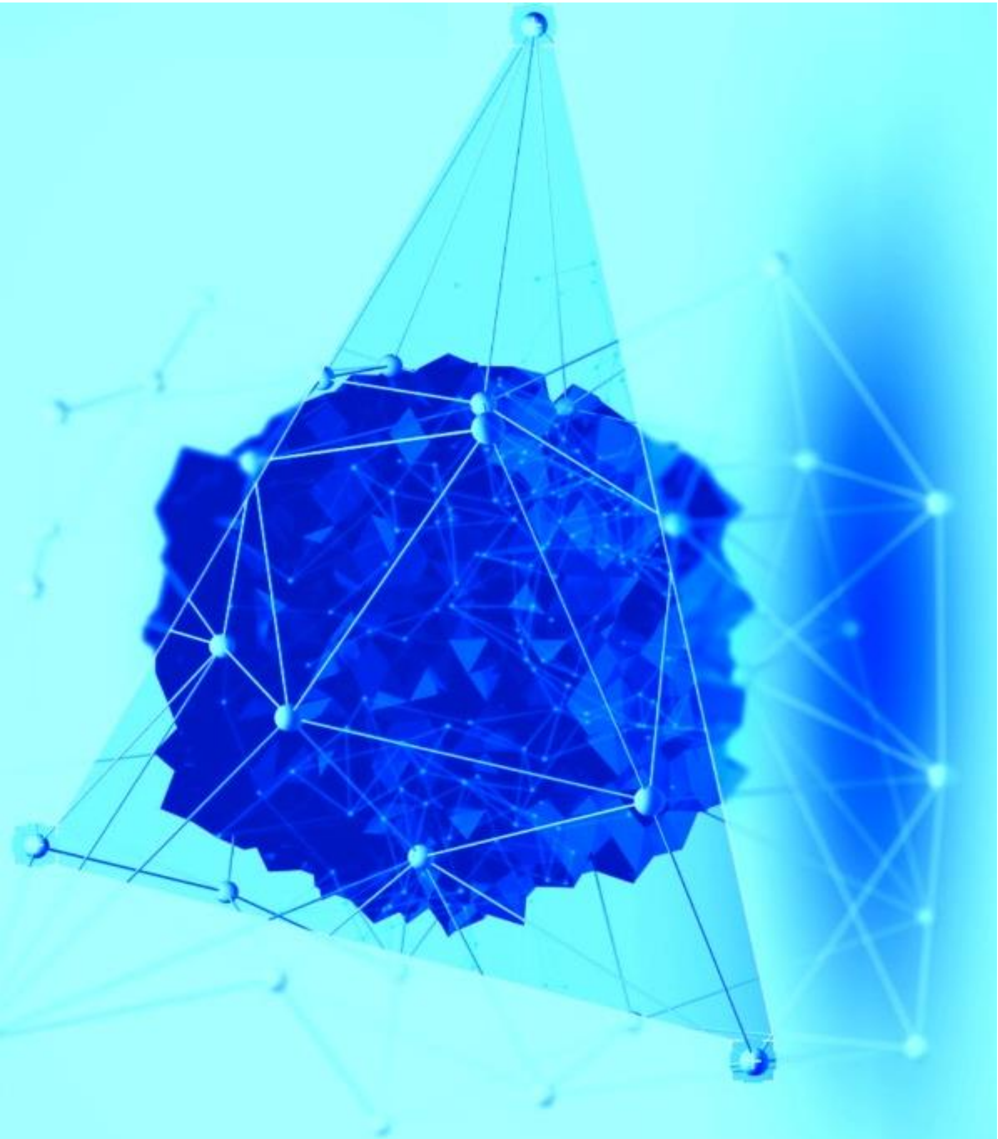
Г. Матиева, Т.М. Папиева, Б.А. Азимов

ГЕОМЕТРИЯНЫН НЕГИЗДЕРИ



Ош - 2022

УДК 514
ББК 22.151
М 34

Окуу колдонмосу Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар кеңешинин чечими менен басмага сунушталган

Рецензенттер:

• ОшМУнун ИСП кафедрасынын профессору, физика-математика илимдеринин доктору, профессор Сопуев Адахимжан;

• ЖАМУнун профессору, физика-математика илимдеринин доктору, профессор Алыбаев Курманбек Сарманович.

М 34 **Матиева Г. ж.б.**
Геометриянын негиздери: Окуу колдонмосу / Г. Матиева, Т.М. Папиева, Б.А. Азимов. – Ош: 2022. – 110 б.

ISBN 978-9967-18-859-4

Геометрия илими жалпы билим берүү системасына эзелтеден эле кирген жана аны окутуунун максаты предметтин мазмундук алкагы менен эле чектелбейт. Геометрияны окутуунун максаты катары атайын геометриялык билимге ээ болуу гана маанилүү болбостон, аны окуп-үйрөнүү процессинин өзү инсандын жалпы өнүгүүсүнө олуттуу таасир этиши өзгөчө маанилүү болуп эсептелет. Ошондуктан “Геометриянын негиздери” аттуу дисциплина болочок математика мугалимдеринин инсандык жана кесиптик компетенттүүлүктөрүнүн калыптанышына зор өбөлгө түзөт.

Окуу колдонмо жождордун “Математика”, “Колдонмо математика жана информатика”, “Физика-математикалык билим берүү” бакалавр жана магистрдик багыттары боюнча окуган студенттер жана магистранттар, ошондой эле аспиранттар, окутуучулар жана мектептин математика мугалимдери үчүн даярдалган.

УДК 514
ББК 22.151

ISBN 978-9967-18-859-4

Мазмуну

Киришүү

Учурда коомчулукта билим берүүнүн негизги максатын жаңыча түшүнүү калыптанып калды. Мугалим биринчи кезекте окуучусунда өзүн-өзү өнүктүрүү жөндөмдүүлүгүн өстүрүүгө аракет жасоосу керек. Мындай жөндөмдүүлүк инсандын өз улутунун маданиятына жана дүйнөлүк маданиятка кошулуусуна өбөлгө түзөт жана аларды өнүктүрүүгө салым кошуусуна мүмкүнчүлүк берет.

Бүгүнкү күндө мектепте математикалык билим берүүнүн өнүгүү этабы үчүн экстенсивдүү окутуудан интенсивдүү окутууга өтүү мүнөздүү болуп калды. Окуучунун чыгармачыл ой жүгүртүү жөндөмдүүлүгүн калыптандыруу, элестетип ой жүгүртүүсүн, интуициясын өстүрүү кайрадан актуалдуу болуп олтурат. Учурда геометрия предметинин өнүктүрүүчү жана билим берүүчү эбегейсиз чоң мүмкүнчүлүгү педагог-изилдөөчүлөрдүн жана окумуштуу-методистердин көңүлүн буруууда.

Мектептин геометрия курсу ар дайым математиканы окутуунун методикасынын проблемалуу тармагы болуп келген. Түрдүү мезгилдерде геометрияны окутуу жана анын мектепте билим берүүдөгү орду жөнүндө ар түрдүү пикирлер айтылып келет. Геометриядагы эки карама-каршы тенденциянын (логиканы өстүрүү менен интуицияны өстүрүү) диалектикалык биримдиги бул предметтин өзгөчөлүгүн жана аны үйрөнүү зарылдыгын айгинелейт.

Физиологияда биздин баш мээбиз эки жарым шарга бөлүнүшүн билебиз. Бириси “гармония” үчүн жооп берет, б.а. ал интуиция, элестөө, форманы жана түстү кабылдоо үчүн жооп берет, ал эми экинчиси – логика,“тартип” жана “так эсеп” үчүн жооп берет. Ошондуктан, математикалык билим берүүнүн негизги максаты болуп баш мээнин эки жарым шарын бирдей өнүктүрүү эсептелет.

Демек, логиканы жана интуицияны өстүрүү – геометриялык билим берүүнүн эки тең укуктуу функциясы экен. Улуу окумуштуу Пуанкаре жазгандай логиканын жардамы менен далилдейбиз, ал эми интуициянын жардамы менен ойлоп табабыз.

Геометрия илими жалпы билим берүү системасына эзелтеден эле кирген жана аны окутуунун максаты предметтин мазмундук алкагы менен эле чектелбейт. Геометрияны окутуунун максаты катары атайын геометриялык билимге ээ болуу гана маанилүү болбостон, аны окуп-үйрөнүү процессинин өзү инсандын жалпы өнүгүүсүнө олуттуу таасир этиши өзгөчө маанилүү болуп эсептелет.

Ошондуктан “Геометриянын негиздери” аттуу дисциплина болочок математика мугалимдеринин инсандык жана кесиптик компетенттүүлүктөрүнүн калыптанышына зор өбөлгө түзөт.

Авторлор

I Бап. Аксиоматикалык методдун жалпы маселелери

§1. Математикалык түзүлүш жөнүндө түшүнүк жана анын мисалдары

1. $$M_1, M_2, \ldots, M_n \tag{1}$$

бош эмес көптүктөрү берилген болсун. Каалагандай $\Delta \subset M_1 \times \ldots \times M_n$ камтылуучу көптүгүн (1) көптүктөрдө аныкталган "n **орундуу катыш"** деп аташат. Эгерде $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \Delta$ болсо, анда **"**$m_1, m_2, \ldots, m_n$ $(m_i \in M_i)$ элементтери Δ **катышында болушат"** деп айтышат.

Эгерде $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, демек $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = M^n$ (M көптүгүнүн n-декарттык көбөйтүндүсү) болсо, анда "M көптүгүндө n орундуу $\Delta \subset M^n$ **катышы аныкталган**" деп айтышат.

Бинардык катыш (б.а. $n = 2$) болгон учурда: $\Delta \subset M_1 \times M_2$, $(m_1, m_2) \in \Delta$ жазуусунун ордуна $m_1 \Delta m_2$ деп жазышат.

Эгерде $E \neq \emptyset$ көптүгүндө төмөндөгү алгебралык амал (ички композиция закону):

$$\varphi: E \times E \to E$$

аныкталган болсо, анда аны E көптүгүндө аныкталган үч орунду $(n = 3)$ катыш катары кароого болот:

$$\Delta \in E^3, \Delta = \{(a, b, c) \in E^3 | \varphi(a, b) = c\}.$$

Эгерде E көптүгүндө сырткы композиция закону f аткарылган болсо

$$f: \Lambda \times E \to E$$

(мында $\varLambda$ – операторлордун көптүгү, $f(\lambda, a) = \lambda a$, $\forall a \in E$, $V\lambda \in \varLambda$), анда аны $\varLambda$ жана E көптүктөрүндө $\varDelta \subset \Lambda \times E \times E$ камтылуучу көптүгүнүн жардамында аныкталган үч орундуу катыш катары кароого болот:

$$\varDelta = \{(\lambda, a, b) \in \Lambda \times E \times E | \lambda a = b\}.$$

Эгерде $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ көптүгүнүн эки ар түрдүү камтылуучу $\varDelta_1, \varDelta_2$ көптүктөрүн алсак, анда (1) көптүктөрдүн системасында аныкталган эки ар түрдүү катыштарга ээ болобуз. $\varDelta_1$ катышынын касиеттери $\varDelta_2$ катышынын касиеттеринен айырмалуу болот (себеби $\varDelta_1 \neq \varDelta_2$).

Ошентип, $P(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)$ көптүгүнүн элементтери канча болсо, көптүктөрдүн (1) системасында ошончо ар түрдүү катыштар жашайт. Эгерде M_i көптүктөрүнүн жок дегенде бири чексиз көптүк болсо, анда мындай катыштардын саны да чексиз көп болот. Ошондуктан берилген көптүктөрдүн (1) системасында аныкталган мүмкүн болгон бардык катыштардын касиеттерин окуп үйрөнүү маселесин коюу акылга сыйбаган иш болмок. Математикада мындай маселе коюлбайт. Кандайдыр бир деңгээлде тескерисинче маселе каралат: алдын ала көрсөтүлгөн касиеттерге ээ болушкан катыштар жашай турган көптүктөрдү издешет жана аларды окуп-үйрөнүшөт.

2. Ар түрдүү бош эмес көптүктөрдүн системасын алабыз. Жөнөкөйлүк үчүн $\{E, F, G\}$ үч көптүктөн турган системаны карайбыз. Бул көптүктөрдүн системасында аныкталышкан кандайдыр бир катыштардын системасын $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots, \varDelta_k$ аркылуу белгилеп коебуз.

Биз бул катыштарды $E \times F \times G$ көптүгүнүн анык бир камтылуучу көптүктөрү катары бекемдеп албайбыз, болгону ал катыштар алдын ала көрсөтүлгөн

$$A_1, A_2, \ldots, A_t \qquad (2)$$

касиеттерине ээ болсун деп шарт кылабыз.

Берилген касиеттерге ээ болгон катыштардын бир нече системасы жашашы мүмкүн (б.а. $\Delta_j \subset E \times F \times G,\ j = 1,2,\ldots,k$ камтылуучу көптүктөрүнүн системасы бирөө эмес, бир нече болушу мүмкүн). Жөнөкөй мисал келтирели.

R чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталган Δ алгебралык амалын карайлы. Жогоруда биз Δ амалын үч орундуу $\Delta \subset R^3$ катыш катары кароого боло тургандыгын көргөнбүз. Ушул катыш төмөндөгүдөй A_1 касиетине ээ болсун деген шарт коелу:

$A_1{:}\ \Delta(a,b) = \Delta(b,a), \forall a,b \in R$ (коммутативдүүлүк).

R көптүгүндө мындай касиетке ээ болушкан эки амалды көрсөтүүгө болот (б.а. A_1 касиетине ээ боло тургандай Δ катышынын эки мааниси жашайт: Δ'– кошуу, Δ''– көбөйтүү амалдары).

T аркылуу алдын ала көрсөтүлгөн (же берилген) (2) касиеттерге ээ боло тургандай $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ катыштарынын мүмкүн болгон бардык $\sigma = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ көптүгүн белгилейли. Эгерде $T \neq \emptyset$ болсо, анда $\sigma \in T$ элементи E, F, G көптүктөрүндө T **түрүндөгү математикалык түзүлүштү** аныктайт деп айтышат.

Алдын ала ачык көрсөтүлүп, берилген (2) касиеттерди T **түрүндөгү математикалык түзүлүштүн аксиомалары** деп, ал эми E, F, G көптүктөрүн – T **түрүндөгү математикалык**

түзүлүштүн негизи (базасы) деп аташат. Бир эле түрдөгү бардык түзүлүштөргө атайын ат беришет: «группанын түзүлүшү», «n-ченемдүү евклиддик мейкиндиктин түзүлүшү», «вектордук мейкиндиктин түзүлүшү», ж.б.

М**исал** (Группанын түзүлүшү).

База бир эле $E \neq \emptyset$ көптүктөн турат, катыштардын системасы да бир эле Δ катышын кармайт жана ал төмөндөгүдөй алдын ала берилген төрт аксиоманы канааттандырышы керек:

A_1: $\Delta - E$ көптүгүндө аныкталган алгебралык амал болсун;

A_2: $\Delta(\Delta(a,b),c) = \Delta\big(a,\Delta(b,c)\big)$, $\forall a,b,c \in E$ (ассоциативдүүлүк шарты);

A_3: $\exists e \in E \forall a \in E: \Delta(a,e) = \Delta(e,a) = a$ (нейтралдык элементтин жашоо шарты);

A_4: $\forall a \in E\ \exists a' \in E: \Delta(a,a') = \Delta(a',a)$ (ар бир a элементине симметриялуу болгон a' элементинин жашоо шарты).

Бул мисалда «E көптүгү – группа болот» деп айтабыз, толук айтканда «E көптүгүндө группа түрүндөгү түзүлүш аныкталды» деп айтуу керек.

Эгерде база (негиз) бир нече көптүктөрдөн турса, анда алардын ичинен бирөө аныкталуучу түзүлүш үчүн негизги орунду ээлейт. Мисалы E көптүгү негизги орунду ээлесин. Анда түзүлүш E көптүгүндө аныкталган деп айтышат, ал эми калган көптүктөр F, G – көмөкчү көптүктөр катары каралат.

Мисалы, R талаасынын үстүндө аныкталган n-ченемдүү вектордук мейкиндиктин түзүлүшүн аныктоодо негиз эки көптүктөн (V – векторлордун көптүгү, R – чыныгы сандардын талаасы) турат, мында R – көмөкчү көптүк.

T түрүндөгү түзүлүштүн теориясы деп ар бири T түрүндөгү түзүлүштү аныктоочу аксиомалардын логикалык натыйжасы болуп эсептеле тургандай сүйлөмдөрдүн (теоремалардын) көптүгүн атайбыз жана $\mathcal{T}(T)$ түрүндө белгилейбиз. Мисалы, биз группалар теориясы, алкактар теориясы, аффиндик мейкиндиктердин теориясы (геометриясы) жана евклиддик мейкиндиктердин теориясы (геометриясы) ж.б. теориялар менен таанышпыз.

Математика илими – математикалык түзүлүштөрдү окутуп-үйрөтөт. Анын негизги методу болуп аксиоматикалык метод эсептелинет, б.а. ар бир түзүлүш тиешелүү аксиомалардын тизмесинин жардамында аныкталат, андан ары ушул түрдөгү түзүлүштүн теориясы логикалык жол менен түзүлөт.

Бүгүнкү күндө математика көптөгөн тармактарга ээ болгон жана аларды изилдөөнүн ар түрдүү багыттары бар илим болгондугуна карабастан, ал – бирдиктүү илим. Анын изилдөө предмети – математикалык түзүлүштөрдүн көптүгү, ал эми анын негизги методу – аксиоматикалык метод.

Тапшырмалар

Төмөндөгү көптүктөрдө:

а) группа;

б) вектордук мейкиндик

түрүндөгү математикалык түзүлүштү аныктоого боло тургандыгын көрсөткүлө:

1. $R^2 = R \times R = \{(x_1, x_2) |\ x_1, x_2 \in R\}$.
2. $R^3 = R \times R \times R = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1, x_2, x_3 \in R\}$.

3. $\mathcal{M}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle|\ a_{ij} \in R,\ i,j = 1,2 \right\}$.

4. $\mathcal{M}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle|\ a_{ij} \in R,\ i,j = 1,2,3 \right\}$.

5. $C_{[a,b]} - [a,b] \subset R$ сан аралыгында аныкталган жана үзгүлтүксүз функциялардын көптүгү.

§2. Аксиомалар системасынын интерпретациясы. Аксиомалар системасына коюлуучу шарттар

Каалагандай E көптүгүндө каалагандай түзүлүштү аныктоого болот деп ойлоо туура эмес. Мисалы, $E = \{0,1,2,3,4,5\}$ көптүгүндө R талаасынын үстүндө берилген n-ченемдүү вектордук мейкиндиктин түзүлүшүн аныктоого болбойт. Бирок бул математикалык түзүлүштү R^n көптүгүндө аныктоого болот.

Математикалык түзүлүштү аныктоодо $T = \emptyset$ болушу төмөндөгүдөй эки себептен келип чыгышы мүмкүн:

1) Берилген негизде (көптүктөрдө) талап кылынган түрдөгү түзүлүштү аныктоого болбойт, бирок башка негизди тандап алсак, анда талап кылынган түрдөгү түзүлүш жашайт;

2) Талап кылынган түрдөгү түзүлүштү аныктоого боло тургандай негиз жашабайт (кандай гана негизди тандап албайлы, баары бир $T = \emptyset$ болот).

Экинчи учурда T түрүндөгү математикалык түзүлүштү аныктай турган $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ аксиомалар системасын **карама-каршылыктуу** деп айтышат. Эгерде T түрүндөгү математикалык түзүлүштү аныктоого боло тургандай негиз (көптүк же көптүктөр) жашаса (б.а. $T \neq \emptyset$ болсо), анда Σ аксиомалар *системасы* **карама-каршылыксыз** система деп аталат.

Айталы, биз $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ катыштарына конкреттүү маани берели, бул катыштар аткарыла турган конкреттүү M көптүгүн таптык дейли жана бардык аксиомалар $A_1, A_2, \dots, A_t$ аткарылган болсун. Демек, M көптүгүндө T түрүндөгү математикалык түзүлүш аныкталат. Анда биз $\Sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ **аксиомалар системасынын интерпретациясын түздүк** деп айтабыз, ал эми M көптүгүн T **түрүндөгү математикалык түзүлүштүн модели** деп атайбыз.

1-мисал. M – элементтери чыныгы сандар болушкан экинчи тартиптеги квадраттык матрицалардын көптүгү болсун:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in R, i, j = 1,2 \right\}.$$

Матрицаларды кошуу жана матрицаны чыныгы санга көбөйтүү амалдарын кадимки алгебра курсунан биз билгендей аныктоо менен M көптүгү төрт ченемдүү (R талаасынын үстүндө берилген) вектордук мейкиндиктин модели боло тургандыгын көрөбүз.

Ошентип, $\Sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ аксиомалар системасынын карама-каршылыктсыздыгын далилдөө үчүн анын жок дегенде бир интерпретациясын (моделин) түзүү жетиштүү.

Эскертүү. $\Sigma = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ аксиомалар системасы T түрүндөгү математикалык түзүлүштү аныктоочу аксиомалар системасы болсун. Эгерде ушул түрдөгү түзүлүштү аныктоого мүмкүн болгон негиз (база) жашаса (б.а. берилген аксиомалар системасынын интерпретациясы жашаса), анда Σ аксиомалар системасын карама-каршылыксыз система деп атадык. Кээде мындай аксиомалар системасын **мазмундук карама-каршылыксыз система** деп аташат.

Эгерде аксиомалар системасынан логикалык жол менен бирин-бири тануучу эки сүйлөмдү алууга мүмкүн болбосо, анда мындай аксиомалар системасы **ички карама-каршылыксыз система** деп аталат.

Берилген аксиомалар системасынын ички карама-каршылыксыздык маселесин чечүү үчүн аксиомалардан сүйлөмдөрдү логикалык жол менен келтирип чыгаруунун техникасын изилдөө керек. Бул болсо математикалык логиканын маселеси болуп эсептелет.

Эгерде аксиомалар системасы мазмундук карама-каршылыксыз болсо, б.а. анын жок дегенде бир интерпретациясы түзүлгөн болсо, анда ал аксиомалар системасынын ички карама-каршылыксыздык маселеси интерпретацияны түзүүдө колдонулган түшүнүктөрдүн системасынын карама-каршылыксыздык маселесине алынып келинет.

Эгерде интерпретацияны түзүүдө колдонулган түшүнүктөрдүн системасы ички карама-каршылыксыз болсо, анда берилген аксиомалар системасынын мазмундук карама-каршылыксыздыгын далилдөө менен, биз, бул аксиомалар системасынын ички карама-каршылыксыздыгын да далилдеген болобуз.

Ошентип, эгерде биз геометриянын гана алкагында иш жүргүзсөк, анда берилген аксиомалар системасынын мазмундук карама-каршылыксыздык маселесин гана чече алабыз.

Айталы $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ аксиомалар системасы (мазмундук) карама-каршылыксыз система болсун жана ал $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ негизги катыштары менен T түрүндөгү түзүлүштү аныктасын.

$M' \neq \emptyset$ көптүгүндө Δ_j катыштарына $\sigma' = \{\Delta'_1, \Delta'_2 \ldots, \Delta'_k\}$ конкреттүү маанилерин берип, Σ системасынын бардык аксиомалары аткарылсын дейли, б.а. M' көптүгүндө $\sigma' \in T$ түрүндөгү математикалык түзүлүш аныкталсын.

Кандайдыр бир $M'' \neq \emptyset$ көптүгүндө да ушундайча жол менен $\sigma'' \in T$ түрүндөгү түзүлүш аныкталган болсун (мында $\sigma'' = \{\Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_k\}$ – Δ_j негизги катыштарынын конкреттүү башка маанилери).

Аныктама. Эгерде төмөндөгүдөй $f\colon M'' \to M''$ биекциясы жашаса:

$$(x', y', \ldots, \vartheta') \in \Delta'_j \Rightarrow \big(f(x'), f(y'), \ldots, f(\vartheta')\big) \in \Delta''_j$$

(б.а. $x', y', \ldots, \vartheta' \in M'$ элементтери Δ'_j катыштарында болушунан, $f(x'), f(y'), \ldots, f(\vartheta') \in M''$ элементтеринин Δ''_j катыштарында болушу келип чыкса), анда σ' жана σ'' түзүлүштөрү (ошондой эле M' жана M'' моделдери да) **изоморфтуу** деп аталышат.

2-мисал. T – абелдик группа түзүлүшүнүн түрү болсун. Ушул түрдөгү эки анык түзүлүштү карайбыз:

σ' – R көптүгүндө аныкталган аддитивдик группанын түзүлүшү болсун;

σ'' – R_+^* көптүгүндө аныкталган мультипликативдик группанын түзүлүшү (мында R_+^* – оң чыныгы сандардын көптүгү) болсун.

Төмөндөгүдөй биекцияны карайлы:

$f: R_+^* \to R,$

$\forall x \in R_+^*: f(x) = ln\, x.$

$ln(\,xy) = ln\, x + ln\, y$ экендигин математиканын мектеп курсунан билебиз. Демек, σ' жана σ'' түзүлүштөрү изоморфтуу болушат, б.а. $(R, +)$ жана $(R_+^*, \cdot)$ группалары изоморфтуу экен.

Тапшырмалар

1. $R^3 = R \times R \times R = \{(x_1, x_2, x_3) |\, x_1, x_2, x_3 \in R\}$ – вектордук мейкиндиги-нин базисин тапкыла (б.а. ченемдүүлүгүн аныктагыла).

2. $\mathcal{M}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle|\; a_{ij} \in R,\; i,j = 1,2 \right\}$ – вектордук мейкиндигинин базисин тапкыла.

3. V_3 – мейкиндиктеги мүмкүн болгон бардык багытталган кесиндилер-дин көптүгү. Бул көптүктө вектордук мейкиндик түрүндөгү математикалык түзүлүштү аныктагыла жана базисин көрсөткүлө.

4. $\mathcal{M}^n = \{\|a_{ij}\| \mid a_{ij} \in R,\; i,j = 1,2,\dots,n\}$ көптүгүндө вектордук мейкин-дик түрүндөгү математикалык түзүлүштү аныктагыла жана базисин көрсөткүлө.

5. Аффиндик мейкиндик үчүн Вейлдин аксиомаларынын ар бири экинчи-синен көз каранды эмес экендигин далилдегиле.

§3. Геометриядагы негизги математикалык түзүлүштөр

I. Чыныгы сандардын талаасынын түзүлүшү

Бул түзүлүштүн негизги (базасы) катарында R көптүгү алынат, анын элементтерин чыныгы сандар деп аташат.

Бул көптүктө төмөндөгүдөй үч катыш аныкталат:

1) $\Delta_1 \subset R^3$ – үч орундуу (тернардык) катышы (+ символу менен белгиленген, кошуу деп аталган алгебралык амал): эгерде $(a, b, c) \in \Delta_1$ болсо, анда $c = a + b$.

2) $\Delta_2 \subset R^3$ – үч орундуу (тернардык) катышы (· символу менен белгиленип, көбөйтүү деп аталган алгебралык амал): эгерде $(a, b, c) \in \Delta_2$ болсо, анда $c = a \cdot b$.

3) $\Delta_3 \subset R^2$ эки орундуу (бинардык) катышы (< символу менен белгиленген, “мурда келет” деп аталган катышы): эгерде $(a, b) \in \Delta_2$ болсо, анда $a < b$ катышы “a саны b санынан кичине, ал эми b саны a санынан чоң” дегенди түшүндүрөт.

Жогорудагыдай аныкталган Δ_1, Δ_2, Δ_3 катыштардын касиеттери төмөндөгүдөй аксиомалар аркылуу туюнтулат:

1) $\forall a, b \in R$: $a + b = b + a$;

2) $\forall a, b, c \in R$: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3) $\exists 0 \in R \ \forall a \in R$: $a + 0 = a$;

4) $\forall a \in R \ \exists(-a) \in R$: $a + (-a) = 0$;

5) $\forall a, b \in R$: $a \cdot b = b \cdot a$;

6) $\forall a, b, c \in R$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

7) $\exists 1 \in R \ \forall a \in R$: $1 \cdot a = a$;

8) $\forall a \in R \, \{0\} \ \exists \ a^{-1} \in R$: $a \cdot (a^{-1}) = 1$;

9) $\forall a, b, c \in R$: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

10) $\forall a, b \in R$: $a \neq b \Rightarrow (a < b \vee b < a)$;

11) $\forall a, b, c \in R$: $(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$;

12) $\forall a, b, c \in R$: $(a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)$;

13) $\forall a, b, c \in R$: $(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$;

14) $\forall A, B \subset R$: $\big((A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \cup B = R) \wedge (\forall x \in A \, \forall\, y \in B, x < y)\big) \Rightarrow \quad \Rightarrow \exists c \in R$: $(c \in A \wedge \forall\, x \in A$: $x < c) \vee (c \in B \wedge \forall\, y \in B$: $c < y)$ (үзгүлтүксүздүк аксиомасы).

II. R талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндиктин түзүлүшү

Негиз катары $V \neq \emptyset$ көптүгүн жана R – чыныгы сандардын талаасын алабыз. Бул көптүктөрдө төмөндөгүдөй эки катышты аныктайбыз:

1)$\Delta_1 \subset V$ – үч орундуу (тернардык) катышы (+ символу менен белгиленет жана олгебралык амалын аныктайт): эгерде $(a, b, c) \in \Delta_1$ болсо, анда $c = a + b$;

2)$\Delta_1 \subset R \times V \times V$ – үч орундуу катышы (V көптүгүнүн элементин чыныгы санга көбөйтүү): эгерде $(\alpha, a, b) \in \Delta_2 \Rightarrow b = \alpha a$.

Ушул эки катыш аксиомалар деп аталышкан төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болушат:

1°. $\forall a, b \in V$: $a + b = b + a$ (V көптүгүнүн элементтерин кошуу коммутативдүү);

2°. $\forall a, b, c \in V$: $a + (b + c) = (a + b) + c$ (V көптүгүнүн элементтерин кошуу ассоциативдүү);

3°. $0 \in V\ \forall a \in V: a + 0 = a$ (V көптүгүндө + амалына карата нейтралдык элементтин жашоо шарты);

4°. $\forall a \in V\ \ \forall(-a) \in V: a + (-a) = 0$ (V көптүгүндө ар бир a элементине карама-каршы элементтин жашоо шарты);

5°. $\forall a \in V\ ,\ 1 \in R: \quad 1 \cdot a = a;$

6°. $\forall a \in V\ ,\ \forall \alpha, \beta \in R: \ \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a;$

7°. $\forall a \in V\ ,\ \forall \alpha, \beta \in R: \ (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (V көптүгүнүн элементин R көптүгүнүн элементине көбөйтүү амалынын R көптүгүнүн элементтерин кошуу амалына карата ажыралуучулук касиети);

8°. $\forall a, b \in V\ ,\ \forall \alpha \in R: \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (V көптүгүнүн элементин R көптүгүнүн элементине көбөйтүү амалынын V көптүгүнүн элементтерин кошуу амалына карата ажыралуучулук касиети).

Эгерде 1-8 касиеттерине ээ боло тургандай Δ_1, Δ_2 катыштарын V, R көптүктөрүндө аныктоого мүмкүн болсо, анда V көптүгү R талаасынын үстүндө аныкталган "вектордук мейкиндик" деп аталат жана анын элементтерин "векторлор" деп атап, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ көрүнүшүндө белгилөө кабыл алынган.

"R талаасынын үстүндө аныкталган вектордук мейкиндик" деп аталган математикалык түзүлүшкө мисалдар келтирели.

1-мисал. V көптүгүнүн ордуна R – чыныгы сандардын талаасын алалы. Анда Δ_1, Δ_2 катыштары төмөндөгүдөй аныкталышат:

$$\Delta_1 \subset R: \quad (a, b, c) \in \Delta_1 \Rightarrow c = a + b,$$

$$\Delta_2 \subset R \times R \times R: \quad (\alpha, a, b) \in \Delta_2 \Rightarrow b = \alpha a.$$

1-8 аксиомалардын аткарылышын текшерүүнүн зарылчылыгы жок. Демек, R – чыныгы сандардын талаасын вектордук мейкиндик деп аталаган математикалык түзүлүштүн бир мисалы катары эсептөөгө болот. Ченемдүүлүгүн аныктоону окурманга сунуштайбыз.

2-мисал. $\mathrm{V} = \mathrm{R} \times \mathrm{R}$, б.а. $\mathrm{V} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in R\}$ – чыныгы сандардын түгөйлөрүнүн көптүгү болсун. Δ_1, Δ_2 катыштарын төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$\Delta_1: (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V \Rightarrow (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2) \in V;$$

$$\Delta_2: (x_1, x_2) \in V, \alpha \in R \Rightarrow \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \in V.$$

1-8 аксиомаларынын аткарылышын окурман жеңил эле текшере алат.

(0,0) түгөйү нөлдүк вектор деп аталат жана $\vec{0} = (0,0)$ көрүнүшүндө белгилеп койсок болот, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ векторуна карама-каршы вектор $-\vec{x} = (-x_1, -x_2)$ көрүнүшүндө белгиленет. Ушуга эле окшош

$$R^3 = R \times R \times R = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

R^n көптүктөрү да “вектордук мейкиндиктин” мисалдары болуша тургандыгын көрсөтүүгө болот.

3-мисал. V көптүгү катары элементтери чыныгы сандар болушкан квадраттык матрицалардын көптүгүн алалы.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in R, \; i, j = 1,2 \right\}.$$

Δ_1, Δ_2 амалдары (катыштары) төмөндөгүдөй аныкталат:

1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix};$

2) $\quad \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$

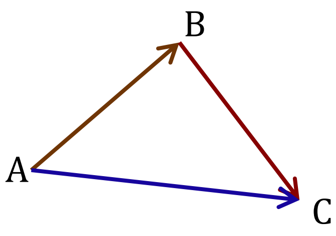
1-8 шарттарынын (аксиомаларынын) аткарылышын жеңил эле көрсөтүүгө болот жана бул вектордук мейкиндиктин ченемдүүлүгүн аныктоону окурманга сунуштайбыз.

4-мисал. V көптүгү катары багытталган кесиндилердин көптүгүн алалы. Анда Δ_1, Δ_2 катыштары мектептин геометрия курсундагыдай эле аныкталышат, б.а. эки багытталган кесиндинин суммасын же “үч бурчтук”, же “паралеллограмм” эрежелери боюнча табууга болот.

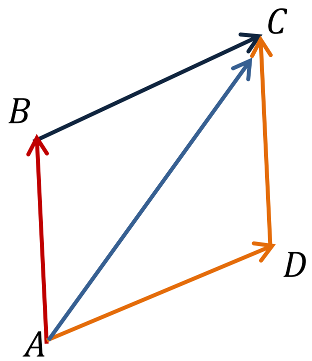
Δ_2 катышы төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\forall\alpha \in R, \forall\overrightarrow{AB} \in V: \alpha\overrightarrow{AB} = \begin{cases} 1)\left|\alpha\overrightarrow{AB}\right| = |\alpha| = \left|\overrightarrow{AB}\right|; \\ 2)\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \alpha\overrightarrow{AB}, \text{эгерде } \alpha > 0 \text{ болсо;} \\ \quad \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \alpha\overrightarrow{AB}, \text{эгерде } \alpha < 0 \text{ болсо.} \end{cases}$$

Эгерде $\alpha = 0$ болсо, анда $\alpha\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ нөлдүк багытталган



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

1-сүрөт

кесинди (б.а. башталыш чекити менен акыркы чекити дал келген) болот.

1-8 шарттарынын аткарылышын текшерүүнү окурманга сунуштайбыз.

III. *R* талаасынын үстүндө аныкталган евклиддик векторлук мейкиндиктин түзүлүшү

Жогоруда аныкталган “вектордук мейкиндик” түзүлүшүн карайлы. Бул түзүлүштүн катыштарына дагы бир “векторлорду скалярдык көбөйтүү” деп аталган, • символу менен белгиленген үч орундуу катышты кошуп алалы. Бул катыш $g: V\times V\to R$ чагылтуусун аныктайт:

$$\forall\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in V\times V:\ g\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}\in R$$

жана төмөндөгү аксиомалар орун алат:

9$^{\mathrm{o}}$. $\forall\vec{a},\vec{b}\in V: \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

10$^{\mathrm{o}}$. $\forall\vec{a},\vec{b}\in V, \forall\alpha\in R:\quad (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{b}\cdot\vec{a})$.

11$^{\mathrm{o}}$. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V:\quad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

12$^{\mathrm{o}}$. $\forall\vec{a}\in V:\quad (\vec{a}\cdot\vec{a})\geq 0\wedge(\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0})$.

Жогорудагы 2-мисалды карайлы.

$\mathrm{V}=R\times R\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in R\}$ көптүгү вектордук мейкиндик боло тургандыгын көргөнбүз.

$g: V\to V\to R$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$\forall\vec{x}(x_1,x_2),\vec{y}(y_1,y_2)\in V: g(\vec{x},\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2\in R.$

9-12 аксиомаларынын орун алышын текшерели:

9) $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2=y_1x_1+y_2x_2=\vec{y}\cdot\vec{x}$

(бул жерде чыныгы сандарды көбөйтүү амалы коммутативдик экендигин эске алдык);

10) $(\alpha\vec{x})\vec{y}=\alpha(\vec{x}\cdot\vec{y})$ боло тургандыгын көрсөтөлү:

$$(\alpha\vec{x})\vec{y}=(\alpha x_1;\alpha x_2)(y_1,y_2)=(\alpha x_1)y_1+(\alpha x_2)y_2=$$
$$=\alpha(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)=\alpha(\vec{x}\cdot\vec{y})$$

(чыныгы сандарды көбөйтүү амалынын ассоциативдик касиетин эске алдык);

11) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$: $(\vec{x}+\vec{y})\vec{z} = \vec{x}\vec{z} + \vec{y}\vec{z}$ экендигин көрсөтөлү.

$$(\vec{x}+\vec{y})\vec{z} = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2)(z_1 + z_2)$$

$$= \big((x_1 + y_1)z_1;\ (x_2 + y_2)z_2\big) =$$

$$= (x_1z_1 + y_1z_1;\ x_2z_2 + y_2z_2) = (x_1z_1; x_2z_2) + (y_1z_1; y_2z_2)$$

$$= \vec{x}\vec{z} + \vec{y}\vec{z}.$$

(чыныгы сандарды көбөйтүү амалы кошуу амалына карата ажыралуучу экендигин эске алдык.)

12) $\forall \vec{x} \in V$: $\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ жана $\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0$, б.а. $\vec{x} = (0,0)$.

Аныктама. $\vec{x} \in V$ векторунун **узундугу** деп анын скалярдык квадратынан (б.а. $\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^2$) алынган квадраттык тамырдын арифметикалык мааниси аталат жана төмөндөгүдөй белгиленет:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\vec{x}^2}.$$

Демек, евклиддик вектордук мейкиндикте ар бир вектордун узундугун аныктоого болот (векторлорду скалярдык көбөйтүү амалынын жардамы менен).

Аныктама. Вектордук мейкиндиктин **базиси** деп төмөндөгү эки шартты канааттандыра тургандай ирети менен алынган $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{\ell}\}$ вектордук системасын атайбыз:

1) $\mathcal{B}$ системасынын векторлору сызыктуу көз каранды эмес;

2) Вектордук мейкиндиктин каалаган вектору $\mathcal{B}$ системасынын векторлору аркылуу сызыктуу туюнтулат.

Базисти түзгөн векторлордун саны вектордук мейкиндиктин **ченемдүүлүгү** деп аталышын билебиз.

IV. *n*-ченемдүү аффиндик мейкиндиктин түзүлүшү

Бул түзүлүштүн негизи катары $\forall E \neq \emptyset$ көптүгүн жана n-ченемдүү V вектордук мейкиндигин алабыз. E көптүгүнүн элементтерин шарттуу түрдө “чекиттер” деп атап, латын алфавитинин чоң тамгалары менен белгилөөнү шарт кылабыз.

Төмөндөгүдөй үч орундуу катышты $\Delta \subset E \times E \times V$ аныктайбыз. Бул катыш $\sigma: E \times E \to V$ чагылтуусун аныктайт:

Эгерде $\left(A, B, \vec{\vartheta}\right) \in \Delta$ болсо, анда $\sigma(A, B) = \overrightarrow{AB} = \vec{\vartheta} \in V$.

Δ катышы төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот:

$\mathcal{A}_1: \forall A \in E, \qquad \vec{\vartheta} \in V: \exists!\, B \in E: \ \overrightarrow{AB} = \vec{\vartheta},$

$\mathcal{A}_2: \forall A, B, C \in E: \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$

Ошентип, n-ченемдүү аффиндик мейкиндиктин аксиомалар системасы n-ченемдүү вектордук мейкиндиктин аксиомаларынан жана $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ аксиомаларынан түзүлөт.

E көптүгү n-ченемдүү аффиндик мейкиндик, V вектордук мейкиндиги – E аффиндик мейкиндигинин “которууларынын мейкиндиги” деп аталат.

V. Евклиддик *n*-ченемдүү мейкиндиктин түзүлүшү

Эгерде n-ченемдүү аффиндик мейкиндиктин түзүлүшүндөгү n-ченемдүү V вектордук мейкиндиги n-ченемдүү евклиддик вектордук мейкиндик болсун деп алсак, анда биз n-ченемдүү евклиддик мейкиндиктин түзүлүшүнө ээ болобуз.

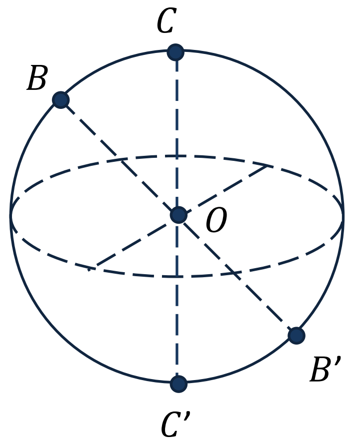
VI. n-ченемдүү проективдик мейкиндиктин түзүлүшү

Негиз катары $\forall\mathbb{P} \neq \emptyset$ көптүгүн жана $(n+1)$ – ченемдүү V вектордук мейкиндикти алабыз. $\mathbb{P} \neq \emptyset$ көптүгүнүн элементтерин шарттуу түрдө "чекиттер" деп атап, латын алфавитинин чоң тамгалары менен белгилейбиз.

$\Delta \subset \left(V \setminus \{\vec{0}\}\right) \times \mathbb{P}$ бинардык катышы төмөндөгүдөй чагылтууну аныктайт: $\pi: V \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{P}$.

Эгерде $(\vec{a}, A) \in \Delta$ болсо, анда $\pi(\vec{a}) = A$ болот жана "$\vec{a}$ вектору A чекитин жаратат" деп айтышат. Бул катыш төмөндөгүдөй эки касиетке (проективдик мейкиндиктин аксиомалары) ээ болот:

1. $\forall A \in \mathbb{P}\ \exists\, \vec{a} \neq \vec{0}$: $\pi(\vec{a}) = A$ чагылтуусу инъективдик чагылтуу болот;
2. $\pi(\vec{a}) = \pi(\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$.

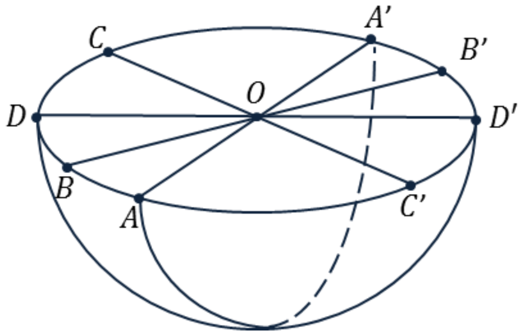


2-сүрөт

Проективдик мейкиндиктин түзүлүшүнө мисал келитирели:

1-мисал. Евклиддик мейкиндикте O борборлуу S^2 сферасын карайлы. $C(O)$ байламтасынын ар бир түз сызыгы сфераны эки чекитте кесип өтөт. Байламтанын түз сызыктары менен сферанын чекиттеринин ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештикти орнотуу үчүн сферанын диаметралдык карама-каршы чекиттерин дал келтирип алабыз. Жаңы пайда болгон объектти (нерсени) $\bar{S}^2$ аркылуу белгилейли. Ушул $\bar{S}^2$ – проективдик тегиздик-тин модели болуп эсептелинет. Чындыгында эле $C(O)$ байламтасынын түз сызыктары менен $\bar{S}^2$ фигурасынын чекиттеринин ортосунда бир маанилүү тиешелештикти аныктоого болот. Ал эми түз сызыктардын байламтасы проективдик тегиздиктин модели болгондуктан, $\bar{S}^2$ дагы проективдик тегиздиктин модели болот.

2-мисал. Евклиддик мейкиндикте жарым сфераны карайлы. Чоң айланасында жаткан диаметралдык карама-каршы чекиттерин дал келтирели. Пайда болгон объект проективдүү тегиздиктин модели болуп эсептелет. Проективдүү түз сызыктын жана проективдүү тегиздиктин башка дагы моделдери бар. Жогоруда биз кеңири белгилүү болгон гана моделдерин карадык.



3-сүрөт

3-мисал. 2 модулу боюнча чегериштердин талаасын F_2 аркылуу белгилейли. $F_2^2 - F_2$ талаасынын үстүндө аныкталган эки ченемдүү вектордук мейкиндик болсун. $P(F_2^2)$ проективдүү түз сызыгы үч чекитти кармай тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. 2 модулу боюнча чегериштердин талаасы F_2 эки элементти кармайт: 0,1.

Анда $F_2^2 = F_2 \times F_2 = \{\{0,0\}, \{0,1\}, \{1,0\}, \{1,1\}\}$.

Бул көптүк вектордук мейкиндик болот. Векторлорду кошуу жана векторду R талаасынын элементине көбөйтүү амалдары сандарды кошуу жана көбөйтүү амалдарына алынып келинет. Бул эки амал эки ченемдүү вектордук мейкиндиктин бардык аксиомаларына баш ийет. Базисти $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ түзгөн векторлор $\vec{e}_1 = \{0,1\}, \vec{e}_2 = \{1,0\}$ болушат.

$F_2^2 \backslash \{\vec{0}\} = V_2^* = \{\{1,0\}, \{0,1\}, \{1,1\}\}$. V_2^* нын векторлору эки-экиден коллинеардуу болушпай тургандыгы көрүнүп турат. P аркылуу проективдүү чекиттердин көптүгүн белгилейли:

$$P = \{(0,1), (1,0), (1,1)\} = \{A, B, C\}.$$

$\pi: V^* \to P$ чагылтуусу төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\pi\{0,1\} = (0,1), \pi\{1,0\} = (1,0), \pi\{1,1\} = (1,1).$$

Бул чагылтуу проективдүү мейкиндиктин аксиомаларын канааттандырат. $\{0,1\}, \{1,0\}, \{1,1\}$ векторлору эки-экиден коллинеардуу эмес болгондуктан, A, B, C чекиттери ар түрдүү болушат.

VII. Метрикалык мейкиндиктин түзүлүшү

Негиз катарында $\forall X \neq \emptyset$ көптүгүн жана R – чыныгы сандардын талаасын алабыз. $\mathcal{P}: X \times X \to R$ чагылтуусун аныктай турган үч орундуу $\Delta \subset X \times X \times R$ катышын аныктайбыз. Эгерде $(x, y, \alpha) \in \Delta$ болсо, анда $\mathcal{P}(x, y) = \alpha$ деп жазылат жана **$\boldsymbol{\alpha}$ саны $\boldsymbol{x}$ тен $\boldsymbol{y}$ ке чейинки аралык** деп аталат.

Бул катыш төмөндөгүдөй үч касиетке (метрикалык мейкиндиктин аксиомалары) ээ болушу талап кылынат:

1. $\forall\, x, y \in X: \mathcal{P}(x, y) > 0 \wedge (\mathcal{P}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$;
2. $\forall\, x, y \in X: \mathcal{P}(x, y) = \mathcal{P}(x, y)$;

3. $\forall\, x, y, z \in X\colon \mathcal{P}(x,y) + \mathcal{P}(y,z) \geq \mathcal{P}(x,z)$ ("үч бурчтук" аксиомасы).

Метрикалык мейкиндиктин түзүлүшүнө мисал келтирели.

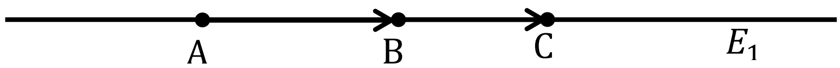
1-мисал. E_n евклиддик мейкиндигин алалы $(n = 1,2,3)$, $\rho\colon E_n \times E_n \to R_+$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$$\forall A, B \in E_n\colon \rho(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

Метрикалык мейкиндиктин 1), 2) аксиомаларынын аткарылышында шек жок. 3) аксиоманын аткарылышын текшерип көрөлү. Бул учурда 3) аксиома төмөндөгүдөй жазылат: $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$, мында $\rho(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\rho(B,C) = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, $\rho(A,C) = \left|\overrightarrow{AC}\right|$, $n = 1$ болгондо, б.а. A, B, C чекиттери бир түз сызыкта жатышат, анда $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ б.а.

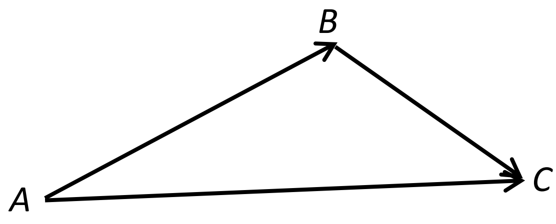
$$\rho(A,B) + \rho(B,C) = \rho(A,C) \tag{1}$$

орун алат.



4-сүрөт

$n > 1$ болгон учурда, эгерде $A, B, C \in E_1$ (б.а. бир түз сызыкта жатышса) болсо, анда (1) орун алат; эгерде бул чекиттер бир түз сызыкта жатышпаса, анда алар үч бурчтукту аныкташат.



5-сүрөт

Каалаган үч бурчтуктун эки жагынын узундуктарынын суммасы анын үчүнчү жагынын узундугунан чоң болгондуктан төмөндөгүнү алабыз:

$$\rho(A,B) + \rho(B,C) > \rho(A,C), \qquad (2)$$

б.а. 3) аксиома да орун алат экен.

Демек, E_n евклиддик мейкиндиги метрикалык мейкиндик болот.

2-мисал. $[a,b]$ сандык кесиндисин карайлы (мында $a,b \in R$, $a < b$), б.а. $[a,b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$ көптүгүн карайбыз. $x,y \in [a,b]$ чекиттеринин арасындагы аралыкты төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$\rho(x,y) = |x - y|.$$

Бул учурда 1), 2) – аксиомалардын орун алышы көрүнүп турат, 3)- аксиоманын аткарылышын текшерели.

$\forall x,y,z \in [a,b]: |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|$, мындан $\rho(x,y) \leq (x,y) + \rho(y,z)$ келип чыгат.

Демек, $[a,b]$ – метрикалык мейкиндик болот.

3-мисал. $C_{[a,b]}$ аркылуу $[a,b]$ сан аралыгында аныкталган жана үзгүлтүксүз чыныгы функциялардын көптүгүн белгилешет. Бул көптүктө метриканы төмөндөгү формула боюнча аныктайлы^

$\forall f(x), g(x) \in C_{[a,b]}: \rho\big(f(x), g(x)\big) = sup|f(x) - g(x)|\,(x_0 \in [a,b])$.

1), 2)- аксиомалардын аткарылышында шек жок, ал эми 3)- аксиоманын орун алышын окурманга **өз алдынча иш** катары сунуштайбыз.

$C_{[a,b]}$ метрикалык мейкиндигинин чекиттери болуп функциялар эсептелишет, бул мейкиндик математикалык анализде колдонулат жана функционалдык мейкиндиктин мисалы болуп эсептелет.

VIII. Топологиялык мейкиндиктин түзүлүшү

Негиз катары $\forall X \neq \emptyset$ көптүгүн алабыз, элементтерин шарттуу түрдө “чекиттер” деп атап коёбуз.

$U_1, U_2, U_3, \ldots - X$ көптүгүндө аныкталган бир орундуу катыштар (б.а. X тин камтылуучу көптүктөрү) шарттуу түрдө “ачык көптүктөр” деп атайбыз. Эгерде чектүү же чексиз сандагы ачык камтылуучу V_i көптүктөрү төмөндөгү үч шартты (топологиялык түзүлүштүн аксиомалары) канааттандырса, анда $\mathcal{T} = \{V_1, V_2, \ldots, V_\alpha, \ldots\}$ системасы $X \neq \emptyset$ көптүгүндө аныкталган топологиялык түзүлүш деп аталат, ал эми $(X, \mathcal{T})$ түгөйү – **топологиялык мейкиндик** деп аталат:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;
2. $\forall U_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \cup\, U_\alpha \in \mathcal{T}$ (каалаганчалык сандагы U_α ачык көптүктөрүнүн биригүүсү дагы ачык көптүк болсо);
3. $U_{\alpha_i} \in \mathcal{T} (i = 1,2, \ldots, k) \Rightarrow \bigcap_{1}^{k} U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}$ (чектүү сандагы U_{α_i} ачык көптүктөрдүн кесилиши дагы ачык көптүк болсо).

Топологиялык мейкиндиктин мисалдарын карайлы.

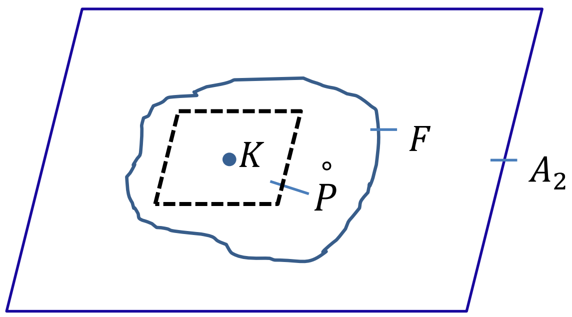
1-мисал. $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ (R көптүгүн өзүнө өзүн n жолу түз көбөйтүүдөн алынган) көптүгүн карайлы. Бул көптүктө ачык көптүк түшүнүгүн төмөндөгүчө аныктайбыз. (a^i, b^i) $(i = 1,2, \ldots, n)$ интервалдарын (n даана) алабыз да, ачык координаталык пареллелепипед деп $a^i < x^i < b^i (i = 1,2, \ldots, n)$

шартын канааттандыра тургандай бардык $M(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in R^n$ чекиттердин көптүгүн атайбыз.

$F \subset R^n$ көптүгүн алалы. Эгерде F көптүгү өзүнүн ар бир чекити менен бирге ал чекитти кармап турган кандайдыр бир ачык координаталык параллелепипедди толук камтып турса, анда бул F көптүгүн ачык көптүк деп атайбыз. Ушундай аныкталган бардык ачык көптүктөрдүн системасы топологиялык структуранын I, II, III аксиомаларын канааттандырат, б.а. R^n көптүгүндө топологиялык структураны аныктайт жана аны **табигый топология** деп аташат. Бул топология R^{n} көптүгүн топологиялык мейкиндикке айландырат, ал сандык $(\mathrm{n} = 1$ болгондо **сандык түз сызык** же **сан огу**) деп аталат.

2-мисал. A_2 аффиндик тегиздигинде $P = ABCD$ параллелограммын карайлы. Төмөндөгү шартты канааттандыра тургандай

$$\overrightarrow{AX} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AD}\,, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1.$$



6-сүрөт

X сыяктуу чекиттердин көптүгү P параллелограммынын **ичи** деп же **ачык параллелограмм** деп аталат жана аны $\mathring{P}$ аркылуу белгилеп коебуз. $F \subset A_2$ көптүгүн алалы. Эгерде F көптүгү өзүнүн ар бир чекити менен бирге ушул чекитти кармап турган кандайдыр бир ачык параллелограммды камтып турса, анда F көптүгүн ачык көптүк деп атайбыз (6-

сүрөт), б.а. $\forall K \in F$ чекити үчүн ушундай P параллелограммы жашап, анын ичи ($\mathring{P}$ ачык параллелограмм) $K \in \mathring{P} \subset F$ шартын канааттандырат.

A_2 тегиздигинде ушундайча аныкталган F сыяктуу ачык көптүктөрдүн $\mathcal{I}$ системасы топологиялык структуранын аныктоосундагы I, II, III шарттарды канааттандырат. Демек, аффиндик тегиздик топологиялык мейкиндик болот. Ушуга эле окшош A_n аффиндик мейкиндиги топологиялык мейкиндик боло тургандыгын көрсөтүүгө болот.

3-мисал. $\boldsymbol{X}$ – каалагандай көптүк болсун. $\mathcal{I} = \{X, \emptyset\}$ системасын карайлы. Бул эки элементтен турган көптүк I, II, III аксиомаларды канааттандыра тургандыгы көрүнүп турат. Демек, $\mathcal{I} - X$ көптүгүндө аныкталган топология болуп эсептелет. Бул топология **антидискреттик топология** деп, ал эми $(X, \mathcal{I})$ мейкиндиги – **антидискреттик топологиялык мейкиндик** деп аталат.

4-мисал. X – кандайдыр бир көптүк, $\mathcal{I} = \mathcal{P}(X)$ – X көптүгүнүн мүмкүн болгон бардык камтылуучу көптүктөрүнүн системасы болсун. I, II, III аксиомалардын орун алышында шек жок. Бул топология **дискреттик топология** деп, ал эми $(\mathrm{X}, \mathcal{I})$ мейкиндиги – **дискреттик топологиялык мейкиндик** деп аталат.

3-4-мисалдардан ар кандай X көптүгүн топологиялык мейкиндикке айландыруу мүмкүн экендигин көрөбүз.

5-мисал. $X = \{a, b, c, d\}$ көптүгүн карайлы. $\mathcal{I}_1 = \big\{X, \emptyset, \{a, b\}\big\}$ системасы I, II, III аксиомаларды канааттандырат:

I. $X \cup \emptyset \cup \{a, b\} = X \in \mathcal{I}_1$,

II. $X \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{J}_1, X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \in \mathcal{J}, \emptyset \cap \{a, b\} = \emptyset \in \mathcal{J}_1$,

III. $\emptyset \in \mathcal{J}, X \in \mathcal{J}_1$.

Демек, $(X, \mathcal{J}_1)$ – топологиялык мейкиндик болот.

$\mathcal{J}_2 = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\big\}$ системасын карайлы. Бул система да I, II, III аксиомаларды канааттандыра тургандыгын жеңил эле текшерүүгө болот. Демек, $\mathcal{J}_2$ системасы да X көптүгүндө топологиялык структураны (топологияны) аныктайт, ал эми $(X, \mathcal{J}_2)$ түгөйү топологиялык мейкиндик болот. $(X, \mathcal{J}_1)$ жана $(X, \mathcal{J}_2)$ – ар түрдүү топологиялык мейкиндиктер.

II БАП. Евклиддик геометриянын Вейл тарабынан негизделиши

§4. Үч ченемдүү евклиддик мейкиндик үчүн Вейлдин аксиомалар системасы

1. E_3 мейкиндигинин түзүлүшүн аныктоо. Негизги көптүктөр катары R чыныгы сандардын талаасы, ушул талаанын үстүндө аныкталган үч ченемдүү V_3 вектордук мейкиндик жана $\forall E \neq \emptyset$ чекиттердин көптүгү каралат.

Негизги катыштар катары R талаасында кошуу жана көбөйтүү амалдары, R көптүгүндө тартип катышы, V_3 көптүгүндө векторлорду кошуу жана векторду санга көбөйтүү, эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү $\sigma: E \times E \to V$ чагылтуусу (б.а. чекиттердин $(X, Y) \in E \times E$ түгөйүнө V_3 көптүгүнүн анык бир $\overrightarrow{XY}$ векторун тиешелештикке кое турган чагылтуу) каралат.

Толук архимеддик иреттелген талаанын аксиомалары (R үчүн) [2] математикалык анализ курсунан белгилүү.

Аксиомалардын I группасы (б.а. вектордук мейкиндиктин аксиомалары). Төмөндөгү сегиз сүйлөм (аксиома) векторлорду кошуу жана векторду санга көбөйтүү амалдарынын касиеттерин туюнтушат (бул сүйлөмдөр окурманга аналитикалык геометрия курсундагы «Вектордук мейкиндиктин аныктоосу жана мисалдары» деген темадан белгилүү).

$\boldsymbol{I_1}$. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3: \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (б.а. векторлорду кошуу коммутативдик касиетке ээ);

$\boldsymbol{I_2}$. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3: \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (б.а. векторлорду кошуу ассоциативдүүлүк касиетке ээ);

$\boldsymbol{I_3}$. $\exists\vec{o}\in V_3, \forall\vec{a}\in V_3: \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (нөл вектордун жашоо шарты);

$\boldsymbol{I_4}$. $\forall\vec{a}\in V_3, \exists-\vec{a}\in V_3: \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (V_3 көптүгүнүн ар бир элементи үчүн карама-каршы элементтин жашоо шарты);

$\boldsymbol{I_5}$. $\forall\alpha,\beta\in R, \forall\vec{a}\in V_3: (\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (векторду чыныгы санга көбөйтүү амалынын чыныгы сандарды кошуу амалына карата ажыралуучулук шарты);

$\boldsymbol{I_6}$. $\forall\lambda\in R\forall\vec{a},\vec{b}\in V_3: \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (векторду санга көбөйтүү амалынын векторлорду кошуу амалына карата ажыралуучулук шарты);

$\boldsymbol{I_7}$. $\forall\alpha,\beta\in R, \forall\vec{a}\in V_3: \beta(\alpha\vec{a})=\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (векторду чыныгы санга көбөйтүү амалынын ассоциативдүүлүгү);

$\boldsymbol{I_8}$. $\forall\vec{a}\in V_3: 1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Аксиомалардын II группасы (ченемдүүлүк аксиомалары).

$\boldsymbol{II_1}$. V_3 мейкиндигинде сызыктуу көз каранды эмес үч вектор жашайт, б.а. $\exists\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3: \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\eta\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=\mu=\eta=0$;

$\boldsymbol{II_2}$. Каалагандай төрт вектор сызыктуу көз каранды болот, б.а. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in V_3\exists\lambda,\mu,\eta,\nu\in R$ (λ,μ,η,ν лардын жок дегенде бири нөлдөн айырмалуу): $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\eta\vec{c}+\nu\vec{d}=\vec{0}$.

Аксиомалардын III группасы (скалярдык көбөйтүүнүн аксиомалары).

$\boldsymbol{III_1}$. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3: (\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ (б.а. скалярдык көбөйтүү амалы векторлорду кошууга карата ажыралуучу);

$\boldsymbol{III_2}$. $\forall\lambda \in R, \forall\vec{a},\vec{b} \in V_3: (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (чыныгы көбөйтүүчүнү скалярдык көбөйтүүнүн белгисинин сыртына чыгарууга болот);

$\boldsymbol{III_3}$. $\forall\vec{a},\vec{b}, \in V_3: \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (б.а. скалярдык көбөйтүү амалы коммутативдүүлүк касиетке ээ);

$\boldsymbol{III_4}$. $\forall\vec{a} \in V_3, \vec{a} \neq \vec{0}: \vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} > 0(|\vec{a}| \overset{det}{=} \sqrt{\vec{a}^2})$.

Аксиомалардын IV группасы (Вейлдин аксиомалары)

Аныктама. Эгерде $\sigma: E \times E \to V_3$, $\forall(A,B) \in E \times E: \sigma(A,B) = \vec{a} \in V_3$ чагылтуусу жашап жана төмөндөгү эки шарт аткарылса:

IV_1. (Векторду ченеп коюнун аксиомасы) $\forall A \in E$ чекити жана $\forall\vec{a} \in V_3$ үчүн $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ орун ала тургандай жалгыз гана $B \in E$ чекити жашайт;

IV_2. (Үч бурчтук эрежеси) $\forall A,B,C \in E: \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(мында $\overrightarrow{AB} = \sigma(A,B)$, $(A,B) \in E \times E$,

$\overrightarrow{BC} = \sigma(B,C)$, $(B,C) \in E \times E$,

$\overrightarrow{AC} = \sigma(A,C)$, $(A,C) \in E \times E$,

анда $M \neq \emptyset$ көптүгү **үч ченемдүү евклиддик мейкиндик** деп аталат жана E_3 аркылуу белгиленет. V_3 вектордук мейкиндиги E_3 евклиддик мейкиндигинин **которууларынын мейкиндиги** деп аталат.

Ошентип, E_3 евклиддик мейкиндигинин базасы (негизи) болуп E, V_3, R үч көптүктөрү эсептелет, мында R – чыныгы сандардын талаасы, V көптүгүндө болсо үч ченемдүү евклиддик вектордук мейкиндиктин түзүлүшү аныкталган.

$E \neq \emptyset$ көптүгүндө E_3 үч ченемдүү евклиддик мейкиндиктин түзүлүшүн аныктоодо V_3 жана R – көмөкчү көптүктөр болуп эсептелинет: R – V_3 көптүгүндө аракет этүүчү операторлордун (скалярлар) көптүгү катары, ал эми V_3 – E көптүгүндө аракет этүүчү операторлордун көптүгү катары кызмат кылышат.

Ошентип, E_3 мейкиндигинин түзүлүшү группанын түзүлүшүнө караганда бир кыйла татаал түзүлүш болот. E_3 мейкиндигинин түзүлүшүн аныктоодо биз $(R,+,\cdot,<)$ – үзгүлтүксүз, иреттелген талаанын түзүлүшүн [1] жана үч ченемдүү вектордук мейкиндиктин (R талаасынын үстүндө аныкталган) түзүлүшүн колдондук. Эгерде E_3 мейкиндигинин түзүлүшүн аныктоодо R чыныгы сандардын талаасынын түзүлүшү жана R талаасынын үстүндө берилген үч ченемдүү вектордук мейкиндиктин түзүлүшү бизге белгилүү деп эсептесек, анда E_3 мейкиндигинин түзүлүшү Вейлдин үч $\{IV_1,\ IV_2,\ IV_3\}$ аксиомасы менен гана аныкталып калат, мында IV_3: «Үч ченемдүү V_3 вектордук мейкиндигиндеги оң аныкталган кош сызыктуу форма: $g\colon V_3 \times V_3 \to R$ жашайт» деген сүйлөм. ($g(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$ саны $\vec{x}$ жана $\vec{y}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү жана ал $\{III_1 - III_4\}$ аксиомаларын канааттандырат).

2. E_3 мейкиндиги үчүн Вейлдин аксиомалар системасынын карама-каршылыксыз экендигин көрсөтөлү. Σ_V аркылуу E_3 мейкиндиги үчүн Вейлдин аксиомалар системасын белгилеп коелу:

$$\sum_V = \{I_{1-8}, II_{1,2}, III_{1-4}, IV_{1,2}\}.$$

Ушул аксиомалар системасынын интерпретациясын түзөбүз. Ал үчүн $E \neq \emptyset$ негизги көптүгү үчүн $R^3 = R \times R \times R$ көптүгүн алалы. Бул көптүктүн элементтерин шарттуу түрдө чекиттер деп атап, $A, B, C, \ldots, X, Y$ тамгалары менен белгилеп коебуз $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, ж.б. V вектордук мейкиндигин (которууларынын мейкиндигин) деле ушул R^3 көптүгүнөн «жасап» алабыз. Вектор деп үч даана чыныгы сандардын мамычасын атайбыз жана

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ ж.б.}$$

көрүнүштө белгилеп алабыз.

Векторлорду кошуу жана векторду санга көбөйтүү амалдарын төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$1)\ \vec{x} + \vec{y} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ \lambda\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}, \lambda \in R.$$

$I_1 - I_8$ аксиомаларынын аткарылышы көрүнүп турат (өз алдыңарча текшерип көргүлө).

II_1 аксиомасынын аткарылышын текшеребиз, б.а. V вектордук мейкиндигинде үч сызыктуу көз каранды эмес вектор жашай тургандыгын көрсөтөбүз.

Төмөндөгүдөй $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in V$ векторлорун алалы:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ экендигин көрсөтөлү. Эгерде $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ болсо, анда $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}$ болушу түшүнүктүү. Тескерисинче, $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}$ болсун деп алалы. Анда

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

барабардыгынан (1) жана 2) аныктоолорду эске алып) төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \text{б.а. } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ошентип, V вектордук мейкиндигинде $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ үч сызыктуу көз каранды эмес векторлордун жашай тургандыгын көрдүк.

Эми II_2 аксиомасынын аткарылышын текшеребиз, б.а. каалагандай төрт вектор сызыктуу көз каранды боло тургандыгын көрсөтөбүз. $\forall\vec{x} \in V$ векторун алабыз да, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{x}$ төрт векторун карайлы. Анда $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, б.а.

$$\vec{x} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

барабардыгы орун алат. Демек $\vec{x}$ вектору $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлору аркылуу сызыктуу туюнтулат, б.а. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{x}\}$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды экен. Ошентип $dim\, V = 3$.

Скалярдык көбөйтүү амалын төмөндөгүдөй аныктайбыз:

$\forall\vec{x}, \vec{y} \in V_3$:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \stackrel{\text{def}}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \in R.$$

$III_1 - III_4$ аксиомаларынын аткарылышын текшерүүнү окурманга өз алдынча иш катары сунуштайбыз.

IV_1, IV_2 аксиомаларынын аткарылышын көрсөтөбүз.

$$\sigma: E \times E \to V_3$$

чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктап алалы:

$$\forall (A, B) \in E \times E: \sigma(A, B) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \in V_3, \qquad (*)$$

мында $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) \in E$.

IV_1 аксиомасынын аткарылышын текшерели.

$\forall A(a_1, a_2, a_3) \in E, \forall \vec{a} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in V_3$ үчүн $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ боло тургандай $B \in E$ чекити жашай тургандыгын көрсөтөбүз:

$$\exists B = (p_1 + a_1, p_2 + a_2, p_3 + a_3) \in E:$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} (p_1 + a_1) - a_1 \\ (p_2 + a_2) - a_2 \\ (p_3 + a_3) - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

Эми $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ экендигин текшеребиз. $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3) \in E$ чекиттерин алалы. Анда (*) аныктоосу боюнча $\sigma(A, B) = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$,

$$\sigma(B, C) = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - b_3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma(A, C) = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

келип чыгат. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ барабардыгынын аткарылышын көрсөтөлү:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1-b_1\\c_2-b_2\\c_3-b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1-a_1+c_1-b_1\\b_2-a_2+c_2-b_2\\b_3-a_3+c_3-b_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}.$$

Жогоруда E_3 мейкиндигинин түзүлүшүн аныктоодо биз R көптүгүндөгү арифметиканын түшүнүктөрүн, б.а. арифметикалык амалдардын касиеттерин (кошуу, кемитүү, көбөйтүү, ж.б.) кеңири колдондук.

Демек, төмөнкүдөй теорема далилденди:

Теорема. Эгерде чыныгы сандардын арифметикасы карама-каршылыксыз болсо, анда үч ченемдүү евклиддик мейкиндик үчүн Вейлдин аксиомалар системасы карама-каршылыксыз болот.

E_3 мейкиндиги үчүн Вейлдин аксиомалар системасы толук системанын да мисалы боло алат, себеби анын баардык интерпретациялары изоморфтуу болушат.

A – бирдик элементи бар ассоциативдик-коммутативдик алкак, $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ болсун. $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ $(a_i \in A)$ элементтерин A алкагынын үстүндө берилген n-вектор деп атап коелу. M – ушундай n-векторлордун көптүгү болсун. Бул көптүктө "кошуу" жана "санга көбөйтүү" амалдарын төмөндөгүдөй аныктайлы:

1) $(a_1,a_2,\dots,a_n)+(b_1,b_2,\dots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$,

2) $b\cdot(a_1,a_2,\dots,a_n)=(ba_1,ba_2,\dots,ba_n)$.

M көптүгү A алкагынын үстүндө аныкталган унитардык n-ченемдүү модуль боло тургандыгын алгебра курсунан билебиз.

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

элементтери M модулунун базисин түзүшөт:

а) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – сызыктуу көз каранды эмес;

б) $\forall \vec{a} \in M$: $\vec{a} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n)$.

$\forall A \in E$ үчүн $\sigma_A: E \to M$ $(\sigma_A(B) = \sigma(A, B),\ \forall B \in M)$

1) $\forall A, B, C \in E$ үчүн $\sigma(A, B) + \sigma(B, C) = \sigma(A, C)$ орун алса, анда $E \neq \emptyset$ көптүгү A алкагынын үстүндө аныкталган n-ченемдүү **аффиндик мейкиндик** деп аталат.

1), 2) шарттарды **Вейлдин аксиомалары** деп аташат.

M модулунун векторлорун E аффиндик мейкиндигинин **"которуу"**лары деп атап коюшат, ал эми A модулунун E **мейкиндигинин которууларынын модулу** деп аташат.

Тапшырмалар

1. Каалагандай A – ассоциативдик-коммутативдик алкагы жана каалагандай $n \in N$ үчүн 1), 2) аксиомалар системасы (Вейлдин аксиомалары) карама-каршылыксыз экендигин далилдегиле.

2. Вейлдин 1), 2) аксиомаларынын ар бири экинчисинен көз каранды экендигин далилдегиле.

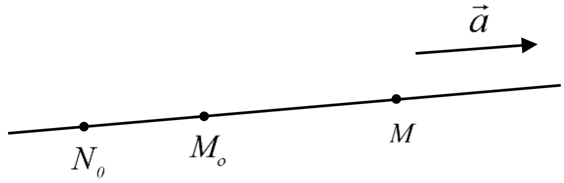
3. $M_{n,p}$ – бирдик элементи бар A – ассоциативдик-коммутативдик алкагынын үстүндө берилген $n \times p$ - тартиптеги матрицалардын көптүгү болсун. Ушул көптүктө A алкагынын үстүндө берилген аффиндик мейкиндиктин түзүлүшүн аныктагыла.

§5. Кээ бир негизги түшүнүктөрдүн Вейль боюнча аныкталышы

1. $M_o \in E_3$ чекитин жана $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \in V$ векторун алабыз (мында V – үч ченемдүү евклиддик мейкиндиктин которууларынын мейкиндиги). d түз сызыгы төмөндөгүдөй M сыяктуу чекиттердин көптүгү катары аныкталат:

$$d = \left\{ M \in E_3 | \overrightarrow{M_o M} = \alpha\vec{a}, \alpha \in R \right\}, \qquad (*)$$

$\vec{a}$ вектору d түз сызыгынын багыттоочу вектору. Эгерде $\vec{b} \neq \vec{0}$ $\vec{a}$ векторуна коллинеардуу вектор



7-сүрөт

болсо, анда $\vec{a} = \beta\vec{b}$ $(\beta \in R, \vec{b} \neq \vec{0})$ барабардыгы орун алат жана $\overrightarrow{M_o M} = \alpha\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_o M} = (\alpha\beta)\vec{b}$, $(\alpha, \beta \in R)$ келип чыгат. Демек, $\vec{b}$ вектору деле d векторунун багыттоочу вектору боло алат.

Эми $N_o \in d$ чекитин алалы. Анда

$$\exists\alpha_o \in R: \overrightarrow{M_o N_o} = \alpha_o\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{N_o M_o} = -\alpha_o\vec{a} \qquad (1)$$

орун алат. Ошондой эле

$$\overrightarrow{N_o M} = \overrightarrow{N_o M_o} + \overrightarrow{M_o M}. \qquad (2)$$

Экендигин көрөбүз (7-сүрөт).

$$(1), (*), (2) \Rightarrow \overrightarrow{N_o M} = (\alpha - \alpha_o)\vec{a}, \alpha - \alpha_o \in R.$$

Демек, d түз сызыгын аныктоодо M_o чекити эч кандай мааниге ээ эмес, анын ордуна $N_o \in d$ чекитин алсак да болот экен.

Эки ар түрдүү $A, B \in E_3$ чекиттери алар аркылуу өтүүчү (AB) түз сызыгын аныкташат:

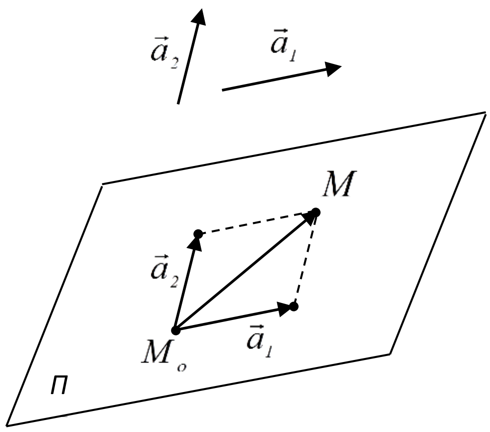
$$(AB) = \left\{X \in E_3 | \overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB}, \alpha \in R\right\}.$$

2. E_3 мейкиндигинин $M_o \in E_3$ чекитин жана эки $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V$ векторлорун алабыз, $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$, б.а. коллинеардуу эмес векторлор болушсун. Тегиздик деп төмөндөгүдөй M сыяктуу чекиттердин көптүгүн айтабыз:

$$\Pi = \left\{M \in E_3 | \overrightarrow{M_o M} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2; \alpha, \beta \in R\right\}.$$

Бул аныктоодогу M_o чекитин каалагандай башка $N_o \in \Pi$ чекити менен алмаштырууга болот.

Эгерде $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ векторлорунун ордуна ушул эки векторго керилген камтылуучу $V_2 \subset V$ мейкиндигинин каалагандай башка $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ базисин алсак деле Π тегиздиги өзгөрбөйт. V_2 камтылуучу вектордук мейкиндиги Π тегиздигинин **багыттоочу камтылуучу мейкиндиги** же жөн эле **багыттоочусу** деп аталат.



8-сүрөт

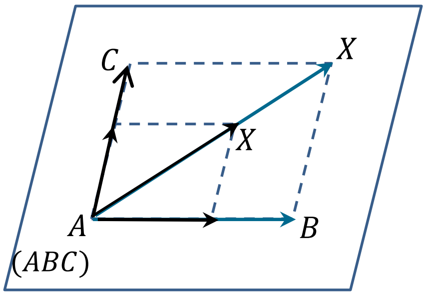
Бир түз сызыкта жатышпаган үч $A, B, C \in E_3$ чекит аркылуу өтүүчү тегиздик ((ABC) көрүнүшүндө белгиленет) төмөндөгүдөй аныкталат:

$$(ABC) = \left\{X \in E_3 | \overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}; \alpha, \beta \in R\right\}$$

3. $A, B \in E_3$, $A \neq B$ чекиттерин карайбыз.

Эгерде

$$\vec{AF} = t\vec{AB}, 0 < t < 1 \qquad (3)$$



9-сүрөт

шарты аткарылса, анда F чекити A жана B чекиттеринин арасында жатат деп айтышат жана $\mu(AFB)$ көрүнүшүндө белгилешет. (3) $\Rightarrow F \in (AB)$ жана $F \neq A, F \neq B$.

10-сүрөттөн

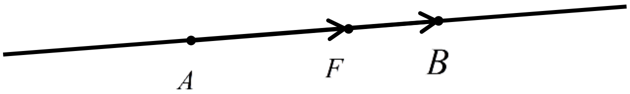
$$\vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AF} \qquad (4)$$

экендигин көрөбүз. Анда (3), (4) барабардыктардан төмөндөгүнү алабыз:

$$\vec{BF} = (1-t)\vec{BA}, 0 < 1-t < 1 \qquad (5)$$

(5) $\Rightarrow \mu(BFA)$.

Ошентип, эгерде F чекити A жана B чекиттеринин арасында жатса, анда A, B, F – бир түз сызыкка таандык ар түрдүү үч чекит болушат жана F чекити B жана A чекиттеринин арасында жатат экен.



10-сүрөт

Биз жогоруда E_3 мейкиндигинин чекиттеринин көптүгүндө «арасында жатат» (белгилениши μ) катышын аныктадык. Эми кесинди жана шоола түшүнүктөрүнүн аныктоолорун беребиз.

Учтары A жана B чекиттери ($A \neq B$) болгон **кесинди** деп төмөндөгүдөй чекиттердин көптүгүн атайбыз:

$$[AB] = \{A, B\} \cup \{F \in E_3 | \mu(AFB)\}.$$

A жана B чекиттеринин арасында жаткан ар бир F чекити $[AB]$ кесиндисинин **ички чекити** деп аталат. $\mu(AFB) = \mu(BFA)$. Ушуну эске алсак, анда $[AB] = [BA]$, б.а. $[AB]$ жана $[BA]$ кесиндилери бир эле фигура экендигин көрөбүз.

4. $A, B \in E_3,\ A \neq B$ болсун. Башталышы A чекити болгон жана B чекити аркылуу өтүүчү шоола деп төмөндөгүдөй чекиттердин көптүгүн атайбыз:

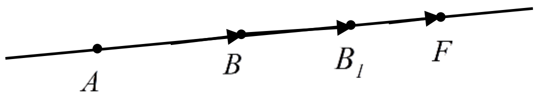
$$[AB) = [AB] \cup \{F \in E_3 | \mu(ABF)\}.$$

Бул көптүктү башкача да аныктоого болот:

$$[AB) = \left\{F \in E_3 | \overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AB}, t \geq 0\right\}.$$

$B_1 \in [AB)$ чекитин алалы. Анда $\overrightarrow{AB_1} = t_1\overrightarrow{AB}$, $t_1 \geq 0$ орун алат.

Эгерде $B_1 \neq A$ болсо, анда $t_1 > 0$ болот жана $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{t_1}\overrightarrow{AB_1}$ келип чыгат.



11-сүрөт

$\left(\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AB}, t \geq 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{t}{t_1}\overrightarrow{AB_1}$, $\frac{t}{t_1} \geq 0$ экендигин көрөбүз.

Ошондуктан, демек, $[AB)$ шооласында жаткан B чекити эч кандай өзгөчө роль аткарбайт, аны каалагандай башка $B_1 \in [AB)$ чекити менен $(B_1 \neq A)$ алмаштырууга болот.

5. E_3 мейкиндигинде кандайдыр бир Π тегиздигин алабыз. $M_o \in \Pi$, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} - \Pi$ тегиздигинин V_2 багыттоочусунун базиси болсо, анда Π тегиздиги

$$\Pi = \left\{M \in E_3 | \overrightarrow{M_oM} = \alpha\vec{a}_1 + \beta a_2; \alpha, \beta \in R\right\}$$

көптүгү катары аныктала тургандыгын жогоруда көрдүк. Эми $A, B \in \Pi$, $A \neq B$ чекиттерин алалы. Анда төмөндөгү барабардыктар орун алат:

$$\overrightarrow{M_o A} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \beta_1 \vec{a}_2, \tag{6}$$

$$\overrightarrow{M_o B} = \alpha_2 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2, \overrightarrow{AB} = (\alpha_2 - \alpha_1)\vec{a}_1 + (\beta_2 - \beta_1)\vec{a}_2.$$

Эгерде $C \in (AB)$ болсо, анда

$$\exists t \in R: \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} \tag{7}$$

орун алат.

$$\overrightarrow{M_o C} = \overrightarrow{M_o A} + \overrightarrow{AC} \tag{8}$$

болгондуктан, (6), (7), (8) барабардыктардан төмөндөгүнү алабыз:

$$\overrightarrow{M_o C} = \{\alpha_1 + t(\alpha_2 - \alpha_1)\}\vec{a}_1 + \{\beta_1 + t(\beta_2 - \beta_1)\}\vec{a}_2.$$

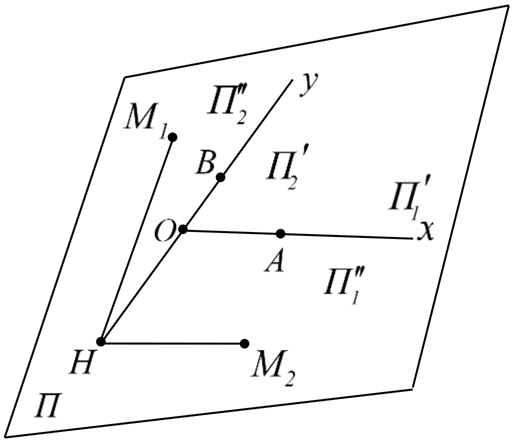
Бул барабардыктан $C \in \Pi$ боло тургандыгы келип чыгат. Демек, эгерде (AB) түз сызыгынын эки ар түрдүү чекиттери Π тегиздигине таандык болушса, анда бул түз сызыктын каалагандай чекити Π тегиздигине таандык болот. Бул учурда (AB) түз сызыгы Π **тегиздигинде жатат** деп айтабыз жана $(AB) \subset \Pi$ көрүнүшүндө жазабыз.

$$(A, B \in \Pi, A \neq B) \Rightarrow [AB] \subset \Pi$$

экендиги түшүнүктүү.

Π тегиздигинде d түз сызыгын алабыз жана $\widetilde{\Pi} = \Pi \backslash d$ көптүгүн карайбыз. Π тегиздигинде жаткан d түз сызыгы $\widetilde{\Pi}$ фигурасын Π' жана Π'' бөлүктөрүнө ажыратат. $\Pi' \cup d$ жана $\Pi'' \cup d$ фигураларынын ар бири **жарым тегиздик** деп аталат, ал эми d түз сызыгы ар бир жарым тегиздиктин **чеги** деп аталат.

6. Кандайдыр бир Π тегиздигинде жатышкан $[OA)$ жана $[OB)$ шоолаларын алабыз (12-сүрөт).



12-сүрөт

Адегенде бул шоолалар бир түз сызыкта жатышпаган учурду карайлы. Анда Π тегиздигинде $\mathfrak{R} = \{O, A, B\}$ аффиндик реперин аныктоого болот. Π тегиздигинде төмөндөгүдөй фигураларды карайбыз:

$$\Gamma = [OA) \cup [OB),$$

$$\Pi'_1 = \{M(x, y) | y > 0\}, \Pi''_1 = \{M(x, y) | y < 0\},$$

$$\Pi'_2 = \{M(x, y) | x > 0\}, \Pi''_2 = \{M(x, y) | x < 0\},$$

$$\Pi' = \Pi'_1 \cup \Pi'_1, \Pi'' = \Pi''_1 \cup \Pi''_2.$$

Демек, $\Pi' = \{M(x, y) | x > 0, y > 0\}$, $\Pi'' = \{M(x, y) | x < 0 \vee y > 0\}$. Мындан $\Pi = \Gamma \cup \Pi' \cup \Pi''$ экендиги келип чыгат. Эми Γ фигурасы $\widetilde{\Pi} = \Pi \backslash \Gamma$ фигурасын эки Π' жана Π'' бөлүктөрүнө бөлө тургандыгын көрсөтөлү. $\Pi' \cup \Pi'' = \widetilde{\Pi}$, $\Pi' \cap \Pi'' = \emptyset$ экендиги көрүнүп турат, б.а. Γ фигурасы $\widetilde{\Pi}$ фигурасын Π' жана Π'' бөлүктөрүнө бөлөт экен.

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2) \in \Pi'$ чекиттерин алабыз.

$$\mu(M_1 M M_2) \Rightarrow (M_1 M_2, M) = \lambda > 0,$$

б.а. эгерде M чекити M_1 жана M_2 чекиттеринин арасында жатса, анда M чекити $[M_1 M_2]$ кесиндисин $\lambda > 0$ катышында боло тургандыгын жана $\lambda > 0$ саны M_1, M_2, M үч чекитинин жөнөкөй катышы деп аталышын биринчи курстун аналитикалык геометриясынан билебиз.

Эгерде M чекитинин координаталары (x, y) болсо, анда $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Мындан $x > 0$, $y > 0$ экендиги келип чыгат.

Π' фигурасына таандык чекиттер үчүн $x > 0$, $y > 0$ болгондуктан, $M \in \Pi'$ болот. Ошондуктан $[M_1M_2] \subset \Pi'$ Ошентип, Π' фигурасынын каалагандай эки чекитин ушул фигурада жаткан сынык сызык (же кесинди) менен туташтырууга болот экен.

Эми $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in \Pi''$ болсун. Эки учурду карайбыз:

а) $x_1 < 0, x_2 < 0$. Анда $M_1, M_2 \in \Pi''_2 \Rightarrow [M_1M_2] \subset \Pi''_2$. Демек, $[M_1M_2] \subset \Pi''$. Ушуга эле окшош $(y_1 < 0, y_2 < 0) \Rightarrow [M_1M_2] \subset \Pi''$ келип чыгат.

б) $x_1 < 0, x_2 > 0$ болсун. Анда $y_2 < 0$. $H(0, y_2)$ чекитин алабыз (12-сүрөт). M_1HM_2 сынык сызыгы Π'' фигурасына таандык болот. Ушуга окшош эле $x_1 > 0, x_2 < 0$ болгон учурда да M_1 жана M_2 чекиттерин Π'' фигурасына таандык болгон сынык сызык менен туташтырууга боло тургандыгына ынанабыз.

Бирок, эгерде $M_1(x_1, y_1) \in \Pi'$, $M_2(x_2, y_2) \in \Pi''$ болсо, анда M_1 жана M_2 чекиттерин туташтыруучу жана Γ фигурасы менен кесилишпей турган сынык сызык жашабайт (ушуну өз алдынча иш катары окурманга сунуштайбыз).

Ошентип, Γ фигурасы $\Pi \backslash \Gamma$ фигурасын эки Π' жана Π'' бөлүккө бөлөт экен. $E' = \Pi' \cup \Gamma$, $E'' = \Pi'' \cup \Gamma$ фигураларынын ар бири **бурч** деп аталат. O чекити бурчтун чокусу, $[OA)$, $[OB)$ шоолалары бурчтун жактары деп аталышат. Π' фигурасы E'

бурчунун, ал эми Π'' фигурасы E'' бурчунун **ички аймагы** деп аталышат.

Демек, жайылган бурч – чеги деп аталган түз сызыкта O чекити (бурчтун чокусу) көрсөтүлгөн жарым тегиздик болот экен.

$[OA)$ жана $[OB)$ шоолалары дал келишкен учурду карайбыз: $[OA) = [OB)$. Бул учурда берилген шоолалар Π тегиздигинде эки бурчту түзүшөт: алардын бири – дал келишкен $[OA) = [OB)$ шоолалар – ички аймака ээ болушпайт жана **нөлдүк бурч** деп аталат, анын ички аймагы болуп $\Pi \setminus [OA)$ фигурасы эсептелет.

7. Планиметриянын кээ бир теоремаларын далилдейбиз. Адегенде тегиздиктин кыймылы жөнүндөгү түшүнүктү эске түшүрөлү.

$f: \Pi \to \Pi$ өзгөртүп түзүүсү Π тегиздигинин каалагандай эки чекитинин арасындагы аралыкты сактаса, анда аны тегиздиктин кыймылы деп аташат. Эгерде Π тегиздигинде эки ортонормаланган $\Re = \{O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ жана $\Re' = \{O', \vec{\imath}', \vec{\jmath}'\}$ реперлери берилген болсо, анда $\Re$ реперин $\Re'$ реперине өткөрө тургандай жалгыз гана кыймыл жашайт. Эгерде M чекити $\Re$ реперине карата (x, y) координаталарына ээ болсо, анда бул чекит f кыймылында $\Re'$ реперине карата так ушундай (x, y) координаталарына ээ боло тургандай M' чекитине өтөт. Кыймылда түз сызыкта жаткан үч чекиттин жөнөкөй катышы сакталат, демек, кыймыл түз сызыкты – түз сызыкка, кесиндини – кесиндиге, бурчту – бурчка, жарым тегиздикти – жарым тегиздикке өткөрөт.

Эгерде F_1 жана F_2 фигураларынын бирин экинчисине өткөрө тургандай f кыймылы жашаса, анда аларды конгруэнттүү фигуралар деп аташат.

Тегиздиктин кыймылдарынын көптүгү группаны түзгөндүктөн, конгруэнттүүлүк катышы бардык фигуралардын көптүгүндө эквиваленттүүлүк катышы болот.

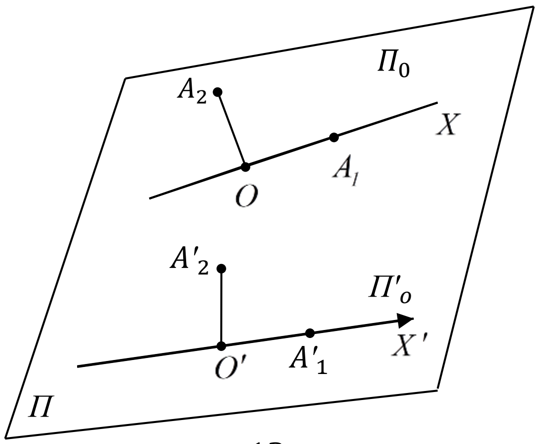
1-теорема. Тегиздикте эки $[OX)$ жана $[O'X')$ шоолалары, (OX) түз сызыгы менен чектелген Π_o жарым тегиздиги жана $(O'X')$ түз сызыгы менен чектелген Π'_o жарым тегиздиги берилген болсун. Анда $[OX)$ шооласын $[O'X')$ шооласына, Π_o жарым тегиздигин Π'_o жарым тегиздигине өткөрө турган тегиздиктин жалгыз гана кыймылы жашайт.

Далилдөө. $\mathfrak{R} = \{O, A_1, A_2\}$, $A_1 \in [OX)$, $A_2 \in \Pi_o$,

$$\mathfrak{R}' = \{O', A'_1, A'_2\},\ A'_1 \in [O'X'),\ A'_2 \in \Pi'_o$$

ортонормаланган реперлерин карайбыз (13-сүрөт).

$\mathfrak{R}$ реперин $\mathfrak{R}'$ реперине өткөрө тургандай $f: \Pi \to \Pi$ кыймылы $[OX)$ шооласын $[O'X')$ шооласына, Π_0 жарым тегиздигин жарым тегиздигине өткөрөт.



13-сүрөт

Экинчи жактан дагы бир $\partial: \Pi \to \Pi$ кыймылында $\partial([OX)) = [O'X')$, $\partial(\Pi_0) = \Pi'_o$ болсун дейли. $\partial(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$ боло тургандыгын көрсөтөбүз (б.а. $f = \partial$ экендигин далилдейбиз).

Шарт боюнча $\partial(O) = O'$. ∂ кыймылында ар кандай эки чекиттин арасындагы аралык сакталгандыктан жана $\partial([OX)) = [O'X')$ болгондуктан төмөндөгүнү алабыз: $\partial(A_1) = A_1^* \in [O'X')$, $|\overrightarrow{O'A_1^*}| = 1$. Ал эми $A_1^* \in [O'X')$ болушунан $\overrightarrow{O'A_1^*} = t\overrightarrow{O'A'_1}$, $(t \geq 0)$ экендиги келип чыгат. Демек,

$$|\overrightarrow{O'A_1^*}| = t|\overrightarrow{O'A'_1}|. \qquad (1)$$

Бирок, $|\overrightarrow{O'A_1^*}| = 1$, $|\overrightarrow{O'A'_1}| = 1$ болгондуктан, (1) ден $t = 1$ боло тургандыгын көрөбүз. Демек, $\overrightarrow{O'A_1^*} = \overrightarrow{O'A'_1} \Rightarrow A_1^* \equiv A'_1$.

Эми $\partial(A_2) = A_2^*$ болсун деп алалы. A_2^* чекитинин $\mathfrak{R}$ реперине карата координаталарын (x, y) аркылуу белгилейбиз. Анда

$$\overrightarrow{O'A_1^*} = x\overrightarrow{O'A'_1} + y\overrightarrow{O'A'_2} \qquad (2)$$

орун алат. O чекитин O' чекитине көтөрө турган ар кандай кыймыл которуулардын V мейкиндигинин кандайдыр бир ортогоналдык өзгөртүүсү (б.а. V вектордук мейкиндигинин ар кандай эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн сактай турган өзгөртүүсү) тарабынан жаратыла тургандыгын эске түшүрөбүз. Каралып жаткан учурда

$$\overrightarrow{O'A'_1} \cdot \overrightarrow{O'A_2^*} = 0, \qquad (3)$$

себеби, $\overrightarrow{O'A'_1} \perp \overrightarrow{O'A_2^*}$ (2) жана (3) барабардыктардан $x = 0$ экендиги келип чыгат. Демек,

$$\overrightarrow{O'A_2^*} = y\overrightarrow{O'A'_2}. \qquad (4)$$

Мындагы $y > 0$ (себеби $\mathfrak{R}'$ репери ушундай танндалып алынган жана $A_2^* \in \Pi'_0$). Эгерде эми $|\overrightarrow{O'A_2^*}| = |\overrightarrow{OA_2}| = 1$ жана $|\overrightarrow{O'A'_2}| = 1$

экендигин эске алсак, анда (4) барабардыктан $y = 1$, б.а. $A_2^* \equiv A'_2$ келип чыгат.

Ошентип, $\partial(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$ экен. $\mathfrak{R}$ реперин $\mathfrak{R}'$ реперине өткөрө турган f кыймылы жалгыз болгондуктан, $\partial \equiv f$ кыймылы жалгыз болот. Теорема далилденди.

§6. Стереометриянын айрым теоремаларынын далилдениши

Эгерде мейкиндиктеги эки a жана b түз сызыктарынын багытоочу векторлору ортогоналдуу болушса, анда бул эки түз сызыкты өз ара перпендикуляр түз сызыктар деп аташат. Бирок, a түз сызыгынын перпендикуляры деп бул түз сызыкты тик бурч боюнча кесип өткөн түз сызыкты атайбыз. Π тегиздигин жана анда жатпаган a түз сызыкты карайлы.

Эгерде a түз сызыгы Π тегиздигинде жаткан каалагандай түз сызыка перпендикуляр болсо, анда a түз сызыгы Π тегиздигине перпендикуляр деп аташат.

$\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ аркылуу Π тегиздигинин багытоочу мейкиндигинин базисин белгилейли. Анда $\vec{e} = [\vec{e}_1,\ \vec{e}_2]$ вектору Π тегиздигине перпендикуляр болгон түз сызыктын багытоочу вектору болот ($[\vec{e}_1,\ \vec{e}_2]$ – $\vec{e}_1$ жана $\vec{e}_2$ векторунун вектордук көбөйтүндүсү).

1-теорема. Эгерде a түз сызыгы Π тегиздигинде жаткан эки кесилишүүчү түз сызыктардын ар бирине перпендикуляр болсо, анда ал Π тегиздигине да перпендикуляр болот.

Далилдөө. Айталы $a \perp b,\ a \perp c,\ c \subset \Pi,\ b \subset \Pi,\ b \cap c = A$ болсун. $\vec{e},\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,$ аркылуу тиешелүү түрдө a, b, c түз сызыктарынын багытоочу векторлорун белгилейли. Анда

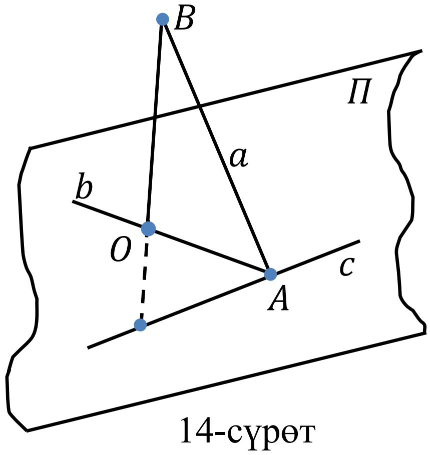
$$\vec{e} \cdot \vec{e}_1, = 0,\ \ \vec{e} \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad (1)$$

келип чыгат.

П тегиздигинде жаткан каалагандай d түз сызыгын алалы. Эгерде $\vec{m}$ аркылуу d түз сызыгынын багытоочу векторун белгилесек, анда

$$\vec{m} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 \qquad (2)$$

барабардыгына ээ болобуз.



14-сүрөт

$$(1),(2) \Rightarrow \vec{e}\ \cdot \vec{m} = e(\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2) =$$
$$= \alpha(\vec{e} \cdot \vec{e}_1) + \beta(\vec{e} \cdot \vec{e}_2) =$$
$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

демек, $a \perp d$ б.а. $a \perp \Pi$.

Натыйжада. $(a \perp \Pi, \alpha \perp \Pi) \Rightarrow a \perp d$.

2-теорема. (үч перпендикуляр жөнүндө). $a \cap \Pi = A,\ \ a$ түз сызыгы Π тегиздигинде перпендикуляр эмес болсун, b аркылуу a түз сызыгынын Π тегиздигиндеги ортогоналдык проекциясын белгилейли, $A \in c \subset \Pi$, б.а. c түз сызыгы A чекити аркылуу өтүп, Π тегиздигинде жатсын деп алалы. Анда

$$c \perp b \Rightarrow c \perp a; c \perp a \Rightarrow c \perp b.$$

Далилдөө. $B \in a, B \neq A$ болсун. B чекитинин Π тегиздигиндеги ортогоналдык проекциясын O аркылуу белгилейли. Анда $b = (OA)$ (14-сүрөт),

$$(b \subset \Pi, c \subset \Pi, (OB) \perp \Pi) \Rightarrow (OB) \perp b, (OB) \perp c.$$

Демек, $(c \perp (OB) \wedge c \perp b) \Rightarrow c \perp \Sigma,$ мында $\Sigma - A, B, O$ чекиттери аркылуу өтүүчү тегиздик. Ошондуктан $(c \perp \Sigma,\ a \subset \Sigma) \Rightarrow c \perp a.$ Ушуга окшош эле c ⊥ a ⇒ c ⊥ b экендиги келип чыгат.

III Бап. Геометриянын негизделишинин кыскача тарыхы

§7. Евклидге чейинки геометрия. Евклиддин «Башталма»сы

Бир нече жүздөгөн миң жылдыктарга созулган байыркы таш доорунда эле адамдарда геометриялык түшүнүктөрдүн элементтери калыптана баштаган. Таш доорунун акыркы мезгилдеринде адамдар өздөрү жашаган үңкүрлөрдү сүрөттөр жана айкелдер (статуэткалар) менен жасалгалай башташкан. Аңчылык жана балык уулоодон жер иштетүүгө (дыйканчылыкка) өтүү менен жаңы таш доору башталат. Бул мезгил мындан 10 миң кылым мурда болгон. Жаңы таш доорунун башталышы менен кыштактар пайда болуп, чопо иштетүү, кездеме токуу, жыгач иштетүү сыяктуу кол өнөрчүлүк иштери, соода-сатык өнүгө баштайт. Соода-сатык мамилелеринин өнүгүшү сан түшүнүгүнүн калыптанышына өбөлгө түзөт. Ушуну менен нерселердин узундуктарын, аянттарын жана көлөмдөрүн өлчөөгө зарылдык пайда болот.

Адамдардын турмуштук иш-аракеттеринин жүрүшүндө акырындык менен жалпак фигуралар жана мейкиндик фигуралары жөнүндө элестөөлөр калыптанып, алардын эң жөнөкөй касиеттери белгилене баштайт.

Вавилондун жана Египеттин байыркы маданий эстеликтеринин бизге чейин сакталып калган үлгүлөрү бул өлкөлөрдө геометрия одоно-эмпирикалык мүнөзгө ээ болгонун кабарлайт жана ал (геометрия) айрым бир маселелердин жекече учурлардагы чыгарылыштарынын топтому түрүндө калыптанган.

Мисалы, биздин эрага чейинки II кылымдарда египеттиктер үч бурчтуктун аянтын жана туура төрт бурчтуу кесилген пирамиданын көлөмүн так эсептей алышкан, диаметри d болгон тегеректин аянтын $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ түрүндө эсептешкен.

Вавилондук геометрия деле египеттик геометрияга окшош эле ченөөгө байланыштуу практикалык маселелердин негизинде өнүккөн. Биздин эрага чейинки II кылымда эле Вавилондуктар Пифагордун теоремасы деп аталган теореманы билишкен. Бул өлкөдө астрономия да бир кыйла жакшы өнүгө баштаган.

Байыркы Чыгыштын (Вавилон жана Египет) математикасында эч кандай далилдөөлөр болгон эмес, жалаң гана «ушундайча эсептөө керек», «ушундайча табуу керек», «ушундайча аныктоо керек» деген сыяктуу эрежелерди гана табууга болот.

Биздин эрага чейинки VII кылымда геометрияны грек окмуштуулары өнүктүрө башташкан. Грек математикасынын атасы болуп Милет шаарынан чыккан Фалес аттуу көпөс эсептелет. Грек көпөстөрү Байыркы Чыгыш математикасы менен тааныш болушкан жана Чыгышта теория менен эч ким алектенбегендигине маани беришкен: «ушундайча жасагыла», – деген эреже бар, бирок «эмне үчүн ушундайча гана жасоо керек?», – деген суроого жооп жок болгондугун билишкен.

Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчтарынын касиеттерин, вертикалдык бурчтардын касиеттерин жана башка бир топ теоремаларды Фалес (б.э.ч. 640-548-ж.) далилдеген деп жазылган.

Пифагордун (б.э.ч. 570-471-ж.) философиялык мектебинде математика эң биринчи орунда турган. Ушул мектептин окуучулары үч бурчтуктун бурчтарынын суммасы жөнүндөгү теореманы, Пифагордун теоремасын, туура көп бурчтуктардын беш тибинин жашай тургандыгын жана ченелбөөчү кесиндилердин жашашын далилдешкен.

Демокрит (б.э.ч. 470-370-ж.) дүйнөнү боштукта кыймылдап жүрүүчү атомдордун көптүгү катары эсептеген. Атомдор (же «бөлүнбөөчүлөр») – бөлүкчөлөргө ээ болушпаган нерселер деп атаган. Бөлүнбөөчүлөр методу менен Демокрит пирамиданын жана конустун көлөмү жөнүндөгү теоремаларды далилдеген. Бул методду кийинчерээк Архимед, Декарт, Галилей, Кавальери да колдонушкан.

Платон (б.э.ч. 429-348-ж.) адегенде геометрияны үйрөнүп, андан кийин философия менен алектенүү керектигин сунуштаган. Платондун академиясынын босогосунда «Геометрияны билбегендер бул жакка кирбей эле коюшсун» деген жазуу илинип турган. Платондун жолун жолдоочулар дээрлик бардык теоремалардын далилдөөсүн Платондун эмгеги деп эсептешет. Албетте муну шексиз деп айтуу кыйын. Платон окуучуларын логикалык сабаттуулукка үйрөткөн. Ошондуктан алар математикалык ой жүгүртүүдө тактыкты жана логикалык ирееттүүлүктү калыптанта алышкан.

Платон эң ири идеалист болгон жана ал Демокриттин материализми менен күрөшүп келген. Ал математикада Демокриттин бөлүнбөөчүлөр методун колдонууга тыюу салган. Бул болсо математиканын өнүгүүсүнө жолтоо болгон.

Евдокс (б.э.ч. 410-356-ж.) – пропорциялардын геометриялык теориясын түзгөн. Гректер билбеген иррационалдык сандардын теориясын негиздеген. Евдокс «түгөтүү методу» («метод исчерпывания») деп аталган методду ачкан: «Эгерде A чоңдугунан $\frac{1}{2}A$ чоңдугун же мындан чоңураак чоңдукту кемитсек, келип чыккан чоңдук менен дал ушундай ишти аткарсак жана ушул процессти уланта берсек, анда алдын ала берилген ар кандай чоңдуктан кичине болгон чоңдукту алууга болот». Ушул методдун жардамы менен Евдокс пирамиданын, конустун жана шардын көлөмүн тапкан.

Евдокстун окуучусу Менехм конустук кесилиштерди ачкан, аларды кийин тереңирээк Апполоний изилдеген.

Аристотель (б.э.ч. 384-322-ж.) байыркы мезгилдин залкар философу, формалдык логиканын негиздөөчүсү болгон. Геометрия менен түздөн-түз алектенген эмес.

Ошентип, Грецияда математика философия менен айкалышып өнүккөн.

Биздин эранын III кылымынын башталышында гректер геометриялык фактылар менен аларды далилдөөнүн методдорунун чоң запасына ээ болушкан. Ушул мезгилде топтолгон геометриялык материалдарды жыйнап жана аларды логикалык ireттүүлүккө жайлаштыруу маселеси келип чыккан. Бул маселени көптөгөн грек авторлору чечүүгө аракет жасашкан (Гиппократ, Федий, ж.б.), бирок алардын чыгармалары биздин учурга жеткен эмес, Евклиддин «башталма»сы пайда болгондон кийин таптакыр унутулуп калган.

Евклиддин «Башталма»сы

Евклид (б.э.ч. 330-275-ж.) Платондун мектебинде тарбияланган, кийин Александрияда математикадан сабак берген. Евклиддин «Башталма» аттуу эмгегинде геометриянын башталышы системалуу баяндалып, чоң чеберчилик менен жазылган. Ошондуктан көптөгөн кылымдар бою геометрияны окутуу ушул эмгек боюнча жүргүзүлгөн.

“Башталма” Евклиддин башталмасы 13 китептен (бөлүктөн) турат. Биринчи китебинде үч бурчтуктар жөнүндөгү теоремалар, параллель түз сызыктардын теориясы, үч бурчтуктардын жана көп бурчтуктардын тең чоңдукта болуу шарттары, Пифагордун теоремасы камтылган. Экинчи китебинде көп бурчтуктун тең чоңдуктагы квадратка айланышы жөнүндө жазылган. Үчүнчү китебинде айлана жөнүндөгү маалыматтар баяндалат. Төртүнчү китеби ичтен жана сырттан сызылган көп бурчтуктар, туура n бурчтукту $(n = 5,6,10)$ түзүү жөнүндөгү маалыматтарды камтыйт ($n = 3$ болгон учур биринчи китепте каралган).

Пропорциялардын теориясы бешинчи китептин мазмунун түзгөн. Алтынчы китебинде көп бурчтуктардын окшоштугу каралган. Жетинчи, сегизинчи, тогузунчу китептеринде арифметиканын геометриялык тилде баяндалышы камтылган. Онунчу китеби “Ченелбөөчү чоңдуктар” деп аталат. 11-12-13-китептеринде стереометриянын негиздери баяндалган. 13-китебинде толугу менен туура көп бурчтуктар жөнүндө маалыматтар камтылган.

Евклиддин мезгилинде белгилүү болгон көптөгөн геометриялык фактылар, мисалы, конустук кесилиштердин теориясы, жогорку тартиптеги ийрилер «Башталмада» баяндалган эмес.

Ар бир китеп ошол китепте кездешүүчү түшүнүктөрдүн аныктоолорун берүү менен башталат. Биринчи китебинин башталышында 23 аныктоо берилген. Алардын кээ бирлерин карап көрөлү:

1. Бөлүктөргө ээ болбогон нерсе чекит деп аталат.
2. Кеңдикке ээ болбогон узундук сызык деп аталат.
3. Өзүнөн чекиттерине карата бирдей жайланышкан сызык түз сызык деп аталат.
4. Узундукка жана кеңдикке гана ээ болгон нерсе бет деп аталат.
5. Өзүндө жаткан түз сызыктарга бирдей жайланышкан бет тегиздик деп аталат.

Аныктоолрдон кийин Евклид далилдөөсүз кабыл алынган сүйлөмдөрдү көрсөтөт. Аларды постулаттар жана аксиомалар деп ажыратат.

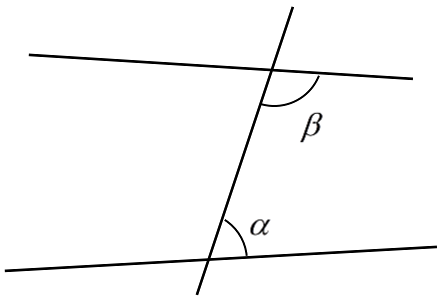
I постулат. Каалагандай чекиттен башка бир каалагандай чекитке чейин түз сызыкты жүргүзүү мүмкүн экендиги шарт кылынат.

II постулат. Ар бир (чектелген) түз сызыкты каалаганчалык узартууга мүмкүн болсун.

III постулат. Каалагандай борбордон каалагандай радиустагы айлананы сызууга мүмкүн болсун.

IV постулат. Бардык тик бурчтар барабар болушсун.

V постулат. Эгерде түз сызык башка эки түз сызыкты кесип өткөндө пайда болгон ички бир жактуу бурчтардын суммасы кесүүчү түз сызыктардын кайсыл жагында $2d$ дан кичине болсо, анда эки түз сызык ошол жакта кесилишет (15-сүрөт).



$\angle\alpha + \angle\beta < 180°$

15-сүрөт

I Аксиома. Ар бири үчүнчүгө барабар болушкан эки нерсе өз ара барабар болушат.

II Аксиома. Эгерде барабар нерселерге барабар нерселерди кошсо, барабар нерселерге ээ болобуз.

VII Аксиома. Дал келүүчү нерселер барабар болушат.

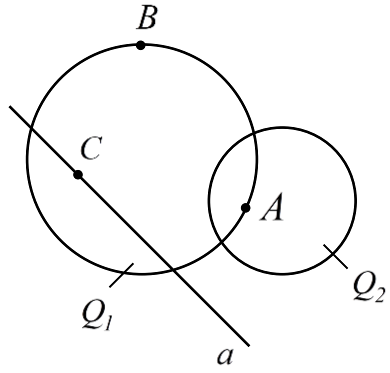
Евклид биринчилерден болуп геометрияны негиздөө маселесин койгон, б.а. аксиомалардын жана аныктоолордун тизмесин тактап алардын жардамында логкалык жол менен геометрияны түзүү маселесин койгон.

Өз мезгили үчүн Евклид тарабынан геометриянын логикалык түзүлүшү өтө так болуп эсептелген. Азыркы математиканын көз карашы менен караганда «Башталма»нын жазылышы канааттандыраарлык эмес.

Евклид тарабынан киргизилген аныктоолорду карап көрөлү. Аларда кездешүүчү кээ бир түшүнүктөрдүн («узундук», «кеңдик», ж.б.) өздөрүнө аныктоо берүү керек болот. Жогоруда көрсөтүлгөн аныктоолордун бири дагы теоремаларды далилдөөдө колдонулбайт. Демек, аларды китепке киргизбей койсо деле болмок.

Далилдөөсүз кабыл алынган сүйлөмдөрдүн (аксиомалар жана постулаттар) тизмеси алардын негизинде геометрияны логикалык жол менен түзүү үчүн жетишээрлик эмес экендигин байкоого болот. Мисал келтирели:

+а) геометрияда биз «арасында жатат» (б.а. «A чекити B жана C чекиттеринин арасында жатат»), «түз сызыктын бир жагында» же “түрдүү жактарында” деген түшүнүктөрдөн тез-тез пайдаланабыз. Евклиддин постулаттары бул түшүнүктөрдү негиздөөгө мүмкүнчүлүк бере алышпай тургандыгын Гаусс белгилеген.



16-сүрөт

б) VII аксиомасынан фигуралардын барабардыгы кыймылдын жардамында аныктала тургандыгын көрөбүз. Бирок, кыймыл деген эмне экендигин Евклид аныктаган эмес жана кыймылдын касиеттери аксиомалардын тизмесинде белгиленбеген.

Эгерде VII аксиоманы эске алсак, анда төртүнчү постулаты төмөндөгүдөй түшүнүүгө болот: каалагандай эки тик бурчту дал келтирүүгө болот, б.а. бул бурчтардын бирин экинчисине өткөрө тургандай кыймыл жашайт. IV постулатты ушундайча түшүнсөк, анда Евклид ортонормаланган репер түшүнүгү менен тааныш экендигин көрөбүз. Бирок бул которуулар жөнүндөгү теорияны негиздөө үчүн жетиштүү эмес.

в) эгерде Q_1 айланасы A жана B чекиттери аркылуу өтсө (мында A – Q_2 айланасына карата ички чекит, ал эми B – Q_2 айланасына карата сырткы чекит болсо), анда Евклид $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ деп ырастайт. Ушуга эле окшош, эгерде a түз сызыгы Q_1 айланасына карата C ички чекити аркылуу өтсө, анда $a \cap Q_1 \neq \emptyset$ экендигин белгилейт. Бул фактылар далилдөөнү талап кылышат (буга Лейбниц көңүл бөлгөн). Бирок, Евклиддин постулаттары жана аксиомалары белгиленген ырастоолорду далилдөөгө мүмкүнчүлүк бере алышпайт.

Евклиддин мезгилинде геометриянын кээ бир түшүнүктөрү («арасында жатат», «кыймыл», «үзгүлтүксүздүк», ж.б.) иштелип чыга элек болгон.

Ошентип, Евклиддин «Башталма»сы геометриянын кынтыксыз логикалык негизделишин бере алган эмес.

§8. Евклиддин V постулаты жана ага эквиваленттүү сүйлөмдөр

Байыркы мезгилдин окмуштуулары деле «Башталма»нын кээ бир кемчилдиктерин белгилешкен. Мисалы, Архимед (б.э.ч. 287-212-ж.) төмөндөгүдөй аксиоманы кошумчалаган: «Каалагандай берилген эки кесинди $[AB]$, $[CD]$ үчүн $n[AB] > [CD]$ боло тургандай n натуралдык саны жашайт».

Ошондой эле IV постулаттын ашыкча экендигин (себеби аны теорема катары далилдөөгө боло тургандыгын) көрсөтүшкөн.

«Башталма»дан кийинки геометриянын негиздери боюнча чыгармалардын көпчүлүгүндө V постулатты далилдөө маселеси каралган.

Параллель түз сызыктарды Евклид төмөндөгүдөй аныктаган: эгерде бир тегиздикте жатышкан эки түз сызык жалпы чекитке ээ болушпаса, анда алар параллель түз сызыктар деп аталышат. Мындай түз сызыктар жашайт, мисалы, бир эле түз сызыктын эки перпендикулярын кароого болот.

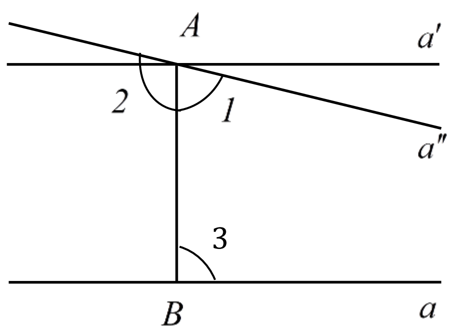
Каалаган $A \in a$ чекити аркылуу a түз сызыгына параллель болгон түз сызыкты жүргүзүүгө болот. Ал үчүн $(AB) \perp a$ жана $(AC) \perp (AB)$ түз сызыктарын жүргүзүү жетиштүү. Анда $(AC)||a$ болот.

Эми $A \notin a$ чекити аркылуу a түз сызыгына параллель болгон канча түз сызык жүргүзүүгө болот деген маселени карайлы.

Евклиддик геометрияда төмөндөгү теорема орун алат.

1-теорема. Ар бир $A \notin a$ чекити аркылуу a түз сызыгына параллель болгон бир гана түз сызык өтөт.

Далилдөө. $(AB) \perp a$ – түз сызыгын жүргүзөбүз жана A чекити аркылуу $a' \perp (AB)$ түз сызыгын жүргүзөбүз. Анда $a'||a$ болот. A чекити аркылуу каалагандай $a'' \neq a'$ түз сызыгын жүргүзөлү. Демек, же $\angle 1$ бурчу, же $\angle 2$ бурчу тар бурч болот. Айталы $\angle 1$ - тар бурч болсун деп алалы. Анда a жана a'' түз сызыктарын (AB) түз

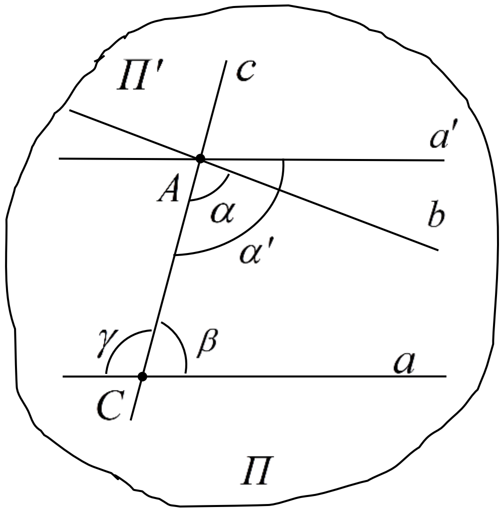


17-сүрөт

сызыгы кесип өткөндө пайда болгон $\angle 1$ жана $\angle 3$ ички бир жактуу бурчтардын суммасы 180° тан кичине болуп калды. V постулат боюнча a жана a'' түз сызыктары кесилишет. Теорема далилденди. Тескери теореманы карайбыз.

2-теорема. Эгерде ар бир $A \notin a$ чекити аркылуу a түз сызыгына параллель болгон жалгыз гана түз сызык өтөт деп эсептесек, анда V постулат орун алат.

Далилдөө. Тик бурчтун чоңдугун d аркылуу белгилеп алалы. Жайылган бурч эки тик бурчтун суммасы болгондуктан, анын чоңдугу $2d$ га барабар болот.



18-сүрөт

a түз сызыгы жана $A \notin a$ чекити берилген болсун. A чекити аркылуу b жана c түз сызыктары өтсүн; $c \cap a = B$ болсун, ал эми b түз сызыгы

$$\alpha + \beta < 2d \qquad (1)$$

шартын канааттандырсын. b жана a түз сызыктары кесилише тургандыгын, $b \cap a$ чекити c түз сызыгы менен чектелген жана α, β бурчтарын камтыган П жарым тегиздигинде жата тургандыгын далилдешибиз керек. A чекити аркылуу α' түз сызыгын

$$\alpha' + \beta = 2d \qquad (2)$$

боло тургандай кылып жүргүзөбүз. Анда (1) жана (2) ден $\alpha < \alpha'$ же $b \neq \alpha'$ экендиги келип чыгат. Ал эми

$$\gamma + \beta = 2d \tag{3}$$

болгондуктан, (2) жана (3) барабардыктардан $\alpha' = \gamma$ боло тургандыгын көрөбүз. Мындан $a'||a$ келип чыгат. Эгерде a' жана a түз сызыктары кесилишет деп болжолдосок, анда бул үч бурчтуктун сырткы бурчу жөнүндөгү теоремага каршы келет. Ал эми аталган теореманы далилдөөдө V постулат колдонулбайт. Бул постулат катары A чекити аркылуу өтүүчү параллель түз сызыктын жалгыздыгын кабыл алдык. Ошондуктан ($b \neq a'$, b түз сызыгы a түз сызыгын кесип өтөт. Эми $b \cap a$ чекити Π жарым тегиздигине таандык экендигин далилдешибиз керек. $\alpha < \alpha'$ жана $\alpha' = \gamma$ болгондуктан, $\alpha < \gamma$ болот. Ошондуктан a жана b түз сызыктары c түз сызыгы менен чектелген жана α, β бурчтарын кармап турган Π' жарым тегиздигинде кесилишпейт (тескерисинче ойлосок, анда дагы эле үч бурчтуктун сырткы бурчу жөнүндөгү теоремага карама-каршы келебиз). Теорема далилденди.

Ошентип, V постулат төмөндөгү ырастоого тең күчтүү экен: Берилген $A \notin a$ чекити аркылуу өтүп, берилген a түз сызыгына параллель болгон жалгыз гана түз сызык жашайт.

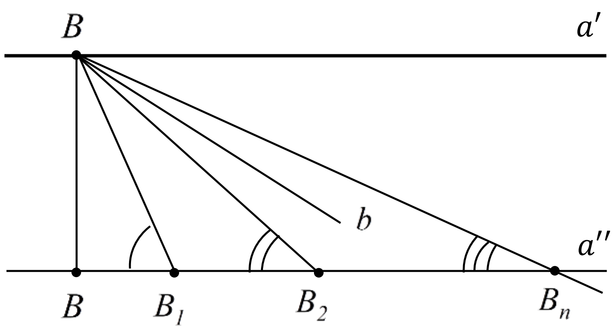
Евклиддин мезгилинен баштап XIX кылымдын акырына чейин V постулатты далилдөө үчүн көптөгөн аракеттер болгон: Прокл (б.э. V кылымы), Омар Хайям (1048-1123-ж.), Валлис (б.э. XVII к.), Саккери жана Ламберт (XVIII к.), Лежандр (1752-1833-ж.) сыяктуу көптөгөн окумуштуулар бул постулатты теорема катары далилдөөнүн үстүндө далалат жасашкан. Бирок, далилдөөнүн авторлору V Постулатка эквиваленттүү болгон сүйлөмдөргө негиздеп далилдөөлөрүн жүргүзүшкөн. Лежандр төмөндөгүдөй Насир-Эддин Тусинин (XIII к.) теоремасын далилдеген.

3-теорема. Эгерде каалагандай үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $2d$ га барабар болсо, анда V Постулат орун алат.

Далилдөө. a түз сызыгы жана $A \notin a$ чекити берилсин. $(AB) \perp a,\ \ a' \perp (AB),\ \ A \in a'$ боло тургандай (AB), a' түз сызыктарын жүргүзөбүз. $a \cap a' = \emptyset$ экендиги белгилүү. Каалагандай башка $A \in b$ түз сызыгы a түз сызыгын (AB) түз сызыгы менен чектелген жана β тар бурчун кармап турган жарым тегиздикте кесип өтө тургандыгын көрсөтөбүз. Бул жарым тегиздикте a түз сызыгында төмөндөгүдөй кесиндилерди удаалаш ченеп коебуз:

$$[BB_1] \cong [AB], [B_1B_2] \cong [AB_1], \ldots, [B_{n-1}B_n] \cong [AB_{n-1}].$$

Ар бир пайда болгон үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы $2d$ га барабар болгондуктан жана ABB_1 үч бурчтугу тең капталдуу экендигинен $\angle BAB_1 = \angle AB_1B = \frac{d}{2}$ келип чыгат. Бирок, $\angle AB_1B$ бурчу AB_1B_2 тең капталдуу үч бурчтугунун сырткы бурчу болуп эсептелинет. Ошондуктан $\angle AB_2B_1 = \frac{d}{4}$ орун алат. Ушул процессти улантуу менен төмөндөгүнү алабыз:



19-сүрөт

$$\angle AB_nB = \frac{d}{2^n} \Rightarrow \angle BAB_n = d - \frac{d}{2^n}.$$

Шарт боюнча $\beta < \alpha$. $\angle BAB_n > \beta$ боло тургандай n санын алууга болот. Анда b түз сызыгы ABB_n үч бурчтугунун A чокусу аркылуу өтүп, анын ички аймагын кесип өтө тургандыгын көрөбүз. Мындан b түз сызыгы a түз сызыгын B жана B_n чекиттеринин арасында жаткан кандайдыр бир чекитте кесип өтө тургандыгы келип чыгат. Теорема далилденди.

Бул теоремага тескери теорема да орун алат.

4-теорема. Эгерде V Постулат орун алса, анда $A \notin a$ чекити аркылуу өтүп, a түз сызыгына параллель болгон жалгыз гана түз сызык жашайт.

Бул теореманын далилдөөсүн окурманга өз алдынча иш катары сунуштайбыз.

Демек, V Постулатка эквиваленттүү болгон дагы бир сүйлөмдү билип алдык.

Саккери-Лежандрдын төмөндөгүдөй эки теоремасын далилдөөсүз келтиребиз:

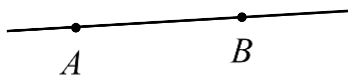
5-теорема. (Саккери-Лежандрдын биринчи теоремасы) Каалагандай үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $2d$ дан чоң болбойт.

6-теорема. (Саккери-Лежандрдын экинчи теоремасы) Эгерде бир үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $2d$ га барабар болсо, анда каалагандай үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $2d$ га барабар болот.

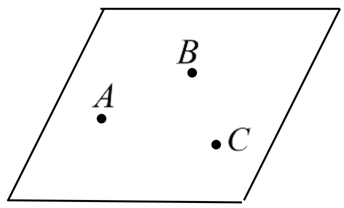
§9. Евклиддик мейкиндик үчүн Гильберттин аксиомалар системасы

1. Гильберттин аксиомалар системасы. Негизги көптүктөр катары: «чекиттердин көптүгү», «түз сызыктардын көптүгү», «тегиздиктердин көптүгү» каралат. Тиешелеш түрдө бул көптүктөрдүн элементтери $A, B, C, \ldots; a, b, c, \ldots; \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ тамгалары менен белгиленет.

Негизги көптүктөрдө үч негизги катыш аныкталат: «таандык катышы» (чекиттин түз сызыкка таандык болушу, чекиттин тегиздикке таандык болушу), «тартип катышы» (же «арасында жатат» катышы), «конгруэнттүүлүк катышы» (кесиндилердин конгруэнттүүлүгү, бурчтардын конгруэнттүүлүгү).



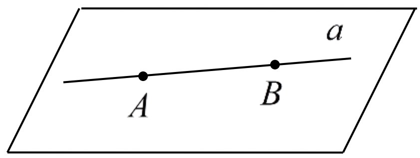
20-сүрөт



21-сүрөт

Негизги катыштар төмөндөгүдөй касиеттерди (аксиомаларды) канааттандырышат.

Аксиомалардын *I* группасынын аксиомалары «таандык» катышынын касиеттерин туюнтушат жана “таандык аксиомалары” деп аталышат.



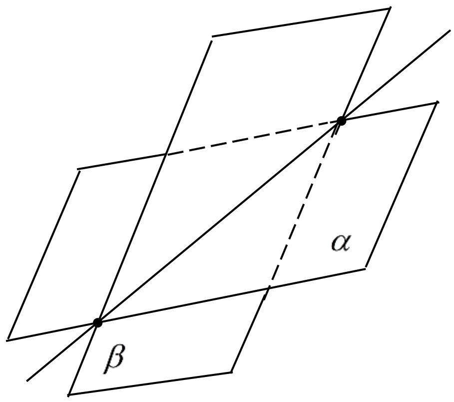
22-сүрөт

***I*₁** Каалагандай эки ар түрдүү чекит аркылуу өтүүчү түз сызык жашайт.

$\boldsymbol{I_2}$ Каалагандай эки ар түрдүү чекит аркылуу өтүүчү бирден көп эмес же жалгыз түз сызык жашайт.

I_3 Ар кандай түз сызыкта жок дегенде эки чекит жашайт. Бир түз сызыкка таандык эмес жок дегенде үч чекит жашайт.

I_4 Бир түз сызыкта жатышпаган каалагандай үч чекит аркылуу өткөн тегиздик жашайт жана ар кандай тегиздикте жок дегенде бир чекит жатат.

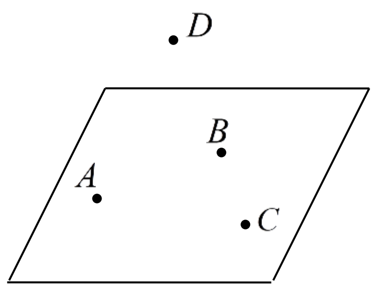


23-сүрөт

I_5 Бир түз сызыкта жатышпаган каалагандай үч чекит аркылуу өтүүчү жалгыз гана тегиздик жашайт.

I_6 Эгерде түз сызыктын эки ар түрдүү чекити тегиздикте жатса, анда ал түз сызыктын бардык чекиттери ушул тегиздикте жатат (бул учурда «түз сызык тегиздикте жатат» деп айтышат, 23-сүрөт).

I_7. Эгерде эки тегиздик жалпы чекитке ээ болушса, анда алар жок дегенде дагы бир жалпы чекитке ээ болушат.



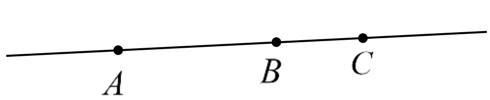
24-сүрөт

I_8. Бир тегиздикте жатышпаган жок дегенде төрт чекит жашайт.

Аксиомалардын II группасы (Тартип аксиомалары)

A, B, C – бир эле түз сызыкка таандык чекиттер болушсун. B чекити A жана C чекиттеринин арасында жатса, анда кыскача $\mu(ABC)$ аркылуу белгилейбиз.

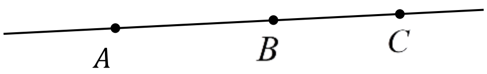
II_1 Эгерде $\mu(ABC)$ болсо, анда A, B, C – бир түз сызыктын ар түрдүү чекиттери болушат жана $\mu(CBA)$.



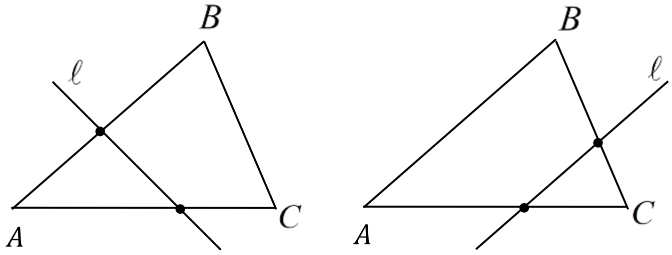
25-сүрөт

II₂ Түз сызыктын каалагандай A жана B чекиттери үчүн $\mu(ABC)$ боло тургандай жок дегенде бир C чекити жашайт.

II₃ Түз сызыктын каалагандай үч ар түрдүү чекиттеринин ичинен бири гана калган экөөнүн арасында жатат.



26-сүрөт



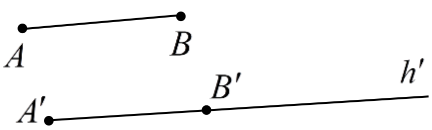
27-сүрөт

Аныктама. $[AB]$ кесиндиси деп A жана B чекиттерин жана алардын арасында жаткан бардык чекиттерди кармап турган көптүктү айтабыз.

II₄ (Паштын аксиомасы) Бир түз сызыкта жатпаган үч ар түрдүү A, B, C чекиттери жана (ABC) тегиздигинде жаткан ℓ түз сызыгы берилген. ℓ түз сызыгы A, B, C чекиттеринин эч бири аркылуу өтпөсүн. Анда, эгерде ℓ түз сызыгы $[AB]$ кесиндиси менен жалпы чекитке ээ болсо, анда бул түз сызык же $[AC]$ кесиндиси менен, же $[BC]$ кесиндиси менен жалпы чекитке ээ болот.

Аксиомалардын III группасы (Конгруэнттүүлүк аксиомалары)

III₁ Эгерде $[AB]$ кесиндиси жана A' чекити башталышы болгон h' шооласы берилген болсо, анда бул шоолада $[AB] \cong [A'B']$ боло тургандай

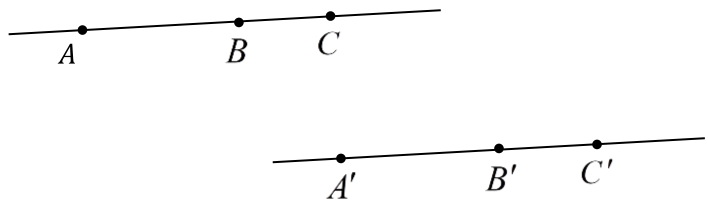


28-сүрөт

$B^{'}$ чекити жашайт.

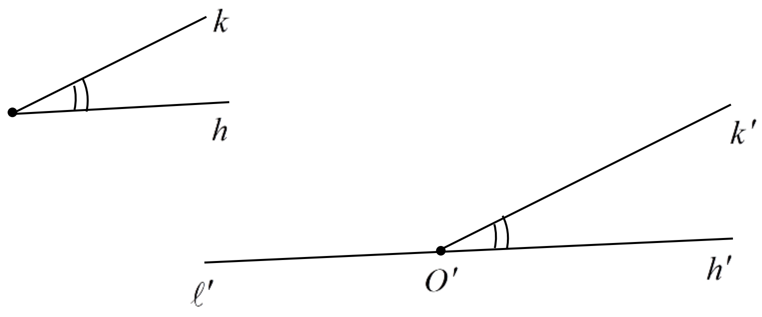
III₂ Эгерде $[A'B'] \cong [AB]$ жана $[A''B''] \cong [AB]$ болсо, анда $[A^{'}B^{'}] \cong [A^{''}B^{''}]$ болот.

III₃ Эгерде $\mu(ABC)$, $\mu(A'B'C')$, $[A'B'] \cong [AB]$ жана $[BC] \cong [B'C']$ болсо, анда $[AC] \cong [A^{'}C^{'}]$ болот.



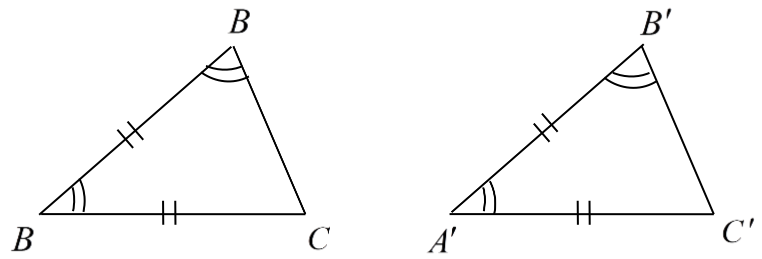
29-сүрөт

III₄ $\angle hk$ бурчу, башталышы O' чекити болгон h' шооласы, бул шооланы кармап турган ℓ' түз сызыгы жана чеги ℓ' түз сызыгы болгон π' жарым тегиздиги берилген болсун. Анда π' жарым тегиздигинде $\angle hk \cong \angle h'k'$ боло тургандай, башталышы O' чекити болгон жалгыз гана $k^{'}$ шооласы жашайт.



30-сүрөт

III₅ Бир түз сызыкта жатышпаган, ар түрдүү A, B, C жана A', B', C' чекиттери берилген. Эгерде $[A'B'] \cong [AB]$, $[AC] \cong [A'C']$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ болсо, анда $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ болот.



31-сүрөт

Аксиомалардын IV группасы. Үзгүлтүксүздүк аксиомалары

IV₁ (Архимеддин аксиомасы) $[AB]$ жана $[CD]$ – каалагандай кесиндилер болушсун. Анда (AB) түз сызыгында төмөндөгүдөй шарттарды канааттандыра тургандай чектүү сандагы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ чекиттердин көптүгү жашайт:

а) $\mu(AA_1A_2), \mu(A_1A_2A_3), \ldots, \mu(A_{n-1}A_{n-2}A_n)$;

б) $[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong \ldots \cong [A_{n-1}A_n] \cong [CD]$;

в) $\mu(ABA_n)$.

IV₂ (Кантордун аксиомасы) ℓ түз сызыгында кесиндилердин чексиз удаалаштыгы берилген: $[A_1B_1], [A_2B_2], \ldots, [A_nB_n]$. Алардын ар бир кийинкиси мурдагы кесиндинин ичинде жатсын:

$$[A_1B_1] \supset [A_2B_2] \supset \ldots \supset [A_nB_n] \supset \ldots$$

жана каалагандай $[CD]$ кесиндиси үчүн $[A_nB_n] < [CD]$ боло тургандай $n \in N$ саны жашасын. Анда ℓ түз сызыгында берилген удаалаштыктын ар бир кесиндисине таандык болгондой M чекити жашайт.

Аксиомалардын V группасы. Параллелдүүлүк аксиомасы.

Каалагандай ℓ түз сызыгы жана бул түз сызыкта жатпаган X чекити берилген болсун. Анда ℓ түз сызыгы жана X чекити менен аныкталган тегиздикте X чекити аркылуу өтүп, ℓ түз сызыгы менен кесилишпөөчү бирден көп эмес түз сызык жашайт.

2. Гильберттин аксиомалар системасынын өзгөчөлүктөрү

Σ' жана Σ'' эки аксиомалар системасын алалы. Эгерде $\Gamma(\Sigma')$ теориясында Σ'' системасынын бардык сүйлөмдөрү туура болсо, ал эми $\Gamma(\Sigma'')$ теориясында Σ' системасынын бардык сүйлөмдөрү туура болсо, анда Σ' жана Σ'' – эквиваленттүү системалар деп аталышат. Бул учурда биз бир эле теорияга ээ болобуз: $\Gamma(\Sigma') = \Gamma(\Sigma'')$. Бул теориянын негизи катары Σ жана Σ' аксиомалар системасынын кайсынысын алышыбыз мааниге деле ээ эмес. Бирок, ыңгайлуу тандалып алынган аксиомалар системасы тиешелүү теорияны түзүүнү практика жүзүндө бир кыйла жеңилдетет.

E_3 мейкиндигинин түзүлүшүн аныктоодо Гильберт негиз катары Евклиддин негиз катары алган E, F, G көптүктөрүн эле алган. Евклидден артыкчылыгы – Гильберт бул көптүктөрдө негизги катыштарды аныктаган жана ушул катыштардын касиеттерин мүнөздөгөн аксиомалардын тизмесин түзгөн. Евклид да, андан башкасы деле математиканын ошол мезгилдеги өнүгүү абалында бул ишти жасай алышмак эмес.

Ошентип, Гильберттин аксиомалар системасы E_3 мейкиндигинин геометриясын Евклид негиздегендей түзүүгө ыңгайлаштырылган.

Гильберттин «Геометриянын негиздери» аттуу китебинин жарыкка чыгышы менен азыркы аксиоматикалык метод менен математикалык түзүлүштөрдүн теориясы жаралган. Ошондуктан бул китеп математиканын тарыхында белгилүү орунду ээлейт.

Бирок, азыркы көз караш менен караганда Гильберттин аксиоматикасы өтө эле татаал жана көлөмдүү болуп көрүнөт. Бизге белгилүү алгебралык түзүлүштөрдүн (группанын, алкактын, талаанын) аксиомалар системалары менен салыштырып көрсөңөр болот.

Гильберттин аксиомалар системасынын дагы бир жетишпеген жагы болуп анын бүгүнкү күндө математикада болуп көрбөгөндөй өзгөчө маанилүү кызмат аткарган вектордук мейкиндик түшүнүгү менен эч кандай байланышпагандыгы эсептелинет. Немец математиги Герман Вейль 1918-жылы E_3 мейкиндигинин түзүлүшүн аныктоо үчүн өзүнүн аксиомалар системасын сунуш кылган. Бул аксиомалар системасы вектордук мейкиндик түшүнүгүнүн кеңири колдонулушуна негизделген.

Евклиддик мейкиндиктин түзүлүшүн аныктоонун башка жолдорун немец математиги Ф. Бахман, француз математиги Г. Шоке сунушташкан. Ф. Бахман окко карата симметрия жана борбордук симметрия түшүнүктөрүнө таянып, геометрияны «симметрияларды эсептөө» катары негиздеген. Г. Шокенин аксиоматикасы параллелдүүлүк, перпендикулярдуулук жана аралык түшүнүктөрүнө негизделет.

Гильберттин аксиомалар системасындагы $\boldsymbol{V}$ параллелдүүлүк аксиомасы калган аксиомаларынан көз каранды эмес экендигин Лобачевский биринчилерден болуп белгилеген: бул аксиоманы өзүнүн тануусу менен алмаштырсак, анда V^* Лобачевскийдин аксиомасына ээ болобуз. $\Sigma' = \Sigma_\Gamma \backslash [V]$ деп белгилесек, анда

$\Sigma_{\Gamma} = \Sigma' \cup \{V^*\}$ аксиомалар системасы – **Лобачевскийдин аксиомалар системасы** болуп эсептелет.

Н.И. Лобачевский жана анын геометриясы менен кийинчерээк таанышасыңар.

3. Кээ бир негизги түшүнүктөрдүн аныктоолоруна токтолобуз.

Аныктама. O – ℓ түз сызыгынын каалагандай чекити болсун. Бул түз сызыктын O чекитинен башка чекиттерин төмөндөгүдөй шарттарды канааттандыра тургандай, эки бош эмес, кесилишпөөчү көптүктөргө ажыратууга болот:

1) O чекити ар түрдүү камтылуучу көптүктөргө таандык болушкан, каалагандай эки чекиттин арасында жатат;

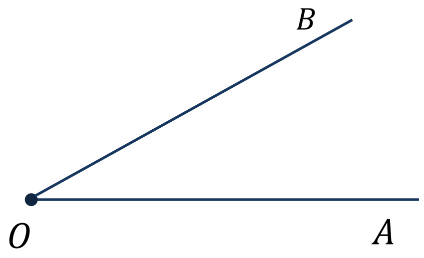
2) O чекити ℓ түз сызыгынын ушул эки камтылуучу көптүктөрүнүн бирине гана таандык болушкан, каалагандай эки чекитинин арасында жатпайт. Камтылуучу көптүктөрдүн ар бири башталышы O чекити болгон **шоола** деп аталат.

32-сүрөт

Аныктама. Берилген тегиздикте жаткан каалагандай ℓ түз сызыгы тегиздиктин ушул түз сызыкта жатпаган чекиттерин төмөндөгүдөй шарттарды канааттандыра тургандай эки бош эмес, кесилишпөөчү камтылуучу көптүктөргө ажыратат: камтылуучу көптүктөрдүн биринде жаткан эки чекитти туташтыруучу кесинди ℓ түз сызыгы менен кесилишпейт; ар түрдүү камтылуучу көптүктөрдөн алынган эки чекитти туташтыруучу кесинди ℓ түз сызыгы менен кесилишет.

Ушундайча аныкталышкан камтылуучу көптүктөрдүн ар бири чеги ℓ түз сызыгы болгон жарым тегиздик деп аталат.

Аныктама. Бурч деп жалпы башталыш чекитине ээ болушкан жана бир түз сызыкта жатышпаган түгөй шоолаларды аташат.



33-сүрөт

$\angle AOB$ бурчунун жактарын кармап турушкан ар бир (OA) жана (OB) түз сызыктары үчүн α жана β аркылуу тиешелеш түрдө чектери (OA) жана (OB) түз сызыктары болгон жана $\angle AOB$ бурчунун экинчи жагын кармап турган жарым тегиздиктерди белгилейбиз. α жана β тегиздиктеринин кесилиши $\angle AOB$ бурчунун ички аймагы деп аталат, ал эми бурчтун ички аймагына таандык болушкан чекиттер жана шоолалар тиешелеш түрдө ички чекиттер жана ички шоолалар деп аталышат.

4. 1-мисал. Үч ченемдүү евклиддик мейкиндик үчүн Гильберттин I группасынын аксиомаларын пайдаланып, төмөндөгү ырастоолорду далилдегиле.

а) Эки түз сызык бирден көп эмес жалпы чекитке ээ болушат;

б) Каалагандай түз сызык жана анда жатпаган чекит аркылуу жалгыз гана түз сызык өтөт;

в) Каалагандай эки кесилишүүчү түз сызык аркылуу жалгыз гана тегиздик өтөт;

г) Эгерде эки ар түрдүү тегиздиктер жалпы чекитке ээ болушса, анда алар түз сызык боюнча кесилишет.

Чыгаруу. г) α жана β тегиздиктерин карайбыз. $\alpha \cap \beta = \{A\}$ болсун. Анда I_7 аксиомасынан бул тегиздиктер дагы бир B жалпы чекитине ээ боло тургандыгы келип чыгат. I_1 аксиомасынан A жана B чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызык жашай тургандыгын көрөбүз. I_6 аксиомасынын негизинде $a = (AB)$ түз сызыгы α тегиздигине да, β тегиздигине да таандык болот.

Эгерде α жана β тегиздиктери жок дегенде бир жалпы C чекитине ээ болушса жана C чекити α түз сызыгында жатпаса, анда I_5 аксиомасынын негизинде бул тегиздиктер дал келишет, себеби алар бир түз сызыкта жатышпаган A, B, C үч жалпы чекитине ээ болуп жатышат. Бирок, шарт боюнча α жана β – ар түрдүү тегиздиктер. Демек, алар a түз сызыгынын чекиттеринен башка жалпы чекитке ээ болушпайт.

2-Мисал. Гильберттин I жана II группаларынын аксиомаларын пайдаланып төмөндөгү ырастоону далилдегиле: кандай гана эки чекитти албайлы, алардын арасында жатуучу жок дегенде бир чекит табылат.

Чыгаруу. Каалагандай эки A жана B чекиттери берилсин. I_3 аксиомасы боюнча (AB) түз сызыгында жатпаган D чекити жашайт. II_2 аксиомасы боюнча $\mu(ADE)$ боло тургандай E чекити жашайт, $\mu(EBF)$ боло тургандай F чекити табылат. Бир түз сызыкта жатышпаган A, B, E чекиттерин жана (DF) түз сызыгын карайлы. (DF) түз сызыгы $[AE]$ кесиндисин кесип өтөт. Бирок $[BE]$ кесиндиси менен кесилишпейт. Демек, II_4 (Паштын аксиомасы) аксиомасы боюнча (DF) түз сызыгы $[AB]$ кесиндисин кандайдыр бир C чекитинде кесип өтөт. C –изделүүчү чекит, себеби $C \in [AB]$ жана $\mu(ACB)$.

Тапшырмалар

1. Гильберттин I группасынын аксиомаларын гана колдонуп, ар кандай тегиздикте бир түз сызыкка таандык болушпаган жок дегенде үч чекит жата тургандыгын далилдегиле.

2. Гильберттин I, II группаларынын аксиомаларын гана пайдаланып, кесиндинин ички чекиттеринин көптүгү бош эмес экендигин далилдегиле.

3. Чектүү сандагы элементтерди кармаган көптүктө Гильберттин I группасынын аксиомаларынын интерпретациясын түзгүлө.

4. Эгерде $ABCD$ томпок төрт бурчтугунун A жана B бурчтары тик бурчтар болушса жана $[AD] \cong [BC]$ болсо, анда аны Саккеринин төрт бурчтугу деп аташат (мында $[AB]$ – төмөнкү негизги, $[DC]$ – жогорку негизги). Абсолюттук геометриянын (б.а. мектеп курсунун геометриясынын) аксиомаларын пайдаланып, Саккеринин төрт бурчтугунун жогорку негизиндеги ички бурчтары конгруэнттүү экендигин далилдегиле жана бул бурчтар кең бурч боло алышпай тургандыгын көрсөткүлө.

§10. Лобачевский жана анын геометриясы. Лобачевскийдин аксиомасы

1. Н.И. Лобачевский жөнүндө кыскача маалымат. Николай Иванович Лобачевский 1792-жылы Россиянын Нижний Новгород шаарында туулган. Ал Казань университетин бүтүргөн. Эң мыкты бүтүрүүчү катары Лобачевскийди Казань университетинде окутуучулук кызматка калтырышкан. Профессор болгондон кийин да, ал ушул университетинде иштеген жана 19 жыл бою бул университетте ректор катары эмгектенген. 1826-жылы Н.И. Лобачевский Казань университетинин физика-математика факультетине «Геометриянын принциптери жөнүндө пикирлер» аттуу докладын сунуштаган. 1829-жылы Казань университетинин илимий макалалар жыйнагында анын «Геометриянын башталышы жөнүндө» аттуу макаласы жарык көргөн. Бул Н.И. Лобачевскийдин жаңы геометрия боюнча басылган биринчи илимий эмгеги болгон. Кийинки жылдары ал жаңы геометрия боюнча өзүнүн бир топ чыгармаларын басмадан чыгарган.

2. Лобачевскийдин геометриясы. Н.И. Лобачевский өзүнүн эмгектеринде биринчи болуп Евклиддин V Постулатын калган аксиомалардан келтирип чыгаруу мүмкүн эместиги жөнүндөгү ырастоону негиздеген. Прокл, Хаям, Валлис, Ламберт, Саккери, Лежандрлар $\boldsymbol{V}$ Постулаты далилдөөнүн үстүндө иштешкен болсо, Н.И. Лобачевский $\boldsymbol{V}$ постулатты төмөндөгүдөй сүйлөм (аксиома) менен алмаштырат.

3. V^* **– Лобачевскийдин аксиомасы.** a түз сызыгы жана $A \notin a$ чекити берилген болсун. Анда A чекити жана a түз сызыгы аркылуу өткөн тегиздикте A чекити аркылуу өтүп, a түз сызыгы менен кесилишпей турган экиден кем эмес түз сызыктар жашайт.

Ушул аксиоманы жана Евклиддин $\boldsymbol{V}$ постулатынан башка аксиомаларын пайдаланып Лобачевский өзүнүн геометриясын негиздеген, тригонометриялык формуларын тапкан жана анализдин геометрияга колдонулушун көрсөткөн. Бул жаңы геометриясын Лобачевский “элестетилген геометрия” (воображаемая) деп атаган, кийин аны Лобачевскийдин геометриясы же гиперболикалык геометрия деп атай башташкан.

Өзүнүн геометриясында эч кандай карама-каршылык жок экендигин көрсөтүү максатында Лобачевский геометриясынын аналитикалык изилдөөлөрүн жүргүзгөн жана бул маселени (карама-каршылыксыздык маселесин) өз мезгилинен көзү менен караганда дээрлик канааттандырарлык деңгээлде чечкен.

Лобачевский өзүнүн геометриясынын математикалык анализде колдонулууга боло тургандыгын көрсөткөн. Лобачевскийдин мезгилине чейин чыгарууга мүмкүн болбогон көптөгөн интегралдарды чыгарган.

Анын геометриясынын кээ бир фактыларына токтолобуз. Бул фактылар Лобачевскийдин аксиомасы деп аталган сүйлөмдүн түздөн-түз натыйжалары болуп эсептелинет.

1-теорема. Каалагандай ABC үч бурчтугунун ички бурчтарынын суммасы $2d$ дан кичине болот.

Далилдөө. Саккери-Лежандрдын 1-Теоремасы боюнча ABC үч бурчтугунун ички бурчтарынын суммасы $\angle A + \angle B + \angle C \leq 2d$ экендиги белгилүү. Эгерде $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$ болсун деп болжолдосок, анда V постулат орун алыш керек. Бул болсо, V^* аксиомасына карама-каршы келет. Демек, $\angle A + \angle B + \angle C < 2d.$

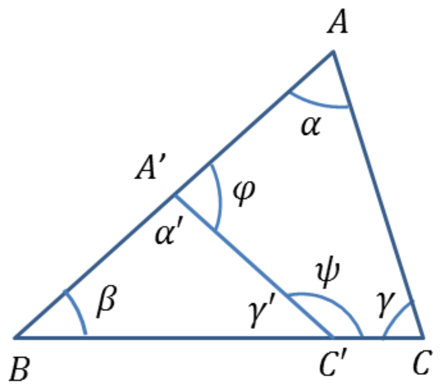
Натыйжа. Ар кандай жөнөкөй төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $4d$ дан кичине болот.

Далилдөө. $ABCD$ төрт бурчтугунун $[AC]$ кесиндиси эки үч бурчтукка ажыратат: ABC жана ACD. ABC үч бурчтугу үчүн $\angle A + \angle B + \angle C < 2d$ барабарсыздыгы орун алат, ал эми ACD үч бурчтугу үчүн $\angle A + \angle C + \angle D < 2d$ барабарсыздыгы орун алат. Анда $ABCD$ төрт бурчтугу үчүн төмөндөгүнү алабыз:

$$(\angle A + \angle B + \angle C)_{ABC} + (\angle A + \angle C + \angle D)_{ACD} < 2d + 2d = 4d.$$

2-теорема. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы туруктуу эмес, б.а. ар түрдүү үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы ар түрдүү чоңдуктар болушат.

Далилдөө. Каршысынан далилдейбиз. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы туруктуу деп болжолдойлу.



34-сүрөт

A' жана C' – ABC үч бурчтугунун $[AB]$ жана $[BC]$ жактарынын ички чекиттери болсун (34-сүрөт). Болжолдообуз боюнча

$$\angle A' + \angle B + \angle C' = \angle A + \angle B + \angle C, \text{ б.а.}$$

$$\alpha' + \beta + \gamma' = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \alpha' + \gamma' = \alpha + \gamma \qquad (1)$$

$$\big((\alpha' + \varphi) = 2d, \gamma' + \psi = 2d\big) \Rightarrow (\alpha' + \gamma') + (\varphi + \psi) = 4d \qquad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow \alpha + \gamma + \varphi + \psi = 4d$ экендигин көрөбүз, б.а. $AA'C'C$ жөнөкөй төрт бурчтугунун ички бурчтарынын суммасы $4d$ га барабар болот. Бул болсо 1-Теореманын натыйжасына карама-каршы келет. Демек, $\angle A' + \angle B + \angle C' \neq \angle A + \angle B + \angle C$, б.а. ABC жана $A'BC'$ үч бурчтуктарынын ички бурчтарынын суммалары барабар болушпайт. Теорема далилденди.

3-теорема. Эгерде ABC үч бурчтугунун үч бурчу $A'BC'$ үч бурчтугунун тиешелеш үч бурчуна конгруэнттүү болушса, анда бул эки үч бурчтук конгруэнтүү болушат.

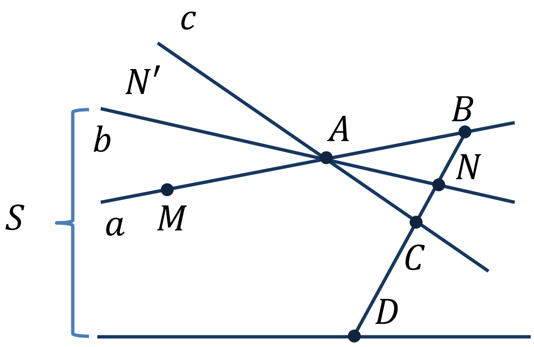
4-теорема. a жана a' – бир тегиздикте жатышкан жана кесилишпөөчү түз сызыктар болушсун, $A, B, C \in a$, $\mu(ABC)$

болсун, A', B' – A жана B чекиттеринин a' түз сызыгындагы (тиешелеш түрдө) ортогоналдык проекциялары болушсун. Анда $\angle A'AC < \angle B'BC$ болот.

Үчүнчү жана төртүнчү теоремалардын далилдөөлөрүн окурманга өз алдынча иш катары сунуштайбыз.

5-теорема. Тегиздикте a түз сызыгы жана $A \notin a$ чекити берилген болсун. Бул тегиздикте A чекити аркылуу өтүп, a түз сызыгы менен кесилишпөөчү чексиз көп түз сызыктар жашайт.

Далилдөө. Лобачевскийдин аксиомасы боюнча A чекити аркылуу өтүп, a түз сызыгы менен кесилишпөөчү эки b жана c түз сызыктары жашайт (35-сүрөт). a түз сызыгы c түз сызыгы менен чектелгшен жарым тегиздиктердин биринде жатат жана жарым тегиздик b түз сызыгын $[AK)$ шооласы боюнча кесип өтөт. $[AK)$ шооласынын толуктоочу шооласында кандайдыр бир $B \neq A$ чекитин алабыз. B чекити жана a түз сызыгы c түз сызыгы менен чектелген ар түрдүү жарым тегиздиктерде жатышат. Демек, эгерде $D \in a$ болсо, анда $[BD] \cap c = C$, б.а. $[BD]$ кесиндиси c түз сызыгы менен кесилишет.

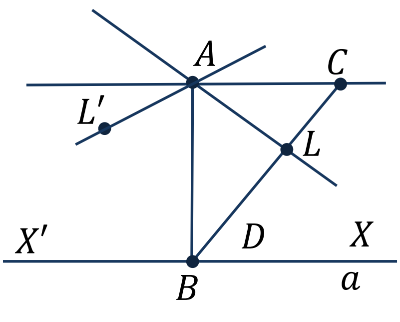


35-сүрөт

N – ушул $[BD]$ кесиндисинин ички чекити болсун. $(AN) \cap a = \emptyset$ деп ырастайбыз. Каршысынан болжолдойлу: $(AN) \cap a = S$ болсун дейли. $[AN)$ шооласы c түз сызыгы менен чектелген жана B чекитин кармап турган жарым тегиздикте жатат жана бул жарым тегиздик a түз сызыгы менен кесилишпейт. Ошондуктан, $S \notin [AN)$ болот. Демек, S чекити $[AN)$ шооласынын толуктоочу шооласында, б.а. $[AN)'$ шооласында жатат.

Эми NDS үч бурчтугу менен b түз сызыгына Паштын аксиомасын колдонолу. b түз сызыгы бул үч бурчтуктун бир дагы чокусу аркылуу өтпөйт, $[NS]$ жагын кесип өтөт, $[ND]$ жагы менен кесилишпейт. Демек, b түз сызыгы $[DS]$ жагы менен кесилишет. Мындан $a \cap b \neq \emptyset$ экендиги келип чыгат. Бул болсо шартка карама-каршы келет. Демек, $(AN) \cap a = \emptyset$ экен, ал эми $[BC]$ кесиндиси чексиз көп ички чекиттерди кармап тургандыктан (AN) сыяктуу сызыктар да чексиз көп болот. Теорема далилденди.

4. Лобачевскийдин параллель түз сызыктары. Тегиздикте a түз сызыгын жана $A \notin a$ чекитин алабыз. A чекити аркылуу $(AB) \perp a$ $(B \in a)$ жана $(AC) \perp (AB)$ түз сызыктарын жүргүзөбүз (36-сүрөт). 5-теорема боюнча A чекити аркылуу өтүп, a түз сызыгы менен кесилишпей турган чексиз көп түз сызыктардын көптүгү жашайт. Бул көптүккө (AC) түз сызыгы да таандык болот. Эгерде түз сызык A чекити аркылуу өтчө жана ал $\angle BAC$ тик



36-сүрөт

бурчун шоола боюнча кесип өтсө, анда ал түз сызык $[BC]$ кесиндисин да кесип өтөт. $[BC]$ кесиндисинин чекиттерин төмөндөгүдөй эреже боюнча эки K_1 жана K_2 класстарына ажыраталы:

$$Q \in K_1 \Leftrightarrow Q \in [BC] \wedge (AQ) \cap a \neq \emptyset,$$

$$Q \in K_2 \Leftrightarrow Q \in [BC] \wedge (AQ) \cap a = \emptyset.$$

$[BC]$ кесиндисинин ар бир чекити бир гана класска таандык боло тургандыгын көрдүк, анын үстүнө $B \in K_1$, $C \in K_2$ болот. K_1 классы B чекитинен башка дагы чекиттерди кармап турат: $\angle BAC$ бурчунун D ички чекитин алалы жана D чекити a түз сызыгында жатсын. Анда $[AD) \cap [BC] = Q \in K_1$ орун алат.

K_2 классы да C чекитинен айырмалуу чекиттерди кармап тургандыгын көрсөтөлү. $\boldsymbol{V}^*$ аксиомасы боюнча a түз сызыгы менен кесилишпей турган (AF) $\big((AF) \neq (AC)\big)$ түз сызыгы жашайт. Эгерде $[AF)$ шооласы $\angle BAC'$ бурчунун (мында $\angle BAC'$ – $\angle BAC$ бурчу менен жандаш бурч) ички шоласы болсо, анда $\angle BAC$ бурчунун ордуна $\angle BAC'$ бурчун карайбыз.

$Q_0 \in K_1$, $Q_0 \neq B$ жана $F_0 \in K_2$ болсун дейли. Анда $\mu(BQ_0F_0)$, б.а. Q_0 чекити B жана F_0 чекиттеринин арасында жатат. Каршысынан болжолдойлу, б.а. Q_0 чекити B жана F_0 чекиттеринин арасында жатпасын. Анда $Q_0, F_0 \in [BC]$ жана $Q_0 \neq F_0$ болгондуктан, $\mu(BF_0Q_0)$ орун алат. Бирок $[AQ_0) \cap a = D_0$ (D_0 чекити жашайт, себеби $Q_0 \in K_1$). (AF_0) түз сызыгы BAD_0 үч бурчтугунун F_0 ички чекити аркылуу өтүп жатат, демек, бул түз сызык $[BD_0]$ жагын кесип өтөт, б.а. a түз сызыгы менен кесилишет. Бирок, $F_0 \in K_2 \Rightarrow (AF_0) \cap a = \emptyset$. Карама-каршылыкка келдик.

Ошентип, $[BC]$ кесиндисинин чекиттерин жогорудагыдай эки K_1, K_2 класстарына ажыратуу Дедекиндин аксиомасынын шарттарын канааттандырат экен. Демек, биз $[BC]$ кесиндисинде Дедекиндик кесилишке ээ болдук. L чекити ушул кесилишти ишке ашырган бөлүү чекити болсун. $L \in K_2$ экендигин көрсөтөбүз. Каршысынан болжолдойлу. $L \in K_1$ болсун деп алалы. Анда $(AL) \cap a = D$ болот, $D \in [BX)$, $[BX) - a$ түз сызыгы менен чеги (AB) түз сызыгы болгон жана C чекитин кармап турган жарым тегиздиктин кесилиши. (Эгерде D чекити $[BX)$ шооласынын толуктоочу шооласында жатсын деп алсак, анда үч бурчтуктун сырткы бурчу жөнүндөгү теоремага карама-каршы келебиз).

$P \in [BX)$, $\mu(BDP)$ шарттарын канааттандырган P чекитин алабыз. Анда $(AP) \cap [LC] = P_0$, $\mu(LP_0C)$ болот. Демек, дедекиндик кесилишти ишке ашырган L чекитинин касиети боюнча $P_0 \in K_0$ болот. Бул болсо, $(AP_0) \cap a \neq \emptyset$ экендигине карама-каршы келет. Мындан $L \in K_2$ келип чыгат.

(AB) түз сызыгына карата (AL) түз сызыгына симметриялуу болгон (AL') түз сызыгын алабыз (AL) жана (AL') түз сызыктары төмөндөгүдөй касиетке ээ болушат:

а) $(AL) \cap a = \emptyset$, $(AL') \cap a = \emptyset$;

б) Борбору A чекити болгон түз сызыктардын боосунун (AL) жана (AL') түз сызыктары кесилишкенде пайда болгон вертикалдык бурчтардын биринин ичинде жатуучу түз сызыктары a түз сызыгын кесип өтүшөт ал эми экинчи вертикалдык бурчтардын ичинде жатуучу түз сызыктары a түз сызыгы менен кесилишпейт.

а) жана б) касиеттерине ээ болгон (AL) жана (AL') түз сызыктарын Лобачевский берилген a түз сызыгына параллель түз сызыктар деп аталган, $\angle BAL$ бурчун – a түз сызыгына карата A чекитиндеги параллелдүүлүк бурчу деп атаган. Демек, Лобачевскийдин тегиздигинде параллелдүүлүк бурчу дайыма тар бурч болот.

(AL) түз сызыгын a түз сызыгына $[BX)$ багытында параллель, ал эми (AL') түз сызыгын a түз сызыгына $[BX')$ багытында параллель деп аташат (мында $[BX')$ – $[BX)$ шооласынын толуктоочу шооласы).

Ошентип, ар бир $A \notin a$ чекити аркылуу a түз сызыгына параллель болгон эки түз сызык өтөт (a түз сызыгындагы эки багыттын ар бирине параллель болгон бирден түз сызык өтөт).

Эгерде эки түз сызык бир тегиздикте жатышса, кесилишпесе жана параллель да болушпаса, анда аларды таралуучу түз сызыктар деп аташат. Демек, $A \notin a$ чекити аркылуу a түз сызыгы менен таралуучу болгон чексиз көп түз сызыктар өтүшөт.

Лобачевскийдин алган илимий жыйынтыктары кадимки Евклиддин геометриясынын идеясы менен тарбияланган окумуштуулар үчүн өзгөчө сезилген жана алардын көпчүлүгү Лобачевскийдин геометриясын түшүнө алышкан эмес.

Н.И. Лобачевский менен бир эле мезгилде параллель түз сызыктардын теориясы боюнча К.Гаусс, Я. Бояи дагы эмгектенишкен. Гаусс өзүнүн параллель түз сызыктардын теориясы боюнча эч бир эмгегин жарыкка чыгарган эмес (түшүнбөй коюшат деп кооптонгон). Гаусс дүйнөдөн кайткандан кийин гана бул багыттагы анын жөнөкөй теоремалары жазылган кагаздар табылган.

Я. Бояи 1832-жылы өзүнүн “Аппендикс” (“Тиркеме”) атту эмгегин басмадан чыгарган. Бояи үч жыл мурун Лобачевскийдин эмгеги басылып чыкканын билген эмес. Ал, Бояи өзүнүн атасы – Ф.Бояи тарабынан жазылган математика боюнча окуу китебине тиркеме катары жогоруда аталган эмгегин жарыкка чыгарган. Бул эмгекте ал Лобачевский негиздеген теорияны бир кыйла өркүндөтүлгөн түрдө баяндаган.

Лобачевскийдин изилдөөлөрү өзү кайтыш болгондон кийин кеңири таанылды. Көрсө, Лобачевскийдин геометрия боюнча эмгектери табият таануунун өнүгүүсүндөгү жаңы этап болуп эсептелет экен. Бекеринен XIX кылымдын (англиялык) математиги Клиффорд Лобачевскийди “Геометриянын Коперниги” деп атаган эмес.

Тапшырмалар

1. Лобачевскийдин тегиздиги үчүн Кели-Клейндин моделинде кесинди жана шоола берилген. Берилген шоолада берилген кесиндини ченеп койгула.
2. Лобачевскийдин тегиздиги үчүн Кели-Клейндин моделинде кесинди берилген. Ушул кесиндинин орто чекитин тапкыла.
3. Лобачевскийдин тегиздиги үчүн Кели-Клейндин моделинде берилген эки параллель (таралуучу) түз сызыктардын симметрия огун түзгүлө.
4. Лобачевскийдин тегиздиги үчүн Кели-Клейндин моделинде чекит жана ал аркылуу өтпөгөн түз сызык берилген. Ушул түз сызыкка карата берилген чекитке симметриялуу болгон чекитти түзгүлө.
5. Лобачевскийдин тегиздиги үчүн Пуанкаренин моделинде үч чекит берилген. Чокулары ушул берилген чекиттер боло тургандай үч бурчтукту түзгүлө.

§11. Кесиндинин узундугу, анын жашашы жана жалгыздыгы

L аркылуу бардык кесиндилердин көптүгүн, ал эми R_+^* аркылуу бардык оң чыныгы сандардын көптүгүн белгилейбиз.

Аныктама. Эгерде төмөндөгү үч аксиоманы канааттандыра тургандай $l: L \to R_+^*$ чагылтуусу аныкталган болсо:

1) $[AB] \cong [A'B'] \Rightarrow \ell([AB]) = \ell([A'B'])$;

2) $\mu(ABC) \Rightarrow \ell([AB]) + \ell([BC]) = \ell([AC])$;

3) $\exists [PQ] \in L{:}\ell([PQ]) = 1$,

анда L көптүгүндө кесиндилерди ченөө аныкталган деп айтышат.

Биринчи аксиома кесиндинин узундугунун кыймылда инварианттуу экендигин (өзгөрбөй тургандыгын) түшүндүрөт. Экинчи аксиома ℓ чагылтуусунун аддитивдүүлүгүн көрсөтөт. Үчүнчү аксиоманы канааттандырган $[PQ]$ кесиндиси жана ага конгруэнттүү болгон каалаган кесинди "сызыктуу бирдик" же "бирдик кесинди" деп аталат. $\ell([AB])$ оң саны $[AB]$ кесиндисинин узундугу деп аталат.

$f: L \to R_+^*$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$\forall [AB] \in L{:}\, f([AB]) = |\overrightarrow{AB}|. \tag{1}$$

Ушул f чагылтуусу жогорудагы 1)-3) аксиомаларын канааттандыра тургандыгын көрсөтөбүз.

1) $[AB] \cong [CD]$ болсун. Анда $[AB]$ кесиндисин $[CD]$ кесиндисине өткөрө турган ∂ кыймылы жашайт. Бул кыймылды V вектордук мейкиндигинин (V – евклиддик үч ченемдүү мейкиндиктин которуу-ларынын мейкиндиги) кандайдыр бир φ

ортогоналдык өзгөртүүсү жаратат жана $\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CD}$ орун алат. φ өзгөртүүсү ортогоналдык өзгөртүү болгондуктан, ал V мейкиндигинин каалаган векторунун узундугун сактайт, б.а. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ болот. Ошентип, $[AB] \cong [CD] \Rightarrow f([AB]) = f([CD])$ экендигин көрдүк. Тескерисинче, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Rightarrow [AB] \cong [CD]$ келип чыгат.

2) $\mu(ABC)$ болсун, б.а. B чекити A жана C чекиттеринин арасында жатсын. Анда

$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}, 0 < t < 1$ орун алат. Мындан

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (1 - t)\overrightarrow{AC}$$

экендигин көрөбүз. Анда $|\overrightarrow{AB}| = t|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{BC}| = (1 - t)|\overrightarrow{AC}|$ барабардыктарынан $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$ келип чыгат. Демек,

$\mu(ABC) \Rightarrow f([AB]) + f([BC]) = f([AC])$.

3) $|\vec{a}_0| = 1$, б.а. $\vec{a}_0$ бирдик векторун алалы. P чекитин тандап алсак (б.а. бекемдеп койсок), анда $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}_0$ боло тургандай Q чекитин табабыз. Мындан $|\overrightarrow{PQ}| = 1$, б.а. $f([PQ]) = 1$ келип чыгат.

Ошентип, $f: L \to R_+^*$ чагылтуусу 1)-3) аксиомаларды канааттандырат экен.

Эми $l: L \to R_+^*$ чагылтуусу дагы 1)-3) аксиомаларды канааттандырган чагылтуу болсун дейли. f жана ℓ чагылтууларынын дал келише тургандыгын далилдейбиз, б.а. $\forall[AB] \in L: \ell([AB]) = f([AB])$ экендигин көрсөтөбүз.

Адегенде d түз сызыгында жаткан M, N, K чекиттерин алалы, $\vec{a}$ – бул түз сызыктын багыттоочу вектору болсун. M, N, K чекиттери

$$\overrightarrow{MN} = \alpha\vec{a}, \overrightarrow{MK} = \beta\vec{a}, 0 < \alpha < \beta \tag{2}$$

шарттарын канааттандырган чекиттер болушсун. Анда $\overrightarrow{MN} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{MK}$ $\left(0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1\right)$ орун алат. Демек, N чекити M жана K чекиттеринин арасында жатат, б.а. $\mu(MNK)$ катышына ээ болдук.

Каалагандай $[AB]$ кесиндисин алабыз. Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:

1-учур. $f([AB]) = 1$. Анда $\overrightarrow{AB}$ – бирдик вектор болот, ошондуктан $[AB] \cong [PQ]$. Ал эми ℓ чагылтуусу 1)-3) аксиомаларды канааттандыргандыктан, $\ell([AB]) = 1$ болот.

2-учур. $f([AB]) = \frac{1}{q}$, q – бирден чоң натуралдык сан болсун. (AB) түз сызыгында $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA_2} = \ldots = \overrightarrow{A_{q-1}A_q}$ боло тургандай $A, A_1 = B,\ A_2, \ldots, A_q$ чекиттерин алабыз. (2) барабардыктарды пайдаланып, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$[AA_q] = [AB] + [BA_2] + \ldots + [A_{q-1}A_q]. \tag{a}$$

Мында $\overrightarrow{AA_q} = q \cdot \overrightarrow{AB}$ болгондуктан,

$$f([AA_q]) = |q \cdot \overrightarrow{AB}| = q|\overrightarrow{AB}| = q \cdot \frac{1}{q} = 1$$

келип чыгат.

1-учурду эске алсак, анда $f([AA_q]) = 1$ болот. ℓ чагылтуусу 2) аксиоманы канааттандыргандыктан жана (а) барабардыгынын оң жагындагы кесиндилер конгруэнттүү болушкандыктан

$$\ell([AA_q]) = q \cdot \ell([AB])$$

орун алат. Мындан $\ell([AB]) = \frac{1}{q} = f([AB])$ келип чыгат.

3-учур. $f([AB]) = \frac{p}{q}$, p, q – натуралдык сандар.

(AB) түз сызыгында

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \ldots = \overrightarrow{B_{p-1}B_p}$$

шартын канааттандыра тургандай $B_1, B_2, \ldots, B_p = B$ чекиттерин карайбыз.

$$[AB] = [AB_1] + [B_1B_2] + \ldots + [B_{p-1}B_p] \quad (б)$$

шарты орун алат жана барабардыктын оң жагындагы кошулуучулар – конгруэнттүү кесиндилер.

$\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{p}\overrightarrow{AB}$ болгондуктан, $f([AB_1]) = \frac{1}{q}$ болот. 2-учурду эске алсак дагы $\ell([AB_1]) = \frac{1}{q}$ келип чыгат. Бирок, (б) барабардыгын эске алуу менен

$$\ell([AB]) = p\ell([AB_1])$$

барабардыгына ээ болобуз. Демек,

$$\ell([AB]) = \frac{p}{q} f([AB]).$$

4-учур. $f([AB]) = \alpha$ – иррационалдык сан. α саны үчүн кеми менен алынган ондук жакындаштыруулардын $\{u_k\}$ удаалаштыгын жана ашыгы менен алынган ондук жакындаштыруулардын алабыз $\{u'_k\}$ удаалаштыгын түзүп алабыз. Эгерде $u_k = n, n_1, n_2, \ldots, n_k$ болсо, анда $u'_k = n, n_1, n_2, \ldots, (n_k + 1)$ болот. $\overrightarrow{AQ}$ аркылуу $\overrightarrow{AB}$ векторунун ортун белгилейбиз. (AB) түз сызыгында $\overrightarrow{AB_k} = u_k\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AB'_k} = u'_k\overrightarrow{AQ}$ шартын канааттандыра тургандай B_k жана B'_k чекиттерин карайбыз. $\vec{AB} = \alpha\vec{AQ}$, $u_k < \alpha$ болгондуктан, (2) барабардыкты эске алсак, $\mu(AB_kB)$ келип чыгат. Ушуга эле окшош $\mu\left(ABB_k'\right)$ экендигин көрөбүз. Ошондуктан

$$\ell([AB]) = \ell([AB_k]) + \ell([B_kB]),$$
$$\ell\left(\left[AB_k'\right]\right) = \ell([AB]) + \ell\left(\left[BB_k'\right]\right) \qquad (3)$$

келип чыгат. $f([AB_k]) = u_k$ жана $f([AB'_k]) = u'_k$ болгондуктан, 3-учур боюнча төмөндөгүлөрдү алабыз:

$$\ell([AB_k]) = u_k, \ell([AB'_k]) = u'_k,$$
$$(3) \Rightarrow u_k < \ell([AB]) < u'_k.$$

Ошентип, α жана $\ell([AB])$ сандары ондук жакындашуулардын бирдей эле $\{u_k\}$ жана $\{u'_k\}$ удаалаштыктарына ээ болушат. Ошондуктан $\ell([AB]) = \alpha = f([AB])$.

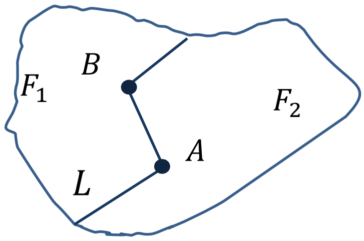
$[AB]$ каалагандай кесинди болгондуктан, $\ell([AB]) = f([AB])$ шартынан ℓ жана f чагылтуулары дал келише тургандыгы келип чыгат. Ошентип, эгерде $[PQ]$ кесиндиси $\vec{PQ}$ вектору орт (бирдик вектор) боло тургандай кесинди болсо, анда 1) - 3) аксиомаларды канааттандыра тургандай жалгыз гана f чагылтуусу жашайт. Бул чагылтууда $f([AB]) = |\vec{AB}|$ болот.

Демек, кесиндинин узундугунун жашашы жана жалгыздыгы далилденди.

§12. Көп бурчтуктун аянты, жашашы жана жалгыздыгы

Тегиздикте кандайдыр бир F фигурасын алалы. $L \subset F$, L сынык сызыгы $F \backslash L$ фигурасын эки F_1, F_2 бөлүктөрүнө бөлөт.

F фигурасы $F_1' = F_1 \cup L$ жана $F_2' = F_2 \cup L$ фигураларына ажырайт деп айтышат жана бул фигураны F_1' жана F_2' фигураларынын суммасы деп аташат, $F = F_1' + F_2'$ көрүнүшүндө жазышат (37-сүрөт).



37-сүрөт

Чектүү сандагы үч бурчтуктарга ажыратууга мүмкүн болгон жалпак фигураны көп бурчтук деп аташат. Эгерде көп бурчтуктун чеги өзгөчө чекиттерге ээ болбогон бир туюк сынык сызык болсо, анда аны жөнөкөй көп бурчтук деп аташат.

$\mathcal{M}$ аркылуу евклиддик тегиздиктеги бардык көп бурчтуктардын көптүгүн белгилейли.

Аныктама. Эгерде төмөндөгүдөй шарттарды (аксиомаларды) канааттандыра тургандай $s: \mathcal{M} \to R_+^*$ чагылтуусу аныкталган болсо, анда көп бурчтуктардын аянттарын ченөө аныкталган деп айтышат:

1) $F \cong F' \Rightarrow s(F) = s(F')$ (кыймылда көп бурчтуктун аянтынын инварианттуулук шарты);

2) $F = G + H \Rightarrow s(F) = s(G) + s(H)$ (s функциясынын аддитивдүүлүк шарты);

3) $s(P_0) = 1$, мында P_0 – жактары бирдик кесиндилери болгон квадрат.

$s(F)$ оң саны F көп бурчтугунун өлчөмү же аянты деп аталат.

1-теорема. Эгерде $s(F)$ функциясы жашаса, анда жактарынын узундуктары x жана y болгон P тик бурчтугунун аянты төмөндөгүдөй аныкталат:

$$s(P) = xy. \tag{1}$$

Далилдөө. $s(F)$ функциясы жашайт деп алалы да бул функцияны тегиздиктеги бардык тик бурчтуктардын $\mathcal{M}_0$ көптүгүндө карайлы.

Анда $s(P)$ – x жана y терден (P тик бурчтугунун жактарынан) көз каранды болгон функция болот жана ал оң маанилерди гана кабыл алат: $s(P) = f(x, y) > 0$. Бул функция төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот:

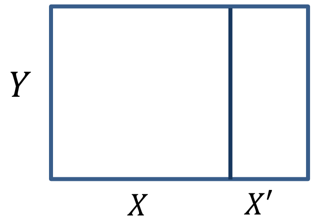
$$f(x, y) = f(y, x), \tag{а}$$

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y). \tag{б}$$

(а) касиети 1) шарттан келип чыгат (себеби, жактарынын узундуктары x, y жана y, x болгон эки тик бурчтук конгруэнттүү болушат). (б) касиети 2) шарттан келип чыгат (38-сүрөт).

Төмөндөгүдөй белгилөө киргизели: $f(x, y)|y = const = g(x)$. Анда (б) барабардыгынан $\forall x_1, x_2 \in R_+^*$: $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ келип чыгат.

R_+^* көптүгүндө аныкталган жана ушундай касиетке ээ болуп, жалаң гана оң маанилерди кабыл алган $g(x)$ функциясы түз пропорциялаш-тыкты туюнта тургандыгы математикалык анализ курсунан белгилүү: $g(x) = kx, k = const$. Демек, $f(x, y)|y = const = kx$ болот.



38-сүрөт

$y = const$ турактуусунун башка мааниси үчүн k коэффициенти да башка болот. Жалпы учурда $k = k(y)$ деп кароого болот. Демек, $f(x, y) = k(y) \cdot x$ орун алат. Эми $x = 1$ деп алсак, анда $f(1, y) = k(y)$ болот. Ошондуктан

$$f(x, y) = f(1, y) \cdot x, \qquad \text{(в)}$$

(а), (в)$\Rightarrow f(1, y) = f(y, 1) = f(1,1) \cdot y$, (в) барабардыгы төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$f(x, y) = f(1,1) \cdot x \cdot x.$$

3) аксиома боюнча $f(1,1) = 1$ болгондуктан, $s(P) = x \cdot y$ келип чыгат. Теорема далилденди.

$S(P_0) = 1$ боло тургандай P_0 квадраты бирдик квадрат деп аталат. Эгерде бирдик кесинди тандалып алынган болсо, анда бул квадрат аныкталган болот. Эки кесиндинин көбөйтүндүсү деп алардын узундуктарынын көбөйтүндүсүн түшүнө тургандыгыбызды макулдашып коебуз.

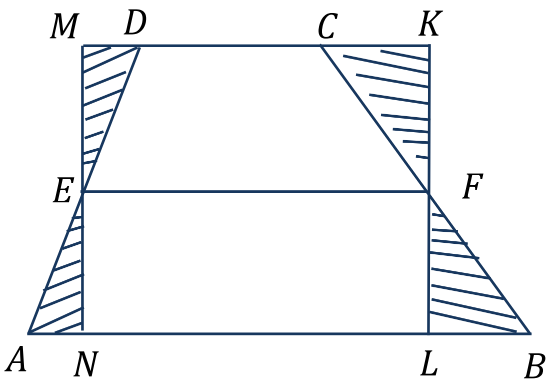
Натыйжа. Эгерде $S(F)$ функциясы жашаса, анда

1) P тик бурчтугу үчүн $S(P)$ саны негиз менен бийиктиктин көбөйтүндүсүнө барабар болот ((1) формуланы карагыла);

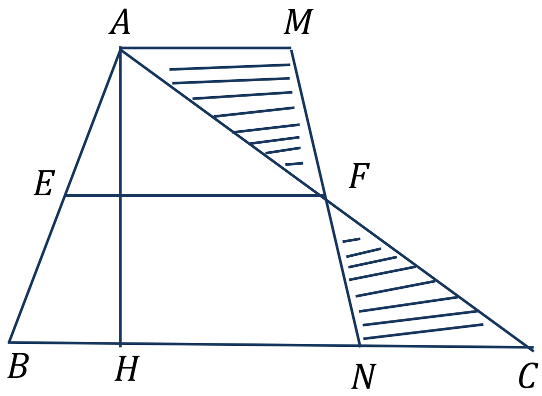
2) трапеция үчүн $S(P)$ саны орто сызыгы менен бийиктигинин көбөйтүндүсүнө барабар болот (39-сүрөт);

3) үч бурчтук үчүн – каалаган жагы менен ошол жакка түшүрүлгөн бийиктигинин көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар болот (40-чийме):

$$S(\Delta ABC) = S(AFNB) + S(\Delta FNC) = S(AFNB) + S(\Delta FAM) =$$
$$= S(BNMA) = |EF||AH| = \frac{1}{2}|BC||AH|;$$



39-сүрөт



40-сүрөт

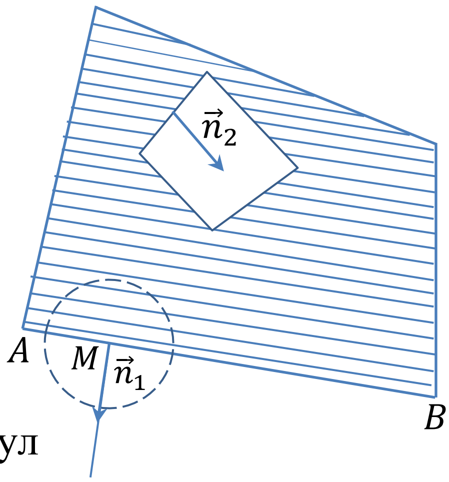
4) параллелограмм үчүн – анын каалаган жагы менен ошол жакка түшүрүлгөн бийиктиктин көбөйтүндүсүнө барабар (41-сүрөт):

$$S(ABCD) = S(\Delta ABD) + S(\Delta BCD) =$$

$$= \frac{1}{2}|AB| \cdot |DH| + \frac{1}{2}|CD| \cdot |BH_1| =$$

$$= \frac{1}{2}|AB| \cdot |DH| + \frac{1}{2}|AB| \cdot |DH| =$$

$$= |AB| \cdot |DH|.$$



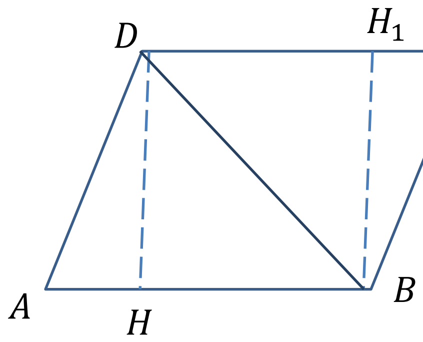
42-сүрөт

Ошентип, маселе $S(F)$ функциясы жашайбы деген суроого алып келет. Ушул маселени карайлы.

$[AB]$ – F көп бурчтугунун жагы болсун. Эгерде M чекити ушул жактын өзгөчө эмес ички чекити болсо (42-сүрөт), анда $F_1 = F \cap \bar{B}(M, \varepsilon)$ фигурасы жарым тегерек боло тургандай $\bar{B}(M, \varepsilon)$ тегереги жашайт. Төмөндөгүдөй эки шартты канааттандыра тургандай $[MN)$ шооласы жашайт:

1) $[MN) \perp (AB)$;

2) $[MN) \cap B(M, \varepsilon) \setminus F_1 \neq \emptyset$.



41-сүрөт

$[MN)$ шооласынын багытын көрсөткөн $\vec{n}_1$ бирдик векторун F көп бурчтугунун **сырткы нормалынын орту** деп атап коебуз. Демек, F көп бурчтугунун ар бир жагы үчүн сырткы нормалдын ортун аныктоого болот.

F көп бурчтугунун жактарынын саны k болсун дейли жана алар кандайдыр бир жол менен номерленип коюлган болсун деп эсептейбиз. ℓ_i аркылуу i -жагынын узундугун, $\vec{n}_i$ аркылуу ушул жактын сырткы нормалынын ортун, M_i аркылуу i -жакты кармап турган түз сызыктын кандайдыр бир чекитин белгилеп алабыз. O – көп бурчтуктун тегиздигинде жаткан каалагандай чекит болсун. Төмөндөгүдөй сумманы түзөбүз:

$$\sum_{i=1}^{k} \ell_i \cdot \overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{n}_i. \qquad (2)$$

Бул сумма O чекитин F көп бурчтугунун тегиздигинен тандап алуудан көз каранды болбойт. Ошондой эле i-жакты кармап турган түз сызыктагы M_i чекитин тандап алуудан да көз каранды эмес.

Чындыгында, эгерде башка бир O' чекитин алсак, анда $\overrightarrow{O'M_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i}$ болот. Демек,

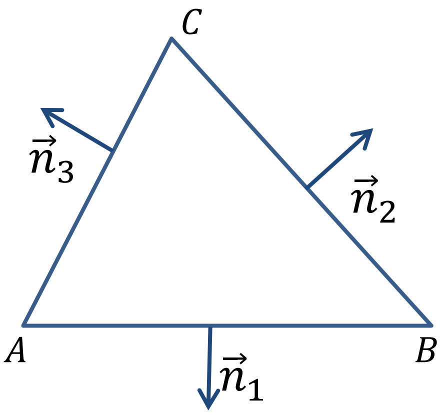
$\sum_{i=1}^{k} \ell_i \overrightarrow{O'M_i} \cdot \vec{n}_i = \overrightarrow{O'O} \sum_{i=1}^{k} \ell_i \vec{n}_i + \sum_{i=1}^{k} \ell_i \overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{n}_i.$

Эми

$$\sum_{i=1}^{k} \ell_i \vec{n}_i = \vec{0} \qquad (3)$$

экендигин көрсөтөбүз. Адегенде $k = 3$ болгон учурду карайлы (43-сүрөт). Эгерде каалаган M чекитинен $\overline{MP} \in \overrightarrow{AB}$, $\overline{MQ} \in \overrightarrow{BC}$, $\overline{MR} \in \overrightarrow{CA}$ багытталган кесиндилерин ченеп койсок, кийин $\overline{MP'} \in |AB|\vec{n}_1$, $\overline{MQ'} \in |BC|\vec{n}_2$, $\overline{MR'} \in |CA|\vec{n}_3$ багытталган кесиндилерин ченеп алсак, анда тегиздикти M чекитинин айланасында $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ бурчуна буруудa P, Q, R чекиттери P', Q', R' чекиттерине өтүшөт.

Ошондуктан $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ барабардыгынан (3) барабардык келип чыгат.



43-сүрөт

$k > 3$ болгон учурда F көп бурчтугунун чеги бир же бир нече туюк сынык сызыктардан турат. Бул сынык сызыктардын ар бири үчүн жогорудагыга окшош иш жүргүзүү менен $k > 3$ учурунда деле (3) барабардык орун ала тургандыгына ынанабыз.

Эгерде F көп бурчтугунун i - жагын кармап турган түз сызыкта M_i' чекитин алсак, анда

$$\overrightarrow{OM_i'} \cdot \vec{n}_i = \overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{n}_i$$

орун алат (себеби $\overrightarrow{\mathrm{OM_i'}} = \overrightarrow{\mathrm{OM_i}} + \overrightarrow{\mathrm{M_iM_i'}}$, бирок $\overrightarrow{\mathrm{M_iM_i'}} \perp \vec{\mathrm{n}}_{\mathrm{i}}$).

2-теорема. Төмөндөгүдөй эреже боюнча аныкталган $S: \mathcal{M} \to R_+^*$ чагылтуусу 1)-3) аксиомаларды канааттандырган жалгыз гана чагылтуу болот:

$$\forall F \in \mathcal{M}: S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \ell_i \overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{n}_i, \tag{4}$$

Мындагы $k - F$ көп бурчтугунун жактарынын саны.

Бул теореманын далилдөөсүн окурманга өз алдынча иш катары сунуштайбыз.

§13. Тең чоңдуктагы жана тең түзүлгөн көп бурчтуктар

Эгерде эки көп бурчтуктун аянттары барабар болушса, анда алар тең чоңдуктагы көп бурчтуктар деп аталат.

Эгерде F жана F' көп бурчтуктарын тиешелеш түрдө конгруэнттүү болушкан бирдей сандагы көп бурчтуктарга ажыратууга мүмкүн болсо, анда аларды тең түзүлгөн көп бурчтуктар деп аташат жана $F\rho F'$ көрүнүшүндө жазылат.

"Тең түзүлгөн" катышын ρ аркылуу белгиледик.

1-касиет. $F\rho F' \Rightarrow S(F) = S(F')$,

б.а. эгерде F жана F' көп бурчтуктары тең түзүлгөн болушса, анда алардын аянттары барабар болушат.

Көп бурчтуктун аянтын табуу үчүн "ажыратуу методу" ρ катышын ушул касиетине негизделген: F көп бурчтугун чектүү сандагы ушундай көп бурчтуктарга ажыратышат, алардан аянты белгилүү болгон F көп бурчтугун түзүп алууга болот. Ушундай жол менен мектеп курсунун геометриясында параллелограммдын, үч бурчтуктун, трапециянын аянттары табылат.

2-касиет. Бири экинчисинин ичинде жата тургандай тең түзүлгөн эки көп бурчтук жашабайт.

Далилдөө. Айталы $F\rho F'$ болсун. $F \subset \dot{F}', \dot{F}' - F'$ көп бурчтугунун ичи деп эсептейли. Анда $F' = F + F''$, мында F'' – кандайдыр бир көп бурчтук. Демек, $S(F') > S(F)$келип чыгат, бул болсо 1-касиетке карама-каршы келет. Теорема далилденди.

M аркылуу бардык көп бурчтуктардын көптүгүн белгилейбиз.

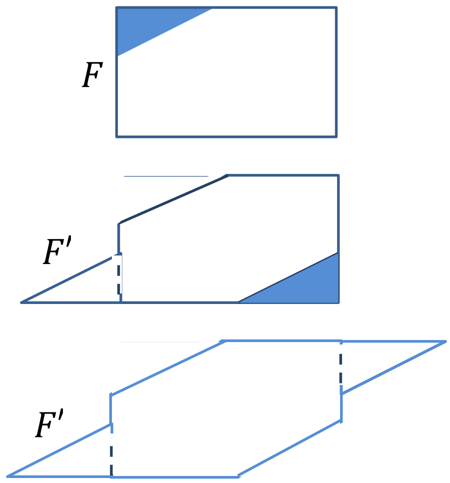
Теорема. ρ катышы M көптүгүндө эквиваленттүүлүк катышы болот.

Далилдөө. $\forall F \in M$ үчүн

а) $F\rho F$, б.а. ар бир көп бурчтук өзү менен өзү тең түзүлгөн болот.

б) $\forall F, F' \in M: F\rho F' \Rightarrow F'\rho F$.

в) $\forall F, F', F'' \in M: (F\rho F' \wedge F'\rho F') \Rightarrow F\rho F'$.



44-сүрөт

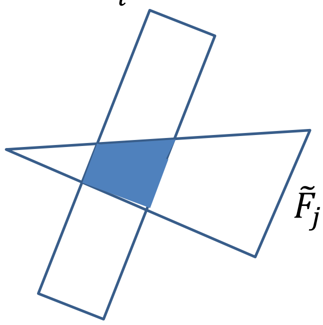
Акыркы касиетти далилдейбиз. Шарт боюнча:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i, F' = \sum_{i=1}^{n} F_i', F_i \cong F_i'$$

жана $\tilde{F}'_j$

$$F' = \sum_{j=1}^{m} \tilde{F}_j', \ F'' = \sum_{j=1}^{m} \tilde{F}_j'', \ \tilde{F}_j' \cong \tilde{F}_j'' \text{ (44-45-сүрөт).}$$

$F_i', \tilde{F}_j' \subset F'$көп бурчтуктарын карайлы. $F'_i \cap \tilde{F}'_j$ фигурасы $\emptyset$, же чекит, көп бурчтук болушу мүмкүн. Акыркы учурда кесилиштен пайда болгон көп бурчтукту F_{ij}' аркылуу белгилейли. $F_i' \subset F' = \sum_{j=1}^{m} \tilde{F}_j'$ болгондуктан, $F_{ij}' = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}'$ келип чыгат. Бирок $F_i' \cong F_i$. Демек, $F_i = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}'$. Ошондуктан



45-сүрөт

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F_{ij}'. \qquad (1)$$

Ушуга эле окшош $\tilde{F}_j' = \sum_{i=1}^{n} F_{ij}', \tilde{F}_j' \cong F_j''$болгондуктан $\tilde{F}_j' = \sum_{i=1}^{n} F_{ij}'$ келип чыгат.

Демек,

$$F'' = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} F_{ij}' \qquad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow F \rho F''$.

Бояи-Гервиндин теоремасы деп аталган төмөндөгүдөй теорема орун алат:

$$S(F) = S(F') \Rightarrow F \rho F',$$

б.а. эгерде эки көп бурчтуктун аянттары барабар болушса, анда алар тең түзүлгөн болушат.

Бул теоремадан жана **1-касиеттен** төмөндөгү ырастоого келебиз:

$$S(F) = S(F') \Leftrightarrow F \rho F',$$

б.а. бардык көп бурчтуктардын $\mathcal{M}$ көптүгүндө “тең түзүлгөн” катышы дал келет.

§14. Квадратталуучу фигуралардын классы

Төмөндөгүдөй касиетке ээ болгон бардык жалпак фигуралардын көптүгүн J аркылуу белгилейбиз:

$$\forall \Phi \subset J \exists F, F' \in \mathcal{M} | F \subset \Phi \subset F'.$$

$\mathcal{M} \subset J$ экендиги түшүнүктүү. $\forall \Phi \subset J$ карайлы. Φ фигурасы чектелген (б.а. чектүү диаметрге ээ) фигура болот, себеби

$$\exists F' \in \mathcal{M} |\ \Phi \subset F', (1) \Rightarrow S(F) \leq S(F'). \qquad (2)$$

Төмөндөгү көптүктөрдү карайбыз:

$$(F) = \{F | F \in \mathcal{M} \wedge F \subset \Phi\},$$

$$(F') = \{F' | F' \in \mathcal{M} \wedge \Phi \subset F'\}.$$

$\big(S(F)\big)$ сандык көптүгү жогорку жактан чектелген ((2)нин негизинде). Демек, $S_* = sup\, S\,(F)$ – накта жогорку граны жашайт жана ал Φ фигурасынын жордандык ички өлчөмү (ченеми) деп аталат, $\mathrm{S}^*(\Phi)$ көрүнүшүндө белгиленет. Ушуга эле окшош $\mathrm{S}^*(\mathrm{F}')$ сандык көптүгү төмөн жактан чектелген көптүк болот. Демек, $\mathrm{S}^* = \inf \mathrm{S}\,(\mathrm{F}')$ – накта төмөнкү граны жашайт. Аны Φ фигурасынын жордандык сырткы ченеми деп аташат жана $S_*(\Phi)$ аркылуу белгилешет.

Ошентип, $\forall \Phi \subset J$ фигурасы жордандык ички жана сырткы ченемдерге ээ болот экен.

$$(2) \Rightarrow S_*(\Phi) \leq S^*(\Phi) \qquad (3)$$

Эгерде Φ фигурасынын ички жана сырткы жордандык ченемдери барабар болушса, анда Φ фигурасы квадратталуучу фигура деп аталат, ал эми $S_*(\Phi) \leq S^*(\Phi)$ санын бул фигуранын **аянты** деп аташат.

Эгерде Φ квадратталуучу фигура жана $\Phi \cong \Phi'$ болсо, анда Φ' фигурасы да квадратталуучу болот жана $S(\Phi) = S(\Phi')$ Эгерде $\Phi = \Phi' + \Phi''$ жана Φ', Φ'' – квадратталуучу фигуралар болушса, анда Φфигурасы дагы квадратталуучу болушун жана

$$S(\Phi) = S(\Phi') + S(\Phi'')$$

экендигин далилдөөгө болот.

Ошентип, бардык квадратталуучу жалпак фигуралардын көптүгүндө аныкталган $S(\Phi)$ функциясы көп бурчтуктун аянты $S(F)$ канаатандырган 1)-3) аксиомаларын канааттандырат. Ошондуктан, $S(\Phi)$ санын Φ **фигурасынын аянты** деп атайбыз.

Теорема. (квадратталуучуктун белгиси) Φ жалпак фигурасы квадратталуучу болушу үчүн $\forall \varepsilon > 0$ үчүн төмөндөгү шарттардын аткарылышы зарыл жана жетиштүү:

$$F_o, F_o' | F_o \subset \Phi \subset F_o'$$

жана

$$S(F_o') - S(F_o) < \varepsilon. \quad (4)$$

Далилдөө. Зарыл шартын далилдейли. Φ – квадратталуучу функция болсун дейли. Анда $sup\, S\,(F) = inf\, S\,(F') = S(\Phi)$.

Берилген $\varepsilon > 0$ үчүн $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ деп алалы. Накта жогорку жана накта төмөнкү грандардын касиеттери боюнча ушундай F_o жана F_o' көп бурчтуктары табылат да $S(F_o) > S(\Phi) - \varepsilon_1, S(F_o') < S(\Phi) + \varepsilon_1$ шарттары орун алат. Мындан $S(F_o') - S(F_o) < \varepsilon(= 2\varepsilon_1)$ келип чыгат.

Тескерисинче, (4) шарт орун алсын дейли. Сырткы жана ички ченемдерин аныктоолорунан

$$S(F_o) \leq S_*(\Phi),\ S^*(\Phi) \leq S(F_o').$$

келип чыгат. Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$S^*(\Phi) - S_*(\Phi) \leq S\left(F_\circ'\right) - S(F_\circ) < \varepsilon$$

(3) нү эске алуу менен

$$0 \leq S^*(\Phi) - S_*(\Phi) < \varepsilon$$

барабарсыздыктарына ээ болобуз. Мындагы $\varepsilon -$ каалагандай оң сан болгондуктан

$$S^*(\Phi) - S_*(\Phi) = 0$$

келип чыгат. Демек, Φ квадратталуучу фигура. Теорема далилденди.

Натыйжада. Φ фигурасы квадратталуучу болушу үчүн аянттары жалпы пределге ээ боло тургандай көп бурчтуктардын эки удаалаштыгынын жашашы зарыл жана жетиштүү:

$$(X_n)_{n\in N},\ (Y_n)_{n\in N},\ X_n \subset \Phi \subset Y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} S(X_n) = \lim_{n\to+\infty} S(Y_n).$$

Ушул жалпы предел $S(\Phi)$ – Φ фигурасынын аянты болуп эсептелет. Бул болсо Φ фигурасынын аянтынын аныктоосунан жана жогорудагы теоремадан түздөн түз келип чыгат.

Мисал. Φ – радиусу R барабар тегерек, X_n – Φ тегерегине ичтен сызылган, Y_n – Φ тегерегине сырттан $(n \geq 3)$ сызылган туура n бурчтук болсун. Анда

$$X_n \subset \Phi \subset Y_n,$$

$$S(X_n) = \frac{n}{2} R^2 \sin\frac{2\pi}{n}, S(Y_n) = nR^2 tg\frac{\pi}{n}.$$

Төмөндөгү пределдерди табабыз:

$$\lim_{n\to\infty} S(X_n) = R^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2}{n}} = \pi R^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} S(Y_n) = R^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{tg\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi R^2.$$

Демек, тегерек – квадратталуучу фигура жана аянты πR^2 болот.

§15. Көлөм жөнүндө түшүнүк. Кубдалуучу фигуралар

Евклиддик геометриядагы көп грандыктын көлөмү жөнүндөгү түшүнүк көп бурчтуктун аянты жөнүндөгү түшүнүккө окшош эле аныкталат.

$\mathcal{M}$ аркылуу мейкиндиктеги бардык көп грандыктардын көптүгүн белгилейли.

Эгерде төмөндөгүдөй үч (аксиоманы) шартты канааттандырган

$$V: \mathcal{M} \to R_+^*$$

чагылтуусу аныкталган болсо, анда M көптүгүндө көп грандыктардын көлөмдөрүн өлчөө аныкталды деп айтышат:

1) $F \cong F' \Rightarrow V(F) = V(F')$ (кыймылда көлөмдүн инвариант-талуучу, б.а. өзгөрбөстүгү);

2) $F = F' + F'' \Rightarrow V(F) = V(F') + V(F'')$ (V функциясынын аддивдүүлүгү);

3) $V(P_o) = 1$, мында P_o – кыры бирдик кесинди катары кабыл алынган куб.

$V(F)$оң саны F көп грандыгынын көлөмү деп аталат.

F грандыгынын F' жана F'' көп грандыктарына ажыралышы кандайдыр бир көп грандуу $G \subset F$ бетинин жардамында ишке ашырыла тургандыгын эске салабыз.

1-теорема. Эгерде $V(F)$ функциясы жашаса, анда өлчөмдөрү x, y, z болгон P тик бурчтуу параллелепипеди үчүн $V(P) = xyz$ көрүнүшүндө болот.

F көп грандыгынын ар бир граны үчүн сырткы нормалынын ортун аныктоого болот (F көп бурчтугу үчүн кандай аныкталса, ошого окшош аныкталат).

F көп грандыгынын грандарынын саны k га барабар болсун. S_i аркылуу i – гранынын аянтын, $\overrightarrow{n_i}$ аркылуу ушул грандын сырткы нормалынын ортун, M_i аркылуу i – гранды кармап турган тегиздиктин кандайдыр бир чекитин белгилейбиз. Мейкиндиктин каалагандай O чекитин алабыз жана төмөндөгү сумманы түзөбүз:

$$\sum_{i=1}^{k} Si\,\overrightarrow{OM_i}\,\overrightarrow{n_i}.$$

Мындагы параграфтагы теоремага окшош теорема орун алат.

2-теорема. $V: \mathcal{M} \to R_+^*$ чагылтуусун төмөндөгүдөй аныктайлы:

$$V(F) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k} S_i\,\overrightarrow{OM_i}\,\overrightarrow{n_i},$$

мындагы $k - F$ көп грандыгынын грандарынын саны. Бул чагылтуу көлөмдүү өлчөөнүн 1) – 3) аксиомаларынын канааттандырган жалгыз чагылуу болот.

Натыйжа. F көп грандыгынын чектүү сандагы тетраэдрлердин суммасына каалагандай ажыралыштарында бул тетраэдрлердин көлөмдөрүнүн суммасы бирдей болот.

Эгерде эки көп грандыктын көлөмдөрү барабар болсо, анда аларды тең чоңдуктагы көп грандыктар деп аташат.

Бул катыш бардык көп грандыктардын M көптүгүндө эквиваленттүүлүк катышы болот.

Эгерде F жана F' көп грандыктарын бирдей сандагы жана тиешелеш түрдө конгруэнттүү болушкан көп грандыктарга ажыратууга мүмкүн болсо, анда аларды тең түзүлгөн көп грандыктар деп аташат.

“Тең түзүлгөн” катышы дагы бардык көп грандыктардын M көптүгүндө эквиваленттүүлүк катышы болот. Бул ырастоолор 13-параграфтагы тиешелүү теореманын далилдөөсүнө окшош далилденет. $Ж$ тамгасы менен мейкиндиктеги төмөндөгүдөй касиетке ээ болгон бардык фигуралардын көптүгүн белгилейбиз:

$$\forall \Phi \in Ж \exists F,\ F' \in \mathcal{M} | F \subset \Phi \subset F'.$$

$M \subset$ Ж жана $\forall \Phi \in$ Ж фигурасы чектелген экендиги түшүнүктүү. Берилген $\Phi \in Ж$ фигуасы үчүн көп грандыктардын төмөндөгүдөй эки көптүк карайлы:

$$(F) = \{F | F \in \mathcal{M}, F \subset \Phi\};$$

$$\left(F'\right) = \{F' | F' \in \mathcal{M}, \Phi \subset F'\}$$

жана аларга тиешелеш сандык көптүктөрдү $\big(V(F)\big)$ жана $\big(V(F')\big)$ аркылуу белгилейли. Анда

$$F \subset F' \Rightarrow V(F) \leq V(F').$$

$\big(V(F)\big)$ көптүгү жогорку жактан чектелген, ал эми $\big(V(F')\big)$ көптүгү төмөн жактан чектелген көптүктөр болушат. Демек, алардын накта грандары жашайт:

$V_*(\Phi) = sup\, V\,(F)$ – Φ фигурасынын ички жордандык чени;

$V^*(\Phi) = inf\, V\,(F')$ – Φ фигурасынын сырткы жордандык чени.

Аныктама. Эгерде Φ фигурасынын ички жана сырткы жордандык чендери барабар болушса, анда аны кубдалуучу фигура деп аташат, ал эми $V(\Phi) = V_*(\Phi) = V^*(\Phi)$ оң саны Φ фигурасынын көлөмү деп аталат.

Жалпы фигуранын квадратталуучулук белгисине окшош эле мейкиндик фигуранын **кубдалуучулук** белгисине аныктоого болот.

Теорема (кубдалуучулук белгиси). Φ мейкиндик фигурасы кубдалуучу фигура болушу үчүн каалагандай $q > 0$ саны үчүн төмөндөгүдөй эки F_o, F_o' көп грандыктарынын жашашы зарыл жана жетиштүү:

$$F_o \subset \Phi \subset F_o', V(F_o') - V(F_o) < \varepsilon.$$

Натыйжада. Φ фигурасынын кубдалуучу фигура болушу үчүн көлөмдөрүнүн удаалаштыктары бирдей пределге ээ болуша тургандай көп грандыктардын эки удаалаштыгынын жашашы зарыл жана жетиштүү:

$\{X_n\}_{n\in N}, \{Y_n\}_{n\in N}$ – көп грандыктардын удаалаштыктары,

$$X_n \subset \Phi \subset Y_n,$$

$$\lim_{n \to +\infty} V(X_n) = \lim_{n \to +\infty} V(Y_n).$$

Ушул предел Φ фигурасынын көлөмү болот.

Колдонулган адабияттар

1. Агафонова, Т.Л. Задачи по объединенному курсу геометрии/ Т.Л. Агафонова, И.С. Герасимова, В.М. Майоров и др/ Учебное пособие. – Ярославль: ЯГПИ, 1991.
2. Александров, А.Д. Основания геометрии/ А.Д. Александров. – М.: «Наука», 1987.
3. Базылев, В. Т. Геометрия/ В.Т. Базылев, К.И. Дуничев и др./ Учеб пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1974. – Ч.2
4. Базылев, В. Т. Сборник задач по геометрии/ В.Т. Базылев, К.И. Дуничев и др./ Учеб пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980.
5. Горшкова, Л.С. Неевклидова геометрия: Факультативный курс для старшеклассников/ Л.С. Горшкова, Н.В Титова/ Учебное пособие. – Пенза: ПГПУ, 2005.
6. Егоров, И.П. Основания геометрии/ И.П. Егоров/ Учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: «Просвещение», 1984.
7. Егоров, И.П. Лекции по аксиоматике Вейля/ И.П. Егоров. – Приволжск. изд., 1972.
8. Ефимов, Н.В. Высшая геометрия/Н.В. Ефимов. – М.: «Наука», 1978.
9. Паньженский, В.И. Введение в дифференциальную геометрию/ В.И. Паньженский. – Пенза: ПГПУ, 2008.
10. Розенфельд, Б.А. Неевклидовы пространства/ Б.А. Розенфельд. – М.: «Наука», 1969.
11. Франгулов, С. А. Сборник задач по геометрии/ С. А. Франгулов, П. И. Совертков и др./ Учеб. пособие для студентов пед. вузов. – М.: «Просвещение», 2002.