}_i = \left[\frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\right]\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{1i}^k}{\Lambda_{1n}^n}\vec{e}_k. \qquad (3.2.5)$$

(по i нет суммирования).

Найдем $\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j \ (i \neq j)$, где

$$\vec{c}_j = \left[\frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1nj}^n \delta_1^j}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\right]\vec{e}_j - \frac{\Lambda_{1j}^\ell}{\Lambda_{1n}^n}\vec{e}_\ell,$$

$$\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = \left[\frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\right] \cdot \left[\frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1nj}^n \delta_1^j}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\right]\delta_{ij} + \frac{\Lambda_{1i}^k \Lambda_{1j}^\ell}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\delta_{k\ell}.$$

Пусть $\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = 0$, т.е. $\vec{c}_i \perp \vec{c}_j$. Тогда из последнего равенства имеем:

$$\left[\frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\right] \cdot \left[\frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1nj}^n \delta_1^j}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\right]\delta_{ij} = -\frac{\Lambda_{1i}^k \Lambda_{1j}^\ell}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\delta_{k\ell}$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i\right] \cdot \left[\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1nj}^n \delta_1^j\right]\delta_{ij} + \left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 \Lambda_{1i}^k \Lambda_{1j}^\ell \delta_{k\ell} = 0. \qquad (3.2.6)$$

Обратно, если имеет место равенство (3.2.6), то $\vec{c}_i \perp \vec{c}_j$, т.е. образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении h является ортогональной. Таким образом, доказана

Теорема 3.2.1. Для того, чтобы образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в отображении $h: \Omega \to \Omega_1^n$ являлась ортогональной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.2.6) для всех значений индексов $i, j \ (i \neq j)$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.2.6). Найдем производную вектора первой кривизны линии ω^n: $\vec{k}_{1n} = \Lambda^1_{nn}\vec{e}_1 = -\Lambda^n_{1n}\vec{e}_1$ вдоль направлению $\vec{e}_i$:

$$d_i\vec{k}_{1n} = d_i\left(-\Lambda^n_{1n}\vec{e}_1\right) = -\left(d_i\Lambda^n_{1n}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^n_{1n}d_i\vec{e}_1.$$

В силу (3.2.3) отсюда имеем:

$$d_i\vec{k}_{1n} = -B^n_{1ni}\vec{e}_1 - \Lambda^n_{1n}\Lambda^k_{1i}\vec{e}_k. \qquad (3.2.7)$$

Найдем:

$$\vec{\Lambda}_{1i} = d_i\vec{e}_1 = \Lambda^k_{1i}\vec{e}_k, \quad \vec{\Lambda}_{1j} = d_j\vec{e}_1 = \Lambda^\ell_{1j}\vec{e}_\ell. \qquad (3.2.8)$$

Учитывая (3.2.7), (3.2.8) равенство (3.2.6) перепишем в виде:

$$\left[\vec{k}_{1n}{}^2 + \left(-\vec{e}_1 d_i\vec{k}_{1n}\right)\right]\left[\vec{k}_{1n}{}^2 + \left(-\vec{e}_1 d_j\vec{k}_{1n}\right)\right] + \vec{k}_{1n}{}^2\vec{\Lambda}_{1i}\vec{\Lambda}_{1j} = 0. \qquad (3.2.9)$$

В этом заключается геометрический смысл равенства (3.2.6).

Теперь найдем $\vec{c}_i{}^2 = \vec{c}_i\vec{c}_i$:

$$\vec{c}_i{}^2 = \left[\frac{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2 + B^n_{1ni}\delta^i_1}{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2}\right]^2 + \frac{\left(\Lambda^k_{1i}\right)^2}{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2}.$$

Из условия $\left|\vec{c}_i\right| = 1$ найдем:

$$\frac{\left[\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2 + B^n_{1ni}\delta^i_1\right]^2 + \left(\Lambda^n_{1n}\right)^2\left(\Lambda^k_{1i}\right)^2}{\left(\Lambda^n_{1n}\right)^4} = 1$$

или

$$\left[\left(\Lambda^n_{1n}\right)^2 + B^n_{1ni}\delta^i_1\right]^2 + \left(\Lambda^n_{1n}\right)^2\left(\Lambda^k_{1i}\right)^2 = \left(\Lambda^n_{1n}\right)^4. \qquad (3.2.10)$$

Обратно, если имеет место равенство (3.2.10) (для всех значений индекса i), то $\left|\vec{c}_i\right| = 1$. Следовательно, справедлива теорема

Теорема 3.2.2. Для того, чтобы отображение $h:\Omega\to\Omega_1^n$ являлось движением необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие (3.2.10) (для всех значений индекса i).

Геометрический смысл равенства (3.2.10) заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{1n}{}^2+\left(-\vec{e}_1 d_i \vec{k}_{1n}\right)\right]^2+\vec{k}_{1n}{}^2\vec{\Lambda}_{1i}{}^2=\left(k_1^n\right)^4,$$

где $k_1^n=\Lambda_{nn}^1=-\Lambda_{1n}^n$ – первая кривизна линии ω^n заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе.

§3.3. Свойства частичного отображения n - мерного евклидова пространства, порождаемого псевдофокусом F_2^1

Рассмотрим равенство

$$\vec{F}_2^1=\vec{X}-\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2=\vec{X}+\frac{1}{\Lambda_{11}^2}\vec{e}_2, \tag{3.3.1}$$

которое определяет псевдофокус $F_2^1\in\left(X,\vec{e}_2\right)$ на касательной к линии ω^2 заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$.

Когда точка X смещается в области $\Omega\subset E_4$, псевдофокус $F_2^1\in\left(X,\vec{e}_2\right)$ описывает свою область $\Omega_2^1\subset E_4$. Получается частичное отображение $\mu:\ \Omega\to\Omega_2^1$ такое, что $\mu\left(X\right)=F_2^1$.

Продифференцируем обычным образом равенство (3.3.1) и учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_2^1=\omega^i\vec{e}_i+\frac{d\Lambda_{21}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2-\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\omega_2^i\vec{e}_i.$$

Учитывая (3.1.3), (3.2.1), (3.2.2) отсюда получаем:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{21m}^1 \omega^m}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{2m}^i \omega^m}{\Lambda_{21}^1} \vec{e}_i .$$

Последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{21i}^1 \omega^i}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} \delta_2^i \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{2i}^k \omega^i}{\Lambda_{21}^1} \vec{e}_k = \left[\vec{e}_i + \frac{B_{21i}^1 \delta_2^i}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{2i}^k}{\Lambda_{21}^1} \vec{e}_k \right] \omega^i$$

(по i нет суммирования).

Введем обозначение:

$$\vec{a}_i = \vec{e}_i + \frac{B_{21i}^1 \delta_2^i}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{2i}^k}{\Lambda_{21}^1} \vec{e}_k$$

или

$$\vec{a}_i = \left[1 + \frac{B_{21i}^1 \delta_2^i}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} \right] \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{2i}^k}{\Lambda_{21}^1} \vec{e}_k . \tag{3.3.2}$$

Напишем вектор $\vec{a}_j \ (i \neq j)$:

$$\vec{a}_j = \left[1 + \frac{B_{21j}^1 \delta_2^j}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} \right] \vec{e}_j - \frac{\Lambda_{2j}^k}{\Lambda_{21}^1} \vec{e}_k .$$

Найдем $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \left[\frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{21i}^1 \delta_2^i}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} \right] \cdot \left[\frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{21j}^1 \delta_2^j}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} \right] + \frac{\Lambda_{2i}^k \Lambda_{2j}^k \delta_{k\ell}}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} .$$

Пусть $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0$, т.е. $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j$. Тогда из последнего равенства получим:

$$\frac{\left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{21i}^1 \delta_2^i\right] \cdot \left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{21j}^1 \delta_2^j\right] + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2 \Lambda_{2i}^k \Lambda_{2j}^k \delta_{k\ell}}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4} = 0 .$$

Отсюда имеем:

$$\left[\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}+B_{21i}^{1}\delta_{2}^{i}\right]\cdot\left[\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}+B_{21j}^{1}\delta_{2}^{j}\right]+\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}\Lambda_{2i}^{k}\Lambda_{2j}^{k}\delta_{k\ell}=0. \qquad (3.3.3)$$

Обратно, если имеет место равенство (3.3.3), то $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j$ $(i \neq j)$, т.е. образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении $\mu: \Omega \to \Omega_2^1$ является ортогональной. Таким образом доказана

Теорема 3.3.1. Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении μ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.3.3) для всех i, j $(i \neq j)$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.3.3). Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{11}=\Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2=\left(-\Lambda_{21}^{1}\right)\vec{e}_2$ линии ω^1 заданной циклической сети вдоль направлении $\vec{e}_i$ $(i=1,2,...,n)$:

$$d_i\vec{k}_{11}=d_i\left(-\Lambda_{21}^{1}\vec{e}_2\right)=-\left(d_i\Lambda_{21}^{1}\right)\vec{e}_2-\Lambda_{21}^{1}d_i\vec{e}_2=-B_{21i}^{1}\vec{e}_2-\Lambda_{21}^{1}\Lambda_{2i}^{k}\vec{e}_k,$$

где $B_{21i}^{1}=\Lambda_{21i}^{1}+\Lambda_{2\ell}^{1}\Lambda_{1i}^{\ell}+\Lambda_{\ell 1}^{1}\Lambda_{2i}^{\ell}$, $\quad d\Lambda_{21}^{1}=B_{21i}^{1}\omega^i$.

Найдем:

$$\vec{e}_2 d_i\vec{k}_{11}=-B_{21i}^{1}, \qquad (3.3.4)$$

$$\vec{\Lambda}_{2i}=d_i\vec{e}_2=\Lambda_{2i}^{k}\vec{e}_k; \qquad \vec{\Lambda}_{2j}=d_j\vec{e}_2=\Lambda_{2j}^{\ell}\vec{e}_\ell \ \ (i\neq j) \qquad (3.3.5)$$

Учитывая (3.3.4), (3.3.5) равенство (3.3.3) напишем в виде:

$$\left[\vec{k}_{11}^{\,2}+\left(-\vec{e}_2 d_i\vec{k}_{11}\right)\delta_2^i\right]\cdot\left[\vec{k}_{11}^{\,2}+\left(-\vec{e}_2 d_j\vec{k}_{11}\right)\delta_2^j\right]+\vec{k}_{11}^{\,2}\vec{\Lambda}_{2i}\vec{\Lambda}_{2j}=0. \qquad (3.3.6)$$

Это и есть геометрический смысл равенства (3.3.3).

Найдем $\vec{a}_i^{\,2}=\vec{a}_i\cdot\vec{a}_i$:

$$\vec{a}_i^{\,2}=\frac{\left[\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}+B_{21i}^{1}\delta_2^i\right]^{2}}{\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{4}}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\Lambda_{2i}^{k}\right)^{2}}{\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}}. \qquad (3.3.7)$$

Потребуем, чтобы $|\vec{a}_i|=1$. Тогда из (3.3.7) получим:

$$\frac{\left[\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}+B_{21i}^{1}\delta_{2}^{i}\right]^{2}+\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\Lambda_{2i}^{k}\right)^{2}}{\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{4}}=1$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}+B_{21i}^{1}\delta_{2}^{i}\right]^{2}+\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\Lambda_{2i}^{k}\right)^{2}=\left(\Lambda_{21}^{1}\right)^{4}. \qquad (3.3.8)$$

Геометрический смысл последнего заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{11}{}^{2}+\left(-\vec{e}_{2}d_{i}\vec{k}_{11}\right)\right]^{2}+\vec{\Lambda}_{2i}{}^{2}=\left(k_{1}^{1}\right)^{4}. \qquad (3.3.9)$$

Если имеет место равенство (3.3.7), то вектор $\vec{a}_i$ – единичный. Таким образом, справедлива

Теорема 3.3.2. Отображение $\mu:\Omega\to\Omega_2^1$ (где $\Omega\subset E_4$, $\Omega_2^1\subset E_4$) является движением тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.3.8) (для всех значений i).

§3.4. Свойства частичного отображения n- мерного евклидова пространства, порождаемое псевдофокусом F_i^j

Псевдофокус [5] F_i^j $(i\neq j)$ касательной к линии ω^i сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j=\vec{X}-\left(1/\Lambda_{ij}^j\right)\vec{e}_i. \qquad (3.4.1)$$

Когда точка X смещается в области Ω псевдофокус F_i^j $(i\neq j)$ описывает свою область Ω_i^j в E_n. Получим отображение $h:\Omega\to\Omega_i^j$ такое, что $h(X)=F_i^j$.

Дифференцируя обычным образом равенство (3.4.1) получим

$$d\vec{F}_i^j = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\right)\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}d\vec{e}_i = \omega^k\vec{e}_k + \frac{d\Lambda_{ij}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\omega_i^k\vec{e}_k =$$

$$= \omega^k\vec{e}_k + \frac{B_{ijm}^j\omega^m}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\Lambda_{im}^k\omega^m\vec{e}_k$$

или

$$d\vec{F}_i^j = \omega^k\vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j\omega^k}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^m\omega^k}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_m = \left(\vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^m}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_m\right)\omega^k,$$

где

$$d\Lambda_{ij}^j = B_{ijk}^j\omega^m.$$

Введем обозначения:

$$\vec{a}_k = \vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^m}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_m. \qquad (3.4.2)$$

В общем случае векторы $\vec{a}_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ линейно независимы.

Область Ω_i^j отнесем к подвижному реперу $\Re' = \left(F_i^j, \vec{a}_k\right)$. Тогда $f(\vec{e}_k) = \vec{a}_k$. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\vec{F}_i^j = \omega^k\vec{a}_k;\ d\vec{a}_k = \varpi_k^t\vec{a}_t \qquad (t = 1,2,\ldots,n). \qquad (3.4.3)$$

Рассмотрим векторы $\vec{e}_k, \vec{a}_k, \overrightarrow{XF_i^j} = -\frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i$ $(i \neq j)$. Из условия принадлежности этих векторов плоскости $(X, \vec{e}_k, \vec{e}_i)$ получим $\Lambda_{ik}^m = 0$.

Таким образом доказана

Теорема 3.4.1. Линия ω^k заданной сети Френе является двойной линией [15] отображения h тогда и только тогда, когда имеет равенство $\Lambda_{ik}^m = 0$.

Геометрический смысл последнего равенства заключается в том, что вектор $\vec{e}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ переносится параллельно вдоль направлении $\vec{e}_k$ (k-фиксировано).

Равенство (3.4.2) напишем в виде:

$$\vec{a}_k = \vec{e}_k + \frac{B^j_{ijk}\delta^k_i}{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2}\vec{e}_k - \frac{\Lambda^m_{ik}}{\Lambda^j_{ij}}\vec{e}_m$$

или

$$\vec{a}_k = \left[\frac{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2 + B^j_{ijk}\delta^k_i}{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2}\right]\vec{e}_k - \frac{\Lambda^m_{ik}}{\Lambda^j_{ij}}\vec{e}_m .$$

Напишем вектор $\vec{a}_\ell$ в виде $(k \neq 1)$:

$$\vec{a}_\ell = \left[\frac{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2 + B^j_{ij\ell}\delta^\ell_i}{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2}\right]\vec{e}_\ell - \frac{\Lambda^t_{i\ell}}{\Lambda^j_{ij}}\vec{e}_t .$$

Найдем $\vec{a}_k\vec{a}_\ell$ $(k \neq \ell)$:

$$\vec{a}_k\vec{a}_\ell = \left[\frac{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2 + B^j_{ijk}\delta^k_i}{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2}\right]\left[\frac{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2 + B^j_{ij\ell}\delta^\ell_i}{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2}\right]\delta_{k\ell} + \frac{\Lambda^m_{ik}\Lambda^t_{i\ell}}{\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2}\delta_{mt} .$$

Из условия $\vec{a}_k\vec{a}_\ell = 0$ получим:

$$\left[\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2 + B^j_{ijk}\delta^k_i\right]\left[\left(\Lambda^j_{ij}\right)^2 + B^j_{ij\ell}\delta^\ell_i\right]\delta_{k\ell} + \left(\Lambda^j_{ij}\right)^2 \Lambda^m_{ik}\Lambda^t_{i\ell}\delta_{mt} = 0 , \qquad (3.4.4)$$

(где i, j – фиксированы)

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{ij}^{\,2} + \left(-\vec{e}_i d_k \vec{k}_{ij}\right)\right]\left[\vec{k}_{ij}^{\,2} + \left(-\vec{e}_i d_\ell \vec{k}_{ij}\right)\right] = -\vec{k}_{ij}^{\,2}\vec{\Lambda}_{ik}\vec{\Lambda}_{i\ell} . \qquad (3.4.5)$$

где $\vec{k}_{ij} = \Lambda^i_{jj}\vec{e}_i = -\Lambda^j_{ij}\vec{e}_i$ – вектор i-той кривизны линии ω^j заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе, $\vec{\Lambda}_{ik} = d_k\vec{e}_i$, $\vec{\Lambda}_{i\ell} = d_\ell\vec{e}_i$.

Обратно, если имеет место равенство (3.4.4), то $\vec{a}_k \perp \vec{a}_\ell$, т.е. образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении $h: \Omega \to \Omega^j_i$ является ортогональной.

Таким образом, доказана

Теорема 3.4.2. Образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в отображении $h: \Omega \to \Omega^j_i$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.4.4) (для всех значений индексов k, ℓ).

Найдем $\vec{a}_k^{\,2} = \vec{a}_k \vec{a}_k$:

$$\vec{a}_k^{\,2} = \left[\frac{\left(\Lambda_{ij}^{j}\right)^2 + B_{ijk}^{j}\delta_i^k}{\left(\Lambda_{ij}^{j}\right)^2} \right]^2 + \frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\left(\Lambda_{ik}^{m}\right)^2}{\left(\Lambda_{ij}^{j}\right)^2}.$$

Из условия $\left|\vec{a}_k\right| = 1$ получим:

$$\left[\left(\Lambda_{ij}^{j}\right)^2 + B_{ijk}^{j}\delta_i^k\right]^2 + \left(\Lambda_{ij}^{j}\right)^2 \sum_{m=1}^{n}\left(\Lambda_{ik}^{m}\right)^2 = \left(\Lambda_{ij}^{j}\right)^4, \qquad (3.4.6)$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{ij}^{\,2} + \left(-\vec{e}_i d_k \vec{k}_{ij}\right)\right]^2 + \vec{k}_{ij}^{\,2}\vec{\Lambda}_{ik}^{\,2} = \left(k_i^j\right)^4, \qquad (3.4.7)$$

где $k_i^j = \Lambda_{jj}^{i} = -\Lambda_{ij}^{j}$ – i-тая кривизна линии ω^j заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе.

Если имеет место равенство (3.4.6), то векторы $h\left(\vec{e}_i\right) = \vec{a}_i$ – единичные. Следовательно, справедлива

Теорема 3.4.3. Отображение $h : \Omega \to \Omega_i^j$ является движением тогда и только тогда, когда имеет место равенство (3.4.6).

Глава 4. Существование двойных линий частичных отображений f_i^j и пар $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ в пространстве E_4

§4.1 О двойных линиях частичного отображения f_3^2, порождаемого4 псевдофокусом $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$

В области Ω евклидова пространства E_4, рассмотрено множество гладких линии так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства.

Выберем в области Ω подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы, т.е. формулы, выражающие движения этого репера, имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{4.1.1}$$

Дифференциальные формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{4.1.2}$$

Интегральные линии координатных векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^1 заданного семейства. Так как подвижной репер $\Re$ построен на касательных прямых к линиям сети Σ_4, дифференциальные формы ω_i^k являются главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{4.1.3}$$

Учитывая последнего равенства формулы (4.1.2) получим:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4.1.4}$$

Продифференцируем внешним образом равенство (4.1.3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j .$$

Применяя формулу (4.1.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j .$$

В силу равенства (4.1.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l \right) \omega^m . \qquad (4.1.5)$$

Система величин $\left\{ \Lambda_{ij}^k , \Lambda_{ijm}^k \right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного множества линий имеют вид:

$$\begin{aligned}
d_1\vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2 , \\
d_1\vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3 , \\
d_1\vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4 , \\
d_1\vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3
\end{aligned}$$

и

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{31}^1 = 0 , \ \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0 , \qquad (4.1.6)$$

$$\Lambda_{21}^{4} = -\Lambda_{41}^{2} = 0 . \qquad (4.1.7)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Точка [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной прямой к линии ω^i сети Σ_4 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i . \qquad (4.1.8)$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть Σ_4 в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [5], если

$$\text{реперы } \Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4),$$
$$\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1),$$
$$\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2),$$
$$\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети Σ_4 одновременно.

Пусть сеть Σ_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$.

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in (X,\vec{e}_3)$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3 . \qquad (4.1.9)$$

Когда точка X движется в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Имеем частичное отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$. Присоединим к области Ω_3^2 подвижной репер $\Re' = \left(F_3^2, \vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4\right)$, где векторы $\vec{m}_i$ определяются следующим образом. Продифференцируя обычным образом равенство (4.1.9) и учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3\right) = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\right)\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}d\vec{e}_3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i .$$

В силу равенства (2.1.4) отсюда получим:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i .$$

Введем обозначение:

$$B_{32m}^2 = \Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell .$$

Тогда, в силу равенства (4.1.3), отсюда имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{32m}^2\omega^m}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i$$

или

$$d\vec{F}_3^2 = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^4 .$$

Введем обозначения:

$$\vec{m}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B^2_{321}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{31}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i;$$
$$\vec{m}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B^2_{322}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{32}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i;$$
$$\vec{m}_2 = \vec{e}_3 + \frac{B^2_{323}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{33}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i; \qquad (4.1.10)$$
$$\vec{m}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B^2_{324}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{34}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i.$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}^2_3 = \omega^1\vec{m}_1 + \omega^2\vec{m}_2 + \omega^3\vec{m}_3 + \omega^4\vec{m}_4. \qquad (4.1.11)$$

Поскольку заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе [5] получим:

$$\vec{m}_3 = \left[1 + \frac{B^2_{323}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^4_{33}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_4;$$
$$\vec{m}_4 = -\frac{\Lambda^2_{34}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_2 + \frac{B^2_{324}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

$$\vec{m}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{31}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_2 + \frac{B^2_{321}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^4_{31}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_4;$$
$$\vec{m}_2 = \frac{B^2_{322}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^4_{32}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_4; \qquad (12)$$

Эти формулы получены Т.М. Папиевой в работах [77]

Из условия линейной зависимости векторов $\vec{m}_i$ получим:

$$\Lambda^2_{34} = 0 \qquad (4.1.13)$$

или

$$B^2_{322}\Lambda^4_{33} - \Lambda^4_{32}\left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + B^2_{323}\right] = 0. \qquad (4.1.14)$$

Обратно, если выполнено одно из условий (4.1.13), (4.1.14), то отображение f_3^2 является вырожденным.

Таким образом доказана

Теорема 4.1.1. Для того, чтобы частичное отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ являлась вырожденным отображением необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий (4.1.13), (4.1.14).

Рассмотрим векторы $\vec{e}_4, \vec{m}_4, \overrightarrow{XF_3^2} = -\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3$.

$\vec{e}_4, \vec{m}_4, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(34)}$ имеем:

$$\Lambda_{34}^2 = 0. \tag{4.1.15}$$

Следовательно, линии $\omega^4, f_3^2(\omega^4) = \omega^4$ являются двойными линиями частичного отображения f_3^2 (тем самым линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$) тогда и только тогда, когда имеем место равенство (4.1.15). Справедливо

Следствие 4.1.1. Если линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$, то частичное отображение f_3^2 является вырожденным отображением.

Линия $\omega^i, f_3^2(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения f_3^2, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f_3^2(X)$, пересекаются, либо параллельны [7].

Линия l называются двойной линией пары (f_3^2, Δ_p) (где Δ_p – p-мерное распределение, определенное векторными полями $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$), если она является двойной линией отображения f_3^2 и принадлежит распределению Δ_p [7].

Рассмотрим векторы $\vec{e}_3, \vec{m}_3, \overrightarrow{XF_3^2} = -\dfrac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3$. Учитывая (4.1.12) получим, что $\vec{e}_3, \vec{m}_3, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(34)}$, т.е. линии $\omega^3, \overline{\omega}^3 = f_3^2(\omega^3)$ всегда являются двойными линиями частичного отображения f_3^2 (тем самым линия ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$.

Рассмотрим произвольную линию l принадлежащую распределению $\Delta_{(34)} = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{l} = l^3\vec{e}_3 + l^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{l}} = f_3^2(\vec{l}\,)$ линии $f_3^2(l) = \bar{l}$. Учитывая (4.1.10) имеем:

$$\vec{\bar{l}} = l^3\vec{m}_3 + l^4\vec{m}_4 = l^3\left(m_3^3\vec{e}_3 + m_3^4\vec{e}_4\right) + l^4\left(m_4^2\vec{e}_2 + m_4^3\vec{e}_3 + \vec{e}_4\right) =$$
$$= l^4\vec{m}_4^2\vec{e}_2 + \left(l^3m_3^3 + l^4m_4^3\right)\vec{e}_3 + \left(l^3m_3^4 + 1\cdot l^4\right)\vec{e}_4,$$

где m_i^j – j-тая координата вектора $\vec{m}_i$.

Из условия $\vec{l}, \vec{\bar{l}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(34)}$ получим: $l^4m_4^2 = 0$, где $l^4 \neq 0$ (т.к. линия l не совпадает с линией ω^3). Следовательно, имеем $m_4^3 = 0$, т.е. $\Lambda_{34}^2 = 0$. Мы получим условие (4.1.13). Таким образом доказана

Теорема 4.1.2. Если линия ω^4 является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$, то никакая другая линия (отличная от линий ω^3, ω^4), принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, не может быть двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_2, \vec{m}_2, \overrightarrow{XF_3^2}$. Из условия $\vec{e}_2, \vec{m}_2, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(23)}$ получим:

$$\Lambda^4_{32} = 0. \tag{4.1.16}$$

Следовательно, линии $\omega^2, \overline{\omega}^2 = f^2_3(\omega^2)$ являются двойными линиями частичного отображения f^2_3 (тем самым линия) ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f^2_3, \Delta_{(23)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (4.1.16).

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(23)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\gamma}}$ линии $\overline{\gamma} = f^2_3(\gamma)$. Учитывая (4.1.10)

$$\vec{\overline{\gamma}} = \gamma^2\vec{m}_2 + \gamma^3\vec{m}_3 = \gamma^2\left(m^3_2\vec{e}_3 + m^4_2\vec{e}_4\right) + \gamma^3\left(m^3_3\vec{e}_3 + m^4_3\vec{e}_4\right) =$$

$$= \left(\gamma^2 m^3_2 + \gamma^2 m^3_3\right)\vec{e}_3 + \left(\gamma^2 m^4_2 + \gamma^3 m^4_3\right)\vec{e}_4,$$

где m^j_i – j-тая координата вектора $\vec{m}_i$. Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\overline{\gamma}}, \overrightarrow{XF^2_3} \in \Delta_{(23)}$ получим: $\gamma^2 m^4_2 + \gamma^3 m^4_3 = 0$. Отсюда имеем:

$$\frac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\frac{m^4_2}{m^4_3}.$$

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\frac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\frac{\Lambda^4_{32}}{\Lambda^4_{33}}. \tag{4.1.17}$$

Обратно, если имеет место условие (4.1.17), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(23)}$ является двойной линией пары $\left(f^2_3, \Delta_{(23)}\right)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 4.1.3. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(23)}$, является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию (4.1.17).

Из (4.1.16), (4.1.17) получим, что справедливо

Следствие 4.1.2. Если линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$, то эта пара не имеет других (кроме линий ω^2) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(23)}$.

Из условия $\vec{e}_1, \vec{m}_1, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(31)}$ получим:

$$\Lambda_{31}^2 = 0, \; \Lambda_{31}^4 = 0. \tag{4.1.18}$$

Геометрических смысл этих равенств заключаются в следующем: $\vec{\Lambda}_{31} = \vec{0}$, где $\vec{\Lambda}_{31} = d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4$.

Следовательно, если имеет место условия (4.1.17), то линии $\omega^1, \overline{\omega}^1 = f_3^2(\omega^1)$ являются двойными линиями частичного отображения f_3^2, а линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$.

Теперь рассмотрим произвольную линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(13)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^3\vec{e}_3$.

Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f_3^2(\beta)$:

$$\vec{\overline{\beta}} = \beta^1\vec{m}_1 + \beta^3\vec{m}_3 = \beta^1\left(\vec{e}_1 + m_1^2\vec{e}_2 + m_1^3\vec{e}_3 + m_1^4\vec{e}_4\right) + \beta^3\left(m_3^3\vec{e}_3 + m_3^4\vec{e}_4\right) =$$
$$= \beta^1\vec{e}_1 + \beta^1 m_1^2\vec{e}_2 + \left(\beta^1 m_1^3 + \beta^3 m_3^3\right)\vec{e}_3 + \left(\beta^1 m_1^4 + \beta^3 m_3^4\right)\vec{e}_4.$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\overline{\beta}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(13)}$ получим:

$$\begin{cases} \beta^1 m_1^2 = 0; \\ \beta^1 m_1^4 + \beta^3 m_3^4 = 0. \end{cases}$$

Из первого равенства имеем $m_1^2 = 0$ (т.к. $\beta^1 \neq 0$). Из второго получим:

$$\frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{m_1^4}{m_3^4}.$$

Учитывая (4.1.12) эти условия имеют вид:

$$\Lambda_{31}^2 = 0, \tag{4.1.19}$$

$$\frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{33}^4}. \tag{4.1.20}$$

Обратно если имеют места равенства (4.1.19) и (4.1.20), то линия β является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$. Таким образом, справедлива

Теорема 4.1.4. Произвольная линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям (4.1.19) и (4.1.20).

Из (4.1.19), (4.1.20), (4.1.18) получим, что справедливо.

Следствие 4.1.3. Если линия ω^1 сети $\widetilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$, то это пара не имеет других (кроме линий ω^1) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(13)}$.

§4.2 Существование двойных линий частичного отображения f_1^4 и пар $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$

Рассмотрим частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$, определяемое псевдофокусом $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$. Область Ω_1^4 отнесена к подвижному реперу $R_1^4 = (X, \vec{b}_i)$ [41], где

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B^4_{142}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^4_{12}}\vec{e}_i\,;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i + \vec{e}_3\,;$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i + \vec{e}_4\,.$$

Поскольку заданная сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \left[1 + \frac{B^4_{141}}{(\Lambda^4_{14})^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2;\\
\vec{b}_2 &= \frac{B^4_{142}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{12}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4;\\
\vec{b}_3 &= \frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4 + \vec{e}_3;\\
\vec{b}_4 &= \frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2.
\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

В общем случае эти векторы линейно независимы. Найдем необходимое и достаточное условия вырожденности отображения $f^4_1 : \Omega \to \Omega^4_1$. Потребуя линейной зависимости векторов $\vec{b}_i$ получим:

$$\Lambda^4_{12}\left\{\Lambda^2_{14}\left[\left(\Lambda^4_{14}\right)^2 + B^4_{141}\right] - \Lambda^2_{11}B^4_{144}\right\} = 0\,.$$

Отсюда имеем: а) $\Lambda^4_{12} = 0$ (4.2.2)

или б) $\Lambda^2_{14}\left[\left(\Lambda^4_{14}\right)^2 + B^4_{141}\right] - \Lambda^2_{11}B^4_{144} = 0\,.$ (4.2.3)

Геометрический смысл равенств (4.2.2), (4.2.3) заключаются в следующем: $d_2\vec{e}_1 = \vec{o}$, $k_1^1\left(-\vec{e}_1 d_4 \vec{k}_{14}\right) = \left[\left(k_4^1\right)^2 - \vec{e}_1 d_1 \vec{k}_{14}\right] k_2^4$, соответственно, где $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$ – первая кривизна линии ω^1, $k_1^4 = \Lambda_{44}^1 = -\Lambda_{14}^4$ – первая кривизна, $\vec{k}_{14} = \Lambda_{44}^1 \vec{e}_1 = -\Lambda_{14}^4$ – вектор первой кривизны линии ω^4 циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе, d_i – символ дифференцирования вдоль линии ω^i.

Обратно, если имеет место одно из условий (4.2.2), (4.2.3), то частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ является вырожденным. Таким образом, доказана

Теорема 4.2.1. Для того, чтобы частичное отображение f_1^4 являлось вырожденным необходимо и достаточно выполнения одного из условий (4.2.2), (4.2.3).

Линий ω^i, $\left(\omega^i\right) = \overline{\omega}^i$ называют двойными линиями отображения *g*, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках *x* и *g*(*x*) пересекаются, либо параллельны [7].

Линию ℓ называют двойной линией пары (*g*, Δ_p) , если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Рассмотрим векторы: $\vec{e}_1, \vec{b}_1, \overrightarrow{XF_1^4} = -\left(1 \big/ \Lambda_{14}^4\right)\vec{e}_1$ где $\vec{b}_1 = f_1^4(\vec{e}_1)$.

Учитывая первое равенство формулы (4.2.1) получим, что эти векторы принадлежат плоскости $\left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$. Следовательно, справедлива

Лемма 4.2.1. Линии $\omega^1,\ f_1^4,\ (\omega^1)=\overline{\omega}^1$ всегда являются двойными линиями частично отображения f_1^4, а линия ω^1 циклические сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$, где $\Delta_{(12)}=(x,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Из условия $\vec{e}_2, \vec{b}_2 = f_1^4(\vec{e}_2),\ \overrightarrow{XF}{}_1^4 \in (x,\vec{e}_1,\vec{e}_2,)$

имеем: $$\Lambda_{12}^4 = 0, \qquad (4.2.4)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$d_2\vec{e}_1 = \Lambda_{12}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{12}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{12}^4\vec{e}_4 = \vec{0}.$$

Следовательно, линии $\omega^2, \overline{\omega}^2 = f_1^4(\omega^2)$ является двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^2 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$, где $\Delta_{(12)}=(x,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ тогда и только тогда, когда имеет место условия (4.2.4).

Рассмотрим векторы $\vec{e}_3, \vec{b}_3 = f_1^4(\vec{e}_3), \overrightarrow{XF}{}_1^4$. Из условия компланарности этих векторов получим:

$$\Lambda_{13}^2 = 0, \quad \Lambda_{13}^4 = 0, \qquad (4.2.5)$$

геометрический смысл которых заключаются в следующем:

$$d_3\vec{e}_1 = \Lambda_{13}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{13}^4\vec{e}_4 = \vec{0}.$$

Следовательно, линии $\omega^3,\ \overline{\omega}^3 = f_1^4(\omega^3)$являются двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^3циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$, где $\Delta_{(13)}=(x,\vec{e}_1,\vec{e}_3)$ тогда и только тогда, когда имеют места условия (4.2.5).

Из условия $\vec{b}_{4,}\vec{e}_{4,}\overrightarrow{XF}{}_1^4 \in \Delta_{(14)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_4\right)$

получим: $$\Delta_{14}^2 = 0. \qquad (4.2.6)$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.2.2. а) Линии ω^2, $\overline{\omega}^2 = f_1^4(\omega^2)$ является двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^2 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, где $\Delta_{(12)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (4.2.4);

б) линии ω^3, $\overline{\omega}^3 = f_1^4(\omega^3)$ являются двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^3 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(13)}\right)$ (где $\Delta_{(13)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.2.5);

в) линий ω^4, $\overline{\omega}^4 = f_1^4\left(\omega^4\right)$ являются двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^4 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$, (где $\Delta_{(14)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_4\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (4.2.6).

Из (4.2.2),(4.2.4) получим

Следствие 4.2.1. Если линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, то частичное отображение f_1^4 становится вырожденным.

Рассмотрим линию ℓ, принадлежащую двумерному распределению $\Delta_{(12)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Ее касательный вектор имеет вид $\vec{e} = \left(\ell^1 \vec{e}_1 + \ell^2 \vec{e}_2\right)$. Найдем касательный вектор $\vec{\vec{\ell}}$ образа линии ℓ в отображение f_1^4: $\vec{\vec{\ell}} = \ell^1 \vec{b_1} + \ell^2 \vec{b}_2$.

Учитывая формул (2.2.1) отсюда имеем:

$$\vec{\vec{\ell}} = \left(\ell^1 b_1^1 + \ell^2 b_2^1\right) \vec{e}_1 + \left(\ell^1 b_1^1 + \ell^2\right) \vec{e}_2 + \ell^2 b_2^4 \vec{e}_4.$$

Отсюда получим:

$$\vec{\ell}, \vec{\vec{\ell}}, \overrightarrow{XF}\,_1^4 \in \Delta_{(12)} \Leftrightarrow \ell^2 b_2^4 = 0,$$

где $b_i^j - j -$та координата вектора $\vec{b}_i$, $\quad b_2^4 = -\dfrac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4}$.

Следовательно, имеем: либо а) $\ell^2 = 0;$ либо б) $\Lambda_{12}^4 = 0.$ Из условия а) определяется линия ω^1, а из условия б) имеем, что линии ω^2 является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$.

Таким образом, доказана

Теорема 4.2.3. Если линия ω^2 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$,то такая другая линия ℓ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ не может быть двойной линией этой пары.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(14)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^4 \vec{e}_4$.

Найдем касательный вектор $\vec{\vec{a}}$ линии $f_1^4(\gamma) = \bar{\gamma}$: $\vec{\vec{a}} = a^1 \vec{e}_1 + a^4 \vec{e}_4$.

Учитывая (4.2.1), отсюда получим $\vec{\vec{a}} = \left(a^1 \vec{e}_1 + a^4 \vec{e}_4\right) \vec{e}_1 + \left(a^1 b_1^2 + a^4 b_4^2\right) \vec{e}_2$.

Из условия $\vec{a}, \vec{\vec{a}}, \overrightarrow{XF}{}_1^4 \in \Delta_{(14)}$ имеем $a^1 b_1^2 + a^4 b_4^2 = 0$ или

$$\frac{a^1}{a^4} = -\frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{11}^2}. \qquad (4.2.7)$$

Верно и обратное. Следовательно, доказана

Теорема 4.2.4. Линия γ, принадлежащий распределению $\Delta_{(14)}$, является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию (4.2.7).

Следствие 4.2.2. Если линия ω^4 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$, то ни какая другая линия, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$ не может быть двойной линией этой пары.

Рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(13)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ и её касательный вектор $\vec{m} = m^1 \vec{e}_1 + m^3 \vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\vec{m}} = m^1 \overrightarrow{b_1} + m^3 \vec{b}_3$ линии $f_1^4(\beta) = \overline{\beta}$.

В силу равенств (4.2.1) имеем:

$\vec{\vec{m}} = (m^1 \vec{b}_1 + m^3 \vec{b}_3)\vec{e}_1 + (m^1 b_1^2 + m^3)\vec{e}_2 + m^3 b_2^4 \vec{e}_4$.

Из условия $\vec{m}$, $\vec{\vec{m}}$ $\overrightarrow{XF_1^4} \in \Delta_{(13)}$ получим: $\begin{cases} m^1 b_1^2 + m^3 = 0; \\ m^3 b_2^4 = 0. \end{cases}$

Из второго равенства (т.к. $m^3 \neq 0$) имеем:

$b_2^4 = 0$, т.е. $\Lambda_{12}^4 = 0$ - это есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия ω^2 циклической сети Френе являлась двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$. Из первого равенства системы имеем:

$$m^1 b_1^2 = -m^3 \Rightarrow \frac{m^3}{m^1} = -b_1^2 \text{ или } \frac{m^3}{m^1} = \Lambda_{11}^2. \qquad (4.2.8)$$

Обратно, если линия ω^2 циклической сети Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$ и имеем место (4.2.2), то линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$.

Таким образом, доказана

Теорема 4.2.5. Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$ тогда и только тогда, когда линия ω^2 циклической сети Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$ и координаты m^1, m^3 касательного вектора $\vec{m}$ линии β удовлетворяют условию $(2.2.8)$.

§4.3 Существование двойных линий частичного отображения f_4^3 и пар $\left(f_4^3, \Delta_{(43)}\right)$, $\left(f_4^3, \Delta_{(14)}\right)$

Рассмотрим частичное отображение $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$, определяемое псевдофокусом $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$. Область Ω_4^3 отнесем к подвижному реперу $R_4^3 = (X, \vec{c}_i)$ [45], где

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{41}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{42}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{43}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{44}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k.$$

Так как сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{c}_i$ имеют вид:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^3_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 + \frac{B^3_{431}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_2 = -\frac{\Lambda^1_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^3_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 + \frac{B^3_{432}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4; \qquad (4.3.1)$$

$$\vec{c}_3 = -\frac{\Lambda^1_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \frac{B^3_{433}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_4 = -\frac{\Lambda^1_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1 + \left(1 + \frac{B^3_{434}}{(\Lambda^3_{43})^2}\right)\vec{e}_4.$$

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(34)} = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4$. Найдем координаты касательного вектора $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f^3_4(\gamma)$: $\vec{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma}^3\vec{c}_3 + \bar{\gamma}^4\vec{c}_4$.

Учитывая (4.110) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\bar{\gamma}^3 c^1_3 + c^1_4\bar{\gamma}^4)\vec{e}_1 + (\bar{\gamma}^3 c^4_3 + \bar{\gamma}^4 c^4_4)\vec{e}_4,$$

где c^j_i – j-тая координата вектора $\vec{c}_i$.

Из условия компланарности векторов:

$\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF^3_4} = -(1/\Delta^3_{43})\vec{e}_4$ имеем:

$$\frac{\bar{\gamma}^4}{\bar{\gamma}^3} = -\frac{\Lambda^1_{43}}{\Lambda^1_{44}}. \qquad (4.3.2)$$

Обратно, если выполнено условие (4.3.2), то линия γ является двойной линией частичного отображения f^3_4 (тем самым и двойной линией пары $(f^3_4, \Delta_{(34)})$, т.к. $\gamma \in \Delta_{(34)}$). Следовательно, справедлива

Теорема 4.3.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, является двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(34)})$ тогда и только тогда, когда выполнено условию (4.3.1) (где Λ_{44}^1 – первая кривизна линии ω^4 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе, Λ_{43}^1 – первая кривизна линии ω^3 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе).

Аналогично, рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(14)} = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f_4^3(\beta)$: $\vec{\overline{\beta}} = \overline{\beta}^1 \vec{c}_1 + \beta^4 \vec{c}_4$.

Учитывая (4.3.1) отсюда получим: $\overline{\beta}^1 c_1^3 = 0$, где c_1^3 – третья координата вектора $\vec{c}_1$.

В силу первого равенства формулы (4.3.1) отсюда имеем: $\overline{\beta}^1 \Lambda_{41}^3 = 0$, следовательно (т.к. $\overline{\beta}^1 \neq 0$, т.е. линия β не совпадает с линией ω^4) $\Lambda_{41}^3 = 0$

($-\Lambda_{41}^3 = \Lambda_{31}^4 = k_3^1$ – третья кривизна линии ω^1 заданного семейства).

Верно и обратное утверждение. Таким образом доказана

Теорема 4.3.2. Для того, чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, являлась двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(14)})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\Lambda_{41}^3 = 0$.

Следствие 4.3.1. Если линия $\beta \in \Delta_{(14)}$ совпадает с координатной линией ω^4 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе (ω^4 всегда является двойной линией отображения f_4^3 [66], то пара $(f_4^3, \Delta_{(14)})$ не имеет других двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(14)}$.

Рассмотрим линию α, принадлежащую распределению $\Delta_{(24)} = (x, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$. Её касательный вектор $\overline{\alpha}$ имеет координаты: $\vec{\alpha} = \alpha^2 \vec{e}_2 + \alpha^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\alpha}}$ линии $f_4^3(\alpha) = \overline{\alpha}$: $\vec{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}^2 \vec{c}_2 + \overline{\alpha}^4 \vec{c}_4$.

Учитывая (4.3.1) отсюда имеем:

$$\vec{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}^2 (c_2^1 \vec{e}_1 + c_2^2 \vec{e}_2 + c_2^3 \vec{e}_3 + c_2^4 \vec{e}_4) + \overline{\alpha}^4 (c_4^1 \vec{e}_1 + c_4^4 \vec{e}_4) = (\overline{\alpha}^2 c_2^1 + \overline{\alpha}^4 c_4^1) \vec{e}_1 + $$
$$+ c_2^2 \overline{\alpha}^2 \vec{e}_2 + \overline{\alpha}^2 c_2^3 \vec{e}_3 + (\overline{\alpha} c_2^4 + \overline{\alpha}^4 c_4^4) \vec{e}_4 .$$

Из условия компланарности векторов $\vec{\alpha}, \vec{\overline{\alpha}}, \overrightarrow{XF_4^3}$ получим:

$$\begin{cases} \overline{\alpha}^2 c_2^3 = 0; \\ \overline{\alpha}^2 c_2^1 + \overline{\alpha}^4 c_4^1 = 0. \end{cases}$$

Учитывая (4.3.1) отсюда имеем:

$$\begin{cases} \overline{\alpha}^2 \Lambda_{42}^3 = 0; \\ \overline{\alpha}^2 \Lambda_{42}^1 + \overline{\alpha}^4 \Lambda_{44}^1 = 0. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Отсюда, так как $\overline{\alpha}^2 \neq 0$, получим

$$\Lambda_{42}^3 = 0, \tag{4.3.4}$$

$$\frac{\overline{\alpha}^4}{\overline{\alpha}^2} = -\frac{\Lambda_{42}^1}{\Lambda_{44}^1}. \tag{4.3.5}$$

Обратно, если имеют места равенства (4.3.4), (4.3.5), то линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(24)}$, являлась двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(24)})$. Следовательно доказана

Теорема 4.3.3. Для того, чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(24)}$, являлась двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(24)})$ необходимо и достаточно выполнения условий (4.3.4), (4.3.5).

§4.4 Существование двойных линий частичного отображения f_2^1 и пар $\left(f_2^1, \Delta_{(12)}\right), \left(f_2^1, \Delta_{(34)}\right)$

Рассмотрим частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$, определяемое псевдофокусом $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$. Область Ω_2^1 отнесем к подвижному реперу $R_2^1 = (X, \vec{a}_i)$, где

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{211}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{21}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_2 = \left[1 + \frac{B_{212}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{22}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B_{213}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{23}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B_{214}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{24}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k.$$

Так как сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{a}_i$ имеют вид [53]:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= \vec{e}_1 + \frac{B_{211}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{21}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3;\\
\vec{a}_2 &= \left[1 + \frac{B_{212}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{22}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3;\\
\vec{a}_3 &= -\frac{\Lambda_{23}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_1 + \frac{B_{213}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3;\\
\vec{a}_4 &= -\frac{\Lambda_{24}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_1 + \frac{B_{214}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{24}^3}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение f_2^1: $\Omega \to \Omega_2^1$ является невырожденным.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(12)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2$.

Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $f_2^1(\gamma) = \bar{\gamma}$:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma}^1 \vec{a}_1 + \bar{\gamma}^2 \vec{a}_2 = \bar{\gamma}^1 a_1^1 \vec{e}_1 + (\bar{\gamma} a_1^2 + \bar{\gamma}^2 a_2^2)\vec{e}_2 + (\bar{\gamma}^1 a_1^3 + \bar{\gamma}^2 a_2^3)\vec{e}_3,$$

где a_i^j – j-тая координата вектора $\vec{a}_i$. Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(12)}$ получим: $\bar{\gamma}^1 a_1^3 + \bar{\gamma}^2 a_2^3 = 0$. Учитывая (4.4.1) отсюда имеем:

$$\frac{\bar{\gamma}^1}{\bar{\gamma}^2} = -\frac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^3}. \tag{4.4.2}$$

Обратно, если имеет место равенство (4.4.2), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)}$, является двойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(12)})$.

Таким образом, доказана

Теорема 4.4.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)}$, является двойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(12)})$ тогда и только тогда, когда координаты её касательно вектора удовлетворяют условию (4.4.2).

Рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(34)} = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^3 \vec{e}_3 + \beta^4 \vec{e}_4$.

Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_2^1(\beta)$:

$$\vec{\bar{\beta}} = (\bar{\beta}^3 a_3^1 + \bar{\beta}^4 a_4^1)\vec{e}_1 + (\bar{\beta}^3 a_3^2 + \bar{\beta}^4 a_4^2)\vec{e}_2 + (\bar{\beta}^3 + a_4^3 \bar{\beta}^4)\vec{e}_3 + \bar{\beta}^4 \vec{e}_4,$$

где a_i^j – j-тая координата вектора $\vec{a}_i$. Из условия $\vec{\beta}, \vec{\overline{\beta}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(34)}$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} \overline{\beta}^3 a_3^1 + \vec{\beta}^4 a_4^1 = 0; \\ \overline{\beta}^3 a_3^2 + \overline{\beta}^4 a_4^2 = 0. \end{cases}$$

Учитывая (4.4.1) отсюда имеем:

$$\begin{cases} \overline{\beta}^3 a_3^1 + \vec{\beta}^4 a_4^1 = 0; \\ \beta_{213}^1 \overline{\beta}^3 + \beta_{214}^1 \overline{\beta}^4 = 0. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Эта система уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{23}^1 & \Lambda_{24}^1 \\ B_{213}^1 & B_{214}^1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\Lambda_{23}^1}{B_{213}^1} = \frac{\Lambda_{24}^1}{B_{214}^1}. \tag{4.4.4}$$

Верно и обратное утверждение.

Таким образом, справедлива

Теорема 4.4.2. Для того, чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, являлась двойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(34)})$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство (4.4.4), геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\frac{\vec{e}_1 \vec{\Lambda}_{23}}{\vec{e}_1 d_3 \vec{\Lambda}_{21}} = \frac{\vec{e}_1 \vec{\Lambda}_{24}}{\vec{e}_1 d_4 \vec{\Lambda}_{21}},$$

d_i - символ дифференцирования вдоль направлении $\vec{e}_i$, $\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$.

Глава 5. Существование квазидвойных линий частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ijk)}\right)$

§5.1 Существование квазидвойных линий пары $\left(f_4^3, \Delta_{(ijk)}\right)$

Рассмотрим частичное отображение $f_4^3\colon\ \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f_4^3(\mathrm{X}) = F_4^3$.

Область Ω_4^3 отнесём к подвижному реперу $R^1 = (F_3^4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, где векторы $\vec{e}_i$ имеют координаты [77] (в случае когда сеть Френе являются циклической сетью Френе):

$$
\begin{aligned}
&\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{41}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{431}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4;\\
&\vec{c}_2 = -\frac{\Lambda_{42}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{41}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{432}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4;\\
&\vec{c}_3 = \frac{\Lambda_{43}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \frac{B_{433}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4;\\
&\vec{c}_3 = -\frac{\Lambda_{44}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \left(1 + \frac{B_{434}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\right)\vec{e}_4.
\end{aligned}
\qquad (5.1.1)
$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $\mathrm{f}_4^3\colon\ \Omega \to \Omega_4^3$ является невырожденным.

Линии ω^i, $g(\omega^i) = \varpi^i$ назовем двойными линиями отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(x)$ пересекаются, либо параллельны $[7]$.

Линия ℓ называются двойной линией пары (g,Δ_p), если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Введем определения: 1) линии ω^i, $g(\omega^i)$ в E_4 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(x)$ принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) Линия ℓ называется квазидвойной линией пары (g,Δ_p), если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(234)} = \Delta(X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $f_4^3(\gamma) = \bar{\gamma}$. Он имеет вид: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2\vec{c}_2 + \gamma^3\vec{c}_3 + \gamma^4\vec{c}_4$.

Учитывая формул (5.1.1) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2(c_2^1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + c_2^3\vec{e}_3 + c_2^4\vec{e}_4) + \gamma^3(c_3^1\vec{e}_1 + c_4^3\vec{e}_4) + \bar{\gamma}^4(c_4^1\vec{e}_1 + c_4^4\vec{e}_4)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\gamma^2 c_2^1 + \gamma^3 c_3^1 + \gamma^4 c_4^1)\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^2 c_2^3\vec{e}_3 + (\gamma^2 c_2^4 + \bar{\gamma}^3 c_3^4 + \bar{\gamma}^4 c_4^4)\vec{e}_4.$$

где c_i^j – j-тая координата вектора $\vec{c}_i$.

Потребуем чтобы векторы $\vec{\gamma},\vec{\bar{\gamma}}$ принадлежали $\Delta_{(234)}$. Из этого условия получим: $\gamma^2 c_2^1 + \gamma^3 c_3^1 + \gamma^4 c_4^1 = 0$.

Учитывая (10) отсюда имеем:

$$-\frac{\Lambda^1_{42}}{\Lambda^3_{43}}\gamma^2-\frac{\Lambda^1_{43}}{\Lambda^3_{43}}\gamma^3-\frac{\Lambda^1_{44}}{\Lambda^3_{43}}\gamma^4=0$$

или

$$\Lambda^1_{42}\gamma^2+\Lambda^1_{43}\gamma^3+\Lambda^1_{44}\gamma^4=0\,. \tag{5.1.2}$$

Обратно, если имеет место (5.1.2), то $\vec{\gamma},\vec{\bar{\gamma}},\overrightarrow{XF}{}^3_4\in\Delta_{(234)}$.

Выясним геометрический смысл равенства (5.1.2). Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned}\vec{\Lambda}_{42}&=d_2\vec{e}_4=\Lambda^1_{42}\vec{e}_1+\Lambda^3_{42}\vec{e}_3;\\ \vec{\Lambda}_{43}&=d_3\vec{e}_4=\Lambda^1_{43}\vec{e}_1+\Lambda^3_{43}\vec{e}_3;\\ \vec{\Lambda}_{44}&=\Lambda^1_{44}\vec{e}_1,\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

где d_i – символ дифференцирования по направлению $\vec{e}_i$.

Определим такой вектор $\vec{p}$:

$$\vec{p}=(\vec{\Lambda}_{42}\vec{e}_1)\vec{e}_2+(\vec{\Lambda}_{43}\vec{e}_1)\vec{e}_3+(\vec{\Lambda}_{44}\vec{e}_1)\vec{e}_4. \tag{5.1.4}$$

Найдем:

$$\vec{p}\vec{\gamma}=(\vec{\Lambda}_{42}\vec{e}_1)\gamma^2+(\vec{\Lambda}_{43}\vec{e}_1)\gamma^3+(\vec{\Lambda}_{44}\vec{e}_1)\gamma^4\,.$$

Учитывая (5.1.3) отсюда имеем:

$$\vec{p}\vec{\gamma}=\vec{\Lambda}_{42}\gamma^2+\vec{\Lambda}_{43}\gamma^3+\vec{\Lambda}_{44}\gamma^4\,.$$

Следовательно, геометрический смысл равенства (5.1.2) заключается в том, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Таким образом, доказана

Теорема 5.1.1. Линия $\gamma \in \Delta_{(234)}$ является квазидвойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(234)})$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Теперь рассмотрим линию α, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(234)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{e}_1 + \alpha^2 \vec{e}_2 + \alpha^3 \vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\alpha}}$ линии $f_4^3(\alpha) = \overline{\alpha}$. Он имеет вид: $\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1 \vec{c}_1 + \alpha^2 \vec{c}_2 + \alpha^3 \vec{c}_3$. Учитывая формул (5.1.1) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1(\vec{e}_1 + c_3^1 \vec{e}_3 + c_1^4 \vec{e}_4) + \alpha^2(c_2^1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + c_2^3 \vec{e}_3 + c_2^4 \vec{e}_4) + \alpha^3(c_3^1 \vec{e}_1 + c_3^4 \vec{e}_4)$$

или

$$\vec{\bar{\alpha}} = (\alpha^1 + \alpha^2 c_2^1 + \alpha^3 c_3^1)\vec{e}_1 + \alpha^2 \vec{e}_2 + (\alpha^1 c_1^3 + \alpha^2 c_2^3)\vec{e}_3 + (\alpha^1 c_1^4 + \alpha^2 c_2^4 + \alpha^3 c_3^4)\vec{e}_4 .$$

Рассмотрим векторов $\vec{\alpha}, \vec{\bar{\alpha}}$.

Из условия $\vec{\alpha}, \vec{\bar{\alpha}} \in \Delta_{(123)}$ имеем:

$$\alpha^1 c_1^4 + \alpha^2 c_2^4 + \alpha^3 c_3^4 = 0.$$

Учитывая формул (5.1.1) отсюда получим:

$$\alpha^1 \frac{B_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2} + \alpha^2 \frac{B_{432}3}{(\Lambda_{43}^3)^2} + \alpha^3 \frac{B_{433}3}{(\Lambda_{43}^3)^2} = 0$$

или
$$B_{431}^3 \alpha^1 + B_{432}^3 \alpha^2 + B_{433}^3 \alpha^3 = 0. \qquad (5.1.4)$$

Обратно, если имеет место (5.1.4), то линия $\alpha \in \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(123)})$.

Найдем геометрический смысл равенства (5.1.4):

$$B_{431}^3 = -\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{13}, \quad B_{432}^3 = -\vec{e}_4 d_2 \vec{k}_{13}, \quad B_{433}^3 = -\vec{e}_4 d_3 \vec{k}_{13},$$

где $\vec{k}_{13}$ – вектор первой кривизны линии ω^3 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$.

Определим вектор $\vec{S}$ следующим образом:

$$\vec{S} = (np_{\vec{e}_4} d_1 \vec{k}_{13})\vec{e}_1 + (np_{\vec{e}_4} d_2 \vec{k}_{13})\vec{e}_2 + (np_{\vec{e}_4} d_3 \vec{k}_{13})\vec{e}_3.$$

Тогда имеем:

$$\vec{\alpha}\vec{s} = -(B^3_{431}\alpha^1 + B^3_{432}\alpha^2 + B^3_{433}\alpha^3).$$

Следовательно, геометрический смысл равенства (5.1.4) заключается в том, что векторы $\vec{\alpha}$ и $\vec{s}$ ортогональны.

Таким образом, справедлива

Теорема 5.1.2. Линия α, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $(f^3_4, \Delta_{(123)})$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство (5.1.4) (т.е. $\vec{\alpha} \perp \vec{s}$).

Аналогично доказывается

Теорема 5.1.3. а) Линия m, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $(f^3_4, \Delta_{(124)})$ тогда и только тогда, когда координаты m^1, m^2 её касательного вектора удовлетворяют условию:

$$\frac{m^1}{m^2} = -\frac{\Lambda^3_{42}}{\Lambda^3_{41}},$$

где $-\Lambda^3_{42} = \Lambda^4_{32}$ – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$, $-\Lambda^3_{41} = \Lambda^4_{31}$ – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

б) Любая линия β, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $(f^3_4, \Delta_{(134)})$.

§5.2 Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_3^2, \Delta_{(ijk)}\right)$

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in \left(X, \vec{e}_3\right)$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \qquad (5.2.1)$$

Когда точка X движется в области $\Omega \subset E_4$, точка F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Таким образом имеем частичное отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$. Присоединим к области Ω_3^2 подвижной репер $\Re' = \left(F_3^2, \vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4\right)$, где векторы $\vec{m}_i$ определяются следующим образом [77] :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{m_1} &= \overrightarrow{e_1} + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\overrightarrow{e} - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2} e_i;\\
\overrightarrow{m_2} &= \overrightarrow{e_1} + \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i};\\
\overrightarrow{m_3} &= \overrightarrow{e_1} + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i};\\
\overrightarrow{m_4} &= \overrightarrow{e_1} + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}.
\end{aligned} \qquad (5.2.2)$$

Поскольку заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе [5] получим:

$$\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_2} + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{m_2} = \frac{B^{\,2}_{322}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{\,4}_{32}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_4}\,;$$

$$\overrightarrow{m_3} = \left[1 + \frac{B^{\,2}_{323}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\right]\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^{\,4}_{33}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_4}\,; \qquad (5.2.3)$$

$$\overrightarrow{m_4} = -\frac{\Lambda^{\,2}_{34}}{\Lambda^{\,2}_{32}}\overrightarrow{e_2} + \frac{B^{\,2}_{324}}{\left(\Lambda^{\,2}_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\,.$$

Линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X, $g(X)$, пересекаются, либо параллельны [7].

Линия l называется двойной линией пары (g, Δ_p), если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Введем определения: 1) линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega^i}$ в E_4 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним взятые в соответствующих точках X, $g(X)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) Линия l называется квазидвойной линией пары (g, Δ_p), если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Рассмотрим линию l, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)} = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$. Ее касательный вектор имеет вид:

$\overline{l} = l^1\overrightarrow{e_1} + l^2\overrightarrow{e_2} + l^3\overrightarrow{e_3}$. Найдем касательный вектор $\overset{=}{l}$ линии $f_3^2(l) = \overline{l}$.

Его ищем в виде:

$$\overset{=}{l} = l^1\overrightarrow{m_1} + l^2\overrightarrow{m_2} + l^3\overrightarrow{m_3}\,.$$

Учитывая формул (5.2.3) отсюда получим:

$$\overset{=}{l} = l^1\left(\overrightarrow{e_1} + m_1^2\overrightarrow{e_2} + m_1^3\overrightarrow{e_3} + m_1^4\overrightarrow{e_4}\right) + l^2\left(m_2^3\overrightarrow{e_3} + m_2^4\overrightarrow{e_4}\right) + l^3\left(m_3^3\vec{e}_3 + m_3^4\vec{e}_4\right)$$

или

$$\overset{=}{l} = l^1\overrightarrow{e_1} + m_1^2\overrightarrow{e_2} + \left(l^1m_1^3 + l^2m_2^3 + l^3m_3^3\right)\overrightarrow{e_3} + \left(l^1m_1^4 + l^2m_2^4 + l^3m_3^4\right)\overrightarrow{e_4}\,,$$

где $m_i^j - j$ -тая координата вектора $\overrightarrow{m_i}$.

Рассмотрим векторов $\vec{l}, \overset{=}{l}$.

Из условия $\vec{l}, \overset{=}{l} \in \Delta_{(123)}$ имеем:

$$l^1m_1^4 + l^2m_2^4 + l^3m_3^4 = 0\,.$$

Учитывая формул (5.2.3) отсюда получим:

$$l^1\left(-\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\right) + l^2\left(-\frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\right) + l^3\left(-\frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\right) = 0\,.$$

или

$$\Lambda_{31}^4 l^1 + \Lambda_{32}^4 l^2 + \Lambda_{33}^4 l^3 = 0\,. \qquad (5.2.4)$$

Верно и обратное утверждение, т.е. если имеет место (5.2.4), то линия l, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(123)}\right)$.

Выясним геометрический смысл равенства (5.2.4) Рассмотрим векторов:

$$d_1\overrightarrow{e_3} = \Lambda^{2}_{31}\overrightarrow{e_2} + \Lambda^{4}_{31}\overrightarrow{e_4}$$

$$d_2\overrightarrow{e_3} = \Lambda^{1}_{31}\overrightarrow{e_1} + \Lambda^{2}_{32}\overrightarrow{e_2} + \Lambda^{4}_{32}\overrightarrow{e_4}$$

$$d_3\overrightarrow{e_3} = \Lambda^{1}_{33}\overrightarrow{e_1} + \Lambda^{2}_{33}\overrightarrow{e_2} + \Lambda^{4}_{33}\overrightarrow{e_4}$$

Определим вектор $\vec{q}$, с координатами:

$$\Lambda^{4}_{31} = \overrightarrow{e_4} d_1\overrightarrow{e_3}, \quad \Lambda^{4}_{32} = \overrightarrow{e_4} d_2\overrightarrow{e_3}, \quad \Lambda^{4}_{33}\overrightarrow{e_4} d_3\overrightarrow{e_3}, \quad \text{т.е.}$$

$$\vec{q} = \Lambda^{4}_{31}\overrightarrow{e_1} + \Lambda^{4}_{32}\overrightarrow{e_2} + \Lambda^{4}_{33}\overrightarrow{e_3}.$$

Тогда $\vec{q}\cdot\vec{l} = \Lambda^{4}_{31}l^1 + \Lambda^{4}_{32}l^2 + \Lambda^{4}_{33}l^3$.

Следовательно, геометрический смысл равенства (5.2.4) заключается в том, что векторы $\vec{q}$ и $\vec{l}$ ортогональны.

Теперь рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$.

Ее касательный вектор $\vec{\gamma}$ имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1\overrightarrow{e_1} + \gamma^2\overrightarrow{e_2} + \gamma^4\overrightarrow{e_4}$.

Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_3^2(\gamma)$. Его ищем в виде:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\overrightarrow{m_1} + \gamma^2\overrightarrow{m_2} + \gamma^4\overrightarrow{m_4}.$$

Учитывая формул (5.2.3) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\left(\overrightarrow{e_1} + m_1^2\overrightarrow{e_2} + m_1^3\overrightarrow{e_3} + m_1^4\overrightarrow{e_4}\right) + \gamma^2\left(m_2^3\overrightarrow{e_3} + m_2^4\overrightarrow{e_4}\right) + \gamma^4\left(m_4^2\overrightarrow{e_2} + m_4^3\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\overrightarrow{e_1} + \left(\gamma^1 m_1^2 + \gamma^4 m_4^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\gamma^1 m_1^3 + \gamma^2 m_2^3 + \gamma^4 m_4^3\right)\overrightarrow{e_3} + \left(\gamma^1 m_1^4 + \gamma^2 m_2^4 + \gamma^4\right)\overrightarrow{e_4}.$$

Из условия $\overrightarrow{\gamma}, \overset{\rightrightarrows}{\gamma} \in \Delta_{(124)}$ имеем:

$$\gamma^1 m_1^3 + \gamma^2 m_2^3 + \gamma^4 m_4^3 = 0 \ .$$

Учитывая формулу (5.2.3) отсюда получим:

$$\gamma^1 \frac{B^{\,2}_{\,321}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2} + \gamma^2 \frac{B^{\,2}_{\,322}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2} + \gamma^4 \frac{B^{\,2}_{\,324}}{\left(\Lambda^{\,2}_{\,32}\right)^2} = 0$$

или (т.к. $\Lambda^2_{32} \neq 0$)

$$B^{\,2}_{\,321}\gamma^1 + B^{\,2}_{\,322}\gamma^2 + B^{\,2}_{\,324}\gamma^4 = 0 \ . \qquad (5.2.5)$$

Обратно, если имеет место равенство (5.2.5) то линия γ является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2,\, \Delta_{(124)}\right)$.

Выясним геометрический смысл равенства (5.2.5).

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{k_{12}} = \Lambda^3_{22}\overrightarrow{e_3} = -\Lambda^2_{32}\,\overrightarrow{e_3}$ − вектор первой кривизны линии ω^2 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе. Найдем производные этого вектора вдоль направлениях $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_4}$ [66]:

$$d_1\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{321}\overrightarrow{e_3} - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^2_{31}\overrightarrow{e_2} + \Lambda^4_{31}\overrightarrow{e_4}\right),$$

$$d_2\overrightarrow{k_{12}} = -B^{\,2}_{\,322}\overrightarrow{e_3} - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^2_{32}\overrightarrow{e_2} + \Lambda^4_{32}\overrightarrow{e_4}\right),$$

$$d_4\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{324}\overrightarrow{e_3} - \Lambda^2_{32}\,\Lambda^2_{34}\overrightarrow{e_2} \ .$$

Определим вектор $\overrightarrow{\tau}$ с координатами:

$$\overrightarrow{e_3}d_1\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{321}, \qquad \overrightarrow{e_3}d_2\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{322}, \qquad \overrightarrow{e_3}d_4\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{324},$$

т.е.

$$\overrightarrow{\tau} - \left[\left(\overrightarrow{e_3}d_1\overrightarrow{k_{12}}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\overrightarrow{e_3}d_2\overrightarrow{k_{12}}\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\overrightarrow{e_3}d_4\overrightarrow{k_{12}}\right)\overrightarrow{e_4}\right].$$

Найдем

$$\overrightarrow{\tau}\cdot\overrightarrow{\gamma} = B^2_{321}\gamma^1 + B^2_{322}\gamma^2 + B^2_{324}\gamma^4 \ .$$

Следовательно, геометрический смысл равенство (5.2.5) заключается в том, что векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Таким образом, доказана

Теорема 5.2.1. а) Линия l, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(123)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.2.4);

б) линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(124)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.2.5).

Рассмотрим линию β, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(234)} = \left(X, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\right)$.

Ее касательный вектор $\vec{\beta}$ имеет вид:

$\vec{\beta} = \beta^2\vec{e_2} + \beta^3\vec{e_3} + \beta^4\vec{e_4}$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$.

Его ищем в виде: $\vec{\bar{\beta}} = \beta^2\vec{m_2} + \beta^3\vec{m_3} + \beta^4\vec{m_4}$.

Учитывая формул (5.2.3) имеем:

$$\vec{\bar{\beta}} = \beta^2\left(m_2^3\vec{e_3} + m_2^4\vec{e_4}\right) + \beta^3\left(m_3^3\vec{e_3} + m_3^4\vec{e_4}\right) + \beta^4\left(m_4^2\vec{e_2} + m_4^3\vec{e_3} + \vec{e_4}\right)$$

или

$$\vec{\bar{\beta}} = \left(\beta^4 m_4^2\right)\vec{e_2} + \left(\beta^2 m_2^3 + \beta^3 m_3^3 + \beta^4 m_4^3\right)\vec{e_3} + \left(\beta^2 m_2^4 + \beta^3 m_3^4 + \beta^4\right)\vec{e_4}.$$

Очевидно, что $\vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}} \in \Delta_{(234)}$. Следовательно, любая линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(234)}\right)$

Рассмотрим линию α, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(134)}=\left(X,\vec{e_1},\vec{e_3},\vec{e_4}\right)$. Ее касательный вектор $\vec{\alpha}$ имеет вид:

$$\vec{\alpha}=\alpha^1\vec{e_1}+\alpha^3\vec{e_3}+\alpha^4\vec{e_4}\ .$$

Найдем касательный вектор $\vec{\vec{\alpha}}$ линии $\overline{\alpha}=f_3^2(\beta)$.

Его ищем в виде: $\vec{\vec{\alpha}}=\alpha^1\vec{m_1}+\alpha^3\vec{m_3}+\alpha^4\vec{m_4}$.

Учитывая формул (5.2.3) имеем:

$$\vec{\vec{\alpha}}=\alpha^1\left(\vec{e_1}+m_1^2\vec{e_2}+m_1^3\vec{e_3}+m_1^4\vec{e_4}\right)+\alpha^3\left(m_3^3\vec{e_3}+m_3^4\vec{e_4}\right)+\alpha^4\left(m_4^2\vec{e_2}+m_4^3\vec{e_3}+\vec{e_4}\right)$$

или

$$\vec{\vec{\alpha}}=\alpha^1\vec{e_1}+\left(\alpha^1m_1^2+\alpha^4m_4^2\right)\vec{e_2}+\left(\alpha^1m_1^3+\alpha^3m_3^3+\alpha^4m_4^3\right)\vec{e_3}+\left(\alpha^1m_1^4+\alpha^3m_3^4+\alpha^4\right)\vec{e_4}\ .$$

Из условия $\vec{\alpha},\vec{\vec{\alpha}}\in\Delta_{(134)}$ имеем:

$$\alpha^1m_1^2+\alpha^4m_4^2=0\ .$$

Учитывая формул (5.2.3) отсюда имеем:

$$\alpha^1\left(-\frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\right)+\alpha^4\left(-\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\right)=0$$

или

$$\Lambda_{31}^2\alpha^1+\Lambda_{34}^2\alpha^4=0\ . \qquad (5.2.6)$$

Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (5.2.6), то линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2,\ \Delta_{(134)}\right)$.

Выясним геометрический смысл равенства (5.2.6). Равенство (5.2.6) можно переписать в виде:

$$\frac{\alpha^1}{\alpha^4}=-\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{31}^2}\ , \qquad (5.2.7)$$

где $-\Lambda_{34}^{2}=\Lambda_{24}^{3}$ – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$, $-\Lambda_{31}^{2}=\Lambda_{21}^{3}$ – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Следовательно, справедлива

Теорема 5.2.2. Линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(134)}\right)$ тогда и только тогда, когда первая и четвертая координаты касательного вектора этой линии удовлетворяют условию (5.2.7).

§5.3 Существование квазидвойной линий пары $\left(f_1^4, \Delta_{(ijk)}\right)$

Пусть сеть E_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$. Псевдофокус $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$ определяется радиус-вектором:

$$F_1^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^1}\vec{e}_1. \tag{5.3.1}$$

Когда точка X движется в области $\Omega \subset E_4$, точка F_1^4 описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Определяется частичное отображение f_1^4: $\Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f_1^4(X) = F_1^4$.

Присоединим к области Ω_1^4 подвижной репер $R' = \left(F_1^4, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right)$, где векторы $\vec{b}_i$ определены [66] в следующем виде:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{12}^4}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i + \vec{e}_3;$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i + \vec{e}_4.$$

Так как заданная сеть E_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\begin{gathered}
\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B^4_{141}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2; \\
\vec{b}_2 = \frac{B^4_{142}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{12}}{\Lambda^4_{12}}\vec{e}_4; \\
\vec{b}_3 = \frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4 + \vec{e}_3; \\
\vec{b}_4 = \frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2.
\end{gathered} \tag{5.3.2}$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

Линий ω^i, $(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X, $g(X)$ пересекаются, либо параллельны [7].

Линия ℓ называется двойной линией пары (g, Δ_p), если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Введем определения: 1) линии ω^i, $g\left(\omega^i\right) = \omega^i$ в пространстве E_4 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) линия ℓ называется квазидвойной линией пары (g,Δ_p), если она является
квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Рассмотрим линию ℓ, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)} = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Её касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\ell} = \ell^1\vec{e}_1 + \ell^2\vec{e}_2 + \ell^3\vec{e}_3.$$

Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\ell}}$ линии $\bar{\ell} = f_1^4(\ell)$. Его ищем в виде: $\vec{\bar{\ell}} = \ell^1\vec{b}_1 + \ell^2\vec{b}_2 + \ell^3\vec{b}_3$. Учитывая формул (5.3.2) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\ell}} = \ell^1\left(b_1^1\vec{e}_1 + b_1^2\vec{e}_2\right) + \ell^2\left(b_2^1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b_2^4\vec{e}_4\right) + \ell^3\left(b_3^1\vec{e}_1 + b_3^2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b_3^4\vec{e}_4\right)$$

или

$$\vec{\bar{\ell}} = \left(\ell^1\vec{b}_1^1 + \ell^2\vec{b}_2^1 + \ell^3\vec{b}_3^1\right)\vec{e}_1 + \left(\ell^1\vec{b}_1^2 + \ell^2 + \ell^3\vec{b}_3^2\right)\vec{e}_2 + \ell^3\vec{e}_3 + \left(\ell^2\vec{b}_2^4 + \ell^3\vec{b}_3^4\right)\vec{e}_4,$$

где b_i^j – i-тая координата вектора $\vec{b}_i$.

Из условия $\vec{e},\vec{\bar{e}} \in \Delta_{(123)}$ получим:

$$\ell^2 b_2^4 + \ell^3 b_3^4 = 0.$$

Учитывая формул (5.3.2) отсюда имеем:

$$\ell^2\left(-\frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4}\right) + \ell^3\left(-\frac{\Lambda_{13}^4}{\Lambda_{14}^4}\right) = 0$$

или

$$\Lambda_{12}^4\ell^2 + \Lambda_{13}^4\ell^3 = 0, \qquad (5.3.3)$$

где Λ^4_{12} – третья кривизна линии ω^2 сети $\widetilde{\Sigma}_4$, $-\Lambda^4_{13} = \Lambda^1_{43}$ – вторая кривизна линии ω^3 сети $\widetilde{\Sigma}_4$.

Верно и обратное, т.е. если имеет место условие (5.3.3), то линия $\ell \in \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(123)}\right)$.

Рассмотрим линию β, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(124)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4\right)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^2\vec{e}_2 + \beta^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_1^4(\beta)$. Его ищем в виде: $\vec{\bar{\beta}} = \beta^1\vec{b}_1 + \beta^2\vec{b}_2 + \beta^4\vec{b}_4$. Учитывая формул (5.3.2) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\beta}} = \beta^1\left(b_1^1\vec{e}_1 + b_1^2\vec{e}_2\right) + \beta^2\left(b_2^1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b_2^4\vec{e}_2\right) + \beta^4\left(b_4^1\vec{e}_1 + b_4^2\vec{e}_2\right)$$

или

$$\vec{\bar{\beta}} = \left(\beta^1\vec{b}_1^1 + \beta^2\vec{b}_2^1 + \beta^3\vec{b}_4^1\right)\vec{e}_1 + \left(\beta^1\vec{b}_1^2 + \beta^2 + \beta^4\vec{b}_4^2\right)\vec{e}_2 + \beta^2\vec{b}_2^4\vec{e}_4.$$

Очевидно, что $\vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}} \in \Delta_{(124)}$. Следовательно, любая линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(124)}\right)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 5.3.1. а) линии $\ell \in \Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(123)}\right)$ тогда и только тогда, когда вторая и третья координаты её касательного вектора удовлетворяют условию (5.3.3);
б) любая линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(124)}\right)$.

Рассмотрим линию γ принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(234)} = \left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$. Её касательный вектор имеет вид:

$\vec{\gamma} = \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + \gamma^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_1^4(\gamma)$. Он имеет вид: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2 \vec{b}_2 + \gamma^3 \vec{b}_3 + \gamma^4 \vec{b}_4$. Учитывая формул (5.3.2) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2 \left(b_2^1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b_2^4 \vec{e}_4\right) + \gamma^3 \left(b_3^1 \vec{e}_1 + b_3^2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b_3^4 \vec{e}_4\right) + \gamma^4 \left(b_4^1 \vec{e}_1 + b_4^2 \vec{e}_2\right)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = \left(\gamma^2 \vec{b}_2^1 + \gamma^3 \vec{b}_3^1 + \gamma^4 \vec{b}_4^1\right)\vec{e}_1 + \left(\gamma^2 + \gamma^3 \vec{b}_3^2 + \gamma^4 \vec{b}_4^2\right)\vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + \left(\gamma^2 b_2^4 + \gamma^3 b_3^4\right)\vec{e}_4 .$$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}} \in \Delta_{(234)}$ имеем:

$$\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 = 0 .$$

Учитывая формул (5.3.2) отсюда имеем:

$$\gamma^2 \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} + \gamma^3 \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} + \gamma^4 \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} = 0 .$$

или

$$B_{142}^4 \gamma^2 + B_{143}^4 \gamma^3 + B_{144}^4 \gamma^4 = 0 . \qquad (5.3.4)$$

Выясним геометрический смысл этого равенства. Рассмотрим вектор первой кривизны $\vec{k}_{14} = \Lambda_{44}^1 \vec{e}_1 = -\Lambda_{14}^4 \vec{e}_1$ линии ω^4 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе. Найдем векторов $d_2 \vec{k}_{14}$, $d_3 \vec{k}_{14}, d_4 \vec{k}_{14}$, где d_2, d_3, d_4 – символы дифференцирования вдоль линий $\omega^2, \omega^3, \omega^4$:

$$\begin{aligned} d_2 \vec{k}_{14} &= -B_{142}^4 \vec{e}_1 - \Lambda_{14}^4 \Lambda_{12}^4 \vec{e}_4, \\ d_3 \vec{k}_{14} &= -B_{143}^4 \vec{e}_1 - \Lambda_{14}^4 \left(\Lambda_{13}^2 \vec{e}_3 + \Lambda_{13}^4 \vec{e}_4\right), \\ d_4 \vec{k}_{14} &= -B_{144}^4 \vec{e}_1 - \Lambda_{14}^4 \left(\Lambda_{14}^2 \vec{e}_3 + \Lambda_{14}^4 \vec{e}_4\right). \end{aligned}$$

Определим вектор $\vec{t}$ координатами:

$$\vec{t} = \left(-\vec{e}_1 d_2 \vec{k}_{14}\right)\vec{e}_2 + \left(-\vec{e}_1 d_3 \vec{k}_{14}\right)\vec{e}_3 + \left(-\vec{e}_1 d_4 \vec{k}_{14}\right).$$

Тогда имеем:

$$\vec{t} = B_{142}^4 \vec{e}_2 + B_{143}^4 \vec{e}_3 + B_{144}^4 \vec{e}_4 .$$

Найдем

$$\vec{t}\,\vec{\gamma} = B^4_{142}\gamma^2 + B^4_{143}\gamma^3 + B^4_{144}\gamma^4 .$$

Следовательно, геометрический смысл равенства (5.3.4) заключается в том, что векторы $\vec{t}$ и γ ортогональны.

Аналогично вышеизложенному рассмотрим линию α, принадлежащую распределению $\Delta_{(134)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ с касательным вектором $\vec{\alpha} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^3\vec{e}_3 + \alpha^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\alpha}}$ линии $\bar{\alpha} = f_1^4(\alpha)$: $\vec{\alpha} = \alpha^1\vec{b}_1 + \alpha^3\vec{b}_3 + \alpha^4\vec{b}_4$.

Учитывая формул (5.3.2) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1\left(b_1^1\vec{e}_1 + b_1^2\vec{e}_2\right) + \alpha^3\left(b_3^1\vec{e}_1 + b_3^2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b_3^4\vec{e}_4\right) + \alpha^4\left(b_4^1\vec{e}_1 + b_4^2\vec{e}_2\right)$$

или

$$\vec{\bar{\alpha}} = \left(\alpha^1\vec{b}_1^1 + \alpha^3\vec{b}_3^1 + \alpha^4\vec{b}_4^1\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha^1 b_1^2 + \alpha^3\vec{b}_3^2 + \alpha^4\vec{b}_4^2\right)\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3 + \alpha^4\left(\alpha^3 b_3^4\right)\vec{e}_4,$$

где b_i^j – j-тая координата вектора $\vec{b}_i$.

Из условия $\vec{\alpha}, \vec{\bar{\alpha}} \in \Delta_{(134)}$ имеем:

$$\alpha^1 b_1^2 + \alpha^3 b_3^2 + \alpha^4 b_4^2 = 0 .$$

Учитывая формул (5.3.2) отсюда получим:

$$\alpha^1\left(-\frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^4_{14}}\right) + \alpha^3\left(-\frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^4_{14}}\right) + \alpha^4\left(-\frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}}\right) = 0$$

или

$$\Lambda^2_{11}\alpha^1 + \Lambda^2_{13}\alpha^3 + \Lambda^2_{14}\alpha^4 = 0 . \qquad (5.3.5)$$

Верно и обратное, т.е. если имеет место условие (5.3.5), то линия $\alpha \in \Delta_{(134)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(134)}\right)$.

Выясним геометрический смысл равенства (5.3.5). Рассмотрим векторов:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2\vec{e}_2\,, \quad d_3\vec{e}_1 = \Lambda_{13}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{13}^4\vec{e}_4\,, \quad d_4\vec{e}_1 = \Lambda_{14}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{14}^2\vec{e}_4\,.$$
(5.3.6)

Определим вектор $\vec{s}$ с координатами:

$$\vec{s} = \left(np_{\vec{e}_2} d_1\vec{e}_1\right)\vec{e}_1 + \left(np_{\vec{e}_2} d_3\vec{e}_1\right)\vec{e}_3 + \left(np_{\vec{e}_2} d_4\vec{e}_1\right)\vec{e}_4$$

или

$$\vec{s} = \Lambda_{11}^2\vec{e}_1 + \Lambda_{13}^2\vec{e}_3 + \Lambda_{14}^2\vec{e}_4,$$

где Λ_{11}^2 – первая кривизна линии ω^1, Λ_{13}^2 – третья кривизна линии ω^3, Λ_{14}^2 – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Тогда имеем:

$$\vec{s}\cdot\vec{\alpha} = \Lambda_{11}^2\alpha^1 + \Lambda_{13}^2\alpha^3 + \Lambda_{14}^2\alpha^4\,,$$
$$\vec{s}\cdot\vec{\alpha} = \Lambda_{11}^2\alpha^1 + \Lambda_{13}^2\alpha^3 + \Lambda_{14}^2\alpha^4\,.$$

Следовательно, геометрический смысл равенства (5.3.5) заключается в том, что векторы $\vec{s}$ и $\vec{\alpha}$ ортогональны.

Таким образом, доказана

Теорема 5.3.2. а) Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(234)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство (5.3.4);

б) линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(134)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место (5.3.5).

§5.4 О существовании квазидвойной линий пары $\left(f_2^1, \Delta_{(ijk)}\right)$

Рассмотрим равенство:

$$\vec{F}_2^1 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2\,, \tag{5.4.1}$$

которое определяет псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ на касательной прямой $(X, \vec{e}_2)$ к линии заданной циклической сети Френе Σ_4. Когда точка X движется в области $\Omega \subset E_4$, точка $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ опишет свою область. $\Omega_2^1 \subset E_4$. Получаем частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $f_2^1(X) = F_2^1$.

К области Ω_2^1 присоединим подвижной репер $\Re' = (F_2^1 \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$, где векторы $\vec{a}_i$ определяются следующим образом [77]:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^i_{31}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_2 = \left[1 + \frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{22}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{23}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^k_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k.$$

Тогда имеем:

$$dF_2^1 = \omega^1\vec{a}_1 + \omega^2\vec{a}_2 + \omega^3\vec{a}_3 + \omega^4\vec{a}_4.$$

Так как сетьΣ_4 является циклической сетью Френе, векторы получим:

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= \vec{e}_1 + \frac{B^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^3_{21}}{\Lambda^2_{22}}\vec{e}_3 ;\\
\vec{a}_2 &= \left[1 + \frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^3_{22}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_3;\\
\vec{a}_3 &= -\frac{\Lambda^1_{23}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_1 + \frac{B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3;
\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

$$\vec{a}_4 = -\frac{\Lambda^1_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_1 + \frac{B^{\,1}_{214}}{\left(\Lambda^{\,1}_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^{\,3}_{24}}{\Lambda^{\,1}_{21}}\vec{e}_3 + \vec{e}_4 .$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение является невырожденным.

Линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X, $g(X)$, пересекаются, либо параллельны [7].

Линия l называется двойной линией пары (g, Δ_p), если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Введем определения: 1) линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega^i}$ в E_4 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним взятые в соответствующих точках X, $g(X)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) линия l называется квазидвойной линией пары (g, Δ_p), если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Рассмотрим линию l, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)} = (X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ с касательным вектором $\overline{l} = l^1\overrightarrow{e_1} + l^2\overrightarrow{e_2} + l^3\overrightarrow{e_3}$. Найдем касательный вектор $\overline{\overline{l}}$ линии $f_2^1(l) = \overline{l}$. Его ищем в виде:

$$\overline{\overline{l}} = l^1\overrightarrow{a_1} + l^2\overrightarrow{a_2} + l^3\overrightarrow{a_3} .$$

Учитывая формул (5.4.2) отсюда имеем:

$$\vec{\vec{l}} = l^1\left(\vec{e}_1 + a_1^2\vec{e}_2 + a_1^3\vec{e}_3\right) + l^2\left(a_2^2\vec{e}_2 + a_2^3\vec{e}_3\right) + l^3\left(a_3^3\vec{e}_1 + a_3^2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)$$

или

$$\vec{\vec{l}} = \left(l^1 + l^3 a_3^1\right)\vec{e}_1 + \left(l^1 a_1^2 + l^2 a_2^2 + l^3 a_3^3\right)\vec{e}_2 + \left(l^1 a_1^3 + l^2 a_2^3 + l^3\right)\vec{e}_3,$$

где a_i^j – j -тая координата вектора $\vec{a}_i$.

Очевидно, что $\vec{l}, \vec{\vec{l}} \in \Delta_{(123)}$. Следовательно, любая линия $l \in \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(123)}\right)$.

Пусть линия γ, принадлежит распределению $\Delta_{(124)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^4\vec{e}_4$.

Найдем касательный вектор $\vec{\vec{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_2^1(\gamma)$. Он имеет вид:

$$\vec{\vec{\gamma}} = \gamma^1\overrightarrow{a_1} + \gamma^2\overrightarrow{a_2} + \gamma^4\overrightarrow{a_4}.$$

Учитывая формул (3.4.2) отсюда получим:

$$\vec{\vec{\gamma}} = \gamma^1\left(\overrightarrow{e_1} + a_1^2\overrightarrow{e_2} + a_1^3\overrightarrow{e_3}\right) + \gamma^2\left(a_2^2\overrightarrow{e_2} + a_2^3\overrightarrow{e_3}\right) + \gamma^4\left(a_4^1\overrightarrow{e_1} + a_4^2\overrightarrow{e_2} + a_4^3\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$$

или

$$\vec{\vec{\gamma}} = \left(\gamma^1 + \gamma^4 a_4^1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\gamma^1 a_1^2 + \gamma^2 a_2^2 + \gamma^4 a_4^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\gamma^1 a_1^3 + \gamma^2 a_2^3 + \gamma^4 a_4^3\right)\overrightarrow{e_3} + \gamma^4\overrightarrow{e_4}.$$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\vec{\gamma}} \in \Delta_{(124)}$ имеем:

$$\gamma^1 a_1^3 + \gamma^2 a_2^3 + \gamma^4 a_4^3 = 0.$$

Учитывая формул (5.4.2) отсюда получим:

$$\gamma^1\left(-\frac{\Lambda_{21}^3}{\Lambda_{21}^2}\right) + \gamma^2\left(-\frac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^1}\right) + \gamma^4\left(-\frac{\Lambda_{24}^3}{\Lambda_{21}^2}\right) = 0$$

или

$$\Lambda_{21}^3\gamma^1 + \Lambda_{22}^3\gamma^2 + \Lambda_{24}^3\gamma^4 = 0. \qquad (5.4.3)$$

Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (5.4.3) то линия $\gamma \in \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(124)}\right)$.
Найдем геометрический смысл этого равенства.

Рассмотрим векторов $d_1\vec{e}_2$, $d_1\vec{e}_2$, $d_4\vec{e}_2$ и определим следующий вектор $\vec{\theta}$ с координатами:

$$\vec{\theta} = (\vec{e}_3 d_1 \vec{e}_2)\vec{e}_1 + (\vec{e}_3 d_2 \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_3 d_4 \vec{e}_2)\vec{e}_4 .$$

Тогда имеем:

$$\vec{\theta} \cdot \vec{\gamma} = \Lambda^3_{21}\gamma^1 + \Lambda^3_{22}\gamma^2 + \Lambda^3_{24}\gamma^4 . \tag{5.4.4}$$

Следовательно, геометрический смысл равенство (5.4.3) заключается в том, что векторы $\vec{\theta}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Таким образом, доказана

Теорема 5.4.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(124)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.4.3), геометрический смысл которого заключается в (5.4.4).

Теперь рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(234)} = \left(X, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$. Ее касательный вектор имеет вид:
$\vec{\beta} = \beta^2\overrightarrow{e_2} + \beta^3\overrightarrow{e_3} + \beta^4\overrightarrow{e_4}$. Найдем касательный вектор линии $\overline{\beta} = f_2^1(\beta)$.
Его ищем в виде: $\vec{\overline{\beta}} = \beta^2\overrightarrow{a_2} + \beta^3\overrightarrow{a_3} + \beta^4\overrightarrow{a_4}$.

Учитывая формул (5.4.2) отсюда получим:

$$\vec{\overline{\beta}} = \beta^2\left(a_2^2\overrightarrow{e_2} + a_2^3\overrightarrow{e_3}\right) + \beta^3\left(a_3^1\overrightarrow{e_1} + a_3^2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\right) + \beta^4\left(a_4^1\overrightarrow{e_1} + a_4^2\overrightarrow{e_2} + a_4^3\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$$

или

$$\vec{\overline{\beta}} = \left(\beta^3 a_3^1 + \beta^4 a_4^1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\beta^2 a_2^2 + \beta^3 a_3^2 + \beta^4 a_4^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\beta^2 a_2^3 + \beta^3 + \beta^4 a_4^3\right)\overrightarrow{e_3} + \beta^4\overrightarrow{e_4}$$

.

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\vec{\beta}} \in \Delta_{(234)}$ имеем:

$$\beta^3 a_3^1 + \beta^4 a_4^1 = 0 \ .$$

Учитывая формулы (5.4.2) отсюда получим:

$$\Lambda_{23}^1 \beta^3 + \Lambda_{24}^1 \beta^4 = 0$$

или

$$\frac{\beta^3}{\beta^4} = -\frac{\Lambda_{24}^1}{\Lambda_{23}^1} . \qquad (5.4.5)$$

где $-\Lambda_{24}^1 = \Lambda_{14}^2$ – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$, $-\Lambda_{23}^1 = \Lambda_{13}^2$ – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$. Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (5.4.5), то линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(234)}\right)$.

Рассмотрим линию α, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(134)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$ с касательным вектором

$$\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{e}_1 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4 \ .$$

Ищем касательный вектор $\vec{\vec{\alpha}}$ линии $\bar{\alpha} = f_2^1(\alpha)$.

Он имеет вид: $\vec{\vec{\alpha}} = \alpha^1 \vec{a}_1 + \alpha^3 \vec{a}_3 + \alpha^4 \vec{a}_4$.

Учитывая формул (3.4.2) отсюда получим:

$$\vec{\vec{\alpha}} = \alpha^1\left(\vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3\right) + \alpha^3\left(a_3^1 \vec{e}_1 + a_3^2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) +$$
$$+ \alpha^4\left(a_4^1 \vec{e}_1 + a_4^2 \vec{e}_2 + a_4^3 \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right)$$

или

$$\vec{\vec{\alpha}} = \left(\alpha^1 + \alpha^3 a_3^1 + \alpha^4 a_4^1\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha^1 a_1^2 + \alpha^3 a_3^2 + \alpha^4 a_4^2\right)\vec{e}_2 +$$
$$+ \left(\alpha^1 a_1^3 + \alpha^3 + \alpha^4 a_4^2\right)\vec{e}_3 + \left(\alpha^1 a_1^3 + \alpha^3 + \alpha^4 a_4^3\right)\vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4 .$$

Из условия $\vec{\alpha}, \vec{\vec{\alpha}}, \overrightarrow{XF_2} \in \Delta_{(134)}$ имеем:

$$\alpha^1 a_1^2 + \alpha^1 a_3^2 + \alpha^4 a_4^2 = 0 .$$

Учитывая формул (5.4.2) отсюда получим:

$$\alpha^1 \frac{B_{211}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} + \alpha^3 \frac{B_{213}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} + \alpha^4 \frac{B_{214}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} = 0$$

или

$$B_{211}^1 \alpha^1 + B_{213}^1 \alpha^3 + B_{214}^1 \alpha^4 = 0 . \qquad (5.4.6)$$

Найдем геометрический смысл этого равенства. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{k_{11}} = \Lambda_{11}^2 \overrightarrow{e_2} = -\Lambda_{21}^1 \overrightarrow{e_2}$ первой кривизны линии ω^1 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе. Найдем векторы $d_1\overrightarrow{k_{11}}$, $d_3\overrightarrow{k_{11}}$, $d_4\overrightarrow{k_{11}}$ где $d_i -$ символ дифференцирования вдоль направлений $\vec{e}_i$.

Тогда имеем:

$$d_1\overrightarrow{k_{11}} = -B_{211}^1 \overrightarrow{e_2} - \Lambda_{21}^1 \left(\Lambda_{21}^1 \overrightarrow{e_1} + \Lambda_{21}^3 \overrightarrow{e_3}\right);$$

$$d_3\overrightarrow{k_{11}} = -B_{213}^1 \overrightarrow{e_2} - \Lambda_{21}^1 \Lambda_{23}^1 \overrightarrow{e_1} ;$$

$$d_4\overrightarrow{k_{12}} = -B_{214}^1 \overrightarrow{e_2} - \Lambda_{21}^1 \left(\Lambda_{24}^1 \overrightarrow{e_1} + \Lambda_{24}^3 \overrightarrow{e_3}\right).$$

Отсюда найдем:

$$B_{211}^1 = -\overrightarrow{e_2} d_1 \overrightarrow{k_{11}} ; \quad B_{213}^1 = -\overrightarrow{e_2} d_3 \overrightarrow{k_{11}} ; \quad B_{214}^1 = -\overrightarrow{e_2} d_4 \overrightarrow{k_{11}} .$$

Определим вектор $\vec{\xi}$ с координатами:

$$\vec{\xi} = B_{211}^1 \vec{e}_1 + B_{213}^1 \vec{e}_3 + B_{214}^1 \vec{e}_4 .$$

Тогда получим:

$$\vec{\xi} \cdot \vec{\alpha} = B_{211}^1 \alpha^1 + B_{213}^1 \alpha^3 + B_{214}^1 \alpha^4 .$$

Следовательно, геометрический смысл равенство (5.4.6) заключается в том, что векторы $\vec{\xi}$ и $\vec{\alpha}$ ортогональны.

Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (5.4.6), то линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(134)}\right)$.

Таким образом, доказана

Теорема 5.4.2. 1) Линия β, принадлежащая распределению $\varDelta_{(234)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \varDelta_{(234)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.4.5);

2) линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(134)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (5.4.6).

Список использованных источников

1. Алексеева Л.И. К геометрии отображений трехмерных евклидовых пространств [Текст] / Л.И. Алексеева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр.-Калининград, 1988. –Вып.19. – С. 10-14.

2. Алиев Н. О некоторых отображениях поверхностей евклидовых пространств [Текст] / Н. Алиев // Материалы III конгресса всемирного математического общества тюркоязычных стран. КазНУ им.Аль-Фараби, Алматы, 2009. – С. 68.

3. Базылев В.Т. О многомерных сетях и преобразованиях [Текст] / В.Т. Базылев // Итоги науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 138-164.

4. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.243. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1965. – С. 29-37.

5. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т. Базылев // Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.

6. Базылев В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи *p*–поверхности евклидова пространства [Текст] / В.Т. Базылев // Сибирский математический журнал. 1966. Т.3. – С. 499-511.

7. Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Изв. вузов. Математика, 1967. Т.9. – С. 3-11.

8. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространств [Текст] / В.Т. Базылев // В кн: III Межвузовская

конференция по проблемам геометрии. Тезисы докладов. – Казань: Казанский университет, 1967. – С. 8.

9. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.1., № 374. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. – С. 28-40.

10. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространства [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.1. №374. – Москва: МГПИ им. В.И.Ленина, 1970. – С. 41-51.

11. Базылев В.Т. Сети на многообразиях [Текст] / В.Т. Базылев // Труды геометрического семинара. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1974. – Т.6. – С. 189-205.

12. Базылев В.Т. Об одном замечательном классе сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Проблемы геометрии. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1975. – Т.7. – С. 105-116.

13. Базылев В.Т. О конструктивных способах задания многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии – Вильнюс, 1975. – С. 21-22.

14. Базылев В.Т. К геометрии отображений гладких многообразий [Текст] / В.Т. Базылев // Тезисы докладов VI Прибалтийской геометрической конференции. –Таллин, 1984. – С. 18.

15. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий [Текст] / В.Т. Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 1975.вып.6. – С. 19-25.

16. Борбоева Г.М. Характеристические линии отображения поверхностей евклидово трехмерного пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук, 2002. №5. – С. 137-142.

17. Борбоева Г.М. К геометрии отображений трехмерных поверхностей четырехмерного евклидова пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник КазНУ им.Аль-Фараби, серия математика, №2 (53), 2007. – С. 16-21.

18. Борбоева Г.М. Об одном отображении двумерных поверхностей трехмерного евклидово пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук, 2002. №5. – С. 143-149.

19. Борбоева Г.М. Об одном отображении двумерных поверхностей евклидова четырехмерного пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Наука. Образование. Техника. Международный научный журнал кыргызско-узбекского университета, 2007. №1. – С. 65-70.

20. Борбоева Г.М. К геометрии отображений гиперповерхностей евклидова пространства [Текст] / Г.М. Борбоева, Г. Матиева // Вестник ОшГУ: Серия пед.-психолог.наук, 2008. №1. – С. 145-149.

21. Борбоева Г.М. Необходимое и достаточное условие геодезичности линий образа данной сети в отображении гиперповерхностей евклидова пространства [Текст] / Борбоева Г.М., Матиева Г. // Вестник ОшГУ: Серия пед.-психолог. наук, 2008. №1. – С. 149-152.

22. Борубаев А.А. Равномерные пространства [Текст] / А.А. Борубаев, А.А. Чекеев // Бишкек, 2003. – 245с.

23. Грачева В.И. О некоторых случаях дифференцируемых отображений евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Изв. вузов. Математика, 1970. № 8 (111). – С. 22-30.

24. Грачева В.И. К вопросу о K_{af}– линеаризирующих прямых и плоскостях дифференцируемых отображений евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Изв. вузов. Математика, 1978. №5. – С. 19-31.

25. Грачева В.И. К вопросу о дифференцируемых отображениях евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Труды Международного конгресса ассоциации «Женщины – математики». Вып.3. – Нижний Новгород: ННГУ, 1994. – С. 11-15.

26. Грачева В.И. К вопросу о свойствах K_{af}–линеаризующего соответствия прямых при дифференцируемых отображениях евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Труды III Международной конференции женщин – математиков. Вып.2. – Нижний Новгород: ННГУ, 1996. – С. 99-105.

27. Дулалаева Т.А. О некоторых свойствах двойных линий пары гиперраспределений [Текст] / Т.А. Дулалаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Сборник научных трудов Калининградского госуниверситета. Вып.15, Калининград, 1984. – С. 48-53.

28. Дулалаева Т.А. К геометрии пары гиперраспределений в проективном пространстве P_n [Текст] / Т.А. Дулалаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Сборник научных трудов Калининградского госуниверситета. Калининград, 1998.-Вып.12. – С. 23-26.

29. Евтушик Л.Е. Дифференциально геометрические структуры на многообразиях [Текст] / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Проблемы геометрии. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1979. – Т.9. – С. 7-234.

30. Есин В.А. К геометрии сетей на поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Геометрия погруженных многообразий. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1980. – С. 29-32.

31. Есин В.А. О сопряженных и ортогональных сетях на поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Дифференциальная

геометрия многообразий фигур. Вып.12. – Калининград: Калининградский государственный университет, 1981. –С. 27-30.

32. Есин В.А. О поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Геометрия погруженных многообразий. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1981. – С. 40-44.

33. Казанова Р. О гармоническом полюсе [Текст] / Р. Казанова //Реферативный журнал. Математика №5. – Москва, 1956. – С. 104.

34. Казнина О.В. Об отображении $f:(V_p \subset E_n) \to (\overline{V_p} \subset E_{p+r})$ в задаче Фубини-Чеха. [Текст] / О.В. Казнина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: КГУ, 1986. – Вып.17. – С. 40-42.

35. Казнина О.В. Об отображении сетей в задаче Фубини-Чеха [Текст] / О.В. Казнина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч. тр.-Калининград, 1988.– Вып.16. – С. 27-29.

36. Казнина О.В. О свойствах проектирования Фубини-Чеха. [Текст] / О.В. Казнина // Труды III Международной конференции женщин-математиков. Воронеж, 29-мая – 2-июня 1995. – Н.Новгород: ННГУ, 1996. – Вып.2. – С. 120-124.

37. Киреева С.В. О паре сетей [Текст] / С.В. Киреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. – Калининград: КГУ, 1983. – С. 26-31.

38. Киреева С.В. О геометрии пары сетей [Текст] / С.В. Киреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып.16. – Калининград: КГУ, 1985. – С. 30-33.

39. Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n [Текст] / М.К. Кузьмин // Проблемы геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1975. – Т.7. – С. 215-229.

40. Курбанбаева Н.Н. О двойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] /

Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №10-1. – Уфа, 2015. – С. 20-26.

41. Курбанбаева Н.Н. О свойствах одного частичного отображения евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // СИМВОЛ НАУКИ. – №1-1(13). – Уфа, 2016. – С. 43-49.

42. Курбанбаева Н.Н. Существование двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // IN-SITU. – №4. – Москва, 2015. – С. 14-20.

43. Курбанбаева Н.Н. Об одной двойной линии частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 50-55.

44. Курбанбаев Н.Н. К геометрии частичных отображений евклидова пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 55-60.

45. Курбанбаева Н.Н. О существовании двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инноваци. – №1. – Бишкек, 2016. – С. 3-6.

46. Курбанбаева Н.Н. О квазидвойных линиях частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации. – №1. – Бишкек, 2016. – С. 7-10.

47. Курбанбаева Н.Н. Существования квазидвойных линий частичного отображения евклидова пространство E_4 [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // СИМВОЛ НАУКИ. – №3-4. – Уфа, 2016. – С. 25-30.

48. Курбанбаева Н.Н. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойных линий частичного отображения

пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. -№3-4. – Уфа, 2016. – С. 24-30.

49. Курбанбаева Н.Н. О квазидвойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // CETERIS PARIBUS. – №4. – Москва, 2016. – С. 6-13.

50. Курбанбаева Н.Н. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии одного частичного отображения пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №4-4. – Уфа, 2016. – С. 8-14.

51. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных много-образий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды Московского Математического Общества, 1953, №2, – С. 275-382.

52. Лаптев Г.Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды 30го Всесоюзного математического съезда. Т.2. Москва: АН СССР, 1956. – С. 60-62.

53. Лаптев Г.Ф. О распределениях m-мерных линейных элементов в n-мерно проективном пространстве [Текст] / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Москва: ВИНИТИ, 1971. – №3683-71. Деп.

54. Лаптев Г.Ф. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I [Текст] / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Труды геом.семинара. –Москва, 1971. Т.3. – С. 49-94.

55. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. – Москва, 1976. Т.3. – С. 29-48.

56. Локотков Н.Н. Об одном специальном отображении T: $T_x \rightarrow N_x$ [Текст] / Н.Н. Локотков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр. – Калининград, 1983. – Вып.14. – С. 49-53.

57. Марюков М.Н. О некоторых частичных отображениях евклидовых n-пространств [Текст] / М.Н. Марюков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып. 16. – Калининград: КГУ, 1985. – С. 41-44.

58. Марюков М.Н. О сетях, инвариантно связанных с парой p-распределений в E_n [Текст] / М.Н. Марюков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. -Вып. 17. – Калининград: КГУ, 1986. – С. 66-69.

59. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Монография. – Ош, 2003. – С. 212-219.

60. Матиева Г. Об одном дифференцируемом отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим. – Вып. 29. 2000. – С. 430-437.

61. Матиева Г. Сеть, определенная образами заданных распределений в частичном отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: труды международной научной конференции, посвященной 70-летию академика М.И. Иманалиева. – Бишкек: КГНУ, 2001. – 307 С. /Вестник КГНУ: сер. 3. Естественно-технические науки. – 2001. №6. – С. 232-235.

62. Матиева Г. Критерий минимальности образа распределения в частичном отображении [Текст] / Г. Матиева // Проблемы образования,

науки и культуры в начале XXI века: труды международной научно–теоретической конференции. – Ош: Билим, Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук, 2001. №4. – С. 164-168.

63. Матиева Г. Необходимое и достаточное условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. − Вып. 31. – С. 259-264.

64. Матиева Г. Необходимое и достаточное условие геодезичности образа данной сети в отображении p-мерных поверхностей n-мерного евклидова пространствам [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева // Актуальные теории управления, топологии и операторных уравнений. Труды международной юбилейной научной конференции, посвященная 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета, 2008. –С. 122-126.

65. Папиева Т.М. Циклическая сеть Френе в четырехмерном евклидовом пространстве [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 40. – Бишкек: Илим, 2009. – С. 294-298.

66. Папиева Т.М. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Т.М. Папиева // Исследования по интегродифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.

67. Папиева Т.М. Двойные линии частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 185-189.

68. Папиева Т.М. Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе

[Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 43. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 199-203.

69. Папиева Т.М. Циклическая сеть Френе в n- мерном евклидовом пространстве E_n [Текст] / Т.М. Папиева // Вестник КРСУ, 2010, том 10. № 9. – С. 40-43.

70. Папиева Т.М. Свойства частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т.М. Папиева // Вестник ОшГУ. № 2. вып. 1. – Ош, 2012. – С. 161-165.

71. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] / П.К. Рашевский // Москва, Наука, 1967. – С. 481-482.

72. Романов В.И. К геометрии точечных отображений четырехмерных евклидовых пространств [Текст] / В.И. Романов // Труды геометрического семинара, т.5. Москва, 1975. – С. 345-359.

73. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами [Текст] / В.В. Рыжков // Итоги Науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 22-30.

74. Рыжков В.В. Об отображении евклидовых пространств, конформные отображения. [Текст] / В.В. Рыжков // Труды Томского университета, 1965, т. 188. – С. 15-18.

75. Силаева Г.М. Двойные линии отображения и их гиперсферическое изображение [Текст] / Г.М. Силаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 19. – Калининград: КГУ, 1988. – С. 82-84.

76. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст] / И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк // Москва: ИЛ, 1948. Т.II. – 348 с.

77. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж. Уизем. // Москва: Мир, 1977. – 624 с.

78. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников // М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.

79. Чешкова М.А. О конформном отображении ортогональных поверх-ностей в E_{2n} [Текст] / М.А. Чешкова // Математические заметки. 2001. 70, №5 – С. 798-800.

80. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия [Текст] / В.И. Шуликовский // Москва: Физматгиз. 1963. – 540 с.

81. Melzi G. Su alcune trasformazioni puntuali fra spazi ordinari estendenti le trasformazioni conformi [Текст] / G. Melzi // Rend. mat. e applic., 1957, 16, №1-2, Pp. 96-117.

82. Melzi G., Trasformazioni fra iperspazi euclidei reali estendenti le trasformazioni conformi [Текст] / G. Melzi // Rend. Ist. Lombardo, Accad. sci. mat., fis., chim. e geol., 1961, A95. – №2.

83. Mikeš J. Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces [Текст] / J. Mikeš // *J. Math. Sci., New York*, 78:3. 1996. – Pp. 311-333.

84. Mikeš J. Geodesic Ricci mappings of two-symmetric Riemann spaces [Текст] / J. Mikeš // *Math. Notes*, 28, 1981. – Pp. 622–624.

85. Papieva T.M. The double lines of a partial mapping of n - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines [Текст] / G. Matieva, T.M. Papieva // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries. – Vol. 1. Almaty, June 30. – July 4, 2009. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 93-96.

86. Papieva T.M. The double lines of a partial mapping of n - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines [Текст] / G. Matieva, T.M. Papieva // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries. – Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – P. 67.

Басууга берилди: 23.11.2022-ж.

Көлөмү: 8,6 б.т. *Буюртма: 41/22*

Форматы: 60x84 1/16 *Нускасы: 500 даана*

“Book-дизайн” компьютердик кызматтары

Кыргыз Республикасы, Ош шаары, И. Сулайманов к. №3