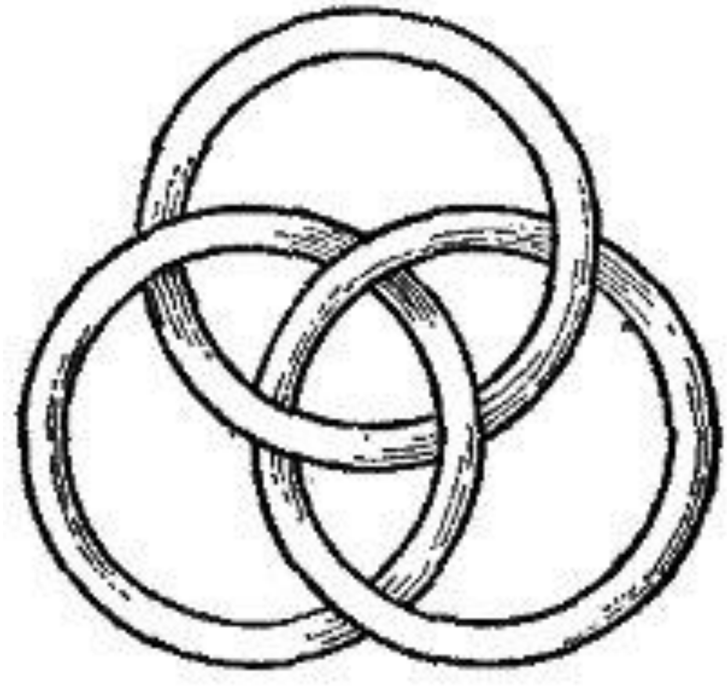
Г. Матиева, Т.М. Папиева

# СВОЙСТВА ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМЫХ ЗАДАННОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТЬЮ ФРЕНЕ



Ош -2015

УДК 514
ББК 22.151.2
М 34

**Монография издается по решению Ученого Совета Ошского государственного университета**

Рецензенты: доктор физ.-мат.наук, профессор Чекеев А.А.

доктор физ.-мат.наук, доцент Алыбаев К.С.

М 34 Матиева Г., Папиева Т.М. Свойства частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной циклической сетью Френе/ Монография. – Ош: ОшГУ, 2015. – 84 с.

**ISBN 978-9967-18-163-2**

Монография посвящена исследованию свойств частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной циклической сетью Френе. Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии заданной циклической сети являлись двойными линиями рассматриваемых отображений. Найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа заданной циклической сети Френе в каждом из рассматриваемых частичных отображениях. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы рассматриваемые частичные отображения являлись движениями.

Монография предназначена для научных работников, преподавателей ВУЗов, студентов физико-математических специальностей

**М 1602050000-15** УДК 514

**ISBN 978-9967-18-163-2** ББК 22.151.2

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**ГЛАВА 3. Частичное отображение $n$-мерного евклидова пространства, порождаемое заданной циклической сетью Френе**

# Перечень условных обозначений и основных определений

**Обозначения**

$\Leftrightarrow$ – эквивалентность (равносильность) высказываний;

$\|$ – коллинеарность векторов;

$\perp$ – ортогональность векторов;

$E_n$ – $n$-мерное евклидово пространство;

$\vec{X} = \vec{X}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – радиус-вектор точки $X \in \Omega$;

$\omega^i$ – интегральная линия векторного поля $\vec{e}_i$;

$d_i$ – символ дифференцирования вдоль линии $\omega^i$ (или по направлению вектора $\vec{e}_i$);

$\wedge$ – внешнее произведение;

$\Delta_2 = \left(X, \vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$ – двумерное распределение;

$\left(X, \vec{e}_i\right)$ – прямая, проходящая через точку $X \in \Omega$ с направляющим вектором $\vec{e}_i$;

$\delta_i^j = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера ($\delta_{ij}$, $\delta^{ij}$ – только в таком смысле);

Запись вида $a_i b^i$ обозначает, что по $i$ производится суммирование;

«Плоскость» – собственное подпространство любой размерности основного пространства $E_n$;

$F_i^j$ – псевдофокус прямой $\left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i \neq j\right)$;

$\Delta_p$ – $p$-мерное распределение $\left(p < n\right)$;

$\vec{M}_p$ – вектор средней кривизны распределения $\Delta_p$ в $E_n$;

$\Sigma_n$ – сеть Френе в $\Omega \subset E_n$;

$\tilde{\Sigma}_n$ – циклическая сеть Френе;

$k_i^j$ – $i$-тая кривизна линии $\omega^j$ сети $\Sigma_n$;

$\vec{k}_{ij}$ – $i$-тый вектор кривизны линии $\omega^j$ сети $\Sigma_n$;

$\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$ —-вынужденная кривизна линии $\omega^i$ вдоль направлении $\vec{e}_j$.

**Основные определения**

Говорят, что в области $G$ $n$-мерного вещественного $C^\infty$–многообразия $M$ задана сеть $\sum_n$, если в $G$ заданы $n$ семейств линий таких, что через каждую точку $X \in G$ проходит одна и только одна линия каждого семейства, причем векторы, касательные к этим кривым в точке $X$, образуют базис векторного пространства $T_X$ – касательного пространства к многообразию $M$ в точке $X$ [11].

Точка $S \in (X, \vec{e}_1)$, определяемая радиус-вектором $\vec{S} = \vec{X} + \nu\vec{e}_1$, называется фокусом [5] прямой $(X, \vec{e}_1)$, если $d\vec{S} \parallel \vec{e}_1$ при смещении точки $X$ по площадке $(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (т.е. $\omega^1 = 0$).

Псевдофокусом касательной $(X, \vec{e}_i)$ к линии $\omega^i$ данной сети называется такая точка $F_i^j \in (X, \vec{e}_i)$, смещение которой принадлежит плоскости $(X, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n)$, когда точка $X$ смещается в направлении линии $\omega^j (i \neq j)$ [5].

Линии $\omega^i, f(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения $f$, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках $X$ и $f(X)$ пересекаются, либо параллельны [15].

Для линии $\omega^i$ сети $\Sigma_p$ в $\Omega \subset E_4$ (все $\omega^k$=0, кроме $\omega^i$, $i$-фиксировано) $(i, j = 1, \ldots, p;\ \alpha = p + 1, \ldots, n;\ k = p + 1, \ldots, n)$ векторы $\vec{a}_{ij} = a_{ij}^k \vec{e}_k$,

$\vec{b}_{ij} = b_{ij}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ называются соответственно вектором относительной и вектором вынужденной кривизны поля $\vec{e}_i$ вдоль линии $\omega^j$ [65].

Сеть $\Sigma_3$ в $\Omega \subset E_3$ называется сетью Френе для линии $\omega^1$, если $(X, \vec{e}_2)$ – касательная к линии $\omega^2$ является вектором первой кривизны для линии $\omega^1$, $(X, \vec{e}_3)$ – касательная к линии $\omega^3$ сети $\Sigma_3$ является вектором второй кривизны для этой же линии $\omega^1$ сети $\Sigma_3$.

Сеть $\Sigma_3$ в $\Omega \subset E_3$ называется циклической сетью Френе, если реперы $\Re(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \Re'(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1), \Re''(X, \vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ являются, соответственно, реперами Френе для линий $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ одновременно. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_3$ [48].

Полем $\Delta_p$ $p$-мерных подпространств или $p$-распределением на многообразии $X_n$ называется соответствие

$$\Delta_p : x \in X_n \to \Delta_p(x) \subset T_x(X_n), \; p \le n,$$

где $T_x(X_n)$ – касательное пространство многообразия $X_n$ в точке $x \in X_n$, $\Delta_p(x)$ – $p$-мерное подпространство в $T_x(X_n)$ [29].

Вектор $$\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda_{ij}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, p, \; \alpha = p+1, p+2, \dots, n)$$

называется вектором средней кривизны распределения $\Delta_p$ [65].

# ВВЕДЕНИЕ

Данное исследование относится к значительным главам современной дифференциальной геометрии – теории отображений гладких многообразий.

Проблемами точечных соответствий пространств одинаковой размерности занимались А.П. Норден, В.В. Рыжков, М.А. Акивис, В.Т. Базылев и их ученики, а также другие геометры.

В работе В.В. Рыжкова [62] дан обзор работ по геометрии дифференцируемых, взаимно однозначных отображений пространств одинаковой размерности.

Основы геометрии плоских многомерных сетей заложены в работах В.Т. Базылева [3]-[5], [7], [9], [11]-[13], [15]. Работы [8]-[10], [14] В.Т. Базылева посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в $n$-мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

Теория дифференцируемых отображений евклидова пространства, имеет большой интерес не только для самой геометрии, она имеет широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Значительный интерес представляют дифференцируемые, частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданной сетью, так как от выбора сети зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, а также их рациональные решения. Данные сети и ее образы в различных отображениях применяются в решении многих задач теории линейных и нелинейных волн [66].

Настоящая работа посвящена исследованию частичных отображений евклидовых пространств $E_4$, $E_n$, порождаемых заданной циклической сетью Френе $\tilde{\Sigma}_4$, $\tilde{\Sigma}_n$ соответственно.

# ГЛАВА 1. Некоторые сведения из теории дифференцируемых отображений и сетей

## §1.1. Основные сведения из теории дифференцируемых отображений

Геометрии дифференцируемых отображений гладких многообразий посвящено большое число работ. Основные понятия и результаты дифференциальной геометрии точечных соответствий между пространствами приведены в обзорной работе В.В. Рыжкова [62].

В работах [8]-[10],[14] В.Т. Базылева рассматриваются различные вопросы дифференцируемых отображений областей и поверхностей в $n$-мерных проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

В работе Л.И. Алексеевой [1] найдены необходимое и достаточное условие для того, чтобы график $V_3$ отображения $f : E_3 \to E_3'$ был поверхностью нулевой скалярной кривизны в случае, когда основание отображения образовано характеристическими линиями отображения $f$. Доказано, что вторая поляра точки $X \in V_3$ будет при этом конусом второго порядка.

М.А. Чешкова в работе [68] рассматривает две гладкие поверхности $M^n$, $\overline{M}^n$ и диффеоморфизм $f : M^n \to \overline{M}^n$. Установлено, что если $f$ конформное отображение, а касательные плоскости $T_pM^n$ и $T_{f(p)}\overline{M}^n$ ортогональны для всех $p \in M^n$, то в соответствующих точках поверхностей равны тензоры Риччи, а отображение $f : M^n \to \overline{M}^n$ сохраняет линии кривизны, определяемые относительно векторов средних кривизн поверхностей.

В работах [72], [73] Й. Микеша рассматривается геодезические отображения Римановых пространств и пространств аффинной связности, также геодезические отображения Риччи пространств Эйнштейна.

Т.А. Дулалаевой исследованы [27] различные вопросы дифференциальной геометрии пары гиперраспределений в $n$-мерном проективном пространстве. Парой гиперраспределения, заданных в областях $\Omega$ и $\Omega'$ $n$-мерного проективного пространства называется пара$\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$, где $\Delta$ – ($n$-1)-мерное распределение в области $\Omega$ и $\overline{\Delta}$– в области $\Omega'$, причем области $\Omega$ и $\Omega'$ диффеоморфны. В этой работе уделяется внимание к изучению свойств сетей двойных линий отображения, инвариантно связанной с заданной парой. В работе [28] этого же автора доказано, что любая линия, принадлежащая гиперраспределению $\Delta$, является линией пары гиперраспределений $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_i^n = 0$. Геометрический смысл этого равенства, заключается в том, что соответствуют площадки гиперраспределений $\Delta(A)$ и $\overline{\Delta}(A)$ в индуцированном отображении $f_*$. Обращение в нуль относительного инварианта $\left(\Lambda_n^n\right)$ является необходимым и достаточным условием принадлежности образа линии $\omega^n$, $\omega^i = 0$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$, $\omega^n = \ell^n \theta$ в отображении $f$ гиперраспределению $\overline{\Delta}$.

В работах [46], [47] М.Н. Марюкова рассмотрены некоторые свойства линий кривизны пары $p$-распределений, заданных в областях $\Omega$ и $\Omega'$ пространства $E_n$, между которыми установлен диффеоморфизм. Найдены необходимое и достаточное условия их соответствия в отображении $f : \Omega \to \Omega'$. Исследована геометрия пары $\left(f, \Delta_p\right)$ в $n$-мерном евклидовом пространстве. Парой $\left(f, \Delta_p\right)$ называется диффеоморфизм $f$ области $\Omega$ в область $\Omega'$, где области $\Omega$ и $\Omega'$ принадлежат евклидову пространству $E_n$ и $\Delta_p$ – распределение, заданное в области $\Omega$. Установлены свойства новых сетей и тканей, определяемых с помощью пары $\left(f,\ \Delta_p\right)$.

В работе [37] С.В. Киреева рассматривает в проективном пространстве отображение $g:\Omega\to\Omega'$, в котором каждая линия двойная, в случае, когда области $\Omega\subset P_n$ и $\Omega'\subset P_n$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей. В работе [38] она рассматривает отображение $f$ области $\Omega$ проективного пространства $P_n$ в области $\Omega'\subset P_n$, переводящее точку $A$ в точку $B$. Области $\Omega$ и $\Omega'$ нормализованы в смысле А.П. Нордена одним и тем же семейством плоскостей $A\to\Pi_{n-1}(A)$, $B\to\Pi_{n-1}(A)$. Исследованы объекты отображения $f$ и его характеристические направления.

В работе [2] Н. Алиева рассматривает n-мерные евклидовы пространства $E$ и $D$ ($E,D$ – ортогональные пространства собственно $2n$-мерного евклидова пространства $C$, имеющие одну общую точку $O$). Исследовано дифференцируемое взаимно-однозначное отображение $T\subset V$ в $W$, которое переводит область $M\subset V$ в некоторую область $N\subset W$. Если точка $x$ описывает область $M$, точка $y=T(x)$ описывает область $N$, а точка $z$ с радиус вектором $z=x+y$ опишет область $M^*$ поверхности $V^*$, называемое графиком отображения $T$. Доказано, что поле вектора средней кривизны порождает на поверхности $V$ и $W$ одномерное распределение $F$ и $G$, соответственно.

В.И. Грачева в работах [23]-[26] рассмотрела дифференцируемое биективное отображение $T$ области $\Omega$ на $\bar{\Omega}$, где $\Omega\subset E_n, \bar{\Omega}\subset\bar{E}_n$, причем, $n$-мерные плоскости $E_n, \bar{E}_n$ вполне ортогональны в $E_{2n}$ и имеют общую точку $O$. Если $x_1\in\Omega$, $x_2=T\left(x_1\right)\in\bar{\Omega}$ и $x^i$, $\bar{x}^i$ соответственно являются координатами точек $x_1$, $x_2$ относительно некоторых ортонормированных реперов в $E_n, \bar{E}_n$, то отображение $T$ описывается функциями

$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые считаются достаточное число раз дифференцируемыми и имеющими в области $\Omega$ отличный от нуля якобиан. Множество точек $x \in E_{2n}$, для которых $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{Ox_1} + \overrightarrow{Ox_2}$, описывает в $E_{2n}$ $n$-мерную поверхность, называемую графиком отображения $T$. Изучены условия соответствия фокусов, а также псевдофокусов, взятых на прямых в указанных $n$-пространствах.

О.В. Казниной [34]-[36] рассмотрено одно из свойств сетей $\Sigma_p$ и $\bar{\Sigma}_p$, сохраняющееся в отображении $f: (V_p \subset E_n) \to (\bar{V}_p \subset E_{p+r})$. Найдены признаки некоторых свойств сетей $\Sigma_p \subset V_p$ и $\bar{\Sigma}_p \subset \bar{V}_p$.

В работе [64] Г.М. Силаева исследовала связь сети двойных линий отображения поверхностей в $n$-мерном евклидовом пространстве и ее образ при гиперсферическом изображении.

В работе [22] А.А. Борубаева и А.А. Чекеева исследованы равномерные аналоги некоторых важнейших классов топологических пространств, топологических групп и их непрерывных отображений и непрерывных гомоморфизмов.

В работах [48]-[53] Г. Матиевой изучены частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданным распределением, при этом вскрыты тесные связи между теориями отображений, сетей и распределений.

Заданием $p$-мерного распределения $\Delta_p$ в некоторой области $\Omega$ евклидова пространства $E_n$ инвариантным образом определяется распределение $\bar{\Delta}_{n-p}$, ортогонально дополнительное данному распределению.

Когда $p = 1, n = 3$ в области $\Omega \subset E_3$ имеется семейство гладких линий (интегральные линии 1-мерного распределения $\Delta_1$) такое, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. На каждой прямой $(X,\vec{e}_i)$ (где $(X,\vec{e}_i)$-координатные прямые репера Френе для линии $\omega^1$ заданного семейства, $i,j=1,2,3$) инвариантным образом определяется точка $F_i^j(i\neq j)$, так называемая псевдофокусом этой прямой. Когда точка $X$ смещается в области $\Omega$, точка $F_i^j$ описывает свою область $\Omega_i^j$. Получается отображение $f_i^j$ области $\Omega$ в область $\Omega_i^j$ такое, что точка $X$ переходит в точку $F_i^j$. Изучены свойства этих частичных отображений $f_i^j$.

При $p>1$ имеется два вектора $\vec{M}_p,\vec{\overline{M}}_{n-p}$– вектора средних кривизн распределений $\Delta_p$, $\overline{\Delta}_{n-p}$ соответственно. Когда точка $X$ смещается в области $\Omega\subset E_n$ точка $M$, определенная радиус-вектором $\vec{M}=\vec{M}_p+\vec{\overline{M}}_{n-p}$, описывает свою область $\overline{\Omega}$. Получено отображение $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ такое, что точка $X$ переходит в точку $M$. Изучены некоторые свойства этого частичного отображения.

В работах [16]-[21] Г.М. Борбоевой исследованы дифференцируемые, взаимно однозначные отображения поверхностей $\Phi$, $\Phi'$ $(Dim\hat{O}=Dim\hat{O}')$ в одном и том же евклидовом пространстве $E$, порождаемые заданной сетью $\Sigma$.

Найдены связи между геодезичностью и сопряженностью заданной сети и коразмерностью отображаемых пространств, изучена связь геометрии этого отображения с геометрией некоторых алгебраических образов в нормальной плоскости $N(X)$ поверхности $\Phi$.

В работах [68], [71], [72] рассматривалась геометрия отображений евклидовых пространств $T:E_n\to E'_n$, обобщающие конформные отображения.

## §1.2. Сеть Френе в $E_n$

Рассмотрим кривые в евклидовом пространстве $E_n$. Пространство $E_n$ является само к себе касательным в любой своей точке и векторы сопровождающего репера $\vec{\nu}^{\,i}_p$ принадлежат самому $E_n$. Мы будем обозначать их $\vec{\nu}_p$. Абсолютные дифференциалы в формулах Френе означают дифференцирование векторов $\vec{\nu}_p$ в геометрическом смысле, так что формулы Френе примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\vec{\nu}_0}{ds} = \qquad\quad \chi_1\vec{\nu}_1,\\
&\frac{d\vec{\nu}_1}{ds} = \pm\chi_1\vec{\nu}_0 + \chi_2\vec{\nu}_2,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\frac{d\vec{\nu}_{n-2}}{ds} = \pm\chi_{n-2}\vec{\nu}_{n-3} + \chi_{n-1}\vec{\nu}_{n-1},\\
&\frac{d\vec{\nu}_{n-2}}{ds} = \pm\chi_{n-1}\vec{\nu}_{n-2}.
\end{aligned}\right\}$$

В частности, в трехмерном евклидовом пространстве

$$\frac{d\vec{\nu}_0}{ds} = \chi_1\vec{\nu}_1,\ \frac{d\vec{\nu}_1}{ds} = \pm\chi_1\vec{\nu}_0 + \chi_2\vec{\nu}_2,\ \frac{d\vec{\nu}_2}{ds} = \pm\chi_2\vec{\nu}_1.$$

В обычном пространстве, т.е. в евклидовом пространстве $E_3$, в последних двух формулах, как мы знаем, нужно выбрать из знаков $\pm$ знак $-$. Мы получаем формулы Френе в их обычной записи, где $\vec{\nu}_0, \vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2$ – орты, направленные соответственно по касательной, главной нормали и бинормали к кривой, а $\chi_1, \chi_2$ – соответственно кривизна и кручение. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что в нашей теории $\chi_1, \chi_2$ всегда положительны, в то время как обычно принято приписывать кручению $\chi_2$ знак $\pm$ в зависимости от "правой" или "левой" закрученности кривой. Это связано с тем, что в нашей теории сопровождающий репер будет правым для “право-закрученной” кривой и левым для “лево-закрученной”; обычно же сопровождающий репер выбирается во всех случаях правым; это и вызывает появление отрицательного кручения $\chi_2$ в случае “лево-закрученной” кривой.

Имеет место следующая

**Теорема.** Пусть произвольным образом заданы непрерывные, положительные функции некоторого аргумента $s$

$$\chi_1(s),\ \chi_2(s),\ \ldots,\chi_{n-1}(s),\ s_0 \le s \le s_1 .$$

Кроме того, в каком-нибудь $E_n$ задан ортонормированный репер $(M_0, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1})$, где $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ – единичные и мнимоединичные векторы, чередующиеся произвольным образом. Тогда в этом $E_n$ всегда существует кривая, и притом единственная, вдоль которой кривизны $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{n-1}$ выражаются наперед заданными функциями через длину дуги $s$ (в случае $\vec{e}_0^{\,2} = 1$) или через параметр $\sigma = \dfrac{s}{i}$ (в случае $\vec{e}_0^{\,2} = -1$) и сопровождающий репер которой при $s = s_0$ совпадает с наперед заданным репером [60].

# Глава 2. Свойства частичных отображений пространства $E_4$, порождаемых заданной циклической сетью Френе

## §2.1. Циклическая сеть Френе пространстве $E_4$ и ею определяемые некоторые распределения

В области $\Omega$ евклидова пространства $E_4$, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left( X, \vec{e}_i \right)$ $\left( i, j, k = 1,2,3,4 \right)$ в области $\Omega$ выбран так, чтобы он был репером Френе [60], [65] для линии $\omega^1$ заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{2.1.1}$$

Формы $\omega^i$, $\omega_i^k$ удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2.1.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе $\tilde{\Sigma}_4$ для линии $\omega^1$ заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети $\tilde{\Sigma}_4$, формы $\omega_i^k$ становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{2.1.3}$$

В силу последнего равенства формулы (2.1.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{2.1.4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (2.1.3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (2.1.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j .$$

В силу равенства (2.1.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left( d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [67] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = B_{ijm}^k \omega^m , \tag{2.1.5}$$

где $B_{ijm}^k = \Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{i\ell}^k \Lambda_{jm}^\ell + \Lambda_{\ell j}^k \Lambda_{im}^\ell$.

Система величин $\left\{ \Lambda_{ij}^k , \Lambda_{ijm}^k \right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии $\omega^1$ заданного семейства имеют вид:

$$\begin{aligned}
d_1\vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2 , \\
d_1\vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3 , \\
d_1\vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4 , \\
d_1\vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3
\end{aligned}$$

и

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{31}^1 = 0 , \; \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0 , \tag{2.1.6}$$

$$\Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0 . \tag{2.1.7}$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$ - первая, вторая и третья кривизны линии $\omega^1$ соответственно (где $d_1$ - символ дифференцирования вдоль линии $\omega^1$).

Псевдофокус [5] $F_i^j$ $(i \neq j)$ касательной к линии $\omega^i$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \tag{2.1.8}$$

На каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X, \vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы $F_1^2, F_1^3, F_1^4$, на прямой $(X, \vec{e}_2)$ – $F_2^1, F_2^3, F_2^4$, на прямой $(X, \vec{e}_3)$ – $F_3^1, F_3^2, F_3^4$, на прямой $(X, \vec{e}_4)$ – $F_4^1, F_4^2, F_4^3$.

Сеть $\tilde{\Sigma}_4$ в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [48], если реперы $\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega^3$, $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ одновременно.

Пусть сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе. Тогда репер $\Re_{\bar{i}}$ является репером Френе для линии $\omega^{\bar{i}}$ $(\bar{i} = 2,3,4)$.

Формулы Френе для линии $\omega^2$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&d_2\vec{e}_2 = \Lambda_{22}^3\vec{e}_3, \\
&d_2\vec{e}_3 = \Lambda_{32}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4 = -\Lambda_{22}^3\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4, \\
&d_2\vec{e}_4 = \Lambda_{42}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{42}^3\vec{e}_3 = -\Lambda_{32}^4\vec{e}_3 + \Lambda_{42}^1\vec{e}_1, \\
&d_2\vec{e}_1 = \Lambda_{12}^4\vec{e}_4 = -\Lambda_{42}^1\vec{e}_4
\end{aligned}$$

и имеют место следующие соотношения:

$$\Lambda_{22}^1 = -\Lambda_{12}^2 = 0, \ \Lambda_{22}^4 = -\Lambda_{42}^2 = 0, \tag{2.1.9}$$

$$\Lambda_{32}^1 = -\Lambda_{12}^3 = 0, \tag{2.1.10}$$

где $k_1^2 = \Lambda_{22}^3$, $k_2^2 = \Lambda_{32}^4$, $k_3^2 = \Lambda_{12}^4$ – первая, вторая и третья кривизны линии $\omega^2$ сети $\tilde{\Sigma}_4$, $d_2$ – символ дифференцирования вдоль линии $\omega^2$.

Так как репер $\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ является репером Френе для линии $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$, то имеют место следующие равенства:

$$d_3\vec{e}_3 = \Lambda_{33}^4\vec{e}_4,$$
$$d_3\vec{e}_4 = -\Lambda_{33}^4\vec{e}_3 + \Lambda_{43}^1\vec{e}_1,$$
$$d_3\vec{e}_1 = -\Lambda_{43}^1\vec{e}_4 + \Lambda_{13}^2\vec{e}_2,$$
$$d_3\vec{e}_2 = -\Lambda_{13}^2\vec{e}_1,$$

также

$$\Lambda_{33}^1 = -\Lambda_{13}^3 = 0,\ \Lambda_{33}^2 = -\Lambda_{23}^3 = 0, \tag{2.1.11}$$

$$\Lambda_{43}^2 = -\Lambda_{23}^4 = 0, \tag{2.1.12}$$

где $k_1^3 = \Lambda_{33}^4$, $k_2^3 = \Lambda_{43}^1$, $k_3^3 = \Lambda_{13}^2$ – первая, вторая и третья кривизны линии $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$, $d_3$ – символ дифференцирования вдоль этой линии.

Репер $\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ является репером Френе для линии $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$. Тогда формулы Френе для этой линии имеют вид:

$$d_4\vec{e}_4 = \Lambda_{44}^1\vec{e}_1,$$
$$d_4\vec{e}_1 = -\Lambda_{44}^1\vec{e}_4 + \Lambda_{14}^2\vec{e}_2,$$
$$d_4\vec{e}_2 = -\Lambda_{14}^2\vec{e}_1 + \Lambda_{24}^3\vec{e}_3,$$
$$d_4\vec{e}_3 = -\Lambda_{24}^3\vec{e}_2$$

и имеют место соотношения:

$$\Lambda_{44}^2 = -\Lambda_{24}^4 = 0,\ \Lambda_{44}^3 = -\Lambda_{34}^4 = 0, \tag{2.1.13}$$

$$\Lambda_{14}^3 = -\Lambda_{34}^1 = 0, \tag{2.1.14}$$

где $k_1^4 = \Lambda_{44}^1$, $k_2^4 = \Lambda_{14}^2$, $k_3^4 = \Lambda_{24}^3$ – первая, вторая и третья кривизны линии $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$, $d_4$ – символ дифференцирования вдоль этой линии.

Геометрический смысл соотношений (2.1.6) заключается в том, что псевдофокусы $F_3^1 \in (X, \vec{e}_3)$, $F_4^1 \in (X, \vec{e}_4)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_4$.

Геометрический смысл соотношений (2.1.9) заключается в том, что псевдофокусы $F_1^2 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_4^2 \in (X, \vec{e}_4)$ являются бесконечно удаленными точками пространства $\overline{E}_4$.

Геометрический смысл соотношений (2.1.11) заключается в том, что псевдофокусы $F_1^3 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_2^3 \in (X, \vec{e}_2)$ уходят в бесконечность в пространстве $\overline{E}_4$.

Геометрический смысл соотношений (2.1.13) заключается в том, что псевдофокусы $F_2^4 \in (X, \vec{e}_2)$, $F_3^4 \in (X, \vec{e}_3)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_4$.

Обратно, пусть имеют место соотношения (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14). Тогда реперы $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \Re_4$ являются реперами Френе соответственно для линий $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega^3$, $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ одновременно, т.е. сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе.

Таким образом доказана

**Теорема 2.1.1.** Сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе тогда и только тогда, когда имеют места условия: (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14).

Из равенств (2.1.6), (2.1.9), (2.1.11), (2.1.13) следует, что на каждой касательной к линиям сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ существует только по одному псевдофокусу ($F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$, $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$, $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$), а остальные ($F_1^2, F_1^3 \in (X, \vec{e}_1)$, $F_2^3, F_2^4 \in (X, \vec{e}_2)$, $F_3^1, F_3^4 \in (X, \vec{e}_3)$, $F_4^1, F_4^2 \in (X, \vec{e}_4)$) являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства.

Из равенств (2.1.7), (2.1.10), (2.1.12), (2.1.14) получим, что $\vec{\Lambda}_{21}$, $\vec{\Lambda}_{43} \in (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$; $\vec{\Lambda}_{32}$, $\vec{\Lambda}_{14} \in (X, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$.

**Следствие 2.1.1.** Если сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, то вторые и третье кривизны всех ее линий равны нулю.

Пусть сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе. Заданием в области $\Omega$ циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе определяются следующие двумерные и
трехмерные распределения:

$$\Delta_2^{(1,2)} = \left( X, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right), \; \Delta_2^{(2,3)} = \left( X, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right), \; \Delta_2^{(3,4)} = \left( X, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right),$$

$$\Delta_2^{(2,4)} = \left( X, \vec{e}_2, \vec{e}_4 \right), \; \Delta_2^{(1,3)} = \left( X, \vec{e}_1, \vec{e}_3 \right), \; \Delta_2^{(1,4)} = \left( X, \vec{e}_1, \vec{e}_4 \right),$$

$$\Delta_3^{(1,2,3)} = \left( X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right), \; \Delta_3^{(2,3,4)} = \left( X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right), \; \Delta_3^{(3,4,1)} = \left( X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right).$$

Найдем векторов средних кривизн этих распределений:

$$\vec{M}_2^{(1,2)} = \frac{1}{2} \Lambda_{22}^3 \vec{e}_3 = \frac{1}{2} k_1^2 \vec{e}_3 = \frac{1}{2} \vec{k}_{12}, \tag{2.1.15}$$

следовательно, вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(1,2)}$ и вектор первой кривизны линии $\omega^2$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ коллинеарны, точнее вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(1,2)}$ два раза короче, чем вектор первой кривизны линии $\omega^2$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(2,3)}$ имеет
вид:

$$\vec{M}_2^{(2,3)} = \frac{1}{2} \Lambda_{33}^4 \vec{e}_4 = \frac{1}{2} k_1^3 \vec{e}_4 = \frac{1}{2} \vec{k}_{13}. \tag{2.1.16}$$

$\vec{M}_2^{(3,4)}$ – вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(3,4)}$ имеет следующий вид:

$$\vec{M}_2^{(3,4)} = \frac{1}{2} \Lambda_{44}^1 \vec{e}_1 = \frac{1}{2} k_1^4 \vec{e}_1 = \frac{1}{2} \vec{k}_{14}. \tag{2.1.17}$$

Аналогично найдем:

$$\vec{M}_2^{(2,4)} = \frac{1}{2} \left( \Lambda_{44}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{22}^3 \vec{e}_3 \right) = \frac{1}{2} \left( \vec{k}_{14} + \vec{k}_{12} \right); \tag{2.1.18}$$

$$\vec{M}_2^{(1,3)} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{33}^4\vec{e}_4\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{11} + \vec{k}_{13}\right); \qquad (2.1.19)$$

$$\vec{M}_2^{(1,4)} = \frac{1}{2}\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{k}_{11}; \qquad (2.1.20)$$

$$\vec{M}_3^{(1,2,3)} = \frac{1}{3}\left(\Lambda_{11}^4 + \Lambda_{22}^4 + \Lambda_{33}^4\right)\vec{e}_4 .$$

В силу равенств (2.1.6), (2.1.9) отсюда имеем:

$$\vec{M}_3^{(1,2,3)} = \frac{1}{3}\Lambda_{33}^4\vec{e}_4 = \frac{1}{3}\vec{k}_{13} . \qquad (2.1.21)$$

Найдем:

$$\vec{M}_3^{(2,3,4)} = \frac{1}{3}\left(\Lambda_{22}^1 + \Lambda_{33}^1 + \Lambda_{44}^1\right)\vec{e}_1 .$$

Учитывая (2.1.9), (2.1.11) отсюда получим:

$$\vec{M}_3^{(2,3,4)} = \frac{1}{3}\Lambda_{44}^1\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\vec{k}_{14} . \qquad (2.1.22)$$

Найдем:

$$\vec{M}_3^{(1,3,4)} = \frac{1}{3}\left(\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{33}^2 + \Lambda_{44}^2\right)\vec{e}_2 .$$

В силу равенств (2.1.11), (2.1.13) из последнего равенства имеем:

$$\vec{M}_3^{(1,3,4)} = \frac{1}{3}\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{k}_{11} . \qquad (2.1.23)$$

Из (2.1.17), (2.1.15), (2.1.18) следует, что вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(2,4)} = \left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_4\right)$ равен сумме векторов средних кривизн двух двумерных распределений $\Delta_2^{(1,2)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$, $\Delta_2^{(3,4)} = \left(X, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$, т.е.

$$\vec{M}_2^{(2,4)} = \vec{M}_2^{(3,4)} + \vec{M}_2^{(1,2)} . \qquad (2.1.24)$$

Из (2.1.19), (2.1.20), (2.1.16) получим, что

$$\vec{M}_2^{(1,3)} = \vec{M}_2^{(1,4)} + \vec{M}_2^{(2,3)} , \qquad (2.1.25)$$

вектор средней кривизны двумерного распределения $\Delta_2^{(1,3)}$ равен сумме векторов средних кривизн двух двумерных распределений: $\Delta_2^{(1,4)}$, $\Delta_2^{(2,3)}$.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.1.2.** Если заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, то векторы средних кривизн двумерных и трехмерных распределений определенных циклической сетью Френе удовлетворяют следующим уравнениям соответственно: (2.1.24), (2.1.25) и (2.1.21), (2.1.22), (2.1.23).

## §2.2. Свойства частичного отображения, определяемого псевдофокусом $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$

Рассмотрим псевдофокус $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$, определяемый радиус-вектором

$$\vec{F}_4^3 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4. \qquad (2.2.1)$$

Когда точка $X$ смещается в области $\Omega$, точка $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$ описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_4$. Получим частичное отображение $f : \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f(X) = F_4^3$.

Продифференцируя обычным образом равенство (2.2.1) получим:

$$d\vec{F}_4^3 = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\right)\vec{e}_4 - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}d\vec{e}_4.$$

Учитывая (2.2.1) отсюда имеем:

$$d\vec{F}_4^3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{43}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\omega_4^i\vec{e}_i.$$

В силу равенств (2.1.3), (2.1.4) последнее равенство имеет вид:

$$d\vec{F}_4^3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\hat{A}_{43m}^3\omega^m}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{4m}^k\omega^m}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k = \left[\vec{e}_1 + \frac{\hat{A}_{431}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{41}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k\right]\omega^1 +$$
$$+\left[\vec{e}_2 + \frac{\hat{A}_{432}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{42}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k\right]\omega^2 + \left[\vec{e}_3 + \frac{\hat{A}_{433}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{43}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k\right]\omega^3 +$$
$$+\left[\vec{e}_4 + \frac{\hat{A}_{434}^3}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{44}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k\right]\omega^4,$$

где $B_{43m}^3 = \Lambda_{43m}^3 + \Lambda_{4\ell}^3\Lambda_{3m}^\ell + \Lambda_{\ell 3}^3\Lambda_{4m}^\ell$, $d\Lambda_{43}^3 = B_{43m}^3\omega^m$.

Введем обозначения:

$$\vec{c}_1=\vec{e}_1+\frac{\hat{A}^3_{431}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k; \qquad \vec{c}_2=\vec{e}_2+\frac{\hat{A}^3_{432}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_3=\vec{e}_3+\frac{\hat{A}^3_{433}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k; \qquad \vec{c}_4=\vec{e}_4+\frac{\hat{A}^3_{434}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k.$$

Тогда получим:

$$d\vec{F}^3_4=\omega^1\vec{c}_1+\omega^2\vec{c}_2+\omega^3\vec{c}_3+\omega^4\vec{c}_4.$$

Область $\Omega^3_4$ отнесем к подвижному реперу $\Re'=\left(F^3_4,\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3,\vec{c}_4\right)$.

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, координатные векторы репера $\Re'$ имеют вид:

$$\vec{c}_1=\vec{e}_1-\frac{\Lambda^3_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3+\frac{\hat{A}^3_{431}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4; \qquad \vec{c}_2=-\frac{\Lambda^1_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1+\vec{e}_2-\frac{\Lambda^3_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3+\frac{\hat{A}^3_{432}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_3=-\frac{\Lambda^1_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1+\frac{\hat{A}^3_{433}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\vec{e}_4; \qquad \vec{c}_4=-\frac{\Lambda^1_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1+\left(1+\frac{\hat{A}^3_{434}}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}\right)\vec{e}_4. \tag{2.2.2}$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $f:\Omega\to\Omega^3_4$ является невырожденным.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1,\vec{c}_1,\overrightarrow{XF^3_4}=-\left(1/\Lambda^3_{43}\right)\vec{e}_4$, где $\vec{c}_1=f\left(\vec{e}_1\right)$. Учитывая (2.2.2), найдем: $\left(\vec{e}_1,\vec{c}_1,\overrightarrow{XF^3_4}\right)=0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^3_{41}=0$ (т.е. $k^1_3=\Lambda^3_{41}$ третья кривизна линии $\omega^1$ равна нулю).

Аналогичным образом рассмотрим векторы $\vec{e}_2$, $\vec{c}_2$, $\overrightarrow{XF^3_4}$. Они компланарны тогда и только тогда, когда $\Lambda^1_{42}=0$, $\Lambda^3_{42}=0$ (т.е. вторая и третья кривизны линии $\omega^2$ равны нулю соответственно).

Потребуя компланарность векторов $\vec{e}_3$, $\vec{c}_3$, $\overrightarrow{XF^3_4}$ получим, что $\Lambda^1_{43}=0$ (т.е. вторая кривизна линии $\omega^3$ равна нулю).

Компланарность векторов $\vec{e}_4$, $\vec{c}_4$, $\overrightarrow{XF_4^3}$ очевидна. Таким образом, доказана

**Теорема 2.2.1**. а) Линия $\omega^1$ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $f : \Omega \to \Omega_4^3$ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю;

б) линия $\omega^2$ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $f$ тогда и только тогда, когда вторая и третья кривизны равны нулю соответственно;

в) линия $\omega^3$ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $f$ тогда и только тогда, когда вторая кривизна этой линии равна нулю;

г) линия $\omega^4$ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $f$.

Найдем скалярные произведения $\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j \ \left(i \neq j\right)$:

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = B_{431}^3 B_{432}^3 + \Lambda_{41}^3 \Lambda_{42}^3 \left(\Lambda_{43}^3\right)^2 - \Lambda_{42}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^3; \tag{2.2.3}$$

$$\vec{c}_1\vec{c}_3 = \hat{A}_{431}^3 \hat{A}_{433}^3 - \Lambda_{43}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^3 ; \tag{2.2.4}$$

$$\vec{c}_1\vec{c}_4 = B_{431}^3 \left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + B_{434}^3\right] - \Lambda_{44}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^3 ; \tag{2.2.5}$$

$$\vec{c}_2\vec{c}_3 = \hat{A}_{432}^3 \hat{A}_{433}^3 + \Lambda_{42}^1 \Lambda_{43}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^2; \tag{2.2.6}$$

$$\vec{c}_2\vec{c}_4 = B_{432}^3 \left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + B_{434}^3\right] + \Lambda_{42}^1 \Lambda_{44}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^2; \tag{2.2.7}$$

$$\vec{c}_3\vec{c}_4 = B_{433}^3 \left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + B_{434}^3\right] + \Lambda_{43}^1 \Lambda_{44}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^2. \tag{2.2.8}$$

Выясним геометрический смысл правых частей этих равенств.

Рассмотрим векторы:

$$\vec{\Lambda}_{42} = d_2\vec{e}_4 = \Lambda_{42}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{42}^3 \vec{e}_3, \ \vec{\Lambda}_{43} = d_3\vec{e}_4 = \Lambda_{43}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{43}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{43}^3 \vec{e}_3 .$$

Введем обозначения:

$$\vec{\Lambda}'_{42} = \text{ï ð}_{\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)}\vec{\Lambda}_{42};\;\; \vec{\Lambda}'_{43} = \text{ï ð}_{\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)}\vec{\Lambda}_{43}.$$

Тогда имеем:

$$\Lambda^1_{42}\Lambda^1_{43} = \vec{\Lambda}'_{42}\vec{\Lambda}'_{43}.$$

Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{13} = \Lambda^4_{33}\vec{e}_4 = -\Lambda^3_{43}\vec{e}_4$ линии $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ вдоль направлениях $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ :

$$d_2\left(\vec{k}_{13}\right) = d_2\left(\Lambda^4_{33}\vec{e}_4\right) = d_2\left(-\Lambda^3_{43}\vec{e}_4\right) = -B^3_{432}\vec{e}_4 - \Lambda^3_{43}\left(\Lambda^1_{42}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{42}\vec{e}_3\right);$$

$$d_3\left(\vec{k}_{13}\right) = d_3\left(\Lambda^4_{33}\vec{e}_4\right) = d_3\left(-\Lambda^3_{43}\vec{e}_4\right) = -B^3_{433}\vec{e}_4 - \Lambda^3_{43}\left(\Lambda^1_{43}\vec{e}_1 + \Lambda^2_{43}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{43}\vec{e}_3\right).$$

Отсюда имеем:

$$\vec{e}_4 \cdot d_3\vec{k}_{13} = -B^3_{433};\quad \vec{e}_4 \cdot d_2\vec{k}_{13} = -B^3_{432}.$$

Аналогично найдем:

$$\vec{e}_4 \cdot d_1\vec{k}_{13} = -B^3_{431};\quad \vec{e}_4 \cdot d_4\vec{k}_{13} = -B^3_{434}.$$

Учитывая последние равенства для $B^3_{431}, B^3_{432}, B^3_{433}, B^3_{434}$ равенство (2.2.6) напишем в виде:

$$\vec{c}_2\vec{c}_3 = \left(\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right) + \left(\vec{\Lambda}'_{42}\vec{\Lambda}'_{43}\right)\vec{k}_{13}{}^2 \qquad (2.2.6)'$$

Аналогичным образом равенства (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), (2.2.7), (2.2.8) имеют вид:

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \left(\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right) - \vec{k}_{13}{}^2\left[\vec{\Lambda}_{12}\vec{k}_{13} - \vec{\Lambda}_{41}\vec{\Lambda}_{42}\right]; \qquad (2.2.3)'$$

$$\vec{c}_1\vec{c}_3 = \left(\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right) - \vec{k}_{13}{}^2\left(\vec{\Lambda}_{13}\vec{k}_{13}\right); \qquad (2.2.4)'$$

$$\vec{c}_1\vec{c}_4 = \left(-\vec{e}_4 d_1\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}{}^2 + \left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right] - k^4_1\left(k^3_1\right)^3; \qquad (2.2.5)'$$

$$\vec{c}_2\vec{c}_4 = \left(-\vec{e}_4 d_2\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}{}^2 + \left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right] + \left(\vec{\Lambda}_{42}\vec{k}_{14}\right)\vec{k}_{13}{}^2; \qquad (2.2.7)'$$

$$\vec{c}_3\vec{c}_4 = \left(-\vec{e}_4 d_3\vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}{}^2 + \left(-\vec{e}_4 d_4\vec{k}_{13}\right)\right] + \vec{k}_{13}{}^2\left(\vec{k}_{14}\vec{\Lambda}_{43}\right). \qquad (2.2.8)'$$

Следовательно, справедлива

**Теорема 2.2.2.** Образ данной циклической сети Френе в отображении $f:\Omega \to \Omega_4^3$ является ортогональной тогда и только тогда, когда имеют места равенства:

$$B_{431}^3 B_{432}^3 + \Lambda_{41}^3 \Lambda_{42}^3 \left(\Lambda_{43}^3\right)^2 - \Lambda_{42}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^3 = 0; \tag{2.2.9}$$

$$\hat{A}_{431}^3 \hat{A}_{433}^3 - \Lambda_{43}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^3 = 0; \tag{2.2.10}$$

$$B_{431}^3 \left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + B_{434}^3\right] - \Lambda_{44}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^3 = 0; \tag{2.2.11}$$

$$\hat{A}_{432}^3 \hat{A}_{433}^3 + \Lambda_{42}^1 \Lambda_{43}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^2 = 0; \tag{2.2.12}$$

$$B_{432}^3 \left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + B_{434}^3\right] + \Lambda_{42}^1 \Lambda_{44}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^2 = 0; \tag{2.2.13}$$

$$B_{433}^3 \left[\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + B_{434}^3\right] + \Lambda_{43}^1 \Lambda_{44}^1 \left(\Lambda_{43}^3\right)^2 = 0. \tag{2.2.14}$$

Геометрический смысл этих равенств заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_2 \vec{k}_{13}\right) = \vec{k}_{13}^{\,2}\left[\vec{\Lambda}_{12}\vec{k}_{13} - \vec{\Lambda}_{41}\vec{\Lambda}_{42}\right]; \tag{2.2.9$'$}$$

$$\left(\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3 \vec{k}_{13}\right) = \vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{13}\vec{k}_{13}\right); \tag{2.2.10$'$}$$

$$\left(-\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2} + \left(-\vec{e}_4 d_4 \vec{k}_{13}\right)\right] = k_1^4 \left(k_1^3\right)^3; \tag{2.2.11$'$}$$

$$\left(\vec{e}_4 d_2 \vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3 \vec{k}_{13}\right) = -\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}'_{42}\vec{\Lambda}'_{43}\right); \tag{2.2.12$'$}$$

$$\left(-\vec{e}_4 d_2 \vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2} + \left(-\vec{e}_4 d_4 \vec{k}_{13}\right)\right] = -\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{\Lambda}_{42}\vec{k}_{14}\right); \tag{2.2.13$'$}$$

$$\left(-\vec{e}_4 d_3 \vec{k}_{13}\right)\left[\vec{k}_{13}^{\,2} + \left(-\vec{e}_4 d_4 \vec{k}_{13}\right)\right] = -\vec{k}_{13}^{\,2}\left(\vec{k}_{14}\vec{\Lambda}_{43}\right). \tag{2.2.14$'$}$$

Равенства (2.2.10)′, (2.2.12)′ можно переписать и в другом виде:

$$\left(\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3 \vec{k}_{13}\right) = k_2^3 \left(k_1^3\right)^3; \tag{2.2.10$''$}$$

$$\left(\vec{e}_4 d_2 \vec{k}_{13}\right)\left(\vec{e}_4 d_3 \vec{k}_{13}\right) = k_3^2 k_2^3 \left(k_1^3\right)^2; \tag{2.2.12$''$}$$

где $k_3^2 = \Lambda_{12}^4 = -\Lambda_{42}^1$ – третья кривизна линии $\omega^2$; $k_2^3 = \Lambda_{43}^1 = -\Lambda_{13}^4$ – вторая кривизна линии $\omega^3$.

Найдем $\vec{c}_1{}^2 = \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1$:

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = 1 + \frac{\left(\Lambda_{41}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2} + \frac{\left(B_{431}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4}.$$

Тогда

$$\left|\vec{c}_1\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4 + \left(\Lambda_{41}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + \left(B_{431}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4}}.$$

Пусть $\left|\vec{c}_1\right| = 1$, тогда

$$\left(\Lambda_{43}^3\right)^4 + \left(\Lambda_{41}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + \left(B_{431}^3\right)^2 = \left(\Lambda_{43}^3\right)^4.$$

Отсюда имеем:

$$\left(\Lambda_{41}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 = -\left(B_{431}^3\right)^2, \tag{2.2.15}$$

Геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left(k_3^1\right)^2\left(k_1^3\right)^2 = -\left(\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{13}\right)^2, \tag*{(2.2.15)$'$}$$

где $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3$ – третья кривизна линии $\omega^1$, $k_1^3 = \Lambda_{33}^4 = -\Lambda_{43}^3$ – первая кривизна линии $\omega^3$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Найдем $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = \vec{c}_2{}^2$:

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = 1 + \frac{\left(B_{432}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4} + \frac{\left(\Lambda_{42}^1\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2} + \frac{\left(\Lambda_{42}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}.$$

Тогда

$$\left|\vec{c}_2\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4 + \left(B_{432}^3\right)^2 + \left(\Lambda_{42}^1\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + \left(\Lambda_{42}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^3\right)^4}}.$$

Пусть $\left|\vec{c}_2\right| = 1$. Тогда

$$\left(\Lambda_{43}^3\right)^4 + \left(B_{432}^3\right)^2 + \left(\Lambda_{42}^1\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 + \left(\Lambda_{42}^3\right)^2\left(\Lambda_{43}^3\right)^2 = \left(\Lambda_{43}^3\right)^4.$$

Отсюда имеем:

$$\left(B^3_{432}\right)^2=-\left(\Lambda^3_{43}\right)^2\left[\left(\Lambda^1_{42}\right)^2+\left(\Lambda^3_{42}\right)^2\right], \qquad (2.2.16)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_4\cdot d_2\vec{k}_{13}\right)^2=-\left(k^3_1\right)^2\left[\left(k^2_3\right)^2+\left(k^2_2\right)^2\right], \qquad (2.2.16)'$$

где $k^2_3=\Lambda^4_{12}=-\Lambda^1_{42}$ – третья кривизна, $k^2_2=\Lambda^4_{32}=-\Lambda^3_{42}$ – вторая кривизна линии $\omega^2$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Равенство (2.2.16)′ можно переписать в виде:

$$\left(k^3_1\right)^2=-\frac{\left(\vec{e}_4\cdot d_2\vec{k}_{13}\right)}{\left(k^2_3\right)^2+\left(k^2_2\right)^2},$$

где $k^3_1=\Lambda^4_{33}=-\Lambda^3_{43}$ – первая кривизна линии $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Аналогичным образом найдем:

$$\vec{c}_3\cdot\vec{c}_3=\frac{\left(\Lambda^1_{43}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}+\frac{\left(B^3_{433}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^4},$$

$$\left|\vec{c}_3\right|=\sqrt{\frac{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2\left(\Lambda^1_{43}\right)^2+\left(B^3_{433}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^4}}.$$

Пусть $\left|\vec{c}_3\right|=1$. Тогда из последнего равенства имеем:

$$\left(\Lambda^3_{43}\right)^2\left(\Lambda^1_{43}\right)^2+\left(B^3_{433}\right)^2=\left(\Lambda^3_{43}\right)^4$$

или

$$\left(\Lambda^1_{43}\right)^2=\frac{\left(\Lambda^3_{43}\right)^4-\left(B^3_{433}\right)^2}{\left(\Lambda^3_{43}\right)^2}, \qquad (2.2.17)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(k^3_2\right)^2=\frac{\left(k^3_1\right)^4-\left(\vec{e}_4\cdot d_3\vec{k}_{13}\right)^2}{\left(k^3_1\right)^2}, \qquad (2.2.17)'$$

где $k^3_2=\Lambda^1_{43}=-\Lambda^4_{13}$ – вторая кривизна линии $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Найдем

$$\vec{c}_4 \cdot \vec{c}_4 = \frac{\left(\Lambda_{44}^{1}\right)^2}{\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^2} + \left[1 + \frac{B_{434}^{3}}{\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^2}\right]^2,$$

$$\left|\vec{c}_4\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^2\left(\Lambda_{44}^{1}\right)^2 + \left[\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^2 + B_{434}^{3}\right]^2}{\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^4}}\,.$$

Потребуем, чтобы $\left|\vec{c}_4\right| = 1$. Тогда имеем:

$$\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^2\left(\Lambda_{44}^{1}\right)^2 + \left[\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^2 + B_{434}^{3}\right]^2 = \left(\Lambda_{43}^{3}\right)^4$$

или

$$\left(\Lambda_{44}^{1}\right)^2 = \frac{\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^4 - \left[\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^2 + B_{434}^{3}\right]^2}{\left(\Lambda_{43}^{3}\right)^2}, \qquad (2.2.18)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(k_1^4\right)^2 = \frac{\left(k_1^3\right)^4 - \left[\left(k_1^3\right)^2 + \left(-\vec{e}_4 \cdot d_4\vec{k}_{13}\right)\right]^2}{\left(k_1^3\right)^2}, \qquad (2.2.18)'$$

где $k_1^4 = \Lambda_{44}^{1} = -\Lambda_{14}^{4}$ – первая кривизна линии $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$. Таким образом доказана

**Теорема 2.2.3.** Отображение $f : \Omega \to \Omega_4^3$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия: (2.2.15) – (2.2.18).

## §2.3. Свойства частичного отображения, порождаемого псевдофокусом $F_2^1$ на касательной к линии $\omega^2$ заданной циклической сети Френе

Рассмотрим равенство

$$\vec{F}_2^1 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{11}^2}\vec{e}_2\,, \tag{2.3.1}$$

которое определяет псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ на касательной $(X, \vec{e}_2)$ к линии $\omega^2$ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$.

Когда точка $X$ смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ описывает свою область $\Omega_2^1 \subset E_4$. Получаем частичное отображение $g:\ \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $g(X) = F_2^1$.

Продифференцируем обычным образом равенство (2.3.1) и учитываем деривационные формулы:

$$d\vec{F}_2^1 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2\right) = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\right)\vec{e}_2 - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}d\vec{e}_2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{21}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\omega_2^i\vec{e}_i\,.$$

В силу равенства (2.1.4) последнее равенство имеет вид:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{21m}^1 + \Lambda_{2\ell}^1\Lambda_{1m}^\ell + \Lambda_{\ell 1}^1\Lambda_{2m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\omega_2^i\vec{e}_i\,.$$

Введем обозначение:

$$B_{21m}^1 = \Lambda_{21m}^1 + \Lambda_{2\ell}^1\Lambda_{1m}^\ell + \Lambda_{\ell 1}^1\Lambda_{2m}^1\,.$$

Тогда учитывая (2.1.3), отсюда получим:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{21m}^1\omega^m}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{2m}^i\omega^m}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_i\,.$$

Собирая вместе членов, содержащих дифференциальных форм $\omega^i\ (i = 1,2,3,4)$, отсюда получим:

$$d\vec{F}_2^1=\left[\vec{e}_1+\frac{B^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^k_{21}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k\right]\omega^1+\left[\vec{e}_2+\frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^k_{22}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k\right]\omega^2+$$

$$+\left[\vec{e}_3+\frac{B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^k_{23}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k\right]\omega^3+\left[\vec{e}_4+\frac{B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^k_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k\right]\omega^4.$$

Введем обозначения:

$$\vec{a}_1=\vec{e}_1+\frac{B^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^k_{21}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k,\qquad \vec{a}_2=\left(1+\frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right)\vec{e}_2-\frac{\Lambda^k_{22}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k,$$

$$\vec{a}_3=\vec{e}_3+\frac{B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^k_{23}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k,\qquad \vec{a}_4=\vec{e}_4+\frac{B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^k_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_k.$$

Тогда имеем: $\quad d\vec{F}_2^1=\omega^1\vec{a}_1+\omega^2\vec{a}_2+\omega^3\vec{a}_3+\omega^4\vec{a}_4.$

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1&=\mathring{\vec{a}}_1+\frac{\hat{A}^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\mathring{\vec{a}}_2-\frac{\Lambda^3_{21}}{\Lambda^1_{21}}\mathring{\vec{a}}_3,\\
\vec{a}_2&=\left(1+\frac{\hat{A}^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right)\mathring{\vec{a}}_2-\frac{\Lambda^3_{22}}{\Lambda^1_{21}}\mathring{\vec{a}}_3,\\
\vec{a}_3&=-\frac{\Lambda^1_{23}}{\Lambda^1_{21}}\mathring{\vec{a}}_1+\frac{\hat{A}^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\mathring{\vec{a}}_2+\mathring{\vec{a}}_3,\\
\vec{a}_4&=-\frac{\Lambda^1_{24}}{\Lambda^1_{21}}\mathring{\vec{a}}_1+\frac{\hat{A}^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^3_{24}}{\Lambda^1_{21}}\mathring{\vec{a}}_3+\vec{e}_4.
\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $g:\ \Omega\to\Omega^1_2$ является невырожденным.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{a}_1$ $\overrightarrow{XF^1_2}=-\left(1/\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2$, где $\vec{a}_1=g\left(\vec{e}_1\right)$.

Учитывая (2.3.2) найдем:

$$\left(\vec{e}_1, \vec{a}_1, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = \frac{\Lambda_{21}^3}{\Lambda_{21}^1}.$$

Пусть линия $\omega^1$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией [64] отображения $g:\ \Omega \to \Omega_2^1$, $\left(\vec{e}_1, \vec{a}_1, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = 0$. Отсюда имеем: $\Lambda_{21}^3 = 0$, т.е. вторая кривизна линии $\omega^1$ равна к нулю. Геометрический смысл последнего равенства заключается в том, что векторы $d_1\vec{e}_2 = \vec{\Lambda}_{21}$ и $\vec{e}_1$ коллинеарны.

Обратно, если векторы $\vec{\Lambda}_{21}$, $\vec{e}_1$ коллинеарны, т.е. $\Lambda_{21}^3 = 0$, то линия $\omega^1$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g:\ \Omega \to \Omega_2^1$.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_2$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{XF_2^1}$, где $\vec{a}_2 = g\left(\vec{e}_2\right)$. Учитывая (2.3.2) найдем:

$$\left(\vec{e}_2, \vec{a}_2, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = 0.$$

Следовательно, линия $\omega^2$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $g:\ \Omega \to \Omega_2^1$.

Теперь рассмотрим векторы $\vec{e}_3$, $\vec{a}_3$, $\overrightarrow{XF_2^1}$, где $\vec{a}_3 = g\left(\vec{e}_3\right)$ и найдем их смешанное произведение:

$$\left(\vec{e}_3, \vec{a}_3, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = \frac{\Lambda_{23}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}.$$

Пусть линия $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g:\ \Omega \to \Omega_2^1$, т.е. $\left(\vec{e}_3, \vec{a}_3, \overrightarrow{XF_2^1}\right) = 0$. Отсюда имеем $\Lambda_{23}^1 = -\Lambda_{13}^2 = 0$, т.е. третья кривизна линии $\omega^3$ равна нулю. Обратно, если $\Lambda_{23}^1 = -\Lambda_{13}^2 = 0$, то линия $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g$. Геометрический смысл последнего равенства заключается в следующем: векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1$ и $\vec{e}_4$ коллинеарны.

Из условия компланарности векторов $\vec{e}_4$, $\vec{a}_4$, $\overrightarrow{XF_2^1}$ получаем: либо а) $\Lambda_{24}^1 = -\Lambda_{14}^2 = 0$, либо б) $\Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2 = 0$, где $\Lambda_{14}^2 = -\Lambda_{24}^1$ – вторая кривизна линии $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$, $\Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2$ – третья кривизна этой линии.

Если выполнены одно из условий а), б), то линия $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g:\ \Omega \to \Omega_2^1$.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.3.1.**

а) Линия $\omega^1$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g$ тогда и только тогда, когда векторы $d_1\vec{e}_2, \vec{e}_1$ коллинеарны;

б) линия $\omega^2$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $g$;

в) линия $\omega^3$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1$, $\vec{e}_4$ коллинеарны;

г) линия $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $g$ тогда и только тогда, когда выполнены одно из условий: $\Lambda_{14}^2 = -\Lambda_{24}^1 = 0$, $\Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2 = 0$.

Найдем: $$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{B_{211}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\left[1 + \frac{B_{212}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\right] + \frac{\Lambda_{21}^3\Lambda_{22}^3}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2};$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = -\frac{\Lambda_{23}^1}{\Lambda_{21}^1} + \frac{B_{211}^1 B_{213}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4} - \frac{\Lambda_{21}^3}{\Lambda_{21}^1};$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_4 = -\frac{\Lambda_{24}^1}{\Lambda_{21}^1} + \frac{B_{211}^1 B_{214}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4} + \frac{\Lambda_{21}^3\Lambda_{24}^3}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2};$$

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \frac{B_{213}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\left[1 + \frac{B_{212}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\right] - \frac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^1};$$

$$\vec{a}_2\cdot\vec{a}_4=\frac{B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\left[1+\frac{B^1_{212}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}\right]+\frac{\Lambda^3_{22}\Lambda^3_{24}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2};$$

$$\vec{a}_3\cdot\vec{a}_4=\frac{\Lambda^1_{23}\Lambda^1_{24}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}+\frac{B^1_{213}B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^4}-\frac{\Lambda^3_{24}}{\Lambda^1_{21}}.$$

Потребуя ортогональность векторов $\vec{a}_i$ получим следующие равенства:

$$B^1_{211}\left[B^1_{212}+\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right]+\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\Lambda^3_{21}\Lambda^3_{22}=0; \qquad (2.3.3)$$

$$B^1_{211}B^1_{213}-\left(\Lambda^1_{21}\right)^3\left(\Lambda^1_{23}+\Lambda^3_{21}\right)=0; \qquad (2.3.4)$$

$$B^1_{211}B^1_{214}+\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\Lambda^3_{21}\Lambda^3_{24}-\left(\Lambda^1_{21}\right)^3\Lambda^1_{24}=0; \qquad (2.3.5)$$

$$B^1_{213}\left[B^1_{212}+\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right]-\left(\Lambda^1_{21}\right)^3\Lambda^3_{22}=0; \qquad (2.3.6)$$

$$B^1_{214}\left[B^1_{212}+\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\right]+\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\Lambda^3_{22}\Lambda^3_{24}=0; \qquad (2.3.7)$$

$$B^1_{213}B^1_{214}+\left(\Lambda^1_{21}\right)^2\Lambda^1_{23}\Lambda^1_{24}-\left(\Lambda^1_{21}\right)^3\Lambda^3_{24}=0. \qquad (2.3.8)$$

Выясним геометрический смысл этих равенств. Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{11}=\Lambda^2_{11}\vec{e}_2=-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2$ линии $\omega^1$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе вдоль направлениях $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$:

$$d_1\vec{k}_{11}=d_1\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right)=-\left(d_1\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}d_1\vec{e}_2=B^1_{211}\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{21}\vec{e}_1+\Lambda^3_{21}\vec{e}_3\right);$$

$$d_2\vec{k}_{11}=d_2\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right)=-\left(d_2\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}d_2\vec{e}_2=-B^1_{212}\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{22}\vec{e}_1+\Lambda^3_{22}\vec{e}_3+\Lambda^4_{22}\vec{e}_4\right)=$$

$$=-B^1_{212}\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}\Lambda^3_{22}\vec{e}_3;$$

$$d_3\vec{k}_{11}=d_3\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right)=-\left(d_3\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}d_3\vec{e}_2=-B^1_{213}\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{23}\vec{e}_1+\Lambda^3_{23}\vec{e}_3+\Lambda^4_{23}\vec{e}_4\right)=$$

$$=-B^1_{213}\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}\Lambda^1_{23}\vec{e}_1;$$

$$d_4\vec{k}_{11}=d_4\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right)=-\left(d_4\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}d_4\vec{e}_2=-B^1_{214}\vec{e}_2-\Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{24}\vec{e}_1+\Lambda^3_{24}\vec{e}_3+\Lambda^4_{24}\vec{e}_4\right)=$$

$$= -B^1_{214}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\left(\Lambda^1_{24}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{24}\vec{e}_3\right).$$

Из этих равенств получим:

$$\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11} = -B^1_{211}; \quad \vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11} = -B^1_{212}; \quad \vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11} = -B^1_{213}; \quad \vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11} = -B^1_{214}.$$

Найдем $\vec{k}_{11}{}^2 = \left(-\Lambda^1_{21}\right)^2 = \left(\Lambda^1_{21}\right)^2$. Рассмотрим $\vec{k}_{12} = k^2_1\vec{e}_3 = \Lambda^3_{22}\vec{e}_3$ – вектор первой кривизны линии $\omega^2$ сети $\tilde{\Sigma}_4$, $k^1_2 = \Lambda^3_{21} = -\Lambda^2_{31}$ – вторая кривизна линии $\omega^1$, $k^2_1 = \Lambda^3_{22} = -\Lambda^2_{32}$ – первая кривизна линии $\omega^2$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Геометрический смысл равенств (2.3.3) – (2.3.8) заключается в следующем (соответственно)

$$\left(\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11}\right)\left[\vec{k}_{11}{}^2 + \left(-\vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11}\right)\right] = \left(k^1_1\right)^2 k^1_2 k^2_1, \qquad (2.3.3)'$$

$$\left(\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11}\right)\left(\vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11}\right) = \left(k^1_1\right)^3\left(k^1_2 - k^3_3\right), \qquad (2.3.4)'$$

где $k^3_3 = \Lambda^2_{13} = -\Lambda^1_{23}$ – третья кривизна линии $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

$$\left(\vec{e}_2 d_1\vec{k}_{11}\right)\left(\vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11}\right) = -\vec{k}_{11}{}^2\left(k^1_2 k^4_3 + k^1_1 k^4_2\right), \qquad (2.3.5)'$$

где $k^4_2 = \Lambda^2_{14} = -\Lambda^1_{24}$ – вторая кривизна, $k^4_3 = \Lambda^3_{24} = -\Lambda^2_{34}$ – третья кривизна линии $\omega^4$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе;

$$\left(\vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11}\right)\left[\vec{k}_{11}{}^2 + \left(-\vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11}\right)\right] = -\left(k^1_1\right)^3 k^2_1, \qquad (2.3.6)'$$

$$\left(\vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11}\right)\left[\vec{k}_{11}{}^2 + \left(-\vec{e}_2 d_2\vec{k}_{11}\right)\right] = \vec{k}_{11}{}^2 k^2_1 k^4_3, \qquad (2.3.7)'$$

$$\left(\vec{e}_2 d_3\vec{k}_{11}\right)\left(\vec{e}_2 d_4\vec{k}_{11}\right) = \left(k^1_1\right)^2\left(k^4_3 k^1_1 - k^3_3 k^4_2\right). \qquad (2.3.8)'$$

Таким образом справедлива

**Теорема 2.3.2.** Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $g:\Omega \to \Omega^1_2$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.3.3) – (2.3.8).

Найдем скалярные квадраты векторов $\vec{a}_i$:

$$\vec{a}_4^{\,2} = \frac{\left(\Lambda_{24}^1\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} + \frac{\left(B_{214}^1\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4} - \frac{\left(\Lambda_{24}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2} + 1.$$

Найдем длину этих векторов

$$\left|\vec{a}_1\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4 + \left(B_{211}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{21}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4}};$$

$$\left|\vec{a}_2\right| = \sqrt{\frac{\left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{212}^1\right]^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{22}^3\right)^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4}};$$

$$\left|\vec{a}_3\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{23}^1\right)^2 + \left(B_{213}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^4}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4}};$$

$$\left|\vec{a}_4\right| = \sqrt{\frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{24}^1\right)^2 + \left(B_{214}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{24}^3\right)^2\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^4}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4}}.$$

Потребуем, чтобы $\left|\vec{a}_1\right| = 1$. Тогда имеем:

$$\left(B_{211}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{21}^3\right)^2 = 0, \qquad (2.3.9)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(-\vec{e}_2 d_1 \vec{k}_{11}\right) + \left(k_1^1\right)^2\left(k_2^1\right)^2 = 0, \qquad (2.3.9)'$$

где $k_1^1 = \Lambda_{11}^2 = -\Lambda_{21}^1$ – первая кривизна, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – вторая кривизна линии $\omega^1$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$. Из условия $\left|\vec{a}_2\right| = 1$ имеем:

$$\left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{212}^1\right]^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2\left(\Lambda_{22}^3\right)^2 = \left(\Lambda_{21}^1\right)^4$$

или

$$\left(\Lambda_{22}^3\right)^2 = \frac{\left(\Lambda_{21}^1\right)^4 - \left[\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 + B_{212}^1\right]^2}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}, \qquad (2.3.10)$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left(k_1^2\right)^2 = \frac{\left(k_1^1\right)^4 - \left[\left(k_1^1\right)^2 + \left(-\vec{e}_2 d_2 \vec{k}_{11}\right)\right]^2}{\left(k_1^1\right)^2}. \qquad (2.3.10)'$$

Из условия $\left|\vec{a}_3\right| = 1$ получим:

$$\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 \left(\Lambda_{23}^1\right)^2 + \left(B_{213}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^4 = \left(\Lambda_{21}^1\right)^4$$

или

$$\left(B_{213}^1\right)^2 = -\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 \left(\Lambda_{23}^1\right)^2, \qquad (2.3.11)$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_2 d_3 \vec{k}_{11}\right)^2 = -\left(k_1^1\right)^2 \left(k_3^3\right)^2. \qquad (2.3.11)'$$

Из условия $\left|\vec{a}_4\right| = 1$ имеем:

$$\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 \left(\Lambda_{24}^1\right)^2 + \left(B_{214}^1\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^2 \left(\Lambda_{24}^3\right)^2 + \left(\Lambda_{21}^1\right)^4 = \left(\Lambda_{21}^1\right)^4$$

или

$$\left(B_{214}^1\right)^2 = -\left(\Lambda_{21}^1\right)^2 \left[\left(\Lambda_{24}^3\right)^2 + \left(\Lambda_{24}^1\right)^2\right]. \qquad (2.3.12)$$

геометрический смысл, последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_2 d_4 \vec{k}_{11}\right)^2 = -\left(k_1^1\right)^2 \left[\left(k_3^4\right)^2 + \left(k_2^4\right)^2\right]. \qquad (2.3.12)'$$

Таким образом, доказана

**Теорема 2.3.3.** Отображение $g:\ \Omega \to \Omega_2^1$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.3.9) – (2.3.12).

## §2.4. Свойства частичного отображения, порождаемого псевдофокусом $F_1^4$ на касательной к линии $\omega^1$ заданной циклической сети Френе

Псевдофокус $F_1^4 \in \left( X, \vec{e}_1 \right)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^1}\vec{e}_1 , \tag{2.4.1}$$

Когда точка $X$ смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус $F_1^4$ описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Определяется частичное отображение $\varphi : \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $\varphi\left( X \right) = F_1^4$.

Продифференцируем обычным образом равенство (2.4.1) и учитываем деривационные формулы:

$$d\vec{F}_1^4 = d\left( \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1 \right) = d\vec{X} - d\left( \frac{1}{\Lambda_{14}^4} \right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4} d\vec{e}_1 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{14}^4}{\left( \Lambda_{14}^4 \right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\omega_1^i\vec{e}_i .$$

Учитывая равенство (2.1.4) отсюда имеем:

$$d\vec{F}_1^4 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left( \Lambda_{14m}^4 + \Lambda_{1\ell}^4\Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4\Lambda_{1m}^\ell \right)\omega^m}{\left( \Lambda_{14}^4 \right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\omega_1^i\vec{e}_i .$$

Введем обозначение:

$$B_{14m}^4 = \Lambda_{14m}^4 + \Lambda_{1\ell}^4\Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4\Lambda_{1m}^\ell .$$

Тогда, в силу равенства (2.1.3), отсюда получим:

$$d\vec{F}_1^4 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{14m}^4\omega^m}{\left( \Lambda_{14}^4 \right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i$$

или

$$d\vec{F}_1^4 = \left[ \vec{e}_1 + \frac{B_{141}^4}{\left( \Lambda_{14}^4 \right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i \right]\omega^1 + \left[ \vec{e}_2 + \frac{B_{142}^4}{\left( \Lambda_{14}^4 \right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i \right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3+\frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i\right]\omega^3+\left[\vec{e}_4+\frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i\right]\omega^4.$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1=\left[1+\frac{B^4_{141}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}_i\right]\vec{e}_1-\frac{\Lambda^i_{11}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i;\qquad \vec{b}_2=\frac{B^4_{142}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1+\vec{e}_2-\frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3=\frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i+\vec{e}_3;\qquad \vec{b}_4=\frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i+\vec{e}_4.$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}^4_1=\omega^1\vec{b}_1+\omega^2\vec{b}_2+\omega^3\vec{b}_3+\omega^4\vec{b}_4.$$

Так как заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1&=\left[1+\frac{B^4_{141}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}_i\right]\vec{e}_1-\frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2;\\
\vec{b}_2&=\frac{B^4_{142}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1+\vec{e}_2-\frac{\Lambda^4_{12}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4;\\
\vec{b}_3&=\frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2-\frac{\Lambda^4_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4+\vec{e}_3;\\
\vec{b}_4&=\frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1-\frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2.
\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

В общем случае эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $\varphi:\Omega\to\Omega^4_1$ является невырожденным.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{b}_1$, $\overrightarrow{XF_1^4} = -\left( 1 \big/ \Lambda_{14}^4 \right) \vec{e}_1$, где $\vec{b}_1 = \varphi(\vec{e}_1)$.

Найдем: $\left( \vec{e}_1, \vec{b}_1, \overrightarrow{XF_1^4} \right) = 0$, следовательно, линия $\omega^1$ заданной циклической сети Френе всегда является двойной линией отображения $\varphi : \Omega \to \Omega_1^4$.

Теперь рассмотрим векторы $\vec{e}_2$, $\vec{b}_2$, $\overrightarrow{XF_1^4}$ и найдем

$$\left( \vec{e}_2, \vec{b}_2, \overrightarrow{XF_1^4} \right) = \frac{\Lambda_{12}^4}{\left( \Lambda_{14}^4 \right)^2}.$$

Пусть линия $\omega^2$ является двойной линией отображения $\varphi$. Тогда имеем $\Lambda_{12}^4 = -\Lambda_{42}^1 = 0$, здесь $k_2^3 = \Lambda_{12}^4 = -\Lambda_{42}^1$ – третья кривизна линии $\omega^2$.

Обратно, если $k_2^3 = 0$, то эта линия $\omega^2$ является двойной линией отображения $\varphi$.

Из условия компланарности векторов $\vec{e}_3$, $\vec{b}_3$, $\overrightarrow{XF_1^4}$ получим: а) $\Lambda_{13}^2 = -\Lambda_{23}^1 = 0$ или б) $\Lambda_{13}^4 = -\Lambda_{43}^1 = 0$.

Геометрический смысл последних равенств заключается в следующем соответственно:

1) векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3 \vec{e}_1$ и $\vec{e}_4$ коллинеарны;

2) векторы $\vec{\Lambda}_{13} = d_3 \vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ коллинеарны.

Если выполнены одно из условий 1) и 2), то линия $\omega^3$ является двойной линией отображения $\varphi$. Обратно, если линия $\omega^3$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $\varphi$, то выполняется одно из условий 1), 2).

Найдем:

$$\left( \vec{e}_4, \vec{b}_4, \overrightarrow{XF_1^4} \right) = -\Lambda_{14}^2 \Big/ \left( \Lambda_{14}^4 \right)^2.$$

Пусть линия $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $\varphi$, т.е. $\left(\vec{e}_4, \vec{b}_4, \overrightarrow{XF_1^4}\right) = 0$. Тогда имеем: $\Lambda_{14}^2 = -\Lambda_{24}^1 = 0$, здесь $k_2^4 = \Lambda_{14}^2 = -\Lambda_{24}^1$ – вторая кривизна линии $\omega^4$. Обратно, если $k_2^4 = 0$, то линия $\omega^4$ является двойной линией отображения $\varphi$.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.4.1.** а) Линия $\omega^1$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $\varphi$;

б) линия $\omega^2$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $\varphi$ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю;

в) линия $\omega^3$ является двойной линией отображения $\varphi$ тогда и только тогда, когда выполнены одно из условий: а) $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1 \| \vec{e}_4$; б) $\vec{\Lambda}_{13} = d_3\vec{e}_1 \| \vec{e}_2$;

г) линия $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $\varphi$ тогда и только тогда, когда ее вторая кривизна равна нулю.

Найдем: $$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right] - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4};$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right] + \frac{\Lambda_{11}^2\Lambda_{13}^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_4 = \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right] + \frac{\Lambda_{11}^2\Lambda_{14}^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = \frac{B_{142}^4 B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} - \frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{14}^4} + \frac{\Lambda_{12}^4\Lambda_{13}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_4 = \frac{B_{142}^4 B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} - \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{14}^4};$$

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_4 = \frac{B^4_{143} B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^4} - \frac{\Lambda^2_{13}\Lambda^2_{14}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}.$$

Потребуем ортогональность этих векторов. Тогда имеем:

$$B^4_{142}\left[\left(\Lambda^4_{14}\right)^2 + B^4_{141}\right] = \Lambda^2_{11}\left(\Lambda^4_{14}\right)^3; \tag{2.4.3}$$

$$B^4_{143}\left[\left(\Lambda^4_{14}\right)^2 + B^4_{141}\right] = \Lambda^2_{11}\Lambda^1_{23}\left(\Lambda^4_{14}\right)^2; \tag{2.4.4}$$

$$B^4_{144}\left[\left(\Lambda^4_{14}\right)^2 + B^4_{141}\right] = \Lambda^2_{11}\Lambda^1_{24}\left(\Lambda^4_{14}\right)^2; \tag{2.4.5}$$

$$B^4_{142}B^4_{143} = \Lambda^2_{13}\left(\Lambda^4_{14}\right)^3 - \Lambda^4_{12}\Lambda^4_{13}\left(\Lambda^4_{14}\right)^2; \tag{2.4.6}$$

$$B^4_{142}B^4_{144} = \Lambda^2_{14}\left(\Lambda^4_{14}\right)^3; \tag{2.4.7}$$

$$B^4_{143}B^4_{144} = \Lambda^1_{23}\Lambda^2_{14}\left(\Lambda^4_{14}\right)^2. \tag{2.4.8}$$

Выясним геометрический смысл этих равенств. Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{14} = \Lambda^1_{44}\vec{e}_1 = -\Lambda^4_{14}\vec{e}_1$ линии $\omega^4$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе вдоль направлениях $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$:

$$d_1\vec{k}_{14} = d_1\left(-\Lambda^4_{14}\vec{e}_1\right) = -\left(d_1\Lambda^4_{14}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}d_1\vec{e}_1 = -B^4_{141}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{11}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{11}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{11}\vec{e}_4\right).$$

Учитывая (2.1.6) отсюда имеем:

$$d_1\vec{k}_{14} = -B^4_{141}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\Lambda^2_{11}\vec{e}_2. \tag{2.4.9}$$

$$d_2\vec{k}_{14} = d_2\left(-\Lambda^4_{14}\vec{e}_1\right) = -\left(d_2\Lambda^4_{14}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}d_2\vec{e}_1 = -B^4_{142}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{12}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{12}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{12}\vec{e}_4\right).$$

В силу равенств (2.1.9), (2.1.10) отсюда получим:

$$d_2\vec{k}_{14} = -B^4_{142}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\Lambda^4_{12}\vec{e}_4. \tag{2.4.10}$$

$$d_3\vec{k}_{14} = d_3\left(-\Lambda^4_{14}\vec{e}_1\right) = -\left(d_3\Lambda^4_{14}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}d_3\vec{e}_1 = -B^4_{143}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{13}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{13}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{13}\vec{e}_4\right).$$

Учитывая (2.1.11) отсюда имеем:

$$d_3\vec{k}_{14} = -B^4_{143}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{13}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{13}\vec{e}_4\right). \tag{2.4.11}$$

$$d_4\vec{k}_{14} = d_4\left(-\Lambda^4_{14}\vec{e}_1\right) = -\left(d_4\Lambda^4_{14}\right)\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}d_4\vec{e}_1 = -B^4_{144}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{14}\vec{e}_2 + \Lambda^3_{14}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{14}\vec{e}_4\right).$$

В силу (2.1.14) отсюда получим:

$$d_4\vec{k}_{14}=-B^4_{144}\vec{e}_1-\Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{14}\vec{e}_2+\Lambda^4_{14}\vec{e}_4\right). \qquad (2.4.12)$$

Учитывая (2.4.9) – (2.4.12) выясним геометрический смысл равенств (2.4.3) – (2.4.8) в следующем соответственно:

$$\left(-\vec{e}_1 d_2\vec{k}_{14}\right)\left[\vec{k}_{14}^{\,2}+\left(-\vec{e}_1 d_1\vec{k}_{14}\right)\right]=-k^1_1\left(k^4_1\right)^3, \qquad (2.4.3)'$$

где $k^1_1=\Lambda^2_{11}$ – первая кривизна линии $\omega^1$, $k^4_1=\Lambda^1_{44}=-\Lambda^4_{14}$ – первая кривизна линии $\omega^4$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(-\vec{e}_1 d_3\vec{k}_{14}\right)\left[\vec{k}_{14}^{\,2}+\left(-\vec{e}_1 d_1\vec{k}_{14}\right)\right]=k^1_1\left(-k^3_3\right)\left(k^4_1\right)^2, \qquad (2.4.4)'$$

где $k^3_3=\Lambda^2_{13}=-\Lambda^1_{23}$ – третья кривизна линии $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(-\vec{e}_1 d_4\vec{k}_{14}\right)\left[\vec{k}_{14}^{\,2}+\left(-\vec{e}_1 d_1\vec{k}_{14}\right)\right]=k^1_1\left(k^4_1\right)^2\left(-k^4_2\right), \qquad (2.4.5)'$$

где $k^4_2=\Lambda^2_{14}=-\Lambda^1_{24}$ – вторая кривизна линии $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(\vec{e}_1 d_2\vec{k}_{14}\right)\left(\vec{e}_1 d_3\vec{k}_{14}\right)=\left(k^4_1\right)^2\left(-k^3_3k^4_1+k^2_3k^3_2\right), \qquad (2.4.6)'$$

где $k^2_3=\Lambda^4_{12}=-\Lambda^1_{42}$ – третья кривизна линии $\omega^2$, $k^3_2=\Lambda^1_{43}=-\Lambda^4_{13}$ – вторая кривизна линии $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(\vec{e}_1 d_2\vec{k}_{14}\right)\left(\vec{e}_1 d_4\vec{k}_{14}\right)=-k^4_2\left(k^4_1\right)^3, \qquad (2.4.7)'$$

$$\left(\vec{e}_1 d_3\vec{k}_{14}\right)\left(\vec{e}_1 d_4\vec{k}_{14}\right)=-k^3_3\left(k^4_1\right)^2k^4_2. \qquad (2.4.8)'$$

где $k^4_2=\Lambda^2_{14}=-\Lambda^1_{24}$ – вторая кривизна линии $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.4.2.** Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $\varphi:\Omega\to\Omega^4_1$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.4.3) – (2.4.8).

Найдем скалярные квадраты векторов $\vec{b}_i$ $\left(i=1,2,3,4\right)$:

$$\vec{b}_1^{\,2}=\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1=\left[1+\frac{B^4_{141}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\right]^2+\frac{\left(\Lambda^2_{11}\right)^2}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2};$$

$$\vec{b}_2^{\,2} = \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = \frac{\left(B_{142}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} + 1 + \frac{\left(\Lambda_{12}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2};$$

$$\vec{b}_3^{\,2} = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_3 = \frac{\left(B_{143}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} + \frac{\left(\Lambda_{13}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} + \frac{\left(\Lambda_{13}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} + 1;$$

$$\vec{b}_4^{\,2} = \vec{b}_4 \cdot \vec{b}_4 = \frac{\left(B_{144}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} + \frac{\left(\Lambda_{14}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}.$$

Из условия $\left|\vec{b}_1\right| = 1$ имеем:

$$\frac{\left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2 + B_{141}^4\right]^2 + \left(\Lambda_{11}^2\right)^2\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} = 1$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2 + B_{141}^4\right]^2 = \left(\Lambda_{14}^4\right)^2\left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2 - \left(\Lambda_{11}^2\right)^2\right], \qquad (2.4.13)$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left[\left(k_1^4\right)^2 + \left(-\vec{e}_1 d_1 \vec{k}_{14}\right)\right]^2 = \left(k_1^4\right)^2\left[\left(k_1^4\right)^2 - \left(k_1^1\right)^2\right], \qquad (2.4.13)'$$

где $k_1^4 = \Lambda_{44}^1 = -\Lambda_{14}^4$ – первая кривизна линии $\omega^4$, $k_1^1 = \Lambda_{11}^2 = -\Lambda_{21}^1$ – первая кривизна, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – первая кривизна линии $\omega^1$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из условия $\left|\vec{b}_2\right| = 1$ получим:

$$\frac{\left(B_{142}^4\right)^2 + \left(\Lambda_{14}^4\right)^4 + \left(\Lambda_{12}^4\right)^2\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} = 1.$$

Отсюда получим:

$$\left(B_{142}^4\right)^2 = -\left(\Lambda_{12}^4\right)^2\left(\Lambda_{14}^4\right)^2. \qquad (2.4.14)$$

Геометрический смысл равенства (2.4.14) заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_1 d_2 \vec{k}_{14}\right)^2 = -\left(k_3^2\right)^2 \left(k_1^4\right)^2, \tag{2.4.14$'$}$$

где $k_3^2 = \Lambda_{12}^4 = -\Lambda_{42}^1$ – третья кривизна линии $\omega^2$, $k_1^4 = \Lambda_{44}^1 = -\Lambda_{14}^4$ – первая кривизна линии $\omega^4$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из условия $\left|\vec{b}_3\right| = 1$ имеем:

$$\frac{\left(B_{143}^4\right)^2 + \left(\Lambda_{14}^4\right)^2 \left(\Lambda_{13}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{14}^4\right)^2 \left(\Lambda_{13}^4\right)^2 + \left(\Lambda_{14}^4\right)^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} = 1$$

или

$$\left(B_{143}^4\right)^2 = -\left(\Lambda_{14}^4\right)^2 \left[\left(\Lambda_{13}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{13}^4\right)^2\right], \tag{2.4.15}$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_1 d_3 \vec{k}_{14}\right)^2 = -\left(k_1^4\right)^2 \left[\left(k_3^3\right)^2 + \left(k_2^3\right)^2\right], \tag{2.4.15$'$}$$

где $k_3^3 = \Lambda_{13}^2 = -\Lambda_{23}^1$ – третья кривизна, $k_2^3 = \Lambda_{43}^1 = -\Lambda_{13}^4$ – вторая кривизна линии $\omega^3$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из условия $\left|\vec{b}_4\right| = 1$ имеем:

$$\frac{\left(B_{144}^4\right)^2 + \left(\Lambda_{14}^4\right)^2 \left(\Lambda_{14}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^4} = 1$$

или

$$\left(B_{144}^4\right)^2 = \left(\Lambda_{14}^4\right)^2 \left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2 - \left(\Lambda_{14}^2\right)^2\right]. \tag{2.4.16}$$

Геометрический смысл, последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_1 d_4 \vec{k}_{14}\right)^2 = \left(k_1^4\right)^2 \left[\left(k_1^4\right)^2 - \left(k_2^4\right)^2\right]. \tag{2.4.16$'$}$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.4.3.** Для того, чтобы отображение $\varphi : \Omega \to \Omega_1^4$ было движением необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия (2.4.13) – (2.4.16).

## §2.5. Свойства частичного отображения, порождаемого псевдофокусом $F_3^2$ на касательной к линии $\omega^3$ заданной циклической сети Френе

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in \left( X, \vec{e}_3 \right)$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3 . \qquad (2.5.1)$$

Когда точка $X$ смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус $F_3^2$ описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Получается частичное отображение $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $\psi\left( X \right) = F_3^2$. Присоединим к области $\Omega_3^2$ подвижной репер $\Re' = \left( F_3^2, \vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4 \right)$, где векторы $\vec{m}_i$ определяются следующим образом. Продифференцируя обычным образом равенство (2.5.1) и учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = d\left( \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 \right) = d\vec{X} - d\left( \frac{1}{\Lambda_{32}^2} \right)\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}d\vec{e}_3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{\left( \Lambda_{32}^2 \right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i .$$

В силу равенства (2.1.4) отсюда получим:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left( \Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell \right)\omega^m}{\left( \Lambda_{32}^2 \right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i .$$

Введем обозначение:

$$B_{32m}^2 = \Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell .$$

Тогда, в силу равенства (2.1.3), отсюда имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{32m}^2\omega^m}{\left( \Lambda_{32}^2 \right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i$$

или

$$d\vec{F}_3^{\,2} = \left[ \vec{e}_1 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^1 + \left[ \vec{e}_2 + \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^2 +$$

$$+ \left[ \vec{e}_3 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^3 + \left[ \vec{e}_4 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^4 .$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1 &= \vec{e}_1 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i ;\\
\vec{m}_2 &= \vec{e}_2 + \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i ;\\
\vec{m}_3 &= \vec{e}_3 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i ;\\
\vec{m}_4 &= \vec{e}_4 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i .
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}_3^{\,2} = \omega^1\vec{m}_1 + \omega^2\vec{m}_2 + \omega^3\vec{m}_3 + \omega^4\vec{m}_4 .$$

Так как заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе (т.е. учитывая равенств (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14)) равенства (2.5.2) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 ;\\
\vec{m}_2 &= \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 ;\\
\vec{m}_3 &= \left[ 1 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2} \right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 ;\\
\vec{m}_4 &= -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4 .
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{m}_1$, $\overrightarrow{XF_3^2} = -\left( {}^{1}\!\!\diagup\!{}_{\Lambda_{32}^2} \right)\vec{e}_3$, где $\psi\left(\vec{e}_1\right) = \vec{m}_1$.

Учитывая (2.5.3) найдем: $\left(\vec{e}_1, \vec{m}_1, \overrightarrow{XF_3^2}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда имеет место одно из равенств:

а) $\Lambda_{31}^2 = -\Lambda_{21}^3 = 0$; б) $\Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3 = 0$,

где $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – вторая кривизна, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3$ – третья кривизна линии $\omega^1$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Следовательно, линия $\omega^1$ является двойной линией отображения $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий а), б).

Рассмотрим векторы $\vec{e}_2$, $\vec{m}_2$, $\overrightarrow{XF_3^2}$ и найдем

$$\left(\vec{e}_2, \vec{m}_2, \overrightarrow{XF_3^2}\right) = \frac{\Lambda_{32}^4}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}.$$

Пусть линия $\omega^2$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $\psi$, т.е. $\vec{e}_2$, $\vec{m}_2$, $\overrightarrow{XF_3^2}$ – компланарны. Тогда имеем $\Lambda_{32}^4 = -\Lambda_{42}^3 = 0$, здесь $\Lambda_{32}^4 = k_2^2$ – вторая кривизна линии $\omega^2$. Обратно, если $k_2^2 = 0$, то эта линия $\omega^2$ является двойной линией отображения $\psi$.

Теперь рассмотрим векторы $\vec{e}_3$, $\vec{m}_3$, $\overrightarrow{XF_3^2}$ и найдем, что $\left(\vec{e}_3, \vec{m}_3, \overrightarrow{XF_3^2}\right) = 0$, т.е. эти векторы компланарны. Следовательно, линия $\omega^3$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $\psi$.

Из условия компланарности векторов $\vec{e}_4$, $\vec{m}_4$, $\overrightarrow{XF_3^2}$ имеем: $\left( {}^{\Lambda_{34}^2}\!\!\diagup\!{}_{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2} \right) = 0$, т.е. $\Lambda_{34}^2 = -\Lambda_{24}^3 = 0$, здесь $k_3^4 = \Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2$ – третья кривизна линии $\omega^4$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$. Следовательно, если линия $\omega^4$ является двойной линией отображения $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$, то третья кривизна этой линии равна нулю. Обратно, если третья кривизна линии $\omega^4$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ равна нулю, то эта линия является двойной линией отображения $\psi:\Omega\to\Omega_3^2$.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.5.1.** а) Линия $\omega^1$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $\psi$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: а) $k_2^1=\Lambda_{21}^3=-\Lambda_{31}^2=0$; б) $k_3^1=\Lambda_{31}^4=-\Lambda_{41}^3=0$;

б) линия $\omega^2$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $\psi$ тогда и только тогда, когда вторая кривизна этой линии равна нулю;

в) линия $\omega^3$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображения $\psi$;

г) линия $\omega^4$ заданной сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения $\psi$ тогда и только тогда, когда третья кривизна этой линии равна нулю.

Найдем скалярные произведения векторов

$\vec{m}_i\cdot\vec{m}_j\ \ (i,j)=1,2,3,4;\ i\neq j$

$$\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2=\frac{B_{321}^2B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4}+\frac{\Lambda_{31}^4\Lambda_{32}^4}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}; \tag{2.5.4}$$

$$\vec{m}_1\cdot\vec{m}_3=\frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\left[1+\frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\right]+\frac{\Lambda_{31}^4\Lambda_{33}^4}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}; \tag{2.5.5}$$

$$\vec{m}_1\cdot\vec{m}_4=\frac{\Lambda_{31}^2\Lambda_{34}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}+\frac{B_{321}^2B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4}-\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}; \tag{2.5.6}$$

$$\vec{m}_2\cdot\vec{m}_3=\frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\left[1+\frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\right]+\frac{\Lambda_{32}^4\Lambda_{33}^4}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}; \tag{2.5.7}$$

$$\vec{m}_2 \cdot \vec{m}_4 = \frac{B^2_{322} B^2_{324}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^4} - \frac{\Lambda^4_{32}}{\Lambda^2_{32}};$$

(2.5.8)

$$\vec{m}_3 \cdot \vec{m}_4 = \left[1 + \frac{B^2_{323}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\right] \frac{B^2_{324}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2} - \frac{\Lambda^4_{33}}{\Lambda^2_{32}}.$$

(2.5.9)

Потребуем ортогональность векторов $\vec{m}_i$. Тогда получим следующие равенства соответственно:

$$B^2_{321} B^2_{322} = \left(\Lambda^2_{32}\right)^2 \Lambda^4_{31} \Lambda^3_{42}; \tag{2.5.10}$$

$$B^2_{321} \left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + B^2_{323}\right] = \left(\Lambda^2_{32}\right)^2 \Lambda^4_{31} \Lambda^3_{43}; \tag{2.5.11}$$

$$B^2_{321} B^2_{324} = \Lambda^4_{31} \left(\Lambda^2_{32}\right)^3 - \Lambda^2_{31} \Lambda^2_{34} \left(\Lambda^2_{32}\right)^2; \tag{2.5.12}$$

$$B^2_{322} \left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + B^2_{323}\right] = -\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 \Lambda^4_{32} \Lambda^4_{33}; \tag{2.5.13}$$

$$B^2_{322} B^2_{324} = \Lambda^4_{32} \left(\Lambda^2_{32}\right)^3; \tag{2.5.14}$$

$$B^2_{324} \left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + B^2_{323}\right] = \Lambda^4_{33} \left(\Lambda^2_{32}\right)^3. \tag{2.5.15}$$

Выясним геометрический смысл этих равенств. Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{12} = \Lambda^3_{22} \vec{e}_3 = -\Lambda^2_{32} \vec{e}_3$ линии $\omega^2$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе вдоль направлениях $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$:

$$d_1 \vec{k}_{12} = d_1\left(-\Lambda^2_{32} \vec{e}_3\right) = -\left(d_1 \Lambda^2_{32}\right) \vec{e}_3 - \Lambda^2_{32} d_1 \vec{e}_3 = -B^2_{321} \vec{e}_3 - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^1_{31} \vec{e}_1 + \Lambda^2_{31} \vec{e}_2 + \Lambda^4_{31} \vec{e}_4\right).$$

Учитывая (2.1.6) отсюда имеем:

$$d_1 \vec{k}_{12} = -B^2_{321} \vec{e}_3 - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^2_{31} \vec{e}_2 + \Lambda^4_{31} \vec{e}_4\right). \tag{2.5.16}$$

$$d_2 \vec{k}_{12} = d_2\left(-\Lambda^2_{32} \vec{e}_3\right) = -\left(d_2 \Lambda^2_{32}\right) \vec{e}_3 - \Lambda^2_{32} d_2 \vec{e}_3 = -B^2_{322} \vec{e}_3 - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^1_{32} \vec{e}_1 + \Lambda^2_{32} \vec{e}_2 + \Lambda^4_{32} \vec{e}_4\right).$$

В силу равенства (2.1.10) из последнего получим:

$$d_2 \vec{k}_{12} = -B^2_{322} \vec{e}_3 - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^2_{32} \vec{e}_2 + \Lambda^4_{32} \vec{e}_4\right). \tag{2.5.17}$$

Найдем

$$d_3\vec{k}_{12} = d_3\left(-\Lambda_{32}^2\vec{e}_3\right) = -\left(d_3\Lambda_{32}^2\right)\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2 d_3\vec{e}_3 = -B_{323}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\left(\Lambda_{33}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{33}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{33}^4\vec{e}_4\right).$$

Учитывая (2.1.11) отсюда имеем:

$$d_3\vec{k}_{12} = -B_{323}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\Lambda_{33}^4\vec{e}_4. \tag{2.5.18}$$

Найдем

$$d_4\vec{k}_{12} = d_4\left(-\Lambda_{32}^2\vec{e}_3\right) = -\left(d_4\Lambda_{32}^2\right)\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2 d_4\vec{e}_3 = -B_{324}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\left(\Lambda_{34}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{34}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{34}^4\vec{e}_4\right).$$

В силу (2.1.14) отсюда получим:

$$d_4\vec{k}_{12} = -B_{324}^2\vec{e}_3 - \Lambda_{32}^2\Lambda_{34}^2\vec{e}_2. \tag{2.5.19}$$

Геометрический смысл равенств (2.5.10) – (2.5.15) заключается в следующем, соответственно:

$$\left(\vec{e}_3 d_1\vec{k}_{12}\right)\left(\vec{e}_3 d_2\vec{k}_{12}\right) = -\left(k_1^2\right)^2 k_3^1 k_2^2, \tag*{(2.5.10)′}$$

где $k_1^2 = \Lambda_{22}^3 = -\Lambda_{32}^2$ – первая кривизна линии $\omega^2$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3$ – третья кривизна линии $\omega^1$, $k_2^2 = \Lambda_{32}^4 = -\Lambda_{42}^3$ – вторая кривизна линии $\omega^2$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$;

$$\left(-\vec{e}_3 d_1\vec{k}_{12}\right)\left[\vec{k}_{12}^{\,2} + \left(-\vec{e}_3 d_3\vec{k}_{12}\right)\right] = -\left(k_1^2\right)^2 k_3^1 k_1^3, \tag*{(2.5.11)′}$$

где $k_1^3 = \Lambda_{33}^4 = -\Lambda_{43}^3$ – первая кривизна линии $\omega^3$;

$$\left(\vec{e}_3 d_1\vec{k}_{12}\right)\left(\vec{e}_3 d_4\vec{k}_{12}\right) = \left(k_1^2\right)^2\left(k_3^1 - k_2^1 k_3^4\right), \tag*{(2.5.12)′}$$

где $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – вторая кривизна линии $\omega^1$, $k_3^4 = \Lambda_{24}^3 = -\Lambda_{34}^2$ – третья кривизна линии $\omega^4$;

$$\left(-\vec{e}_3 d_2\vec{k}_{12}\right)\left[\vec{k}_{12}^{\,2} + \left(-\vec{e}_3 d_3\vec{k}_{12}\right)\right] = -\left(k_1^2\right)^2 k_2^2 k_1^3, \tag*{(2.5.13)′}$$

$$\left(\vec{e}_3 d_2\vec{k}_{12}\right)\left(\vec{e}_3 d_4\vec{k}_{12}\right) = k_2^2\left(k_1^2\right)^2, \tag*{(2.5.14)′}$$

$$\left(-\vec{e}_3 d_4\vec{k}_{12}\right)\left[\vec{k}_{12}^{\,2} + \left(-\vec{e}_3 d_3\vec{k}_{12}\right)\right] = k_1^3\left(-k_1^2\right)^3. \tag*{(2.5.15)′}$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.5.2.** Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ в отображении $\psi:\Omega\to\Omega_3^2$ является ортогональной сетью тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.5.10) – (2.5.15).

Пусть $\left|\vec{m}_i\right|=1$, т.е. векторы $\vec{m}_i$ – единичные. Тогда из второго равенства формулы (2.5.3) найдем:

$$\vec{m}_2^{\,2}=\frac{\left(B_{322}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4}+\frac{\left(\Lambda_{32}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}.$$

Отсюда получим:

$$\left|\vec{m}_2\right|=\sqrt{\frac{\left(B_{322}^2\right)^2+\left(\Lambda_{32}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4}}=\frac{\sqrt{\left(B_{322}^2\right)^2+\left(\Lambda_{32}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^4\right)^2}}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}.$$

Следовательно

$$\left|\vec{m}_2\right|=1\Leftrightarrow\left(B_{322}^2\right)^2+\left(\Lambda_{32}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^4\right)^2=\left(\Lambda_{32}^2\right)^4$$

или

$$\left(\Lambda_{32}^4\right)^2=\frac{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4-\left(B_{322}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}. \qquad (2.5.20)$$

Геометрический смысл последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(k_2^2\right)^2=\frac{\left(k_1^2\right)^4-\left(\vec{e}_3 d_2\vec{k}_{12}\right)^2}{\left(k_1^2\right)^2}, \qquad (2.5.20)'$$

где $k_2^2=\Lambda_{32}^4=-\Lambda_{42}^3$ – вторая кривизна, $k_1^2=\Lambda_{22}^3=-\Lambda_{32}^2$ – первая кривизна, $k_2^1=\Lambda_{21}^3=-\Lambda_{31}^2$ – первая кривизна линии $\omega^2$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из первого равенства формулы (2.5.3) найдем:

$$\vec{m}_1^{\,2}=1+\frac{\left(\Lambda_{31}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}+\frac{\left(B_{321}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4}+\frac{\left(\Lambda_{31}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}.$$

Тогда имеем:

$$\left|\vec{m}_1\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4 + \left(\Lambda_{31}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + \left(B_{321}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{31}^4\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} = 1$$

или

$$\left(\Lambda_{32}^2\right)^4 + \left(\Lambda_{31}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + \left(B_{321}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{31}^4\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 = \left(\Lambda_{32}^2\right)^4.$$

Отсюда получим:

$$\left(B_{321}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{31}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 = -\left(\Lambda_{31}^4\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2$$

или

$$\left(\Lambda_{31}^4\right)^2 = -\frac{\left(B_{321}^2\right)^2 + \left(\Lambda_{31}^2\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}. \qquad (2.5.21)$$

Геометрический смысл последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(k_3^1\right)^2 = -\frac{\left(-\vec{e}_3 d_1 \vec{k}_{12}\right)^2 + \left(k_2^1\right)^2\left(k_1^2\right)^2}{\left(k_1^2\right)^2}, \qquad (2.5.21)'$$

где $k_3^1 = \Lambda_{31}^4 = -\Lambda_{41}^3$ – третья кривизна, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3 = -\Lambda_{31}^2$ – вторая кривизна линии $\omega^1$ сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Аналогично найдем:

$$\vec{m}_3^{\,2} = \left[1 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\right]^2 + \frac{\left(\Lambda_{33}^4\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2},$$

$$\left|\vec{m}_3\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right]^2 + \left(\Lambda_{33}^4\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^4} = 1$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right]^2 + \left(\Lambda_{33}^4\right)^2\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 = \left(\Lambda_{32}^2\right)^4.$$

Отсюда получим:

$$\left(\Lambda_{33}^{4}\right)^{2}=\frac{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{4}-\left[\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}+B_{323}^{2}\right]^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}. \qquad (2.5.22)$$

Геометрический смысл последнего заключается в следующем:

$$\left(k_{1}^{3}\right)^{2}=\frac{\left(k_{1}^{2}\right)^{4}-\left[\left(k_{1}^{2}\right)^{2}-\left(\vec{e}_{3}d_{3}\vec{k}_{12}\right)\right]^{2}}{\left(k_{1}^{2}\right)^{2}}, \qquad (2.5.22)'$$

где $k_{1}^{3}=\Lambda_{33}^{4}=-\Lambda_{43}^{3}$ – первая кривизна линии $\omega^{3}$ сети $\tilde{\Sigma}_{4}$.

Найдем $\vec{m}_{4}{}^{2}$:

$$\vec{m}_{4}{}^{2}=\frac{\left(\Lambda_{34}^{2}\right)^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}+\frac{\left(B_{324}^{2}\right)^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{4}}+1,$$

$$\left|\vec{m}_{4}\right|=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}\left(\Lambda_{34}^{2}\right)^{2}+\left(B_{324}^{2}\right)^{2}+\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{4}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{4}}=1$$

или

$$\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}\left(\Lambda_{34}^{2}\right)^{2}+\left(B_{324}^{2}\right)^{2}+\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{4}=\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{4}.$$

Отсюда имеем:

$$\left(B_{324}^{2}\right)^{2}=-\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}\left(\Lambda_{34}^{2}\right)^{2}. \qquad (2.5.23)$$

Геометрический смысл, последнего равенства заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_{3}d_{4}\vec{k}_{12}\right)^{2}=-\left(k_{1}^{2}\right)^{2}\left(-k_{3}^{4}\right)^{2}$$

или

$$\left(k_{3}^{4}\right)^{2}=-\frac{\left(\vec{e}_{3}d_{4}\vec{k}_{12}\right)^{2}}{\left(k_{1}^{2}\right)^{2}}, \qquad (2.5.23)'$$

где $k_{3}^{4}=\Lambda_{24}^{3}=-\Lambda_{34}^{2}$ – третья кривизна линии $\omega^{4}$ сети $\tilde{\Sigma}_{4}$.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.5.3.** Отображение $\psi:\Omega\to\Omega_{3}^{2}$ является движением тогда и только тогда, когда выполнены условия: (2.5.20) – (2.4.23).

# Глава 3. Частичное отображение $n$- мерного евклидова пространства, порождаемое заданной циклической сетью Френе

## §3.1. Циклическая сеть Френе в $n$ – мерном евклидовом пространстве

В области $\Omega$ $n$ - мерного евклидова пространства $E_n$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left( X, \vec{e}_i \right)$ $\left( i, j, k = 1,2,...,n \right)$ в области $\Omega$ выбран так, чтобы он был репером Френе [60], [65] для линии $\omega^1$ заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{3.1.1}$$

Формы $\omega^i$, $\omega_i^k$ удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{3.1.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе $\Sigma_n$ для линии $\omega^1$ заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети $\Sigma_n$ Френе, формы $\omega_i^k$ становятся главными [11], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3.1.3}$$

В силу последнего равенства формулы (3.1.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{3.1.4}$$

Формулы Френе для линии $\omega^1$ примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2\vec{e}_2,\\
&d_1\vec{e}_2 = -\Lambda_{11}^2\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3\vec{e}_3,\\
&d_1\vec{e}_3 = -\Lambda_{21}^3\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4,\\
&- - - - - - - - -\\
&d_1\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,1}^{n-1}\vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,1}^{n}\vec{e}_n,\\
&\ d_1\vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,1}^{n}\vec{e}_{n-1},
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

где $d_1$ – символ дифференцирования вдоль линии $\omega^1$, $k_i^{(1)} = \Lambda_{i1}^{i+1}$ – $i$-ая кривизна линии $\omega^1$ заданного семейства,

$$\Lambda_{i1}^{j} = 0 \ \left(i < j, i = 1,2,...n-2;\ j = 3,4,...,i+1,...,n\right), \tag{3.1.6}$$

$$\Lambda_{i1}^{i+1} \neq 0 \ \left(i = 1,2,...n-2\right), \tag{3.1.7}$$

(здесь знаком $\wedge$ сверху отмечен не принимаемые индексом $j$ значения).

Псевдофокус [5] $F_i^j \ (i \neq j)$ касательной к линии $\omega^i$ сети $\Sigma_n$ Френе определяется следующим радиус – вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j} = \vec{X} - \left(1/\Lambda_{ij}^{j}\right)\vec{e}_i = \vec{X} + \left(1/\Lambda_{jj}^{i}\right)\vec{e}_i\,. \tag{3.1.8}$$

В общем случае на каждой касательной $\left(X,\vec{e}_i\right)$ существуют псевдофокусов в количестве $n-1$. Но в силу (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) на каждой из касательных $\left(X,\vec{e}_3\right)$, $\left(X,\vec{e}_4\right)$, …, $\left(X,\vec{e}_n\right)$ имеем псевдофокусов в количестве $n-2$, а точки $F_3^1 \in \left(X,\vec{e}_3\right)$, $F_4^1 \in \left(X,\vec{e}_4\right)$, …, $F_n^1 \in \left(X,\vec{e}_n\right)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_n$.

Пусть сеть $\Sigma_n$ является циклической сетью Френе [48]. Тогда репер $\Re_2 = \left(X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,...,\vec{e}_n,\vec{e}_1\right)$ является репером Френе для линии $\omega^2$ сети $\Sigma_n$, репер $\Re_3 = \left(X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,...,\vec{e}_n,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ является репером Френе для линии $\omega^3$ сети $\Sigma_n$, и т.д., репер $\Re_n = \left(X,\vec{e}_n,\vec{e}_1,...,\vec{e}_{n-1}\right)$ является репером Френе для линии $\omega^n$ сети $\Sigma_n$. Формулы Френе для линии $\omega^2$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&d_2\vec{e}_2 = \Lambda^3_{22}\vec{e}_3\,,\\
&d_2\vec{e}_3 = -\Lambda^3_{22}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{32}\vec{e}_4\,,\\
&d_2\vec{e}_4 = -\Lambda^4_{32}\vec{e}_3 + \Lambda^5_{42}\vec{e}_5\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&d_2\vec{e}_n = -\Lambda^n_{n-1,2}\vec{e}_{n-1} + \Lambda^1_{n2}\vec{e}_1\,,\\
&d_2\vec{e}_1 = -\Lambda^1_{n2}\vec{e}_n\,,
\end{aligned}
$$

где $d_2$ – символ дифференцирования вдоль линии $\omega^2$, $K^{(2)}_{\bar{i}} = \Lambda^{\bar{i}+1}_{\bar{i}\,2}$ - $\bar{i}$ -тая кривизна этой линии ( $\bar{i} = 2,3,\ldots,n-1,n$; когда $\bar{i} = n$, индекс $\bar{i}+1$ условно обозначим через 1),

$$\Lambda^{\bar{i}+1}_{\bar{i}\,2} \neq 0, \tag{3.1.9}$$

$$\Lambda^j_{\bar{i}\,2} = 0 \;\left(\bar{i} < j\,, \bar{i} = 2,3,\ldots,n-1,n;\;\; j = 4,\ldots,\bar{i}+1,\ldots,n\right). \tag{3.1.10}$$

Из (3.1.9), (3.1.10), (3.1.8) следует, что псевдофокусы $F^2_1 \in \left(X, \vec{a}_1\right)$, $F^2_4 \in \left(X, \vec{a}_4\right)$, ..., $F^2_n \in \left(X, \vec{a}_n\right)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\bar{E}_n$.

Напишем формулы Френе для линии $\omega^3$ сети $\Sigma_n$:

$$
\begin{aligned}
&d_3\vec{e}_3 = \Lambda^4_{33}\vec{e}_4\,,\\
&d_3\vec{e}_4 = -\Lambda^4_{33}\vec{e}_3 + \Lambda^5_{43}\vec{e}_5\,,\\
&d_3\vec{e}_5 = -\Lambda^5_{43}\vec{e}_4 + \Lambda^6_{53}\vec{e}_6\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&d_3\vec{e}_{n-1} = -\Lambda^{n-1}_{n-2,3}\vec{e}_{n-2} + \Lambda^n_{n-1,3}\vec{e}_n\,,\\
&d_3\vec{e}_n = -\Lambda^n_{n-1,3}\vec{e}_{n-1} + \Lambda^1_{n3}\vec{e}_1\,,\\
&d_3\vec{e}_1 = -\Lambda^1_{n3}\vec{e}_n + \Lambda^2_{13}\vec{e}_2\,,\\
&d_3\vec{e}_2 = -\Lambda^2_{13}\vec{e}_1\,,
\end{aligned}
$$

где $d_3$ - символ дифференцирования вдоль линии $\omega^3$, $K^{(3)}_{\tilde{i}} = \Lambda^{\tilde{i}+1}_{\tilde{i}\,3}$ - $\tilde{i}$ -тая кривизна этой линии ( $\tilde{i} = 3,4,\ldots,n,n+1$; когда $\tilde{i} = n$, индекс $\tilde{i}+1$ условно обозначим через 1, когда $\tilde{i} = n + 1$, индекс $\tilde{i} = n + 2$ условно обозначим через 2,

$$\Lambda_{\tilde{i}3}^{\tilde{i}+1} \neq 0, \qquad (3.1.11)$$

$$\Lambda_{\tilde{i}2}^{j} = 0 \ \left( j = 1, 2, 3, \ldots, n \right). \qquad (3.1.12)$$

Из (3.1.8), (3.1.11), (3.1.12) следует, что псевдофокусы $F_1^3 \in \left( X, \mathring{\vec{a}}_1 \right)$, $F_2^3 \in \left( X, \mathring{\vec{a}}_2 \right)$, $F_5^3 \in \left( X, \mathring{\vec{a}}_5 \right), \ldots, F_n^3 \in \left( X, \mathring{\vec{a}}_n \right)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\bar{E}_n$.

Формулы Френе для линии $\omega^n$ сети $\Sigma_n$ имеют вид:

$$d_n\vec{e}_n = \Lambda_{nn}^{1}\vec{e}_1,$$
$$d_n\vec{e}_1 = -\Lambda_{nn}^{1}\vec{e}_n + \Lambda_{1n}^{2}\vec{e}_2,$$
$$d_n\vec{e}_2 = -\Lambda_{1n}^{2}\vec{e}_1 + \Lambda_{2n}^{3}\vec{e}_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_n\vec{e}_{n-2} = -\Lambda_{n-3,n}^{n-2}\vec{e}_{n-3} + \Lambda_{n-2,n}^{n-1}\vec{e}_{n-1},$$
$$d_n\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,n}^{n-1}\vec{e}_{n-2},$$

где $\Lambda_{nn}^{1} = -\Lambda_{1n}^{n}$ - первая кривизна линии $\omega^n$ сети $\Sigma_n$, $K_p^{(n)} = \Lambda_{p-1,n}^{p}$ - $p$-тая кривизна этой линии $\left( p = 2, 3, \ldots, n-2 \right)$,

$$\Lambda_{p-1,n}^{p} \neq 0, \qquad (3.1.13)$$

$$\Lambda_{p-1,n}^{j} = 0 \ \left( p < j;\ p = 2, \ldots, n-2;\quad j = 3, \ldots, n \right). \qquad (3.1.14)$$

Из (3.1.8), (3.1.13), (3.1.14) следует, что псевдофокусы $F_2^n \in \left( X, \mathring{\vec{a}}_2 \right)$, $F_3^n \in \left( X, \mathring{\vec{a}}_3 \right)$, $F_4^n \in \left( X, \mathring{\vec{a}}_3 \right), \ldots, F_{n-1}^n \in \left( X, \mathring{\vec{a}}_{n-1} \right)$ являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\bar{E}_n$.

Из выше изложенного следует следующая теорема.

**Теорема 3.1.1.** Сеть $\Sigma_n$ Френе для линии $\omega^1$ заданного семейства является циклической сетью Френе тогда и только тогда, когда выполнены условия: (3.1.6), (3.1.7), (3.1.9), (3.1.10), …, (3.1.13), (3.1.14).

Рассмотрим $p$-мерные распределения $\Delta_p$, определяемые заданной циклической сетью $\tilde{\Sigma}_n$ Френе $\left(p = 2,3,...,n-1\right)$. Найдем векторы средних кривизн нескольких двумерных распределений:

$$\Delta_2^{(1,2)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right),\ \Delta_2^{(1,3)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3\right),\ \Delta_2^{(1,4)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_4\right).$$

Вектор $\vec{M}_2^{(1,2)}$ средней кривизны распределения $\Delta_2^{(1,2)}$ имеет следующий вид:

$$\vec{M}_2^{(1,2)} = \frac{1}{2}\left[\left(\Lambda_{11}^3 + \Lambda_{22}^3\right)\vec{e}_3 + \left(\Lambda_{11}^4 + \Lambda_{22}^4\right)\vec{e}_4 + ... + \left(\Lambda_{11}^n + \Lambda_{22}^n\right)\vec{e}_n\right].$$

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_n$ – циклическая сеть Френе, отсюда имеем:

$$\vec{M}_2^{(1,2)} = \frac{1}{2}\Lambda_{22}^3\vec{e}_3 = \frac{1}{2}k_1^2\vec{e}_3 = \frac{1}{2}\vec{k}_{12}. \tag{3.1.15}$$

Аналогичным образом найдем:

$$\vec{M}_2^{(1,3)} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{33}^4\vec{e}_4\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{11} + \vec{k}_{13}\right), \tag{3.1.16}$$

$$\vec{M}_2^{(1,4)} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{11}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{44}^5\vec{e}_5\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{11} + \vec{k}_{14}\right). \tag{3.1.17}$$

Для распределения $\Delta_2^{(3,4)} = \left(X, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$ найдем:

$$\vec{M}_2^{(3,4)} = \frac{1}{2}\vec{k}_{14}. \tag{3.1.18}$$

Распределение $\Delta_2^{(3,5)} = \left(X, \vec{e}_3, \vec{e}_5\right)$ имеет следующий вектор средней кривизны:

$$\vec{M}_2^{(3,5)} = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{13} + \vec{k}_{15}\right), \tag{3.1.19}$$

\- - - - - - - -

$$\vec{M}_2^{(3,n)} = \frac{1}{2}\left(\vec{k}_{13} + \vec{k}_{1n}\right). \qquad (3.1.20)$$

Рассмотрим некоторые трехмерные распределения $\Delta_3$, определяемые данной циклической сетью Френе:

$$\Delta_3^{(1,2,3)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right),\ \Delta_3^{(1,2,4)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4\right),\ \Delta_3^{(1,2,5)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_5\right),$$

$$\Delta_3^{(2,3,4)} = \left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right),\ \Delta_3^{(2,3,5)} = \left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5\right)$$

и найдем их векторы средних кривизн соответственно:

$$\vec{M}_3^{(1,2,3)} = \frac{1}{3}\vec{k}_{13}, \qquad \vec{M}_3^{(1,2,4)} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{12} + \vec{k}_{14}\right), \quad \vec{M}_3^{(1,2,5)} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{12} + \vec{k}_{15}\right).$$

Следовательно, распределение $\Delta_3^{(1,2,2+\hat{m})} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_{2+\hat{m}}\right)$, где $\left(\hat{m} = 1,2,...,n-2\right)$ имеет вектор средней кривизны следующего вида:

$$\vec{M}_3^{(1,2,2+\hat{m})} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{12} + \vec{k}_{1,2+\hat{m}}\right). \qquad (3.1.21)$$

Далее для распределений $\Delta_3^{(2,3,4)}, \Delta_3^{(2,3,5)}$ имеем:

$$\vec{M}_3^{(2,3,4)} = \frac{1}{3}\vec{k}_{14}, \qquad (3.1.22)$$

$$\vec{M}_3^{(2,3,5)} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{13} + \vec{k}_{15}\right).$$

Следовательно, вектор средней кривизны распределения $\Delta_3^{2,3,3+\tilde{m}}$ $\left(\tilde{m} = 2,3,...,n-3\right)$ имеет вид:

$$\vec{M}_3^{(2,3,3+\tilde{m})} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{13} + \vec{k}_{1,3+\tilde{m}}\right). \qquad (3.1.23)$$

Выявленную закономерность можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 3.1.2.** Если данная сеть $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в области $\Omega \subset E_n$ является циклической сетью Френе, то а) векторы средних кривизн двумерных распределений $\Delta_2^{(\alpha_1,\alpha_1+1)} = \left(X, \vec{e}_{\alpha_1}, \vec{e}_{\alpha_1+1}\right)$ имеют вид:

$$\vec{M}_2^{(\alpha_1,\alpha_1+1)} = \frac{1}{2}\vec{k}_{1,\alpha_1+1}, \qquad (3.1.24)$$

где $\vec{k}_{1,\alpha_1+1}$ – первая кривизна линии $\omega^{\alpha_1+1}$ сети $\tilde{\Sigma}_n$, $\alpha_1 = 1,2,...,n-1$;

б) векторы средних кривизн двумерных распределений $\Delta_2^{(\alpha_1,\alpha_1+\tilde{i})} = \left(X, \vec{e}_{\alpha_1}, \vec{e}_{\alpha_1+\tilde{i}}\right)$ $\left(\tilde{i} = 2,3,...,n-\alpha_1\right)$ имеют вид:

$$\vec{M}_2^{(\alpha_1,\alpha_1+\tilde{i})} = \frac{1}{2}\vec{k}_{1,\alpha_1+\tilde{i}}; \qquad (3.1.25)$$

б) векторы средних кривизн трехмерных распределений $\Delta_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+2)}$, $\Delta_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+\hat{i})}$ (где $\hat{i} = 3,4,...,n-\alpha_1$) имеют вид:

$$\vec{M}_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+2)} = \frac{1}{3}\vec{k}_{1,\alpha_1+2},$$

$$\vec{M}_3^{(\alpha_1,\alpha_1+1,\alpha_1+\hat{i})} = \frac{1}{3}\left(\vec{k}_{1,\alpha_1+1} + \vec{k}_{1,\alpha_1+\hat{i}}\right).$$

## §3.2. Частичное отображение пространства $E_n$, порождаемое псевдофокусом $F_1^n$ на касательной к линии $\omega^1$ заданной циклической сети Френе

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (3.1.3) и применяя лемму Картана [67], получим:

$$d\Lambda_{ik}^j = \left(\Lambda_{ikm}^j + \Lambda_{i\ell}^j \Lambda_{km}^\ell + \Lambda_{\ell k}^j \Lambda_{im}^\ell\right)\omega^m. \tag{3.2.1}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ik}^j, \Lambda_{ikm}^j\right\}$ определяет геометрический объект второго порядка.

Введем обозначение:

$$B_{ikm}^j = \Lambda_{ikm}^j + \Lambda_{i\ell}^j \Lambda_{km}^\ell + \Lambda_{\ell k}^j \Lambda_{im}^\ell. \tag{3.2.2}$$

Тогда имеем:

$$d\Lambda_{ik}^j = B_{ikm}^j \omega^m. \tag{3.2.3}$$

Псевдофокус $F_1^n$ касательной к линии $\omega^1$ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^n = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{1n}^n}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{nn}^1}\vec{e}_1. \tag{3.2.4}$$

Когда точка $X$ смещается в области $\Omega \subset E_n$, псевдофокус $F_1^n$ описывает свою область $\Omega_1^n \subset E_n$. Определяется отображение $h:\ \Omega \to \Omega_1^n$ такое, что $h\left(X\right) = F_1^n$.

Дифференцируем обычным образом равенство (3.2.4):

$$d\vec{F}_1^n = d\vec{X} + \frac{d\Lambda_{1n}^n}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{1n}^n}d\vec{e}_1.$$

В силу деривационных формул и (3.2.3) последнее равенство имеет вид:

$$d\vec{F}_1^n = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{1ni}^n \omega^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{1n}^n} \Lambda_{1i}^k \omega^i \vec{e}_k$$

или

$$d\vec{F}_1^n = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{1ni}^n \omega^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \delta_1^i \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{1i}^k \omega^i}{\Lambda_{1n}^n} \vec{e}_k = \left[ \vec{e}_i + \frac{B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{1i}^k}{\Lambda_{1n}^n} \vec{e}_k \right] \omega^i .$$

Введем обозначение:

$$\vec{c}_i = \vec{e}_i + \frac{B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{1i}^k}{\Lambda_{1n}^n} \vec{e}_k$$

или

$$\vec{c}_i = \left[ \frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \right] \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{1i}^k}{\Lambda_{1n}^n} \vec{e}_k . \tag{3.2.5}$$

(по $i$ нет суммирования).

Найдем $\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j \ \left(i \neq j\right)$, где

$$\vec{c}_j = \left[ \frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1nj}^n \delta_1^j}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \right] \vec{e}_j - \frac{\Lambda_{1j}^\ell}{\Lambda_{1n}^n} \vec{e}_\ell ,$$

$$\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = \left[ \frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \right] \cdot \left[ \frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1nj}^n \delta_1^j}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \right] \delta_{ij} + \frac{\Lambda_{1i}^k \Lambda_{1j}^\ell}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \delta_{k\ell} .$$

Пусть $\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = 0$, т.е. $\vec{c}_i \perp \vec{c}_j$. Тогда из последнего равенства имеем:

$$\left[ \frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \right] \cdot \left[ \frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1nj}^n \delta_1^j}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \right] \delta_{ij} = - \frac{\Lambda_{1i}^k \Lambda_{1j}^\ell}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} \delta_{k\ell}$$

или

$$\left[ \left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i \right] \cdot \left[ \left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1nj}^n \delta_1^j \right] \delta_{ij} + \left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 \Lambda_{1i}^k \Lambda_{1j}^\ell \delta_{k\ell} = 0 . \tag{3.2.6}$$

Обратно, если имеет место равенство (3.2.6), то $\vec{c}_i \perp \vec{c}_j$, т.е. образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении $h$ является ортогональной. Таким образом, доказана

**Теорема 3.2.1.** Для того, чтобы образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в отображении $h: \Omega \to \Omega_1^n$ являлась ортогональной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.2.6) для всех значений индексов $i, j \ (i \neq j)$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.2.6). Найдем производную вектора первой кривизны линии $\omega^n$: $\vec{k}_{1n} = \Lambda_{nn}^1 \vec{e}_1 = -\Lambda_{1n}^n \vec{e}_1$ вдоль направлению $\vec{e}_i$:

$$d_i \vec{k}_{1n} = d_i\left(-\Lambda_{1n}^n \vec{e}_1\right) = -\left(d_i \Lambda_{1n}^n\right)\vec{e}_1 - \Lambda_{1n}^n d_i \vec{e}_1 .$$

В силу (3.2.3) отсюда имеем:

$$d_i \vec{k}_{1n} = -B_{1ni}^n \vec{e}_1 - \Lambda_{1n}^n \Lambda_{1i}^k \vec{e}_k . \qquad (3.2.7)$$

Найдем:

$$\vec{\Lambda}_{1i} = d_i \vec{e}_1 = \Lambda_{1i}^k \vec{e}_k , \quad \vec{\Lambda}_{1j} = d_j \vec{e}_1 = \Lambda_{1j}^\ell \vec{e}_\ell . \qquad (3.2.8)$$

Учитывая (3.2.7), (3.2.8) равенство (3.2.6) перепишем в виде:

$$\left[\vec{k}_{1n}^{\,2} + \left(-\vec{e}_1 d_i \vec{k}_{1n}\right)\right]\left[\vec{k}_{1n}^{\,2} + \left(-\vec{e}_1 d_j \vec{k}_{1n}\right)\right] + \vec{k}_{1n}^{\,2} \vec{\Lambda}_{1i} \vec{\Lambda}_{1j} = 0 . \qquad (3.2.9)$$

В этом заключается геометрический смысл равенства (3.2.6).

Теперь найдем $\vec{c}_i^{\,2} = \vec{c}_i \vec{c}_i$:

$$\vec{c}_i^{\,2} = \left[\frac{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2}\right]^2 + \frac{\left(\Lambda_{1i}^k\right)^2}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2} .$$

Из условия $\left|\vec{c}_i\right| = 1$ найдем:

$$\frac{\left[\left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 + B_{1ni}^n \delta_1^i\right]^2 + \left(\Lambda_{1n}^n\right)^2 \left(\Lambda_{1i}^k\right)^2}{\left(\Lambda_{1n}^n\right)^4} = 1$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{1n}^{n}\right)^{2}+B_{1ni}^{n}\delta_{1}^{i}\right]^{2}+\left(\Lambda_{1n}^{n}\right)^{2}\left(\Lambda_{1i}^{k}\right)^{2}=\left(\Lambda_{1n}^{n}\right)^{4}. \qquad (3.2.10)$$

Обратно, если имеет место равенство (3.2.10) (для всех значений индекса $i$ ), то $\left|\vec{c}_i\right|=1$. Следовательно, справедлива теорема

**Теорема 3.2.2.** Для того, чтобы отображение $h:\ \Omega\to\Omega_1^n$ являлось движением необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие (3.2.10) (для всех значений индекса $i$ ).

Геометрический смысл равенства (3.2.10) заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{1n}{}^{2}+\left(-\vec{e}_1 d_i \vec{k}_{1n}\right)\right]^{2}+\vec{k}_{1n}{}^{2}\vec{\Lambda}_{1i}{}^{2}=\left(k_1^n\right)^{4},$$

где $k_1^n=\Lambda_{nn}^{1}=-\Lambda_{1n}^{n}$ – первая кривизна линии $\omega^n$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе.

## §3.3. Свойства частичного отображения $n$ - мерного евклидова пространства, порождаемого псевдофокусом $F_2^1$

Рассмотрим равенство

$$\vec{F}_2^1 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{11}^2}\vec{e}_2\,, \qquad (3.3.1)$$

которое определяет псевдофокус $F_2^1 \in \left(X, \vec{e}_2\right)$ на касательной к линии $\omega^2$ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$.

Когда точка $X$ смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус $F_2^1 \in \left(X, \vec{e}_2\right)$ описывает свою область $\Omega_2^1 \subset E_4$. Получается частичное отображение $\mu: \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $\mu\left(X\right) = F_2^1$.

Продифференцируем обычным образом равенство (3.3.1) и учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{21}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\omega_2^i \vec{e}_i\,.$$

Учитывая (3.1.3), (3.2.1), (3.2.2) отсюда получаем:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{21m}^1 \omega^m}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{2m}^i \omega^m}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_i\,.$$

Последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$d\vec{F}_2^1 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{21i}^1 \omega^i}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\delta_2^i \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{2i}^k \omega^i}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k = \left[\vec{e}_i + \frac{B_{21i}^1 \delta_2^i}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{2i}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k\right]\omega^i$$

(по $i$ нет суммирования).

Введем обозначение:

$$\vec{a}_i = \vec{e}_i + \frac{B_{21i}^1 \delta_2^i}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{2i}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k$$

или

$$\vec{a}_i = \left[ 1 + \frac{B^1_{21i}\delta^i_2}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2} \right] \vec{e}_i - \frac{\Lambda^k_{2i}}{\Lambda^1_{21}} \vec{e}_k . \qquad (3.3.2)$$

Напишем вектор $\vec{a}_j \ (i \neq j)$:

$$\vec{a}_j = \left[ 1 + \frac{B^1_{21j}\delta^j_2}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2} \right] \vec{e}_j - \frac{\Lambda^k_{2j}}{\Lambda^1_{21}} \vec{e}_k .$$

Найдем $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \left[ \frac{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21i}\delta^i_2}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2} \right] \cdot \left[ \frac{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21j}\delta^j_2}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2} \right] + \frac{\Lambda^k_{2i}\Lambda^k_{2j}\delta_{k\ell}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2} .$$

Пусть $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0$, т.е. $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j$. Тогда из последнего равенства получим:

$$\frac{\left[ \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21i}\delta^i_2 \right] \cdot \left[ \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21j}\delta^j_2 \right] + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^k_{2i}\Lambda^k_{2j}\delta_{k\ell}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^4} = 0 .$$

Отсюда имеем:

$$\left[ \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21i}\delta^i_2 \right] \cdot \left[ \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21j}\delta^j_2 \right] + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2 \Lambda^k_{2i}\Lambda^k_{2j}\delta_{k\ell} = 0. \qquad (3.3.3)$$

Обратно, если имеет место равенство (3.3.3), то $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j \ (i \neq j)$, т.е. образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении $\mu : \Omega \to \Omega^1_2$ является ортогональной. Таким образом доказана

**Теорема 3.3.1.** Образ заданной циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении $\mu$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.3.3) для всех $i, j \ (i \neq j)$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.3.3). Найдем производную вектора первой кривизны $\vec{k}_{11} = \Lambda^2_{11}\vec{e}_2 = \left(-\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2$ линии $\omega^1$ заданной циклической сети вдоль направлении $\vec{e}_i \ (i = 1,2,...,n)$:

$$d_i\vec{k}_{11} = d_i\left(-\Lambda^1_{21}\vec{e}_2\right) = -\left(d_i\Lambda^1_{21}\right)\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}d_i\vec{e}_2 = -B^1_{21i}\vec{e}_2 - \Lambda^1_{21}\Lambda^k_{2i}\vec{e}_k ,$$

где $B^1_{21i} = \Lambda^1_{21i} + \Lambda^1_{2\ell}\Lambda^\ell_{1i} + \Lambda^1_{\ell 1}\Lambda^\ell_{2i}$, $\quad d\Lambda^1_{21} = B^1_{21i}\omega^i$.

Найдем:

$$\vec{e}_2 d_i \vec{k}_{11} = -B^1_{21i}, \tag{3.3.4}$$

$$\vec{\Lambda}_{2i} = d_i\vec{e}_2 = \Lambda^k_{2i}\vec{e}_k; \qquad \vec{\Lambda}_{2j} = d_j\vec{e}_2 = \Lambda^\ell_{2j}\vec{e}_\ell \ \ (i \neq j) \tag{3.3.5}$$

Учитывая (3.3.4), (3.3.5) равенство (3.3.3) напишем в виде:

$$\left[\vec{k}_{11}{}^2 + \left(-\vec{e}_2 d_i \vec{k}_{11}\right)\delta^i_2\right]\cdot\left[\vec{k}_{11}{}^2 + \left(-\vec{e}_2 d_j \vec{k}_{11}\right)\delta^j_2\right] + \vec{k}_{11}{}^2\vec{\Lambda}_{2i}\vec{\Lambda}_{2j} = 0. \tag{3.3.6}$$

Это и есть геометрический смысл равенства (3.3.3).

Найдем $\vec{a}_i{}^2 = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i$:

$$\vec{a}_i{}^2 = \frac{\left[\left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21i}\delta^i_2\right]^2}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^4} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\Lambda^k_{2i}\right)^2}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}. \tag{3.3.7}$$

Потребуем, чтобы $\left|\vec{a}_i\right| = 1$. Тогда из (3.3.7) получим:

$$\frac{\left[\left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21i}\delta^i_2\right]^2 + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\Lambda^k_{2i}\right)^2}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^4} = 1$$

или

$$\left[\left(\Lambda^1_{21}\right)^2 + B^1_{21i}\delta^i_2\right]^2 + \left(\Lambda^1_{21}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(\Lambda^k_{2i}\right)^2 = \left(\Lambda^1_{21}\right)^4. \tag{3.3.8}$$

Геометрический смысл последнего заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{11}{}^2 + \left(-\vec{e}_2 d_i \vec{k}_{11}\right)\right]^2 + \vec{\Lambda}_{2i}{}^2 = \left(k^1_1\right)^4. \tag{3.3.9}$$

Если имеет место равенство (3.3.7), то вектор $\vec{a}_i$ – единичный. Таким образом, справедлива

**Теорема 3.3.2.** Отображение $\mu : \Omega \to \Omega^1_2$ (где $\Omega \subset E_4$, $\Omega^1_2 \subset E_4$) является движением тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.3.8) (для всех значений $i$).

## §3.4. Свойства частичного отображения $n$- мерного евклидова пространства, порождаемое псевдофокусом $F_i^j$

Псевдофокус [5] $F_i^j$ $(i \neq j)$ касательной к линии $\omega^i$ сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j} = \vec{X} - \left(1/\Lambda_{ij}^j\right)\vec{e}_i. \tag{3.4.1}$$

Когда точка $X$ смещается в области $\Omega$ псевдофокус $F_i^j$ $(i \neq j)$ описывает свою область $\Omega_i^j$ в $E_n$. Получим отображение $h:\Omega \to \Omega_i^j$ такое, что $h(X) = F_i^j$.

Дифференцируя обычным образом равенство (3.4.1) получим

$$d\vec{F}_i^{\,j} = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\right)\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}d\vec{e}_i = \omega^k\vec{e}_k + \frac{d\Lambda_{ij}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\omega_i^k\vec{e}_k =$$

$$= \omega^k\vec{e}_k + \frac{B_{ijm}^j\omega^m}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\Lambda_{im}^k\omega^m\vec{e}_k$$

или

$$d\vec{F}_i^{\,j} = \omega^k\vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j\omega^k}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^m\omega^k}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_m = \left(\vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^m}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_m\right)\omega^k,$$

где

$$d\Lambda_{ij}^j = B_{ijk}^j\omega^m.$$

Введем обозначения:

$$\vec{a}_k = \vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^m}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_m. \tag{3.4.2}$$

В общем случае векторы $\vec{a}_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ линейно независимы.

Область $\Omega_i^j$ отнесем к подвижному реперу $\Re' = \left(F_i^{\ j}, \vec{a}_k\right)$. Тогда $f\left(\vec{e}_k\right) = \vec{a}_k$. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\vec{F}_i^{\ j} = \omega^k \vec{a}_k; \ d\vec{a}_k = \varpi_k^t \vec{a}_t \qquad (t = 1,2,\ldots,n). \tag{3.4.3}$$

Рассмотрим векторы $\vec{e}_k, \vec{a}_k, \overrightarrow{XF_i^{\ j}} = -\frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i \ (i \neq j)$. Из условия принадлежности этих векторов плоскости $\left(X, \vec{e}_k, \vec{e}_i\right)$ получим $\Lambda_{ik}^m = 0$.

Таким образом доказана

**Теорема 3.4.1.** Линия $\omega^k$ заданной сети Френе является двойной линией [15] отображения $h$ тогда и только тогда, когда имеет равенство $\Lambda_{ik}^m = 0$.

Геометрический смысл последнего равенства заключается в том, что вектор $\vec{e}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ переносится параллельно вдоль направлении $\vec{e}_k$ ($k$ - фиксировано).

Равенство (3.4.2) напишем в виде:

$$\vec{a}_k = \vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j \delta_i^k}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_k - \frac{\Lambda_{ik}^m}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_m$$

или

$$\vec{a}_k = \left[\frac{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2 + B_{ijk}^j \delta_i^k}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\right]\vec{e}_k - \frac{\Lambda_{ik}^m}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_m.$$

Напишем вектор $\vec{a}_\ell$ в виде $(k \neq 1)$:

$$\vec{a}_\ell = \left[\frac{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2 + B_{ij\ell}^j \delta_i^\ell}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\right]\vec{e}_\ell - \frac{\Lambda_{i\ell}^t}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_t.$$

Найдем $\vec{a}_k \vec{a}_\ell$ $(k \neq \ell)$:

$$\vec{a}_k\vec{a}_\ell=\left[\frac{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2+B_{ijk}^j\delta_i^k}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\right]\left[\frac{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2+B_{ij\ell}^j\delta_i^\ell}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\right]\delta_{k\ell}+\frac{\Lambda_{ik}^m\Lambda_{i\ell}^t}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\delta_{mt}\,.$$

Из условия $\vec{a}_k\vec{a}_\ell=0$ получим:

$$\left[\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2+B_{ijk}^j\delta_i^k\right]\left[\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2+B_{ij\ell}^j\delta_i^\ell\right]\delta_{k\ell}+\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2\Lambda_{ik}^m\Lambda_{i\ell}^t\delta_{mt}=0\,, \qquad (3.4.4)$$

(где $i,j$ – фиксированы)

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{ij}^{\,2}+\left(-\vec{e}_i d_k\vec{k}_{ij}\right)\right]\left[\vec{k}_{ij}^{\,2}+\left(-\vec{e}_i d_\ell\vec{k}_{ij}\right)\right]=-\vec{k}_{ij}^{\,2}\vec{\Lambda}_{ik}\vec{\Lambda}_{i\ell}\,. \qquad (3.4.5)$$

где $\vec{k}_{ij}=\Lambda_{jj}^i\vec{e}_i=-\Lambda_{ij}^j\vec{e}_i$ – вектор $i$-той кривизны линии $\omega^j$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе, $\vec{\Lambda}_{ik}=d_k\vec{e}_i$, $\vec{\Lambda}_{i\ell}=d_\ell\vec{e}_i$.

Обратно, если имеет место равенство (3.4.4), то $\vec{a}_k\perp\vec{a}_\ell$, т.е. образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ в отображении $h:\Omega\to\Omega_i^j$ является ортогональной.

Таким образом, доказана

**Теорема 3.4.2.** Образ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе в отображении $h:\Omega\to\Omega_i^j$ является ортогональной тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.4.4) (для всех значений индексов $k,\ell$).

Найдем $\vec{a}_k^{\,2}=\vec{a}_k\vec{a}_k$:

$$\vec{a}_k^{\,2}=\left[\frac{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2+B_{ijk}^j\delta_i^k}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\right]^2+\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\left(\Lambda_{ik}^m\right)^2}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}.$$

Из условия $\left|\vec{a}_k\right|=1$ получим:

$$\left[\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2+B_{ijk}^j\delta_i^k\right]^2+\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2\sum_{m=1}^{n}\left(\Lambda_{ik}^m\right)^2=\left(\Lambda_{ij}^j\right)^4, \qquad (3.4.6)$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\left[\vec{k}_{ij}^{\,2} + \left(-\vec{e}_i d_k \vec{k}_{ij}\right)\right]^2 + \vec{k}_{ij}^{\,2} \vec{\Lambda}_{ik}^{\,2} = \left(k_i^j\right)^4, \tag{3.4.7}$$

где $k_i^j = \Lambda_{jj}^i = -\Lambda_{ij}^j$ – $i$-тая кривизна линии $\omega^j$ заданной циклической сети $\tilde{\Sigma}_n$ Френе.

Если имеет место равенство (3.4.6), то векторы $h\left(\vec{e}_i\right) = \vec{a}_i$ – единичные. Следовательно, справедлива

**Теорема 3.4.3.** Отображение $h:\Omega \to \Omega_i^j$ является движением тогда и только тогда, когда имеет место равенство (3.4.6).

# Список использованных источников


1. Алексеева Л.И. К геометрии отображений трехмерных евклидовых пространств [Текст] / Л.И. Алексеева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр.-Калининград, 1988. – Вып.19. – С. 10-14.
2. Алиев Н. О некоторых отображениях поверхностей евклидовых пространств [Текст] / Н. Алиев // Материалы III конгресса всемирного математического общества тюркоязычных стран. КазНУ им.Аль-Фараби, Алматы, 2009. – С. 68.
3. Базылев В.Т. О многомерных сетях и преобразованиях [Текст] / В.Т. Базылев // Итоги науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 138-164.
4. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.243. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1965. – С. 29-37.
5. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т. Базылев // Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.
6. Базылев В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи $p$–поверхности евклидова пространства [Текст] / В.Т. Базылев // Сибирский математический журнал. 1966. Т.3. – С. 499-511.
7. Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Изв. вузов. Математика, 1967. Т.9. – С. 3-11.
8. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых $n$-пространств [Текст] / В.Т. Базылев // В кн: III Межвузовская конференция по проблемам геометрии. Тезисы докладов. – Казань: Казанский университет, 1967. – С. 8.

9. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.1., № 374. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. – С. 28-40.

10. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространства [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.1. №374. – Москва: МГПИ им. В.И.Ленина, 1970. – С. 41-51.

11. Базылев В.Т. Сети на многообразиях [Текст] / В.Т. Базылев // Труды геометрического семинара. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1974. – Т.6. – С. 189-205.

12. Базылев В.Т. Об одном замечательном классе сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Проблемы геометрии. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1975. – Т.7. – С. 105-116.

13. Базылев В.Т. О конструктивных способах задания многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии – Вильнюс, 1975. – С. 21-22.

14. Базылев В.Т. К геометрии отображений гладких многообразий [Текст] / В.Т. Базылев // Тезисы докладов VI Прибалтийской геометрической конференции. –Таллин, 1984. – С. 18.

15. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий [Текст] / В.Т. Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 1975.вып.6. – С. 19-25.

16. Борбоева Г.М. Характеристические линии отображения поверхностей евклидово трехмерного пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук, 2002. №5. – С. 137-142.

17.Борбоева Г.М. К геометрии отображений трехмерных поверхностей четырехмерного евклидова пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник КазНУ им.Аль-Фараби, серия математика, №2 (53), 2007. – С. 16-21.

18. Борбоева Г.М. Об одном отображении двумерных поверхностей трехмерного евклидово пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук, 2002. №5. – С. 143-149.

19. Борбоева Г.М. Об одном отображении двумерных поверхностей евклидова четырехмерного пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Наука. Образование. Техника. Международный научный журнал кыргызско-узбекского университета, 2007. №1. – С. 65-70.

20. Борбоева Г.М. К геометрии отображений гиперповерхностей евклидова пространства [Текст] / Г.М. Борбоева, Г. Матиева // Вестник ОшГУ: Серия пед.-психолог.наук, 2008. №1. – С. 145-149.

21. Борбоева Г.М. Необходимое и достаточное условие геодезичности линий образа данной сети в отображении гиперповерхностей евклидова пространства [Текст] / Борбоева Г.М., Матиева Г. // Вестник ОшГУ: Серия пед.-психолог. наук, 2008. №1. – С. 149-152.

22. Борубаев А.А. Равномерные пространства [Текст] / А.А. Борубаев, А.А. Чекеев // Бишкек, 2003. – 245с.

23. Грачева В.И. О некоторых случаях дифференцируемых отображений евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Изв. вузов. Математика, 1970. № 8 (111). – С. 22-30.

24. Грачева В.И. К вопросу о $K_{af}$ – линеаризирующих прямых и плоскостях дифференцируемых отображений евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Изв. вузов. Математика, 1978. №5. – С. 19-31.

25. Грачева В.И. К вопросу о дифференцируемых отображениях евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Труды Международного конгресса ассоциации «Женщины – математики». Вып.3. – Нижний Новгород: ННГУ, 1994. – С. 11-15.

26. Грачева В.И. К вопросу о свойствах $K_{af}$ –линеаризующего соответствия прямых при дифференцируемых отображениях евклидовых

пространств [Текст] / В.И. Грачева // Труды III Международной конференции женщин – математиков. Вып.2. – Нижний Новгород: ННГУ, 1996. – С. 99-105.

27. Дулалаева Т.А. О некоторых свойствах двойных линий пары гиперраспределений [Текст] / Т.А. Дулалаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Сборник научных трудов Калининградского госуниверситета. Вып.15, Калининград, 1984. – С. 48-53.

28. Дулалаева Т.А. К геометрии пары гиперраспределений в проективном пространстве $P_n$ [Текст] / Т.А. Дулалаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Сборник научных трудов Калининградского госуниверситета. Калининград, 1998.-Вып.12. – С. 23-26.

29. Евтушик Л.Е. Дифференциально геометрические структуры на многообразиях [Текст] / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Проблемы геометрии. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1979. – Т.9. – С. 7-234.

30. Есин В.А. К геометрии сетей на поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Геометрия погруженных многообразий. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1980. – С. 29-32.

31. Есин В.А. О сопряженных и ортогональных сетях на поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12. – Калининград: Калининградский государственный университет, 1981. –С. 27-30.

32. Есин В.А. О поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Геометрия погруженных многообразий. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1981. – С. 40-44.

33. Казанова Р. О гармоническом полюсе [Текст] / Р. Казанова //Реферативный журнал. Математика №5. – Москва, 1956. – С. 104.

34. Казнина О.В. Об отображении $f:\left(V_p \subset E_n\right) \to \left(\overline{V_p} \subset E_{p+r}\right)$ в задаче Фубини-Чеха. [Текст] / О.В. Казнина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: КГУ, 1986. – Вып.17. – С. 40-42.

35. Казнина О.В. Об отображении сетей в задаче Фубини-Чеха [Текст] / О.В. Казнина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч. тр.-Калининград, 1988.– Вып.16. – С. 27-29.

36. Казнина О.В. О свойствах проектирования Фубини-Чеха. [Текст] / О.В. Казнина // Труды III Международной конференции женщин-математиков. Воронеж, 29-мая – 2-июня 1995. – Н.Новгород: ННГУ, 1996. – Вып.2. – С. 120-124.

37. Киреева С.В. О паре сетей [Текст] / С.В. Киреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. – Калининград: КГУ, 1983. – С. 26-31.

38. Киреева С.В. О геометрии пары сетей [Текст] / С.В. Киреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып.16. – Калининград: КГУ, 1985. – С. 30-33.

39. Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве $E_n$ [Текст] / М.К. Кузьмин // Проблемы геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1975. – Т.7. – С. 215-229.

40. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды Московского Математического Общества, 1953, №2, – С. 275-382.

41. Лаптев Г.Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды 30го Всесоюзного математического съезда. Т.2. Москва: АН СССР, 1956. – С. 60-62.

42. Лаптев Г.Ф. О распределениях $m$-мерных линейных элементов в $n$-мерно проективном пространстве [Текст] / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Москва: ВИНИТИ, 1971. – №3683-71. Деп.

43. Лаптев Г.Ф. Распределения $m$-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I [Текст] / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Труды геом.семинара. –Москва, 1971. Т.3. – С. 49-94.

44. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. – Москва, 1976. Т.3. – С. 29-48.

45. Локотков Н.Н. Об одном специальном отображении $T\colon T_x \to N_x$ [Текст] / Н.Н. Локотков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр. – Калининград, 1983. – Вып.14. – С. 49-53.

46. Марюков М.Н. О некоторых частичных отображениях евклидовых n-пространств [Текст] / М.Н. Марюков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып. 16. – Калининград: КГУ, 1985. – С. 41-44.

47. Марюков М.Н. О сетях, инвариантно связанных с парой $p$-распределений в $E_n$ [Текст] / М.Н. Марюков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. -Вып. 17. – Калининград: КГУ, 1986. – С. 66-69.

48. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Монография. – Ош, 2003. – С. 212-219.

49. Матиева Г. Об одном дифференцируемом отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим. – Вып. 29. 2000. – С. 430-437.

50. Матиева Г. Сеть, определенная образами заданных распределений в частичном отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева //

Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: труды международной научной конференции, посвященной 70-летию академика М.И. Иманалиева. – Бишкек: КГНУ, 2001. – 307 С. /Вестник КГНУ: сер. 3. Естественно-технические науки. – 2001. №6. – С. 232-235.

51. Матиева Г. Критерий минимальности образа распределения в частичном отображении [Текст] / Г. Матиева // Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века: труды международной научно–теоретической конференции. – Ош: Билим, Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук, 2001. №4. – С. 164-168.

52. Матиева Г. Необходимое и достаточное условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 259-264.

53. Матиева Г. Необходимое и достаточное условие геодезичности образа данной сети в отображении *p*-мерных поверхностей *n*-мерного евклидова пространствам [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева // Актуальные теории управления, топологии и операторных уравнений. Труды международной юбилейной научной конференции, посвященная 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета, 2008. –С. 122-126.

54. Папиева Т.М. Циклическая сеть Френе в четырехмерном евклидовом пространстве [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 40. – Бишкек: Илим, 2009. – С. 294-298.

55. Папиева Т.М. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Т.М. Папиева // Исследования по интегродифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.

56. Папиева Т.М. Двойные линии частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 185-189.

57. Папиева Т.М. Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 43. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 199-203.

58. Папиева Т.М. Циклическая сеть Френе в $n$- мерном евклидовом пространстве $E_n$ [Текст] / Т.М. Папиева // Вестник КРСУ, 2010, том 10. № 9. – С. 40-43.

59. Папиева Т.М. Свойства частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т.М. Папиева // Вестник ОшГУ. № 2. вып. 1. – Ош, 2012. – С. 161-165.

60. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] / П.К. Рашевский // Москва, Наука, 1967. – С. 481-482.

61. Романов В.И. К геометрии точечных отображений четырехмерных евклидовых пространств [Текст] / В.И. Романов // Труды геометрического семинара, т.5. Москва, 1975. – С. 345-359.

62. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами [Текст] / В.В. Рыжков // Итоги Науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 22-30.

63. Рыжков В.В. Об отображении евклидовых пространств, конформные отображения. [Текст] / В.В. Рыжков // Труды Томского университета, 1965, т. 188. – С. 15-18.

64. Силаева Г.М. Двойные линии отображения и их гиперсферическое изображение [Текст] / Г.М. Силаева // Дифференциальная геометрия много-образий фигур. Вып. 19. – Калининград: КГУ, 1988. – С. 82-84.

65. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст] / И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк // Москва: ИЛ, 1948. Т.II. – 348 с.

66. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж. Уизем. // Москва: Мир, 1977. – 624 с.

67. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников // М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.

68. Чешкова М.А. О конформном отображении ортогональных поверхностей в $E_{2n}$ [Текст] / М.А. Чешкова // Математические заметки. 2001. 70, №5 – С. 798-800.

69. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия [Текст] / В.И. Шуликовский // Москва: Физматгиз. 1963. – 540 с.

70. Melzi G. Su alcune trasformazioni puntuali fra spazi ordinari estendenti le trasformazioni conformi [Текст] / G. Melzi // Rend. mat. e applic., 1957, 16, №1-2, Pp. 96-117.

71. Melzi G., Trasformazioni fra iperspazi euclidei reali estendenti le trasformazioni conformi [Текст] / G. Melzi // Rend. Ist. Lombardo, Accad. sci. mat., fis., chim. e geol., 1961, A95. – №2.

72. Mikeš J. Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces [Текст] / J. Mikeš // *J. Math. Sci., New York*, **78**:3. 1996. – Pp. 311-333.

73. Mikeš J. Geodesic Ricci mappings of two-symmetric Riemann spaces [Текст] / J. Mikeš // *Math. Notes*, **28**, 1981. – Pp. 622–624.

74. Papieva T.M. The double lines of a partial mapping of *n* - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines [Текст] / G. Matieva, T.M. Papieva // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. Almaty, June 30 – July 4, 2009. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 93-96.

75. Papieva T.M. The double lines of a partial mapping of $n$ - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines [Текст] / G. Matieva, T.M. Papieva // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – P. 67.