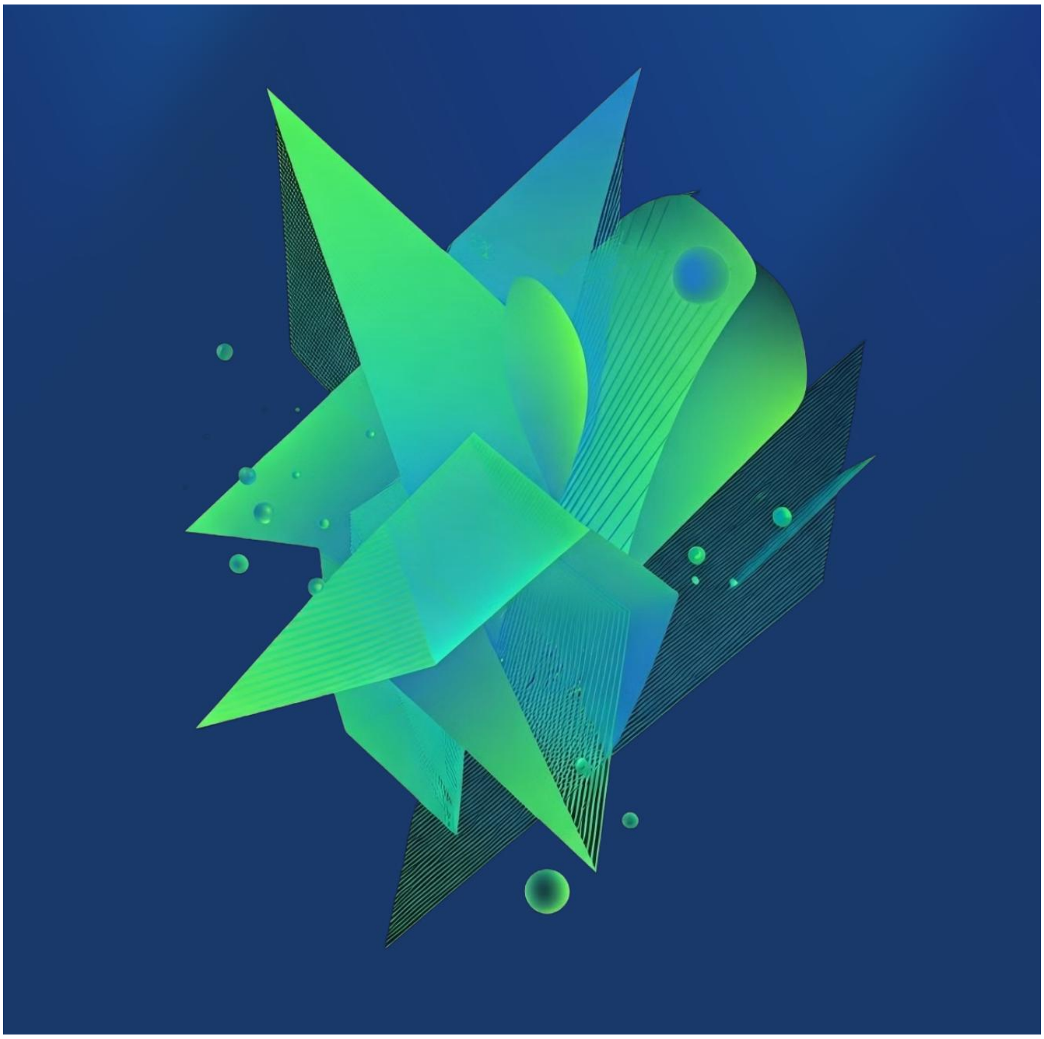
Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Папиева Т.М.

Введение в геометрию квазидвойных линий частичных отображений евклидовых пространств



Ош - 2024

УДК 514
ББК 22.151.2
М 34

Монография издается по решению Ученого совета Ошского государственного университета (протокол №2, от 30 октября 2024 г.)

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН КР Борубаев А.А.
доктор физ.-мат. наук, профессор Канетов Б.Э.

М 34 Матиева Г. и др. Введение в геометрию квазидвойных линий частичных отображений евклидовых пространств / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Т.М. Папиева // Монография. – Ош: «Билим» ОшГУ, 2024. – 172 с.

ISBN 978-9967-18-932-4

Монография посвящена исследованию существования квазидвойных линий частичных отображений в пяти- и шестимерных евклидовых пространствах и обобщение некоторых полученных результатов для *n*-мерного евклидова пространства. Доказаны необходимые и достаточные условия существования квазидвойных линий рассматриваемых частичных отображений; найдены необходимые и достаточные условия невырожденности частичных отображений; найдены связи между необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы линии, принадлежащие заданным распределениям являлись квазидвойными линиями рассматриваемых частичных отображений и кривизнами линий циклической сети Френе.

Монография предназначена для научных работников, преподавателей ВУЗов, PhD докторантов, магистрантов, студентов образовательных направлений “Математика”, “Прикладная математика и информатика”, “Физико-математическое образование”.

ISBN978-9967-18-932-4

УДК 514
ББК 22.151.2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень условных обозначений и основных определений

Условные обозначения

$\Leftrightarrow$– эквивалентность (равносильность) высказываний;

$\|$ – коллинеарность векторов;

$\perp$ – ортогональность векторов;

$E_n -$ n - мерное евклидово пространство;

$\vec{X} = \vec{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – радиус-вектор точки $X \in \Omega$;

d_i – символ дифференцирования вдоль линии ω^i;

$\wedge$ – внешнее произведение;

$\Delta_2 = \left(X, \vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$ – двумерное распределение;

$(X, \vec{e}_i)$ – прямая, проходящая через точку $X \in \Omega$ с направляющим вектором $\vec{e}_i$;

$\delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ – – символ Кронекера;

Запись вида $a_i b^i$ обозначает, что по i производится суммирование;

«Плоскость» – собственное подпространство любой размерности основного пространства E_n;

F_i^j – псевдофокус прямой $(X, \vec{e}_i)(i \neq j)$;

Δ_p – p -мерное распределение $(p < n)$;

$\overrightarrow{M}_p$ – вектор средней кривизны распределения Δ_p пространства E_n;

Σ_n – сеть Френе;

$\tilde{\Sigma}_n$ – циклическая сеть Френе;

$\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$ – вынужденная кривизна линии ω^i по направлению $\vec{e}_j$.

Основные определения

Если $d\vec{S}||\vec{e}_2$ то точка $S \in (X, \vec{e}_2)$ называется фокусом прямой $\left(\vec{S} = \vec{X} + \nu\vec{e}_2\right)$ $(X, \vec{e}_2)$ (когда точка X смещается на плоскости $(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$).

Псевдофокусом касательной $(X, \vec{e}_A)$ сети Σ_n называется точка $F_A^B \in (X, \vec{e}_A)$ удовлетворяющая условию

$$d\overrightarrow{F_A^B} \in (X, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_n)$$

(при котором когда точка X движется вдоль линии ω^B точка $F_A^B \in (X, \vec{e}_A)$ не должна выходить за плоскость $(X, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_n)$).

Вектор $\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda_{ij}^{\alpha} \vec{e}_\alpha$ $(i, j = 1, 2, \dots, p, \alpha = p+1, p+2, \dots, n)$ называется вектором средней кривизны распределения Δ_p [53].

Линии $\omega^i, f(\omega^i) = \bar{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках $X \in \omega^i$ и $f(X) \in \overline{\omega}^i$ пересекаются, либо параллельны.

Линия ℓ называется двойной линией пары (f, Δ_p), если она является двойной линией отображения f и принадлежит распределению Δ_p.

Линии ω^i, $f(\omega^i) = \bar{\omega}^i$ в пространстве E_5 называются квазидвойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f(X)$ принадлежат одному и тому же четырехмерному подпространству пространства E_5.

Если линия ℓ является квазидвойной линией частичного отображения f и принадлежит распределению Δ_p, то линия ℓ является квазидвойной линией пары $\left(f, \Delta_p\right)$.

Введение

Дифференциальная геометрия точечных соответствий пространств (проективных, аффинных, евклидовых) равной размерности систематически начала изучаться в двадцатых годах прошлого столетия. Эти работы были посвящены, в основном, отображениям плоскостей. Вопросами точечных соответствий пространств равной размерности занимались такие известные математики, как А. П. Норден (1976), П. С. Фиников (1939), В. В. Рыжков (1965), М. А. Акивис (1984), В.Т. Базылев (1965-1981), Й. Микеш (1981, 1996), Г. Матиева (1988-2023) и их ученики, а также другие геометры.

Основы геометрии плоских многомерных сетей, также сети двойных линий рассматривались в работах В. Т. Базылева (1965). Работы В. Т. Базылева (1965) посвящены различным задачам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерных проективных, аффинных и евклидовых пространствах.

В работах С. П. Фиников (1939) исследованы сети двойных линий на парных поверхностях трехмерного проективного пространства.

В.Т. Базылевым (1975) были исследованы сети двойных линий на парных гиперповерхностях n-мерного проективного пространства. Было доказано, что если сеть двойных линий на поверхности V_{n-1} n-мерного проективного пространства является геодезической сетью (относительно связности ∇), то сеть двойных линий на поверхности V'_{n-1} будет геодезической сетью (относительно связности ∇').

В работах С. В. Киреевой (1983, 1985) рассматривается в проективном пространстве отображение $g: \Omega \to \bar{\Omega}$, в котором каждая линия двойная, при этом области $\Omega \subset P_n, \bar{\Omega} \subset P_n$, нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей. Ей же изучается отображение f области Ω проективного пространства P_n в область $\bar{\Omega} \subset P_n$, переводящее точку A в точку B. Области Ω и $\overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П. Нордена (1976) одним и тем же семейством плоскостей $A \to \Pi_{n-1}(A), B \to$
$\Pi_{n-1}(A)$. Изучаются также объекты отображения f и его характеристические направления.

В работах Г. Матиевой (2003) рассматривается в области $\Omega \subset E_3$ семейство гладких линий такое, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. На каждой прямой $(X, \vec{e}_i)$
(где $(X, \vec{e}_i)$ – координатные прямые репера Френе для линии ω^1 заданного семейства, $i, j = 1,2,3$) инвариантным образом определяется точка $F_i^j (i \neq j)$, так называемая псевдофокусом этой прямой. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_i^j описывает свою область Ω_i^j. Получается отображение f_i^j области Ω в область Ω_i^j такое, что точка X переходит в точку F_i^j.

Найдены связи между существованием, расположением фокусов, псевдофокусов, гармонических полюсов касательных к линиям сети Френе $\sum_F$, кривизнами и кручениями этих линий. Введено понятие циклической сети Френе.

В работах Т. М. Папиевой (2010) исследованы частичные отображения евклидовых пространств E_4, E_n, порождаемых заданной циклической сетью Френе $\tilde{\Sigma}_4$, $\tilde{\Sigma}_n$ соответственно. Ею были найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа заданной циклической сети Френе в каждом из рассматриваемых частичных отображениях; получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы рассматриваемые частичные отображения являлись движениями; найден геометрический смысл полученных необходимых и достаточных условий; выявлена связь между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определяемых заданной циклической сетью Френе, а также связь между этими векторами и векторами кривизн линий заданной сети; доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии заданной циклической сети являлись двойными линиями рассматриваемых отображений.

Работы Н. Н. Курбанбаевой (2016) посвящены исследованию задачи существования двойных линий частичных отображений f_i^j пространства E_4, Введены понятия квазидвойной линии частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, исследованы задачи существования квазидвойных линий частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$.

Дифференцируемые, частичные отображения евклидова пространства, заданной гладкой линий, имеют особое значение, поскольку от выбора сетки зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, но и его рациональный вывод.

Сетки, линии которых представляют собой двойные и квазидвойные линии частичного отображения, используются для решения многих задач линейной и нелинейной теории волн.

В монографии рассматривается проблема построение циклического репера Френе, исследование существования квазидвойных линий частичных отображений в пяти- и шестимерных евклидовых пространствах и обобщение некоторых полученных результатов для n-мерного евклидова пространства.

Связь темы исследования с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Монография выполнена в рамках научных проектов МОиН КР «Геометрия вырожденных частичных отображений, порождаемых заданной сетью Френе» (номер гос. регистрации №0007101, от 05.02.2014, в 2014 г.), «Геометрия частичных отображений и сетей евклидова пространства, порождаемых заданным распределением» (номер гос. регистрации №0007197, от 13.03.2015, в 2015-2016 гг.).

Глава 1. Обзор литературы

1.1. Обзор литератур по геометрии дифференцируемых отображений

Геометрии дифференцируемых отображений гладких многообразий посвящено большое число работ. Основные понятия и результаты дифференциальной геометрии точечных соответствий между пространствами приведены в обзорной работе В.В. Рыжкова [98].

В.Т. Базылева [28]-[39] посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

В работе Л.И. Алексеевой [29] найдены необходимое и достаточное условие для того, чтобы график V_3 отображения $f: E_3 \to E_3'$ был поверхностью нулевой скалярной кривизны в случае, когда основание отображения образовано характеристическими линиями отображения f. Доказано, что вторая поляра точки $X \in V_3$ будет при этом конусом второго порядка.

М.А. Чешкова в работе [107] рассматривает две гладкие поверхности M^n, $\bar{M}^n$ и диффеоморфизм $f: M^n \to \bar{M}^n$. Установлено, что если f конформное отображение, а касательные плоскости T_pM^n и $T_{f(p)}\bar{M}^n$ ортогональны для всех $p \in M^n$, то в соответствующих точках поверхностей равны тензоры Риччи, а отображение $f: M^n \to \bar{M}^n$ сохраняет линии кривизны, определяемые относительно векторов средних кривизн поверхностей.

В работах [89]-[90] Й. Микеша рассматривается геодезические отображения Римановых пространств и пространств аффинной связности, также геодезические отображения Риччи пространств Эйнштейна.

Т.А. Дулалаевой [41] исследованы различные вопросы дифференциальной геометрии пары гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве. Парой гиперраспределения, заданных в областях Ω и Ω' n-мерного проективного пространства называется пара$(\Delta, \bar{\Delta})$, где Δ – (n-1)-мерное распределение в области Ω и $\bar{\Delta}$– в области Ω', причем области Ω и Ω' диффеоморфны. В этой работе уделяется внимание к изучению свойств сетей двойных линий отображения, инвариантно связанной с заданной парой. В работе [42] этого же автора доказано, что любая линия, принадлежащая гиперраспределению Δ, является линией пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_i^n = 0$. Геометрический смысл этого равенства, заключается в том, что соответствуют площадки гиперраспределений $\Delta(A)$ и $\bar{\Delta}(A)$ в индуцированном отображении f_*. Обращение в нуль относительного инварианта (Λ_n^n) является необходимым и достаточным условием принадлежности образа линии ω^n, $\omega^i = 0\left(i = \overline{1, n-1}\right)$, $\omega^n = \ell^n \theta$ в отображении f гиперраспределению $\bar{\Delta}$.

В работах М.Н. Марюкова [65], [66] рассматриваются свойства линий кривизны пары p-распределений, заданных в областях Ω, Ω' пространства E_n, между которыми установлен $f: \Omega \to \Omega'$ диффеоморфизм $(\Omega \subset E_n,\ \Omega' \subset E_n)$. Найдено необходимое и достаточное условие их соответствия в этом отображении. Изучены некоторые свойства сетей, инвариантно связанных с парой $\left(f, \Delta_p\right)$ p-

распределений, Δ_p – p-распределений, заданных в областях Ω пространства E_n

В работах С. В. Киреевой рассматривается в проективном пространстве отображение $g: \Omega \to \bar{\Omega}$, в котором каждая линия двойная, при этом области$\Omega \subset P_n, \bar{\Omega} \subset P_n$, нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей. Ей же изучается отображение f области Ω проективного пространства P_n в область $\bar{\Omega} \subset P_n$, переводящее точку A в точку B. Области Ω и $\overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П. Нордена одним и тем же семейством плоскостей $A \to \Pi_{n-1}(A), B \to \Pi_{n-1}(A)$. Изучаются также объекты отображения f и его характеристические направления.

В работе [27] Н. Алиева рассматривает n-мерные евклидовы пространства E и D (E, D – ортогональные пространства собственно $2n$-мерного евклидова пространства C, имеющие одну общую точку O). Исследовано дифференцируемое взаимно-однозначное отображение $T \subset V$ в W, которое переводит область $M \subset V$ в некоторую область $N \subset W$. Если точка x описывает область M, точка $y=T(x)$ описывает область N, а точка z с радиус вектором $z = x + y$ опишет область $M*$ поверхности $V*$, называемое графиком отображения T. Доказано, что поле вектора средней кривизны порождает на поверхности V и W одномерное распределение F и G, соответственно.

В.И. Грачева в работах [40] рассмотрела дифференцируемое биективное отображение T области Ω на $\bar{\Omega}$, где $\Omega \subset E_n$, $\bar{\Omega} \subset \bar{E}_n$, причем, n-мерные плоскости $E_n, \bar{E}_n$ вполне ортогональны в E_{2n} и имеют общую точку O. Если $x_1 \in \Omega, x_2 = T(x_1) \in \bar{\Omega}$ и $x^i, \bar{x}^i$ соответственно являются координатами точек x_1, x_2 относительно некоторых ортонормированных реперов в $E_n, \bar{E}_n$, то отображение T описывается функциями $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые считаются достаточное число раз дифференцируемыми и имеющими в области Ω отличный от нуля якобиан. Множество точек $x \in E_{2n}$, для которых $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{Ox_1} + \overrightarrow{Ox_2}$, описывает в E_{2n} n-мерную поверхность, называемую графиком отображения T. Изучены условия соответствия фокусов, а также псевдофокусов, взятых на прямых в указанных n-пространствах.

О.В. Казниной [48]-[50] рассмотрено одно из свойств сетей Σ_p и $\bar{\Sigma}_{\mathrm{p}}$, сохраняющееся в отображении $f\colon \left(V_p \subset E_n\right) \to \left(\bar{V}_p \subset E_{p+r}\right)$. Найдены признаки некоторых свойств сетей $\Sigma_p \subset V_p$ и $\bar{\Sigma}_p \subset \bar{V}_p$.

В работе [100] Г.М. Силаевой исследована связь сети двойных линий отображения поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве и её образ при гиперсферическом изображении.

В работах [67]-[88] Г. Матиевой изучены частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданным распределением, при этом вскрыты тесные связи между теориями отображений, сетей и распределений.

Заданием p -мерного распределения Δ_p в некоторой области Ω евклидова пространства E_n инвариантным образом определяется распределение $\bar{\Delta}_{n-p}$, ортогонально дополнительное данному распределению.

Когда $p = 1, n = 3$ в области $\Omega \subset E_3$ имеется семейство гладких линий (интегральные линии 1-мерного распределения Δ_1) такое, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. На каждой прямой $(X, \vec{e}_i)$ (где $(X, \vec{e}_i)$ - координатные прямые репера

Френе для линии ω^1 заданного семейства, $i, j = 1,2,3$) инвариантным образом определяется точка $F_i^j\,(i \neq j)$, так называемая псевдофокусом [30] этой прямой. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_i^j описывает свою область Ω_i^j. Получается отображение f_i^j области Ω в область Ω_i^j такое, что точка X переходит в точку F_i^j. Изучены свойства этих частичных отображений f_i^j.

В работах [95]-[100] Т.М. Папиевой исследованы частичные отображения евклидовых пространств $E_{4,}E_n$, порождаемых заданной циклической сетью Френе $\tilde{\Sigma}_4, \tilde{\Sigma}_n$ соответственно. Найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа заданной циклической сети Френе в каждом из рассматриваемых частичных отображениях; получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы рассматриваемые частичные отображения являлись движениями; найден геометрический смысл полученных необходимых и достаточных условий; выявлена связь между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определяемых заданной циклической сетью Френе, а также связь между этими векторами и векторами кривизн линий заданной сети; доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии заданной циклической сети являлись двойными линиями рассматриваемых отображений.

В работах [57]-[62] Н. Н. Курбанбаевой рассмотрены частичное отображения f_i^j евклидова пространства E_4, порождаемые заданным семейством гладких линий. Исследована роблема существования двойных (квазидвойных) линий частичного отображения f_i^j и пар

$(f_i^j, \Delta_{(ik)})$ $\left((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})\right)$. Доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений f_i^j четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семействам гладких линий; найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семействам гладких линий; получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^iциклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар $(f, \Delta_{(k\ell)})$, где $\Delta_{(k\ell)} = (X, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell)$ – двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_k, \vec{e}_\ell$; б) квазидвойными линиями пар $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$, где $\Delta_{(ik\ell)}$ – трехмерное распределение, определяемое векторными полями $(\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell)$; доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $(\Delta_{(ik\ell)})$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ $\left((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})\right)$.

1.2. Объект исследования и постановки задачи

В области Ω пространства E_n заданы семейства линий таких, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна и только одна линия каждого семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_i)(i, j, k = \overline{1, n})$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [99] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \overrightarrow{e_i},\ d\overrightarrow{e_i} = \omega_i^k \overrightarrow{e_k}. \tag{1.2.1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ \ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{1.2.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\overrightarrow{e_i}$ образуют сеть Френе Σ_n для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\mathcal{R}$ построен на касательных к линиям сети Σ_n, формы ω_i^k становятся главными[32], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{1.2.3}$$

В силу последнего равенства формулы (1.2.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{1.2.4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (1.2.3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (1.2.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (1.2.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda^k_{j\ell}\omega^j_i \wedge \omega^\ell = d\Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j_\ell \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda^k_{ij} \wedge \omega^\ell_j \wedge \omega^j - \Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j_\ell \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda^k_{ij} - \Lambda^k_{i\ell} \wedge \omega^\ell_j - \Lambda^k_{\ell j} \wedge \omega^\ell_i\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [106] отсюда имеем:

$$d\Lambda^k_{ij} - \Lambda^k_{i\ell} \wedge \omega^\ell_j - \Lambda^k_{\ell j} \wedge \omega^\ell_i = \Lambda^k_{ijm}\omega^m$$

или

$$d\Lambda^{\ k}_{ij} = \left(\Lambda^{\ k}_{ijm} + \Lambda^{\ k}_{il}\Lambda^{\ l}_{jm} + \Lambda^{\ k}_{lj}\Lambda^{\ l}_{im}\right)\omega^m \qquad (1.2.5)$$

отсюда

$$B^j_{ikm} = \Lambda^{\ k}_{ijm} + \Lambda^{\ k}_{il}\Lambda^{\ l}_{jm} + \Lambda^{\ k}_{lj}\Lambda^{\ l}_{im}\,. \qquad (1.2.6)$$

Система величин $\left\{\Lambda^k_{ij}, \Lambda^k_{ijm}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид [93]:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda^2_{11}\vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda^1_{21}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{21}\vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda^2_{31}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{31}\vec{e}_4,$$
$$- - - - - - - - - - -$$
$$d_1\vec{e}_{n-1} = -\Lambda^{n-1}_{n-2,1}\vec{e}_{n-2} + -\Lambda^n_{n-1,1}\vec{e}_n$$
$$d_1\vec{e}_n = -\Lambda^n_{n-1,1}\vec{e}_{n-1}$$

И

$$\Lambda^1_{i1} = 0\ (i < j, i = 1,2, \dots n-2; j = 3,4, \dots, i+1, \dots, n),$$
$$\Lambda^{i+1}_{i1} = 0\ (i < j, i = 1,2, \dots n-2)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2, k_2^1 = \Lambda_{21}^3, k_3^1 = \Lambda_{31}^4, \ldots, k_{n-1}^1 = \Lambda_{n-1,1}^n$ – первая, вторая, третья, …, $(n\text{-}1)$-я кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [31] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^1 сети Σ_n определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \overrightarrow{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i.$$

В каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существует по $n\text{-}1$ псевдофокусов: когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$, псевдофокус F_i^j описывает свою область $\Omega_i^j \subset E_n$. В результате которого получается частичное отображение $f_i^j: \Omega \longrightarrow \Omega_i^j$ такое, что $f_i^j(X) = F_i^j$.

Рассматривается задача нахождения необходимых и достаточных условий существования квазидвойных линий частичных отображений f_i^j при $n=5$ и $n=6$, также обобщение полученных результатов в пространстве E_n.

1.3. Методы исследования

В данном исследовании использованы метод внешних форм Картана и метод подвижного репера.

“Метод внешних форм Картана” является алгебраическим методом исследования многообразий различных структур и систем диффренециальных уравнений. Алгебраическую основу этого метода составляет алгебра Грассмана. Определение этой алгебры приведем в следующем.

Пусть V – векторное пространство над полем K, $dimV = n$. Внешним произведением ковекторов $\underset{\to}{x}, \underset{\to}{y} \in V^*$ называется антисимметрический тензор $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = \underset{\to}{x} \otimes \underset{\to}{y} - \underset{\to}{y} \otimes \underset{\to}{x}$. Значит, $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} \in V^* \otimes V^*$.

Если $\left(\underset{\to}{e^i}\right)_{1 \le i \le n}$ – V^* базис, то $\underset{\to}{e^i} \wedge \underset{\to}{e^j} = \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i}$. Пусть

$\underset{\to}{x} = x_i \underset{\to}{e^i}$, $\underset{\to}{y} = y_j \underset{\to}{e^j}$.

Тогда $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = x_i y_j \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - y_j x_i \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i} =$

$$= x_i y_j \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - x_j y_i \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} = \left(x_i y_j - x_j y_i\right) \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} .$$

Но, $\left(\underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j}\right)$– $V^* \otimes V^*$ базис векторного пространства. Значит, $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y}$ внешнее произведение ($V^* \otimes V^*$ как вектор вектор простанства) имеет в этом базисе координаты $t_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ Имеем: $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j}$

$$\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = \frac{1}{2}\left(t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} + t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j}\right) = \frac{1}{2}\left(t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} + t_{ji} \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t_{ij} \underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - t_{ij} \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i}\right) = \frac{1}{2} t_{ij} \left(\underset{\to}{e^i} \otimes \underset{\to}{e^j} - \underset{\to}{e^j} \otimes \underset{\to}{e^i}\right) = \frac{1}{2} t_{ij} \underset{\to}{e^i} \wedge \underset{\to}{e^j} .$$

Таким образом,если использовать внешнее произведение векторов базиса в V^*, то получим:

$$\underset{\to}{x}\wedge\underset{\to}{y}=\frac{1}{2}t_{ij}\,\underset{\to}{e}^{i}\wedge\underset{\to}{e}^{j}\ , \tag{1.3.1}$$

где $t_{ij}=x_i y_j-y_i x_j=\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$.

Из чисел $1,2,\ldots,n$ возьмем какие-либо два различные: i_o, j_o где $i_o<j_o$. В сумме (1.3.1) найдутся член: $\frac{1}{2}t_{i_oj_o}\,\underset{\to}{e}^{i_o}\wedge\underset{\to}{e}^{j_o}$ и $\frac{1}{2}t_{j_oi_o}\,\underset{\to}{e}^{j_o}\wedge\underset{\to}{e}^{i_o}$. Их сумма равна

$\frac{1}{2}t_{i_oj_o}\,\underset{\to}{e}^{i_o}\wedge\underset{\to}{e}^{j_o}+\frac{1}{2}\left(-t_{i_oj_o}\right)(-1)\underset{\to}{e}^{i_o}\wedge\underset{\to}{e}^{j_o}=t_{i_oj_o}\,\underset{\to}{e}^{i_o}\wedge\underset{\to}{e}^{j_o}$, где $i_o<j_o$. Поэтому формулу (1.3.1) можно записать так:

$$\underset{\to}{x}\wedge\underset{\to}{y}=\sum_{i<j}t_{ij}\,\underset{\to}{e}^{i}\wedge\underset{\to}{e}^{j}\ . \tag{1.3.2}$$

Внешнее произведение p ковекторов $\underset{\to}{x}^{1},\underset{\to}{x}^{2},\ldots,\underset{\to}{x}^{p}$ на V^* определяется формулой:

$$\underset{\to}{x}^{1}\wedge\underset{\to}{x}^{2}\wedge\ldots\wedge\underset{\to}{x}^{p}=\sum(-1)^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p]}\,\underset{\to}{x}^{\alpha_1}\otimes\underset{\to}{x}^{\alpha_2}\otimes\ldots\otimes\underset{\to}{x}^{\alpha_p}\ ,$$

где $(\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ – подстановка индексов $1,2,\ldots,p$ и число беспорядков в этой подстановке.

Таким образом, $\underset{\to}{x}^{1}\wedge\underset{\to}{x}^{2}\wedge\ldots\wedge\underset{\to}{x}^{p}$ – есть антисимметрический ковариантный тензор валентности p (короче, ковариантный тензор p-вектор) это определенный элемент тензорного произведения $\overset{p}{\otimes}V^*$.

Если $\left(\underset{\to}{e}^{i}\right)$ – базис в V^* и $\underset{\to}{x}^{\alpha}=x_i^{\alpha}\,\underset{\to}{e}^{i}$ $\quad(\alpha=1,2,\ldots,p;\ i=1,2,\ldots,n)$ то

$$\underset{\to}{x}^{1}\wedge\underset{\to}{x}^{2}\wedge\ldots\wedge\underset{\to}{x}^{p}=\sum(-1)^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p]}\,x_{i_1i_2\ldots i_p}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\,\underset{\to}{e}^{i_1}\otimes\underset{\to}{e}^{i_2}\otimes\ldots\otimes\underset{\to}{e}^{i_p}\ .$$

Обозначим через

$$t_{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{vmatrix} x^1_{i_1} & x^1_{i_2} \dots & x^1_{i_p} \\ x^p_{i_1} & x^p_{i_2} \dots & x^p_{i_p} \end{vmatrix}.$$

Определитель из координат с номерами $i_1, i_2, \dots, i_p$ данных векторов $\underset{\to}{x}^1, \underset{\to}{x}^2 \dots, \underset{\to}{x}^p$ Тогда $\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x}^p = t_{i_1 i_2 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \otimes \underset{\to}{e}^{i_2} \otimes \dots \otimes \underset{\to}{e}^{i_p}$.

Значит, $t_{i_1 i_2 \dots i_p}$ – координаты внешнего произведения $\underset{\to}{x}^1 \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x}^p$ как вектора из $\overset{p}{\otimes} V^*$ относительно базиса $\left(\underset{\to}{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underset{\to}{e}^{i_p}\right)$ этого векторного пространства.

Введем внешнее произведение векторов базиса $\left(\underset{\to}{e}^{i}\right)$ в V^*:

$$\underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p} = \sum (-1)^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]} \underset{\to}{e}^{i_{\alpha_1}} \otimes \underset{\to}{e}^{i_{\alpha_2}} \dots \otimes \underset{\to}{e}^{i_{\alpha_p}}$$

Тогда получим формулы, аналогичные формулам (1.3.1) и (1.3.2):

$$\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x}^p = \frac{1}{p!} t_{i_1 t_2 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}, \tag{1.3.3}$$

$$\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \dots \wedge \underset{\to}{x}^p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} t_{i_1 t_2 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}. \tag{1.3.4}$$

Вообще всякий ковариантный антисимметрический тензор A валентности p т.е. тензор $A = a_{i_1 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \underset{\to}{e}^{i_p}$ можно записать в виде $A = \frac{1}{p!} a_{i_1 i_2 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}$ или в виде

$$A = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}. \tag{1.3.5}$$

Заметим, что всякий тензор A (т.е. ковариантный $p-$вектор) определяется значениями своих C^p_n координат, у которых $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. Эти координаты $i_1, i_2, \dots, i_p$ называются существенными (остальные координаты этого тензора выражаются через существенные координаты либо равны нулю).

Ковариантный вида $\underset{\to}{x}^1 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}^p$ (где $\underset{\to}{x}^\alpha \in V^*$) называется **разложимым**. Из формулы (1.3.5) следует, что всякий ковариантный $p-$ вектор A есть сумма разложимых $p-$векторов.

Из сказанного выше следует, что внешнее умножение обладает следующими свойствами:

1⁰. $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} = -\underset{\to}{y} \wedge \underset{\to}{x}$ (антикоммутативность: отсюда $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{x} = 0$)

$2^0.$ $\underset{\to}{x} \wedge \left(\underset{\to}{y} + \underset{\to}{z}\right) = \underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y} + \underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{z}$, $\left(\underset{\to}{x} + \underset{\to}{y}\right) \wedge \underset{\to}{z} = \underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{z} + \underset{\to}{y} \wedge \underset{\to}{z}$

(дистрибутивность).

3⁰. $\left(\alpha \underset{\to}{x}\right) \wedge \underset{\to}{y} = \underset{\to}{x} \wedge \left(\alpha \underset{\to}{y}\right) = \alpha\left(\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y}\right)$, $\alpha \in K$.

4⁰. $\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}^p = 0 \Leftrightarrow$ ($\underset{\to}{x}^1, \underset{\to}{x}^2, \ldots, \underset{\to}{x}^p$ $-$линейно зависимы).

В самом деле, $\underset{\to}{x}^1 \wedge \underset{\to}{x}^2 \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{x}^p = 0$ (нулевой вектор из $\overset{p}{\otimes} V^*$) тогда и только тогда, когда равны нулю все его координаты $t_{i_1 \ldots i_p}$, т.е.равны нулю все миноры $p-$ порядка матрицы $\left\| x_i^\alpha \right\|$ из координат векторов $\underset{\to}{x}^1, \underset{\to}{x}^2, \ldots, \underset{\to}{x}^p -$ это означает, что ковекторы $\underset{\to}{x}^1, \ldots, \underset{\to}{x}^p$ линейно зависимы.

Обозначим через $\overset{p}{\wedge} V^*$ множество всех ковариантных $p-$ векторов. Ясно, что $\overset{p}{\wedge} V^* \subset \overset{p}{\otimes} V^*$. Если $A, B \in \overset{p}{\wedge} V^*$, то и $A + B -$ p ковариантный антисимметрический тензор валентности p и значит, $A + B \in \overset{p}{\wedge} V^*$. Далее, $\left(A \in \overset{p}{\wedge} V^*,\ \alpha \in K\right) \Rightarrow$ $\alpha A \in \overset{p}{\wedge} V^*$.Таким образом, подмножество $\overset{p}{\wedge} V^*$ векторного пространства $\overset{p}{\otimes} V^*$ является подпространством в $\overset{p}{\otimes} V^*$.

Векторное пространство $\overset{p}{\wedge} V^*$ называется $p-$й внешней степенью векторного пространства V^*; его элементы называются внешними элементами степени p.

Базис пространства $\overset{p}{\wedge} V^*$ образован внешними произведениями $\underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p}$, где индексы $i_1,\ldots,i_p$ прибегают значения от 1 до n так, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$. Отсюда следует, что $dim \overset{p}{\wedge} V^* = C_n^p$ (число сочетаний из n элементов по p).

Рассмотрим $p-$вектор и $q-$вектор $A \in \overset{p}{\bigwedge} V^*, B \in \overset{q}{\bigwedge} V^*$, где $p + q \le n = dimV^*$. Пусть:

$$A = \frac{1}{p!} a_{i_1 \ldots i_p} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \underset{\to}{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p},$$
$$B = \frac{1}{q!} в_{j_1 \ldots j_q} \underset{\to}{e}^{j_1} \wedge \underset{\to}{e}^{j_2} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{j_q}.$$

Внешним произведением поливекторов A и B называется $(p+q)-$вектор:

$$A \wedge B = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} a_{i_1 \ldots i_p} в_{j_1 \ldots j_q} \underset{\to}{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{i_p} \wedge \underset{\to}{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \underset{\to}{e}^{j_q} \in \overset{p+q}{\bigwedge} V^*.$$

Это определение распространяется и на случай $p = 0$ или $q = 0$, если условиться считать, что $\alpha \wedge B = \alpha B$ и $A \wedge \alpha = \alpha A$, где $\alpha \in K$. В случае $p = 1,\ q = 1$ внешнее произведение ковекторов $\underset{\to}{x} = x_i \underset{\to}{e}^i$ и $\underset{\to}{y} = y_j \underset{\to}{e}^j$ есть бивектор $\underset{\to}{x} \wedge \underset{\to}{y}$ рассмотренный выше.

Из определения $A \wedge B$ получаем такие следствия:

1. $(\alpha A) \wedge B = A \wedge (\alpha B) = \alpha(A \wedge B)$- скалярный множитель можно выносить за знак внешнего произведения.

2. $\left.\begin{matrix} A \wedge (B_1 + B_2) = A \wedge B_1 + A \wedge B_2 \\ (A_1 + A_2) \wedge B = A_1 \wedge B + A_2 \wedge B \end{matrix}\right\}$ (дистрибутивность)

3. Если $A-$ есть $p-$ вектор, $B-$есть $q-$ вектор, то $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A.$

4. Для любых $p-$ вектора $A,$ $q-$ вектора B и $r-$ вектора C имеем$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ (ассоциативность). Поэтому, здесь скобки можно опустить и писать $A \wedge B \wedge C$.

Обозначим через $\wedge V^*$ прямую сумму векторных пространств $\overset{p}{\wedge} V^*$ для всех $p \geq 0$ (надо брать лишь $p \leq n,$ так как всякий $p-$ вектор при $p > n$ является нулевым и значит, соответствующие векторное пространство $\overset{p}{\wedge} V^*$состоит из одного нулевого вектора).

Таким образом, $\wedge V^* -$ есть прямая сумма $n+1$ векторных пространств $\overset{0}{\wedge} V^* = K,$ $\overset{1}{\wedge} V^*, \ldots, \overset{n}{\wedge} V^*,$ $n = dim V^*$. Каждый элемент $z \in \wedge V^*$ однозначно представим в виде $z = \sum_{p=0}^{n} z_p$ (где $z_p \in \overset{p}{\wedge} V^*$).

Так, как $\wedge V^*$ есть прямая сумма пространств $\overset{p}{\wedge} V^*$ $(p = 0, 1, \ldots, n),$ то

$$dim(\wedge V^*) = \sum_{p=0}^{n} dim\left(\overset{p}{\wedge} V^*\right) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n .$$

(как сумма биномиальных коэффициентов). Для любых двух элементов $z = \sum_{p=0}^{n} z_p,$ $z' = \sum_{q=0}^{n} z'_q \in \wedge V^*$ из $\wedge V^*$ положим $z \wedge z' = \sum_{p,q} (z_p \wedge z'_q).$

Таким образом, на векторном пространстве $\wedge V^*$ определено умножение. Можно проверить, что теперь $\wedge V^*$ есть алгебра над K. Она называется внешней алгеброй (или алгеброй Грассмана) векторного пространства V^*. Каждый элемент из V^* есть линейная форма, определенная на векторном пространстве V. Каждый элемент из $\overset{p}{\wedge} V^*$ (т.е. каждый ковариантный $p-$ вектор или, иначе говоря, каждый внешний элемент степени p) называют внешней формой степени p на векторном пространстве V.

Пусть $\varphi^k -$ r линейно независимых линейных форм, т.е. r линейно независимых ковекторов из V^*(удобнее в дальнейшем писать φ^k, а $\underset{\to}{\varphi^k}$), ψ_k –другие r элементов из V^* таких,что

$$\psi_k \wedge \varphi^k = 0 \qquad (k = 1,2,...,r) \tag{1.3.6}$$

Лемма Картана. Равенство (1.3.6) имеет место тогда и только тогда, когда формы ψ_ℓ являются линейным комбинациями форм φ^k т.е. $\psi_\ell = C_{\ell k}\varphi^k$ с симметрической матрицей коэффициентов $C_{\ell k} = C_{k\ell}$.

Метод “Подвижного репера” – это геометрический метод “локального” исследования многообразия вложенных многообразий однородных пространств. Вложенное многообразие и его все геометрические объекты исследуются относительно возможного репера. Метод “Подвижного репера” включает в себя следующий процесс “канонизации репера”: единственный репер инвариантным образом “присоединяется” к каждой точке многообразия с целью получения дифференциальных объектов, которые характеризуют многообразие с “точностью до преобразования”.

Метод “Подвижного репера” в общем виде был предложен Э. Картаном [106] и он показал различные “закономерности” (примеры) использования этого метода. Ниже мы сосредоточимся на использовании этого метода для определения уравнений структуры евклидова пространства.

В евклидовом пространстве E_n зададим ортонормированный репер $\mathcal{R}_o = (\mathfrak{I}_1, \dots, \mathfrak{I}_n)$ (“начальный” репер). Всякий другой репер $\mathcal{R}_x = (x, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ определяется радиус-вектором своего начала $\vec{x} = x^i \vec{\mathfrak{I}}_i$ и координатными векторами $\vec{e}_i = \xi_i^k \vec{\mathfrak{I}}_k$.

Если потребовать, чтобы репер $\mathcal{R}_x$ был ортонормированным, то векторы $\vec{e}_i$ должны удовлетворять условию

$$\vec{e}_i \vec{e}_{ij} = \delta_{ij} \tag{1.3.7}$$

(δ_{ij} – символ Кронекера). Следовательно, матрица $\left\| \xi_i^k \right\|$ должна быть ортогональной. Поэтому n^2 элементов ξ_i^k этой матрицы должны удовлетворять

$$n + C_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

уравнениям (2.2.7). Значит, независимыми останутся $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ элементов ξ_i^k.

Вместе с n переменными x^i они составят $r = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ параметров, от которых зависить ортонормированный репер $\mathcal{R}_x$ в E_n.

Но, задание упорядоченной пары реперов $(\mathcal{R}_o, \mathcal{R}_x)$ однозначно определяет движение $f(\mathcal{R}_o) = \mathcal{R}_x$[29]. Поэтому можно, сказать, что группа движений пространства E_n зависит от $r = \frac{n(n+1)}{2}$ параметров. Каждая система значений этих r параметров определяет свой ортонормированный репер $\mathcal{R}_x$ и значит, соответствующее движение f пространства E_n. Обозначим через $u^a(a = 1,2,\dots,r)$ те значения рассматриваемых параметров, для которых получен репер $\mathcal{R}_x = \left(x, \vec{e}_{1,} \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\right)$.

Придадим этим параметрам бесконечно малые приращения du^a, т.е. рассмотрим новые значения $u^a + du^a$ указанных параметров. Эти новые значения параметров определяет новый ортонормированный репер

$$\mathcal{R}_{x'} = \left(x', \overrightarrow{e'}_{1,} \overrightarrow{e'}_2, \dots, \overrightarrow{e'}_n\right) \text{ где } x' = \vec{x} - \Delta\vec{x}\ , \vec{e}_{i'} = \vec{e}_i + \Delta\vec{e}_i.$$

Обозначим через $d\vec{x}$ и $d\vec{e}_i$ главные части бесконечно малых приращений $\Delta\vec{x}$ и $\Delta\vec{e}_i$ соответственно. Векторы $\vec{x}$ и $d\vec{e}_i$ можно разложить по координатным векторам репера $\mathcal{R}_x$:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad (i, j, \kappa = 1, 2, \dots n). \tag{1.3.8}$$

Здесь ω^i, ω_i^j – представляют собой *1*- формы, которые (как будет показано ниже) линейно выражаются через дифференциалы du^a параметров u^a.

Эти *1*- формы: ω^i, ω_i^j –называются компонентами движений репера $\mathcal{R}_x$ [106]. Их нельзя брать произвольно.

Прежде всего надо учесть, что мы имеем семейство ортонормированных реперов $\mathcal{R}_x$. Следовательно, соотношения (1.3.7) должны выполняться тождественно(при любых значениях u^a из допустимой области описываемой точкой u^a) Поэтому указанные соотношения можно дифференцировать. Находим $(d\vec{e}_i)\vec{e}_j + \vec{e}_i\left(d\vec{e}_j\right) = 0$ и используя уравнения (1.3.8) получим:

$$\omega_i^k \vec{e}_k \vec{e}_j + \omega_j^k \vec{e}_k \vec{e}_i = 0 \text{ же } \quad \omega_i^k \delta_{kj} + \omega_j^k \delta_{ki} = 0.$$

Отсюда $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ т.е. ($(n \times n)$-матрица $\omega = (\omega_i^j)$ должна быть кососимметричной. В частности, все элементы главной диагонали этой матрицы равны нулю:

$$\omega_i^i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Однако существуют и другие условия, которым должны удовлетворять компоненты движений репера $\mathcal{R}_x$ – это так называемые уравнения структуры пространства E_n. Чтобы получить их, запишем систему (1.3.8) (используя репера $\mathcal{R}_o$) в виде:

$$d(x^k \vec{I}_k) = \omega^i \xi_i^k \vec{I}_k, \ \ d(\xi_i^k \vec{I}_k) = \omega_i^j \xi_j^k \vec{I}_k.$$

Следовательно, система (1.3.8) эквивалентна такой системе:

$$dx^k = \omega^i \xi_i^k, \ d\xi_i^k = \omega_i^j \xi_j^k \tag{1.3.9}$$

Отсюда

$$\omega^i = \tilde{\xi}_k^i dx^k, \ \omega_i^j = \tilde{\xi}_k^j d\xi_i^k \tag{1.3.10}$$

Так выражаются формы ω^i, ω_i^j через координаты начала x, координаты векторов $\vec{e}_i$ репера $\mathcal{R}_x$ и дифференциалы этих координат. Так как

$\xi_i^k \tilde{\xi}_k^j = \delta_i^j$, то

$$(d\xi_i^k) = \tilde{\xi}_k^j + \xi_i^k d\tilde{\xi}_k^j = 0. \tag{1.3.11}$$

Далее, находим:

$$D\omega^i = d\tilde{\xi}_k^i \wedge dx^k. \tag{1.3.12}$$

Из (1.3.9) и (1.3.10) получим $\omega_i^j = -\xi_i^k d\tilde{\xi}_k^j$.

Отсюда

$$d\tilde{\xi}_k^i = -\tilde{\xi}_k^t \omega_t^i \tag{1.3.13}$$

Теперь равенство (1.3.10) примет вид:

$$D\omega^i = -\tilde{\xi}_k^t \omega_t^i \wedge dx^k \text{ или } D\omega^i = \tilde{\xi}_k^j, dx^k \wedge \omega_j^i.$$

Используя первое из уравнений (1.3.10), получим:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i . \qquad (1.3.14)$$

Из равенства (1.3.14) по теореме Фробениуса заключаем, что система форм ω^i вполне интегрируема.

Из второго уравнения системы (1.3.10) находим $D\omega_i^j = d\tilde{\xi}_k^{\,j} \wedge d\xi_i^k$, откуда, используя (1.3.13) имеем

$$D\omega_i^l = -\tilde{\xi}_k^{\,t}\omega_t^j \wedge d\xi_i^k = \tilde{\xi}_k^{\,t} d\xi_i^k \wedge \omega_t^j .$$

С учетом второго из уравнений (1.3.10) получим

$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j . \qquad (1.3.15)$$

Отсюда по теореме Фробениуса следует, что система форм ω_i^j вполне интегрируема.

Итак, мы получили уравнения:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i ,\, D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i ,\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0 ,\ \left(i, j, \kappa = 1,2,\ldots,n\right). \qquad (1.3.16)$$

Которые и называются уравнениями структуры евклидова пространства E_n. В силу уравнений (1.3.16) система (1.3.9), или, что, то же самое, система (1.3.8) (это та же система (1.3.9), записанная в векторной форме)), вполне интегрируема. В этой системе неизвестными являются x^κ, ξ_i^κ, т.е. векторы $\vec{x}, \vec{e}_i$ которые и определяют репер $\mathcal{R}_x$. Покажем, что если выбрать начальные условия так, чтобы соответствующий репер $(\mathcal{R}_x)_o$ был ортонормированным, то эти начальные условия определят такое решение $\vec{x}, \vec{e}_i$ для которого репер $\mathcal{R}_x$ также будет ортонормированным. Прежде всего заметим, что компоненты ω^i, ω_i^j не зависят от выбора неподвижного репера $\mathcal{R}_o$ (они зависят только от положения репера $\mathcal{R}_{x\prime}$ относительно репера $\mathcal{R}_x$). В самом деле, если от репера $\mathcal{R}_o = (0, \vec{I}_x)$ перейти к реперу

$\mathcal{R}'_o = (0, \vec{I}'_x)$ (перенос начала), то $\overrightarrow{O'x} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Ox}$ и, дифференцируя, получим $d\overrightarrow{O'x} = d\overrightarrow{Ox} = \omega^i \vec{e}_i$. Если же от репера $\mathcal{R}_o = (0, \vec{I}_x)$ перейти к реперу $\mathcal{R}'_o = (0, \vec{I}'_x)$ (замена координатных векторов), то координаты каждго вектора, конечно, меняются, но сами векторы $\vec{x}, \vec{e}_i$ останутся неизменными. Значит, в уравнениях (1.3.8) ни один из векторов $d\vec{x},\ \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i$ не изменится при замене неподвижного репера $\mathcal{R}_o$ (он зависят только от положения репера $\mathcal{R}_x{}'$ относительно репера $\mathcal{R}_x$.

Пусть начальные условия для системы уравнений (1.3.8) выбраны так, что соответствующий репер $\mathcal{R}_{x_o} = (x_0, (\vec{e}_i)_0)$ – ортонормированный. Рассмотрим "бесконечно близкий" репер $\mathcal{R}_x = (x, \vec{e}_i)$ где

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + d\vec{x}, \vec{e}_i = (\vec{e}_i)_0 + \ \omega_i^j (\vec{e}_j)_0 .$$

Находим:

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = (\vec{e}_i)_0 + \omega_i^k (\vec{e}_k)_0 \left((\vec{e}_j)_0 + \omega_j^t (\vec{e}_t)_0 \right) =$$
$$= (\vec{e}_i)_0 (\vec{e}_j)_0 + \omega_i^k (\vec{e}_k)_0 (\vec{e}_j)_0 + \ \ \omega_i^k \omega_j^t (\vec{e}_k)_0 (\vec{e}_t)_0.$$

Так, как репер $\mathcal{R}_{x_o}$ – ортонормированнгый, то $(\vec{e}_g)_0 (\vec{e}_h)_0 = \delta_{gh}$ и поэтому

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij} + \omega_i^k \delta_{kj} + \omega_j^t \delta_{ti} + \ \omega_i^k \omega_j^t \delta_{kt} = \delta_{ij} + \omega_i^j + \omega_j^i + \sum_k \omega_i^k \omega_j^t \ .$$

В силу уравнений структуры имеем $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$, и так как мы учитываем (при интегрировании) лишь бесконечно малые первого порядка, то $\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}$. Следовательно, репер $\mathcal{R}_x$ – ортонормированный.

Применяя такую же процедуру к $\mathcal{R}_x$ (принимая репер $\mathcal{R}_x$ за начальный репер $(\mathcal{R}_{x_o})$, найдем, что всякий соседний репер $\mathcal{R}_x{}'$

является ортонормированным, и.т.д. Значит, все семейство $(\mathcal{R}_x)$ реперов, образованное решениями системы (1.3.8) состоит из ортонормированных реперов.

Замечание 1.3.1. Как отмечено выше, 1-форм ω^i вполне интегрируема. Первое уравнение системы (1.3.10) показывает, что первыми интегралами системы уравнений $\omega^i = 0$ являются x^k т.е. координаты точки x–вершины репера $\mathcal{R}_x$. Если мы положим

$$x^\kappa = x^\kappa\left(t^1,\dots,t^p\right) \qquad (1.3.17)$$

(где правые части – дифференцируемые функции в некоторой области $\Omega \subset R^p$, причем ранг $\left\|\frac{\partial x^k}{\partial t^s}\right\| = p$) и подставим это выражение в первое из уранений (1.3.9), то получим, что 1-формы ω^i зависят только от p независимых дифференциалов dt^s. После интегрирования системы (1.3.9) получим семейство реперов $(\mathcal{R}_x)$, вершины которых заполняют p -поверхность (1.3.16).

Обратно если в системе уравнений (1.3.9) формы ω^i зависят только от p независимых дифференциалов и выполняются уравнения (1.3.15), то эта система при задании репера $((\mathcal{R}_x)_o$ определит семейство реперов $(\mathcal{R}_x)$, вершины которых заполняют некоторую p - поверхность (здесь везде рассмотрение локальное). Система (1.3.8) будет определять не только эту поверхность, но также и все те, которые получаются из нее с помощью произвольных движений, т.е. все ей когруэнтные поверхности [106].

Глава 2. Существование квазидвойных линий частичного отображения пространства E_5, порождаемых заданной циклической сети френе

2.1. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_1^5

Псевдофокус $F_1^5 \in (X, \vec{e}_1)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_1^5} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1 = \overrightarrow{X} + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1. \qquad (2.1.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, точка F_1^5 описывает свою область $\Omega_1^5 \subset E_5$. Получается частичное отображение $f_1^5 \colon \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.

Продифференцируя равенство (2.1.1) и применяя деривационные формулы получаем следующее:

$$\overrightarrow{dF_1^5} = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1\right) = d\vec{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}d\,\overrightarrow{e_1} =$$

$$= \omega^i\vec{e}_i - \frac{d\Lambda_{15}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

В силу формулы (1.2.3), (1.2.5) имеем

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5\omega^m}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i,$$

где

$$B_{15m}^5 = \Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^\ell + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^\ell.$$

Последнее равенство запишем в следующем виде:

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i \omega^m}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

или

$$d_1\,\overrightarrow{F_1^5} = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{152}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B_{153}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - -\frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{154}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e}_5 + \frac{B_{155}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - -\frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^5.$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B_{152}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B_{153}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B_{154}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_5 = \vec{e}_5 + \frac{B_{155}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i.$$

Тогда имеем следующее равенство

$$d\,\overrightarrow{F_1^5} = \omega^1\vec{b}_1 + \omega^2\vec{b}_2 + \omega^3\vec{b}_3 + \omega^4\vec{b}_4 + \omega^5\vec{b}_5.$$

Когда сеть Френе $\tilde{\Sigma}_5$ является циклической сетью, векторы $\vec{b}_i$ имеют следующий вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{151}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_2;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B^5_{152}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^5_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^5_{153}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{\Lambda^5_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5; \qquad (2.1.2)$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^5_{154}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda^5_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_5 = \frac{B^5_{155}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2.$$

Эти векторы не являются линейно независимыми. В области Ω^5_1 рассмотрим репер $\mathcal{R}' = (F^5_1, \overrightarrow{b_i})$.

Рассмотрим линию α принадлежащую распределению $\Delta_{(123)}$. Её касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\alpha} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3.$$

А касательный вектор линии $\bar{\alpha} = f^5_1(\alpha)$ имеет следующий вид:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1\vec{b}_1 + \alpha^2\vec{b}_2 + \alpha^3\vec{b}_3.$$

В силу формулы (2.1.2) вектор $\vec{\bar{\alpha}}$ будет в следующем виде:

$$\vec{\bar{\alpha}} = (\alpha^1 b^1_1 + \alpha^2 b^1_2 + \alpha^3 b^1_3)\vec{e}_1 + (\alpha^1 b^2_1 + \alpha^2 + \alpha^3 b^2_3)\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3 + \\ +(\alpha^2 b^5_2 + \alpha^3 b^5_3)\vec{e}_5.$$

Где b^j_i – j-я координата вектора $\vec{b}_i$.

Из условия $\vec{\alpha}, \vec{\bar{\alpha}}, \overrightarrow{XF^5_1} \in \Delta_{(123)}$ получаем $\alpha^1 b^5_2 + \alpha^3 b^5_3 = 0$.

В силу формулы (2.1.2) последнее равенство примет следующий вид:

$$\Lambda^5_{12}\alpha^2 + \Lambda^5_{13}\alpha^3 = 0, \qquad (2.1.3)$$

где Λ^5_{12} – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^5_{13} – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если имеет место условие (2.1.3), то линия α принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией пары $(f_1^5, \Delta_{(123)})$.

Аналогично рассмотрим линию β принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$. Её касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4.$$

Найдем касательный вектор линии $\bar{\beta} = f_1^5(\beta)$. Получим следующее:

$$\vec{\bar{\beta}} = (\beta^1 b_1^1 + \beta^2 b_2^1 + \beta^4 b_4^1)\vec{e}_1 + (\beta^1 b_1^2 + \beta^2 + \beta^4 b_4^2)\vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4 +$$
$$+(\beta^2 b_2^5 + \beta^4 b_4^5)\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(124)}$ получаем $\beta^2 b_2^5 + \beta^4 b_4^5 = 0$.
В силу формулы (2.1.2) имеем следующее:

$$\Lambda_{12}^5 \beta^2 + \Lambda_{14}^5 \beta^4 = 0, \qquad (2.1.4)$$

где Λ_{12}^5 – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{14}^5 – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если имеет место условие (2.1.4), то линия β принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией пары $(f_1^5, \Delta_{(124)})$.

Отсюда имеем, для того чтобы линия β принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ являлась квазидвойной линией пары $(f_1^5, \Delta_{(124)})$ необходимо и достаточно чтобы координаты β^2, β^4 касательного вектора этой линии удовлетворяли условию (2.1.4).

Теперь рассмотрим линию γ принадлежащую распределению $\Delta_{(125)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^5 \vec{e}_5$.

Найдем касательный вектор линии $\bar{\gamma} = f_1^5(\gamma)$. Получим следующее:

$\vec{\bar{\gamma}} = (\gamma^1 b_1^1 + \gamma^2 b_2^1 + \gamma^5 b_5^1)\vec{e}_1 + (\gamma^1 b_1^2 + \gamma^2 + \gamma^5 b_5^2)\vec{e}_2 + \gamma^4 \vec{e}_4 + \gamma^2 b_2^5 \vec{e}_5.$

Из последнего равенства имеем выполнение условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(125)}$. Отсюда следует, что линия γ принадлежащая распределению $\Delta_{(125)}$ всегда является квазидвойной линией пары $\left(f_1^5, \Delta_{(125)}\right)$.

Теперь рассмотрим линию δ принадлежащую распределению $\Delta_{(234)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\overrightarrow{\delta} = \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + \delta^4 \vec{e}_4$.

Найдем касательный вектор линии $\overline{\delta} = f_1^5(\delta)$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{\delta}} = \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + \delta^4 \vec{e}_4$$

или

$\overrightarrow{\overline{\delta}} = (\delta^2 b_2^1 + \delta^3 b_3^1 + \delta^4 b_4^1)\vec{e}_1 + (\delta^2 + \delta^3 b_3^2 + \delta^4 b_4^2)\vec{e}_2 + (\delta^2 b_2^3 + \delta^3)\vec{e}_3 + +\delta^4 \vec{e}_4 + (\delta^3 b_3^5 + \delta^4 b_4^5)\vec{e}_5,$

где условие $\vec{\delta}, \vec{\bar{\delta}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(234)}$ не выполняется, так как $\overrightarrow{XF_1^5} = -\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1 \notin \Delta_{(234)}$.

Значит, линия $\delta \subset \Delta_{(234)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5.

Аналогично можно показать, что линия ℓ принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5.

Итак, линия ℓ принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5.

Теперь рассмотрим линию s принадлежащую распределению $\Delta_{(145)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{s} = s^1\vec{e}_1 + s^4\vec{e}_4 + s^5\vec{e}_5$.

А касательный вектор линии $f_1^5(s) = \bar{s}$ имеет следующий вид:

$$\vec{\bar{s}} = (s^1b_1^1 + s^4b_4^1 + s^5b_5^1)\vec{e}_1 + (s^1b_1^2 + s^4b_4^2 + s^5b_5^2)\vec{e}_2 + s^4\vec{e}_4 + s^4b_4^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\overrightarrow{XF_1^5}, \vec{s}, \vec{\bar{s}} \in \Delta_{(145)}$ получим:

$$s^1b_1^2 + s^4b_4^2 + s^5b_5^2 = 0.$$

В силу формулы (2.1.2) имеем

$$s^1\Lambda_{11}^2 + s^4\Lambda_{14}^2 + s^5\Lambda_{15}^2 = 0 \tag{2.1.5}$$

где Λ_{11}^2 – первая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{14}^2 – третья кривизна линии ω^4, Λ_{15}^2 – вторая кривизна линии ω^5.

Отсюда имеем, для того чтобы линия s принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ являлась квазидвойной линией пары $\left(f_1^5, \Delta_{(145)}\right)$ необходимо и достаточно чтобы координаты касательного вектора $\vec{s}$ этой линии удовлетворяли условию (2.1.5).

Теперь рассмотрим линию p принадлежащую распределению $\Delta_{(134)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{p} = p^1\vec{e}_1 + p^3\vec{e}_3 + p^4\vec{e}_4$.

А касательный вектор $\vec{\bar{p}}$ линии $f_1^5(p) = \bar{p}$ имеет следующий вид:

$$\vec{\bar{p}} = (p^1b_1^1 + p^4b_4^1 + p^5b_5^1)\vec{e}_1 + (p^1b_1^2 + p^3b_3^2 + p^4b_4^2)\vec{e}_2 + p^3\vec{e}_3 + p^4\vec{e}_4 + (p^3b_3^5 + p^4b_4^5)\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{p}, \vec{\bar{p}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(134)}$ имеем

$$p^1b_1^2 + p^3b_3^2 + p^4b_4^2 = 0;$$
$$p^3b_3^5 + p^4b_4^5 = 0.$$

В силу формулы (2.1.2) имеем следующее:

$$p^1\Lambda_{11}^2 + p^3\Lambda_{13}^2 + p^4\Lambda_{14}^2 = 0; \tag{2.1.6}$$

$$p^3\Lambda_{13}^5 + p^4\Lambda_{14}^5 = 0. \qquad (2.1.7)$$

где координаты вектора $\vec{p}$ имеют вид

$$p^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{13}^2 & \Lambda_{14}^2 \\ \Lambda_{13}^5 & \Lambda_{14}^5 \end{vmatrix}; \qquad p^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{14}^2 & \Lambda_{11}^2 \\ \Lambda_{14}^5 & 0 \end{vmatrix}; \qquad p^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{11}^2 & \Lambda_{13}^2 \\ 0 & \Lambda_{13}^5 \end{vmatrix}. \quad (2.1.8)$$

Следовательно, линия p принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_1^5, \Delta_{(134)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаторы $\{p^1, p^3, p^4\}$ ее касательного вектора удовлетворяют условия (2.1.8).

Рассмотрим линию q принадлежащую распределению $\Delta_{(135)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{q} = q^1\vec{e}_1 + q^3\vec{e}_3 + q^5\vec{e}_5$.

А касательный вектор $\vec{\bar{q}}$ линии $f_1^5(q) = \bar{q}$ имеет следующий вид:

$$\vec{\bar{q}} = (q^1b_1^1 + q^3b_3^1 + q^5b_5^1)\vec{e}_1 + (q^1b_1^2 + q^3b_3^2 + q^5b_5^2)\vec{e}_2 + q^3\vec{e}_3 +$$
$$+q^3b_3^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{q}, \vec{\bar{q}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(135)}$ имеем

$$q^1b_1^2 + q^3b_3^2 + p^5b_5^2 = 0.$$

Отсюда учитывая формулы (2.1.2) имеем:

$$q^1\Lambda_{11}^2 + q^3\Lambda_{13}^2 + q^5\Lambda_{15}^2 = 0. \qquad (2.1.9)$$

Следовательно, линия q принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_1^5, \Delta_{(135)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаторы ее касательного вектора удовлетворяют условия (2.1.9).

Доказана следующая теорема

Теорема 2.1.1. 1) Линия $\gamma \subset \Delta_{(125)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5;

2) Линия $\alpha \subset \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\Lambda_{12}^5\alpha^2 + \Lambda_{13}^5\alpha^3 = 0, \tag{2.1.3}$$

где Λ_{12}^5 – четвертая кривизна линии ω^2 циклической сети Френе; Λ_{13}^5 – третья кривизна линии ω^3 этой сети;

3) Линия $\beta \subset \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\Lambda_{12}^5\beta^2 + \Lambda_{14}^5\beta^4 = 0, \tag{2.1.4}$$

где Λ_{12}^5 – четвертая кривизна линии ω^2 циклической сети Френе; Λ_{14}^5 – вторая кривизна линии ω^4 сети Френе $\tilde{\Sigma}_5$;

4) Линия $s \subset \Delta_{(145)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$s^1\Lambda_{11}^2 + s^4\Lambda_{14}^2 + s^5\Lambda_{15}^2 = 0, \tag{2.1.5}$$

где Λ_{11}^2 – первая кривизна линии ω^1 циклической сети Френе; Λ_{14}^2 – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{15}^2 – вторая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

5) Линия $p \subset \Delta_{(134)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям:

$$p^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{13}^2 & \Lambda_{14}^2 \\ \Lambda_{13}^5 & \Lambda_{14}^5 \end{vmatrix}; \qquad p^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{14}^2 & \Lambda_{11}^2 \\ \Lambda_{14}^5 & 0 \end{vmatrix}; \qquad p^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{11}^2 & \Lambda_{13}^2 \\ 0 & \Lambda_{13}^5 \end{vmatrix}; \tag{2.1.8}$$

где Λ_{11}^2– первая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{13}^2– четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{14}^2 – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{13}^5 – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{14}^5 – вторая кривизна линии ω^4 сети Френе $\tilde{\Sigma}_5$

6) $q \subset \Delta_{(135)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$q^1\Lambda_{11}^2 + q^3\Lambda_{13}^2 + q^5\Lambda_{15}^2 = 0, \qquad (2.1.9)$$

где Λ_{11}^2– первая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{13}^2– четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{15}^2–Λ_{12}^5– четвертая кривизна линии ω^2 циклической сети $\tilde{\Sigma}_5$;

7) Линии, принадлежащие распределениям $\Delta_{(\tilde{\imath}jk)}$ $(\tilde{\imath} \neq 1)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_1^5.

Теперь рассмотрим линии принадлежащие четырехмерному распределению.

Касательный вектор линии μ принадлежащей распределению $\Delta_{(1234)}$ имеем вид: $\vec{\mu} = \mu^1\vec{e}_1 + \mu^2\vec{e}_2 + \mu^3\vec{e}_3 + \mu^4\vec{e}_4$. А касательный вектор линии $f_1^5(\mu) = \bar{\mu}$ найдем в виде:

$$\vec{\bar{\mu}} = \mu^1\vec{b}_1 + \mu^2\vec{b}_2 + \mu^3\vec{b}_3 + \mu^4\vec{b}_4.$$

В силу формулы (3.1.2) имеем:

$$\vec{\bar{\mu}} = (\mu^1 b_1^1 + \mu^2 b_2^1 + \mu^3 b_3^1 + \mu^4 b_4^1)\vec{e}_1 + (\mu^1 b_1^2 + \mu^2 + \mu^3 b_3^2 + \mu^4 b_4^2)\vec{e}_2 +$$
$$+\mu^3\vec{e}_3 + \mu^4\vec{e}_4 + (\mu^2 b_2^5 + \mu^3 b_3^5 + \mu^4 b_4^5)\vec{e}_5.$$

Отсюда, считая, что выполняется условие $\vec{\mu}\,, \vec{\bar{\mu}}\,, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(1234)}$ получим следующее:

$$\mu^2 b_2^5 + \mu^3 b_3^5 + \mu^4 b_4^5 = 0.$$

Отсюда, учитывая формулы (2.1.2) имеем:

$$\mu^2\Lambda_{12}^5 + \mu^3\Lambda_{13}^5 + \mu^4\Lambda_{14}^5 = 0, \qquad (2.1.10)$$

где Λ_{12}^5 – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{13}^5 – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{14}^5 – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.1.10), то линия $\mu \in \Delta_{(1234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5.

Рассмотрим линию $\nu \in \Delta_{(1235)}$, ее касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\nu} = \nu^1\vec{e}_1 + \nu^2\vec{e}_2 + \nu^3\vec{e}_3 + \nu^5\vec{e}_5.$$

А касательный вектор линии $f_1^5(\nu) = \bar{\nu}$ имеет вид:

$$\vec{\bar{\nu}} = (\nu^1 b_1^1 + \nu^2 b_2^1 + \nu^3 b_3^1 + \nu^5 b_5^1)\vec{e}_1 + (\nu^1 b_1^2 + \nu^2 + \nu^3 b_3^2 + \nu^5 b_5^2)\vec{e}_2 + \\ +\nu^3\vec{e}_3 + (\nu^2 b_2^5 + \nu^3 b_3^5)\vec{e}_5.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\vec{\nu}, \vec{\bar{\nu}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(1235)}$. Следовательно, линия ν является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5. Аналогично можно получить, что линия ρ принадлежащая распределению $\Delta_{(1245)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5.

Касательный вектор линии $\chi \in \Delta_{(1345)}$ имеет следующий вид:

$$\vec{\chi} = \chi^1\vec{e}_1 + \chi^3\vec{e}_3 + \chi^4\vec{e}_4 + \chi^5\vec{e}_5.$$

Теперь найдем касательный вектор линии $f_1^5(\chi) = \bar{\chi}$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{\chi}} = \chi^1\vec{b}_1 + \chi^3\vec{b}_3 + \chi^4\vec{b}_4 + \chi^5\vec{b}_5.$$

В силу формулы (2.1.2) получаем следующее:

$$\vec{\bar{\chi}} = (\chi^1 b_1^1 + \chi^3 b_3^1 + \chi^4 b_4^1 + \chi^5 b_5^1)\vec{e}_1 + \\ +(\chi^1 b_1^2 + \chi^3 b_3^2 + \chi^4 b_4^2 + \chi^5 b_5^2)\vec{e}_2 + \\ +\chi^3\vec{e}_3 + \chi^4\vec{e}_4 + (\chi^3 b_3^5 + \chi^4 b_4^5)\vec{e}_5.$$

Отсюда из условия $\vec{\chi}, \vec{\bar{\chi}}, \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(1345)}$ имеем:

$$\chi^1 b_1^2 + \chi^3 b_3^2 + \chi^4 b_4^2 + \chi^5 b_5^2 = 0 \text{ или}$$

$$\chi^1 \Lambda_{11}^2 + \chi^3 \Lambda_{13}^2 + \chi^4 \Lambda_{14}^2 + \chi^5 \Lambda_{15}^2 = 0, \qquad (2.1.11)$$

где Λ_{11}^2 – первая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{13}^2 – пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{14}^2 – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{15}^2 – вторая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.1.11), то линия $\chi \in \Delta_{(1345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5.

Рассмотрим линию $\theta \in \Delta_{(2345)}$, ее касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\theta} = \theta^2\vec{e}_2 + \theta^3\vec{e}_3 + \theta^4\vec{e}_4 + \theta^5\vec{e}_5.$$

А касательный вектор линии $f_1^5(\theta) = \bar{\theta}$ имеет вид:

$$\vec{\bar{\theta}} = (\theta^2 b_2^1 + \theta^3 b_3^1 + \theta^4 b_4^1 + \theta^5 b_5^1)\vec{e}_1 + (\theta^2 + \theta^3 b_3^2 + \theta^4 b_4^2 + \theta^5 b_5^2)\vec{e}_2 + \\ +\theta^3\vec{e}_3 + \theta^4\vec{e}_4 + (\theta^2 b_2^5 + \theta^3 b_3^5 + \theta^4 b_4^5)\vec{e}_5.$$

Отсюда получаем $\vec{\theta}, \vec{\bar{\theta}}, \overrightarrow{XF_1^5} \notin \Delta_{(2345)}$, следовательно линия $\theta \in \Delta_{(2345)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5.

Аналогичным образом можно получить, что линии принадлежащие распределению $\Delta_{(\tilde{\imath},j,k,\ell)}$ $(\tilde{\imath} \neq 1)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_1^5.

Доказана следующая теорема

Теорема 3.1.2. 1) Линии $\nu \in \Delta_{(1235)}$ и $\rho \in \Delta_{(1245)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_1^5;

2) Линия $\mu \in \Delta_{(1234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5 тогда и только тогда , когда имеет место равенство:

$$\mu^2\Lambda_{12}^5 + \mu^3\Lambda_{13}^5 + \mu^4\Lambda_{14}^5 = 0, \qquad (2.1.10)$$

где Λ_{12}^{5} – четвертая кривизна линии ω^2 циклической сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{13}^{5} – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{14}^{5} – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

3) Линия $\chi \in \Delta_{(1345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\chi^1\Lambda_{11}^{2} + \chi^3\Lambda_{13}^{2} + \chi^4\Lambda_{14}^{2} + \chi^5\Lambda_{15}^{2} = 0, \qquad (2.1.11)$$

где Λ_{11}^{2} – первая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{13}^{2} – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{14}^{2}– третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{15}^{2} – вторая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

4) Линии, принадлежащие распределениям $\Delta_{(\tilde{\imath},\, j,k,\ell)}$ ($\tilde{\imath} \neq 1$, $\tilde{\imath}, j, k, \ell\ -$ разные) не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_1^5.

2.2. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_5^4

Псевдофокус $F_5^4 \in (X, \vec{e}_5)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$F_5^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_5 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^5}\vec{e}_5. \qquad (2.2.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, точка F_5^4 описывает свою область $\Omega_5^4 \subset E_5$. Получается частичное отображение $f_5^4 \colon \Omega \to \Omega_5^4$ такое, что $f_5^4(X) = F_5^4$.

Продифференцируя равенство (2.2.1) и применяя деривационные формулы получаем следующее:

$$d\overrightarrow{F_5^4} = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{54}^4}\right)\vec{e}_5 - \frac{1}{\Lambda_{54}^4}d\vec{e}_5 = \omega^i\vec{e}_i - \frac{d\Lambda_{54}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2}\vec{e}_5 + \frac{1}{\Lambda_{54}^4}\omega_5^i\vec{e}_i.$$

В силу формулы (1.2.3), (1.2.5) имеем

$$d\overrightarrow{F_5^4} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{54m}^4 + \Lambda_{5\ell}^4\Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4\Lambda_{5m}^\ell\right)\omega^m}{(\Lambda_{54}^4)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{5m}^i\omega^m}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i,$$

введем обозначения

$$D_{54m}^4 = \Lambda_{54m}^4 + \Lambda_{5\ell}^4\Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^4\Lambda_{5m}^\ell.$$

Отсюда получаем

$$d\overrightarrow{F_5^4} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{D_{54m}^4\omega^m}{(\Lambda_{54}^4)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{5m}^i\omega^m}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i.$$

Последнее равенство запищем в следующем виде

$$d\overrightarrow{F_5^4} = \left[\vec{e}_1 + \frac{D_{541}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{51}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{D_{542}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{52}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+ \left[\vec{e}_3 + \frac{D_{543}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{53}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{D_{544}^4}{(\Lambda_{54}^4)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{54}^i}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e}_5+\frac{D^4_{545}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5-\frac{\Lambda^i_{55}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_i\right]\omega^5.$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{d}_1=\vec{e}_1+\frac{D^4_{541}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5-\frac{\Lambda^i_{51}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{d}_2=\vec{e}_2+\frac{D^4_{542}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5-\frac{\Lambda^i_{52}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{d}_3=\vec{e}_3+\frac{D^4_{543}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5-\frac{\Lambda^i_{53}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{d}_4=\vec{e}_4+\frac{D^4_{544}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5-\frac{\Lambda^i_{54}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{d}_5=\vec{e}_5+\frac{D^4_{545}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5-\frac{\Lambda^i_{55}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_i.$$

Тогда последнее равенство имеет следующий вид

$$d\,\overrightarrow{F^4_5}=\omega^i\vec{d}_i.$$

Когда сеть Френе $\tilde{\Sigma}_5$ является циклической сетью, векторы $\vec{d}_i$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\vec{d}_1&=\vec{e}_1-\frac{\Lambda^4_{51}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_4+\frac{D^4_{541}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5;\\
\vec{d}_2&=-\frac{\Lambda^1_{52}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_1+\vec{e}_2-\frac{\Lambda^4_{52}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_4+\frac{D^4_{542}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5;\\
\vec{d}_3&=-\frac{\Lambda^1_{53}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_1-\frac{\Lambda^4_{53}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_4+\vec{e}_3+\frac{D^4_{543}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5;\\
\vec{d}_4&=-\frac{\Lambda^1_{54}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_1+\frac{D^4_{544}}{(\Lambda^4_{54})^2}\vec{e}_5;\\
\vec{d}_5&=-\frac{\Lambda^4_{55}}{\Lambda^4_{54}}\vec{e}_1+\left[1+\frac{D^4_{545}}{(\Lambda^4_{54})^2}\right]\vec{e}_5.
\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Рассмотрим линию α принадлежащую распределению $\Delta_{(123)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{a} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3$.

Найдем касательный вектор линии $f_5^4(\alpha) = \bar{\alpha}$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1\vec{d}_1 + \alpha^2\vec{d}_2 + \alpha^3\vec{d}_3$$
$$= (\alpha^1 + \alpha^2 d_2^1 + \alpha^3 d_3^1)\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3 +$$
$$+(\alpha^1 d_1^4 + \alpha^2 d_2^4 + \alpha^3 d_3^4)\vec{e}_4 + (\alpha^1 d_1^5 + \alpha^2 d_2^5 + \alpha^3 d_3^5)\vec{e}_5.$$

Выполняется условие $\vec{\alpha}, \vec{\bar{\alpha}}, \overrightarrow{XF_5^4} \notin \Delta_{(123)}$, так как $\overrightarrow{XF_5^4} = -\frac{1}{\Lambda_{54}^4}\vec{e}_5 \notin \Delta_{(123)}$.

Теперь рассмотрим линию γ принадлежащую распределению $\Delta_{(125)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\overrightarrow{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^5\vec{e}_5$.

Найдем касательный вектор линии $f_5^4(\gamma) = \overline{\gamma}$. Получим следующее:

$$\overrightarrow{\overline{\gamma}} = \gamma^1\vec{d}_1 + \gamma^2\vec{d}_2 + \gamma^5\vec{d}_5 = (\gamma^1 + \gamma^2 d_2^1 + \gamma^5 d_5^1)\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 +$$
$$+(\gamma^1 d_1^4 + \gamma^2 d_2^4)\vec{e}_4 + (\gamma^1 d_1^5 + \gamma^2 d_2^5 + \gamma^5 d_5^5)\vec{e}_5.$$

Из условия $\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\overline{\gamma}}, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(125)}$ получаем $\gamma^1 d_1^4 + \gamma^2 d_2^4 = 0$.

В силу формулы (2.2.2) последнее равенство имеет следующий вид:

$$\Lambda_{51}^4\gamma^1 + \Lambda_{52}^4\gamma^2 = 0, \qquad (2.2.3)$$

где Λ_{51}^4 – первая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{52}^4 – пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Для того чтобы линия $\gamma \subset \Delta_{(125)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие (2.2.3).

Теперь рассмотрим линию s принадлежащую распределению $\Delta_{(235)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\overrightarrow{s} = s^2\overrightarrow{e}_2 + s^3\overrightarrow{e}_3 + s^5\overrightarrow{e}_5$.

Касательный вектор линии $f_5^4(s) = \overline{s}$ находится в следующем виде:

$$\vec{\bar{s}} = s^2 \overrightarrow{d_2} + s^3 \overrightarrow{d_3} + s^5 \overrightarrow{d_5} = (s^2 d_2^1 + s^3 d_3^1 + s^5 d_5^1) \overrightarrow{e_1} + s^2 \overrightarrow{e_2} +$$
$$s^3 \overrightarrow{e_3} + \quad +(s^2 d_2^4 + s^3 d_3^4) \overrightarrow{e_4} + (s^2 d_2^5 + s^3 d_3^5 + s^5 d_5^5) \overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{s}$, $\vec{\bar{s}}$,$\overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(235)}$ имеем следующее:

$$\begin{cases} s^2 d_2^1 + s^3 d_3^1 + s^5 d_5^1 = 0; \\ s^2 d_2^4 + s^3 d_3^4 = 0. \end{cases}$$

Учитывая формул (2.2.2) последнее равенство имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Lambda_{52}^1 s^2 + \Lambda_{53}^1 s^3 + \Lambda_{55}^1 s^5 = 0; \\ \Lambda_{52}^4 s^2 + \Lambda_{53}^4 s^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$s^2 = \begin{bmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{55}^1 \\ \Lambda_{53}^4 & 0 \end{bmatrix}; \qquad s^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{55}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ 0 & \Lambda_{52}^4 \end{vmatrix}; \qquad s^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \end{vmatrix} \quad (2.2.4)$$

Обратно, если выполняется условие (2.2.4), то s принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4.

Теперь рассмотрим линию t принадлежащую распределению $\Delta_{(345)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{t} = t^3 \overrightarrow{e_3} + t^4 \overrightarrow{e_4} + t^5 \overrightarrow{e_5}$.

Найдем касательный вектор линии $f_5^4(t) = \bar{t}$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{t}} = t^3 \overrightarrow{d_3} + t^4 \overrightarrow{d_4} + t^5 \overrightarrow{d_5} = (t^3 d_3^1 + t^4 d_4^1 + t^5 d_5^1) \overrightarrow{e_1} + t^3 \overrightarrow{e_3} +$$
$$+t^3 d_3^4 \overrightarrow{e_4} + (t^3 d_3^5 + t^4 d_4^5 + t^5 d_5^5) \overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{t}$, $\vec{\bar{t}}$,$\overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(345)}$ получаем следующее:

$$t^3 d_3^1 + t^4 d_4^1 + t^5 d_5^1 = 0.$$

Отсюда учитывая формул (2.2.2) имеем следующее:

$$\Lambda_{53}^1 t^3 + \Lambda_{54}^1 t^4 + \Lambda_{55}^1 t^5 = 0, \qquad (2.2.5)$$

где Λ_{53}^{1} – третья кривизна линии ω^{1} сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{54}^{1} – вторая кривизна линии ω^{3} сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{55}^{1} – первая кривизна линии ω^{3} сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, для того чтобы линия t принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 необходимо и достаточно выполнение условия (2.2.5).

Теперь рассмотрим линию p принадлежащую распределению $\Delta_{(145)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{p} = p^1 \vec{e_1} + p^4 \vec{e_4} + p^5 \vec{e_5}$.

Касательный вектор линии $f_5^4(p) = \overline{p}$ имеет следующий вид:

$$\vec{\overline{p}} = p^1 \overrightarrow{d_1} + p^4 \overrightarrow{d_4} + p^5 \overrightarrow{d_5} = (p^1 + p^4 d_4^1 + p^5 d_5^1) \vec{e_1} + p^1 d_1^4 \vec{e_4} + +(p^1 d_1^5 + p^4 d_4^5 + p^5 d_5^5) \vec{e_5}.$$

Следовательно, получим, что условия $\vec{p}\,, \vec{\overline{p}}\,, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(145)}$ всегда выполняются.

Отсюда имеем, что линия p принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4.

Теперь рассмотрим линию θ принадлежащую распределению $\Delta_{(245)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\theta} = \theta^2 \vec{e_2} + \theta^4 \vec{e_4} + \theta^5 \vec{e_5}$.

Найдем касательный вектор линии $f_5^4(\theta) = \overline{\theta}$ в следующем виде:

$$\vec{\overline{\theta}} = \theta^2 \overrightarrow{d_2} + \theta^4 \overrightarrow{d_4} + \theta^5 \overrightarrow{d_5} = (\theta^2 d_2^1 + \theta^4 d_4^1 + \theta^5 d_5^1) \vec{e_1} + \theta^2 \vec{e_2} + \theta^2 d_2^4 \vec{e_4} + \quad +(\theta^2 d_2^5 + \theta^4 d_4^5 + \theta^5 d_5^5) \vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\theta}\,, \vec{\overline{\theta}}\,, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(245)}$ имеем

$$\theta^2 d_2^1 + \theta^4 d_4^1 + \theta^5 d_5^1 = 0.$$

В силу формулы (2.2.2) имеем следующее:

$$\Lambda_{52}^{1}\theta^{2} + \Lambda_{54}^{1}\theta^{4} + \Lambda_{55}^{1}\theta^{5} = 0, \qquad (2.2.6)$$

где Λ_{52}^{1} – четвертая кривизна линии ω^{2} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$; Λ_{54}^{1} – вторая кривизна линии ω^{4} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$; Λ_{55}^{1} – первая кривизна линии ω^{5} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$.

Обратно, если выполняется условие (2.2.6), то линия θ принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ является является квазидвойной линией частичного отображения f_{5}^{4}

Рассмотрим линию μ принадлежащую распределению $\Delta_{(135)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\mu} = \mu^{1}\,\vec{e_{1}} + \mu^{3}\,\vec{e_{3}} + \mu^{5}\,\vec{e_{5}}$.

Найдем касательный вектор линии $f_{5}^{4}(\mu) = \overline{\mu}$ в следующем виде:

$$\vec{\overline{\mu}} = \mu^{1}\,\vec{d_{1}} + \mu^{3}\,\vec{d_{3}} + \mu^{5}\,\vec{d_{5}} = (\mu^{1} + \mu^{3}d_{3}^{1} + \mu^{5}d_{5}^{1})\,\vec{e_{1}} + \mu^{3}\,\vec{e_{3}} +$$
$$+(\mu^{1}d_{1}^{4} + \mu^{3}d_{3}^{4})\,\vec{e_{4}} + (\mu^{1}d_{1}^{5} + \mu^{3}d_{3}^{5} + \mu^{5}d_{5}^{5})\,\vec{e_{5}}.$$

Из условия $\vec{\mu}\,, \vec{\overline{\mu}}\,, \overrightarrow{XF_{5}^{4}} \in \Delta_{(135)}$ имеем

$$\mu^{1}d_{1}^{4} + \mu^{3}d_{3}^{4} = 0.$$

Отсюда учитывая формулы (2.2.2) имеем:

$$\Lambda_{51}^{4}\mu^{1} + \Lambda_{53}^{4}\mu^{3} = 0 \qquad (2.2.7)$$

где Λ_{51}^{4} – первая кривизна линии ω^{1} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$; Λ_{53}^{4} – пятая кривизна линии ω^{3} сети $\tilde{\Sigma}_{5}$.

Следовательно, линия μ принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_{5}^{4} тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.2.7).

Доказана следующая теорема

Теорема 2.2.1. 1) Линия $\gamma \in \Delta_{(125)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 тогда и только тогда , когда выполнено условие:

$$\Lambda_{51}^4 \gamma^1 + \Lambda_{52}^4 \gamma^2 = 0, \qquad (2.2.3)$$

где Λ_{51}^4 $-$ четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{52}^4 – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

2) Линия $s \in \Delta_{(235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям:

$$s^2 = \begin{bmatrix} \Lambda_{53}^1 & \Lambda_{55}^1 \\ \Lambda_{53}^4 & 0 \end{bmatrix}; \qquad s^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{55}^1 & \Lambda_{52}^1 \\ 0 & \Lambda_{52}^4 \end{vmatrix}; \qquad s^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{52}^1 & \Lambda_{53}^1 \\ \Lambda_{52}^4 & \Lambda_{53}^4 \end{vmatrix}, \quad (2.2.4)$$

где Λ_{52}^1 $-$ четвертая кривизна линии ω^2сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{53}^1 $-$ третья кривизна линии ω^3сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{55}^1 $-$ первая кривизна линии ω^5сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{52}^4 – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{53}^4 $-$ вторая кривизна линии ω^3сети $\tilde{\Sigma}_5$;

3) Линия $t \in \Delta_{(345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 тогда и только тогда , когда выполнено условие:

$$\Lambda_{53}^1 t^3 + \Lambda_{54}^1 t^4 + \Lambda_{55}^1 t^5 = 0, \qquad (2.2.5)$$

где Λ_{53}^1 $-$ третья кривизна линии ω^3сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{54}^1 $-$ вторая кривизна линии ω^4сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{55}^1 $-$ первая кривизна линии ω^5сети $\tilde{\Sigma}_5$.

4) Линия $p \in \Delta_{(145)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4;

5) Линия $\theta \in \Delta_{(245)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 тогда и только тогда , когда выполнено условие

$$\Lambda_{52}^1 \theta^2 + \Lambda_{54}^1 \theta^4 + \Lambda_{55}^1 \theta^5 = 0, \qquad (2.2.6)$$

где Λ_{52}^{1} — четвертая кривизна линии ω^2сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{54}^{1} — вторая кривизна линии ω^4сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{55}^{1} — первая кривизна линии ω^5сети $\tilde{\Sigma}_5$

6) Линия $\mu \in \Delta_{(135)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\Lambda_{51}^{4}\mu^1 + \Lambda_{53}^{4}\mu^3 = 0, \qquad (2.2.7)$$

где Λ_{51}^{4} — четвертая кривизна линии ω^1сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{53}^{4} — вторая кривизна линии ω^3сети $\tilde{\Sigma}_5$.

7) Линии, принадлежащие распределениям $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $\left(\tilde{\imath} \neq 5,\ \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1,2,3,4\right)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_5^4.

Теперь рассмотрим линии принадлежащие четырехмерному распределению.

Касательный вектор линии μ принадлежащей распределению $\Delta_{(1234)}$ имеет вид: $\vec{\mu} = \mu^1\vec{e}_1 + \mu^2\vec{e}_2 + \mu^3\vec{e}_3 + \mu^4\vec{e}_4$. А касательный вектор линии $\overline{\mu} = f_5^4(\mu)$ найдем в виде: $\overrightarrow{\overline{\mu}} = \mu^1\,\overrightarrow{d_1} + \mu^2\,\overrightarrow{d_2} + \mu^3\,\overrightarrow{d_3} + \mu^4\,\overrightarrow{d_4}$.

В силу формулы (2.2.2) имеем:

$$\overrightarrow{\overline{\mu}} = (\mu^1 + \mu^2 d_2^1 + \mu^3 d_3^1 + \mu^4 d_4^1)\,\overrightarrow{e_1} + \mu^2\,\overrightarrow{e_2} + \mu^3\,\overrightarrow{e_3} + (\mu^2 d_2^4 + \\ +\mu^3 d_3^4)\,\overrightarrow{e_4} + (\mu^1 d_1^5 + \mu^2 d_2^5 + \mu^3 d_3^5 + \mu^4 d_4^5)\,\overrightarrow{e_5},$$

где d_i^j – j-я координата вектора $\overrightarrow{d_i}$.

Отсюда получаем условие $\overrightarrow{\mu}\,, \overrightarrow{\overline{\mu}}\,, \overrightarrow{XF_5^4} \notin \Delta_{(1234)}$, так как $\overrightarrow{XF_5^4} = -\frac{1}{\Lambda_{54}^{4}}\vec{e}_5 \notin \Delta_{(1234)}$.

Следовательно, получим, что линия $\mu \in \Delta_{(1234)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4.

Теперь рассмотрим линию $\nu \in \Delta_{(2345)}$, ее касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\nu} = \nu^2 \vec{e_2} + \nu^3 \vec{e_3} + \nu^4 \vec{e_4} + \nu^5 \vec{e_5}.$$

А касательный вектор линии $f_5^4(\nu) = \overline{\nu}$ имеет вид:

$$\vec{\overline{\nu}} = (\nu^2 d_2^1 + \nu^3 d_3^1 + \nu^4 d_4^1 + \nu^5 d_5^1)\vec{e_1} + \nu^2 \vec{e_2} + \nu^3 \vec{e_3} + (\nu^2 d_2^4 +$$
$$+\nu^3 d_3^4)\vec{e_4} + (\nu^2 d_2^5 + \nu^3 d_3^5 + \nu^4 d_4^5 + \nu^5 d_5^5)\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\nu}\,, \vec{\overline{\nu}}\,, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(2345)}$ получаем следующее:

$$\nu^2 d_2^1 + \nu^3 d_3^1 + \nu^4 d_4^1 + \nu^5 d_5^1 = 0.$$

Отсюда, учитывая формул (2.2.2) имеем следующее:

$$\nu^2 \Lambda_{52}^1 + \nu^3 \Lambda_{53}^1 + \nu^4 \Lambda_{54}^1 + \nu^5 \Lambda_{55}^1 = 0. \qquad (2.2.8)$$

Обратно, если имеет место условие (2.2.8), то линия $\nu \in \Delta_{(2345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4. Где Λ_{52}^1 – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{53}^1 – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{54}^1 – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{55}^1 – первая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Теперь рассмотрим линию θ принадлежащую рапределению $\Delta_{(1345)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\theta} = \theta^1 \vec{e_1} + \theta^3 \vec{e_3} + \theta^4 \vec{e_4} + \theta^5 \vec{e_5}$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\theta}}$ линии $\overline{\theta} = f_5^4(\theta)$:

$$\vec{\overline{\theta}} = \theta^1 \overrightarrow{d_1} + \theta^3 \overrightarrow{d_3} + \theta^4 \overrightarrow{d_4} + \theta^5 \overrightarrow{d_5} = (\theta^1 + \theta^3 d_3^1 + \theta^4 d_4^1 + \theta^5 d_5^1)\vec{e_1} +$$
$$+\theta^3 \vec{e_3} + (\theta^1 d_1^4 + \theta^3 d_3^4)\vec{e_4} + (\theta^1 d_1^5 + \theta^3 d_3^5 + \theta^4 d_4^5 + \theta^5 d_5^5)\vec{e_5}.$$

Отсюда следует выполнение условия $\vec{\theta}\,, \vec{\overline{\theta}}\,, \overrightarrow{XF_5^4} \in \Delta_{(1345)}$. Следовательно, линия $\theta \in \Delta_{(1345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 (также является квазидвойной линией пары $\left(f_5^4, \Delta_{(1345)}\right)$.

Аналогично можно получить, что линия $\rho \in \varDelta_{(1245)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4

Теперь рассмотрим линию χ принадлежащую распределению $\varDelta_{(1235)}$, её касательный вектор имеет вид $\vec{\chi} = \chi^1 \vec{e_1} + \chi^2 \vec{e_2} + \chi^3 \vec{e_3} + \chi^5 \vec{e_5}$. Найдем касательный вектор линии $f_5^4(\chi) = \overline{\chi}$:

$$\vec{\overline{\chi}} = \chi^1 \vec{d_1} + \chi^2 \vec{d_2} + \chi^3 \vec{d_3} + \chi^5 \vec{d_5} = (\chi^1 + \chi^2 d_2^1 + \chi^3 d_3^1 + \chi^5 d_5^1)\, \vec{e_1} +$$
$$+\chi^2 \vec{e_2} + \chi^3 \vec{e_3} + (\chi^1 d_1^4 + \chi^2 d_2^4 + \chi^3 d_3^4)\, \vec{e_4} +$$
$$+(\chi^1 d_1^5 + \chi^2 d_2^5 + \chi^3 d_3^5 + \chi^5 d_5^5)\, \vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\chi}\,, \vec{\overline{\chi}}\,, \overrightarrow{XF_5^4} \in \varDelta_{(1235)}$ имеем:

$$\chi^1 d_1^4 + \chi^2 d_2^4 + \chi^3 d_3^4 = 0.$$

Отсюда учитывая формул (3.2.2) имеем следующее:

$$\chi^1 \varLambda_{51}^4 + \chi^2 \varLambda_{52}^4 + \chi^3 \varLambda_{53}^4 = 0, \qquad (2.2.9)$$

где $\varLambda_{51}^4$ – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; $\varLambda_{52}^4$ – третья кривизна линии ω^2; $\varLambda_{53}^4$ – вторая кривизна линии ω^3.

Обратно, если выполняется условие (2.2.9), то линия $\chi \in \varDelta_{(1235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 2.2.2. 1) Линии θ, ρ принадлежащие распределению $\varDelta_{(1345)}$, $\varDelta_{(1245)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_5^4;

2) Линия $\mu \in \varDelta_{(1234)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4;

3) Линия $\nu \in \varDelta_{(2345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 тогда и только тогда , когда выполнено условие:

$$\nu^2 \varLambda_{52}^1 + \nu^3 \varLambda_{53}^1 + \nu^4 \varLambda_{54}^1 + \nu^5 \varLambda_{55}^1 = 0, \qquad (2.2.8)$$

где Λ_{52}^{1} – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{53}^{1} – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{54}^{1} −вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{55}^{1} − первая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

4) Линия $\chi \in \Delta_{(1235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_5^4 тогда и только тогда , когда выполнено условие:

$$\chi^1\Lambda_{51}^{4} + \chi^2\Lambda_{52}^{4} + \chi^3\Lambda_{53}^{4} = 0, \qquad (2.2.9)$$

где Λ_{51}^{4} − четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{52}^{4} – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{53}^{4} − вторая кривизна линии ω^3сети $\tilde{\Sigma}_5$.

2.3. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_4^3

Псевдофокус $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_4^3} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_4}. \qquad (2.3.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, точка F_4^3 описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_5$. Получается частичное отображение $f_4^3\colon \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f_4^3(X) = F_4^3$.

Продифференцируя равенство (2.3.1) и применяя деривационные формулы получаем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_4^3} = d\,\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\right)\vec{e_4} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}d\,\vec{e_4} = \omega^i\,\vec{e_i} - \frac{d\Lambda_{43}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\omega_4^i\,\vec{e_i} =$$

$$= \omega^i\,\vec{e_i} + \frac{M_{43m}^3\omega^m}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{4m}^i\omega^m}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\,,$$

где $M_{43m}^3\omega^m = d\Lambda_{43m}^3 = \left(\Lambda_{43m}^3 + \Lambda_{4\ell}^3\Lambda_{3m}^\ell + \Lambda_{\ell 3}^3\Lambda_{4m}^\ell\right)\omega^m$.

Последнее равенство можно записать в следующем виде:

$$d\,\overrightarrow{F_4^3} = \left[\vec{e_1} + \frac{M_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{41}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^1 + \left[\vec{e_2} + \frac{M_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{42}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e_3} + \frac{M_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - -\frac{\Lambda_{43}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^3 + \left[\vec{e_4} + \frac{M_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{44}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e_5} + \frac{M_{435}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{45}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\right]\omega^5.$$

Введем следующее обозначение:

$$\overrightarrow{m_1} = \vec{e_1} + \frac{M_{431}^4}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e_4} - \frac{\Lambda_{41}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e_i}\,;$$

$$\overrightarrow{m_2} = \overrightarrow{e_2} + \frac{M_{432}^4}{(\Lambda_{43}^3)^2}\overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda_{42}^i}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_i}\,;$$

$$\overrightarrow{m_3} = \overrightarrow{e_3} + \frac{M_{433}^4}{(\Lambda_{43}^3)^2}\overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda_{43}^i}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_i}\,;$$

$$\overrightarrow{m_4} = \overrightarrow{e_4} + \frac{M_{434}^4}{(\Lambda_{43}^3)^2}\overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda_{44}^i}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_i}\,;$$

$$\overrightarrow{m_5} = \overrightarrow{e_5} + \frac{M_{435}^4}{(\Lambda_{43}^3)^2}\overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda_{45}^i}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_i}.$$

Учитывая обозначение имеем,

$$d\,\overrightarrow{F_4^3} = \omega^1\,\overrightarrow{m_1} + \omega^2\,\overrightarrow{m_2} + \omega^3\,\overrightarrow{m_3} + \omega^4\,\overrightarrow{m_4} + \omega^4\,\overrightarrow{m_4}\,.$$

Когда сеть Френе $\tilde{\Sigma}_5$ является циклической сетью, векторы $\overrightarrow{m_i}$ имеют следующий вид:

$$\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{e_1} + \frac{M_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda_{41}^3}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{41}^5}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_5}\,;$$

$$\overrightarrow{m_2} = \overrightarrow{e_2} + \frac{M_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda_{42}^3}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{42}^5}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_5}\,;$$

$$\overrightarrow{m_3} = \frac{M_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda_{43}^5}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_5}\,; \tag{2.3.2}$$

$$\overrightarrow{m_4} = \left[1 + \frac{M_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\right]\overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda_{44}^5}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_5}\,;$$

$$\overrightarrow{m_5} = -\frac{\Lambda_{45}^3}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_3} + \frac{M_{435}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\overrightarrow{e_4} + \overrightarrow{e_5}.$$

В общем случае векторы $\overrightarrow{m_i}$ не являются линейно зависимыми. К области Ω_4^3 присоеденим подвижной репер $\mathcal{R}' = (F_4^3, \overrightarrow{m_i})$.

Рассмотрим линию α принадлежащую распределению $\Delta_{(123)}$ Её касательный вектор имеет вид: $\overrightarrow{\alpha} = \alpha^1\,\overrightarrow{e_1} + \alpha^2\,\overrightarrow{e_2} + \alpha^3\,\overrightarrow{e_3}$.

Найдем касательный вектор линии $\overline{\alpha} = f_4^3(\alpha)$ в следующем виде:

$$\vec{\overline{\alpha}} = \alpha^1 \overrightarrow{m_1} + \alpha^2 \overrightarrow{m_2} + \alpha^3 \overrightarrow{m_3} = \alpha^1 \overrightarrow{e_1} + \alpha^2 \overrightarrow{e_2} + (\alpha^1 m_1^3 + \alpha^2 m_2^3) \overrightarrow{e_3} +$$
$$+(\alpha^1 m_1^4 + \alpha^2 m_2^4 + \alpha^3 m_3^4) \overrightarrow{e_4} + (\alpha^1 m_1^5 + \alpha^2 m_2^5 + \alpha^3 m_3^5) \overrightarrow{e_5}.$$

В силу формулы (2.3.2) последнее равенство имеет следующий вид:

$$\vec{\overline{\alpha}} = (\alpha^1 b_1^1 + \alpha^2 b_2^1 + \alpha^3 b_3^1) \overrightarrow{e_1} + (\alpha^1 b_1^2 + \alpha^2 + \alpha^3 b_3^2) \overrightarrow{e_2} +$$
$$+\alpha^3 + (\alpha^2 b_2^5 + \alpha^3 b_3^5) \overrightarrow{e_5}.$$

Имеет место условие $\vec{\alpha}, \vec{\overline{\alpha}}, \overrightarrow{XF_4^3} \notin \Delta_{(123)}$, так как $\overrightarrow{XF_4^3} = -\frac{1}{\Lambda_{43}^3} \vec{e}_4 \notin \Delta_{(123)}$.

Следовательно линия $\alpha \subset \Delta_{(123)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Аналогично можно показать, что линии принадлежащие распределению $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $\left((\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1{,}2{,}3{,}5\right)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3.

Рассмотрим линию β принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$. Её касательный вектор имеет вид $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор линии $\overline{\beta} = f_4^3(\beta)$ в следующем виде:

$$\vec{\overline{\beta}} = \beta^1 \overrightarrow{m_1} + \beta^2 \overrightarrow{m_2} + \beta^4 \overrightarrow{m_4} = \beta^1 \overrightarrow{e_1} + \beta^2 \overrightarrow{e_2} + (\beta^1 m_1^3 + \beta^2 m_2^3) \overrightarrow{e_3} +$$
$$+(\beta^1 m_1^4 + \beta^2 m_2^4 + \beta^4 m_4^4) \overrightarrow{e_4} + (\beta^1 m_1^5 + \beta^2 m_2^5 + \beta^4 m_4^5) \overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\overline{\beta}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(124)}$ имеем:

$$\begin{cases} \beta^1 m_1^5 + \beta^2 m_2^5 + \beta^4 m_4^5 = 0; \\ \beta^1 m_1^3 + \beta^2 m_2^3 = 0. \end{cases}$$

В силу формулы (2.3.2) имеем следующее:

$$\begin{cases} \Lambda_{41}^5\beta^1 + \Lambda_{42}^5\beta^2 + \Lambda_{44}^5\beta^4 = 0; & (2.3.3) \\ \Lambda_{41}^3\beta^1 + \Lambda_{42}^3\beta^2 = 0. & (2.3.4) \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\beta^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{42}^5 & \Lambda_{44}^5 \\ \Lambda_{42}^3 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \beta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{44}^5 & \Lambda_{41}^5 \\ 0 & \Lambda_{41}^3 \end{vmatrix}; \qquad \beta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{41}^5 & \Lambda_{42}^5 \\ \Lambda_{41}^3 & \Lambda_{42}^3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Следовательно, вектор $\vec{\beta}$ является направляющим вектором прямой получающийся при пересечении плоскостей (2.3.3) и (2.3.4) пространства опирающейся к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Так что, линия β принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда выполняется условия (2.3.5).

Теперь рассмотрим линию δ принадлежащую распределению $\Delta_{(234)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\delta} = \delta^2\vec{e}_2 + \delta^3\vec{e}_3 + \delta^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор линии $\overline{\delta} = f_4^3(\delta)$:

$$\vec{\overline{\delta}} = \delta^2\,\overrightarrow{m_2} + \delta^3\,\overrightarrow{m_3} + \delta^4\,\overrightarrow{m_4}$$

$$= \delta^2\,\vec{e_2} + \delta^2 m_2^3\,\vec{e_3} + (\delta^2 m_2^4 + \delta^3 m_3^4 + \delta^4 m_4^4)\,\vec{e_4} +$$

$$+(\delta^4 m_2^5 + \delta^3 m_3^5 + \delta^4 m_4^5)\,\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\delta}, \vec{\overline{\delta}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(234)}$ имеем:

$$\mu^1 d_1^4 + \mu^3 d_3^4 = 0.$$

В силу формулы (2.3.2) последнее равенство имеет вид:

$$\Lambda_{42}^5\delta^2 + \Lambda_{43}^5\delta^3 + \Lambda_{44}^5\delta^4 = 0, \quad (2.3.6)$$

где Λ_{51}^4 –кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{53}^4 – пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

где Λ_{42}^5 –вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{43}^5 –вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{44}^5 – первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.3.6), то линия δ принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Теперь рассмотрим линию q принадлежащую распределению $\Delta_{(345)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{q} = q^3 \vec{e_3} + q^4 \vec{e_4} + q^5 \vec{e_5}$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{q}}$ линии $f_4^3(q) = \overline{q}$ в следующем виде:

$$\vec{\overline{q}} = q^3 \overrightarrow{m_3} + q^4 \overrightarrow{m_4} + q^5 \overrightarrow{m_5} =$$

$$= q^5 m_5^3 \vec{e_3} + (q^3 m_3^4 + q^4 b_4^4 + q^5 m_5^4) \vec{e_4} +$$

$$+(q^3 m_3^5 + q^4 m_4^5 + q^5) \vec{e_5}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\vec{q}\,, \vec{\overline{q}}\,, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(345)}$.

Следовательно, линия q принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Рассмотрим линию s принадлежащую распределению $\Delta_{(145)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{s} = s^1 \vec{e_1} + s^4 \vec{e_4} + s^5 \vec{e_5}$.

Найдем касательный вектор линии $f_4^3(s) = \overline{s}$ в следующем виде:

$$\vec{\overline{s}} = s^1 \overrightarrow{m_1} + s^4 \overrightarrow{m_4} + s^5 \overrightarrow{m_5} = s^1 \vec{e_1} + (s^1 m_1^3 + s^5 m_5^3) \vec{e_3} +$$

$$+(s^1 m_1^4 + s^4 m_4^4 + s^5 m_5^4) \vec{e_4} + (s^1 m_1^5 + s^4 m_4^5 + s^5) \vec{e_5}.$$

Из условия $\overrightarrow{XF_4^3}\,, \vec{s}\,, \vec{\overline{s}} \in \Delta_{(145)}$ имеем

$$s^1 m_1^3 + s^5 m_5^3 = 0$$

Отсюда учитывая формулы (2.3.2) получаем следующее:

$$\Lambda_{41}^3 s^1 + \Lambda_{45}^3 s^5 = 0, \qquad (2.3.7)$$

Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{45}^3 – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, линия s принадлежащая распределению $\varDelta_{(145)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.3.7).

Теперь рассмотрим линию t принадлежащую распределению $\varDelta_{(134)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{t} = t^1\,\vec{e_1} + t^3\,\vec{e_3} + t^4\,\vec{e_4}$.

Найдем касательный вектор линии $\bar{t} = f_4^3(t)$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{t}} = t^1\,\overrightarrow{m_1} + t^3\,\overrightarrow{m_3} + t^4\,\overrightarrow{m_4} = t^1\,\vec{e_1} + t^1 m_1^3\,\vec{e_3} +$$
$$+(t^1 m_1^4 + t^3 m_3^4 + t^4 m_4^4)\,\vec{e_4} + (t^1 m_1^5 + t^3 m_3^5 + t^4 m_4^5)\,\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{t}\,,\vec{\bar{t}}\,,\overrightarrow{XF_4^3} \in \varDelta_{(134)}$ имеем

$$t^1 m_1^5 + t^3 m_3^5 + t^4 m_4^5 = 0.$$

Отсюда, учитывая формулы (2.3.2) получаем следующее:

$$\varLambda_{41}^5 t^1 + \varLambda_{43}^5 t^3 + \varLambda_{44}^5 t^4 = 0, \tag{2.3.8}$$

$\varLambda_{41}^5$ – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; $\varLambda_{43}^5$ – вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; $\varLambda_{44}^5$ – первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Следовательно, линия t принадлежащая распределению $\varDelta_{(134)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.3.8).

Рассмотрим линию μ принадлежащую распределению $\varDelta_{(245)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\mu} = \mu^2\,\vec{e_2} + \mu^4\,\vec{e_4} + \mu^5\,\vec{e_5}$.

Найдем касательный вектор линии $f_4^3(\mu) = \bar{\mu}$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{\mu}} = \mu^2\,\overrightarrow{m_2} + \mu^4\,\overrightarrow{m_4} + \mu^5\,\overrightarrow{m_5} = \mu^2\,\vec{e_2} + (\mu^2 m_2^3 + \mu^5 m_5^3)\,\vec{e_3} +$$
$$+(\mu^2 m_2^4 + \mu^4 m_4^4 + \mu^5 m_5^4)\,\vec{e_4} + (\mu^2 m_2^5 + \mu^4 m_4^5 + \mu^5)\,\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\mu}\,,\vec{\bar{\mu}}\,,\overrightarrow{XF_4^3} \in \varDelta_{(245)}$ имеем

$$\mu^2 m_2^3 + \mu^5 m_5^3 = 0.$$

Отсюда, учитывая формулы (2.3.2) получаем следующее:

$$\Lambda_{42}^3 \mu^2 + \Lambda_{45}^3 \mu^5 = 0, \qquad (2.3.9)$$

Λ_{42}^3 – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{45}^3 – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Следовательно, линия μ принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда координаты μ^2, μ^5 его касательного вектора удовлетворяют условие (2.3.9).

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 2.3.1. 1) Линии, принадлежащие распределениям $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $\left(\tilde{\imath} \neq 4,\ \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1,2,3,5\right)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3;

2) Линия $\beta \subset \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям:

$$\beta^1 = \begin{vmatrix} \Lambda_{42}^5 & \Lambda_{44}^5 \\ \Lambda_{42}^3 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \beta^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{44}^5 & \Lambda_{41}^5 \\ 0 & \Lambda_{41}^3 \end{vmatrix}; \qquad \beta^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{41}^5 & \Lambda_{42}^5 \\ \Lambda_{41}^3 & \Lambda_{42}^3 \end{vmatrix} \qquad (2.3.5)$$

где Λ_{41}^5 –четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{42}^5 –вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{44}^5 –первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{42}^3 –вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

3) Линия $\delta \in \Delta_{(234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\Lambda_{42}^5 \delta^2 + \Lambda_{43}^5 \delta^3 + \Lambda_{44}^5 \delta^4 = 0 \qquad (2.3.6)$$

где Λ_{42}^5 —вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{43}^5 —вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{44}^5 —первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

4) Линия $q \in \Delta_{(345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3;

5) Линия $s \in \Delta_{(145)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\Lambda_{41}^3 s^1 + \Lambda_{45}^3 s^5 = 0 \tag{2.3.7}$$

где Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{45}^3 – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

6) Линия $t \in \Delta_{(134)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда , когда выполнено условие

$$\Lambda_{41}^5 t^1 + \Lambda_{43}^5 t^3 + \Lambda_{44}^5 t^4 = 0 \tag{2.3.8}$$

где Λ_{41}^5 —четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{43}^5 —вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{44}^5 —первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

7) Линия $\mu \in \Delta_{(245)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда , когда выполнено условие

$$\Lambda_{42}^3 \mu^2 + \Lambda_{45}^3 \mu^5 = 0 \tag{2.3.9}$$

где Λ_{42}^3 —вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{45}^3 —четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Теперь исследуем необходимое и достаточное условия, что линии принадлежащие четырехмерному распределению являются квазидвойными линиями.

Касательный вектор линии μ принадлежащей распределению $\Delta_{(1234)}$ имеем вид: $\vec{\mu} = \mu^1 \vec{e}_1 + \mu^2 \vec{e}_2 + \mu^3 \vec{e}_3 + \mu^4 \vec{e}_4$. А касательный вектор линии $f_4^3(\mu) = \overline{\mu}$ найдем в виде: $\overrightarrow{\overline{\mu}} = \mu^1 \overrightarrow{m_1} + \mu^2 \overrightarrow{m_2} + \mu^3 \overrightarrow{m_3} + \mu^4 \overrightarrow{m_4}$.

В силу формулы (2.2.2) имеем:

$$\overrightarrow{\overline{\mu}} = \mu^1 \overrightarrow{e_1} + \mu^2 \overrightarrow{e_2} + (\mu^1 m_1^3 + \mu^2 m_2^3)\overrightarrow{e_3} +$$
$$+(\mu^1 m_1^4 + \mu^2 m_2^4 + \mu^3 m_3^4 + \mu^4 m_4^4)\overrightarrow{e_4} +$$
$$+(\mu^1 m_1^5 + \mu^2 m_2^5 + \mu^3 m_3^5 + \mu^4 m_4^5)\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\overrightarrow{\mu}, \overrightarrow{\overline{\mu}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(1234)}$ получаем следующее:

$$\mu^1 m_1^5 + \mu^2 m_2^5 + \mu^3 m_3^5 + \mu^4 m_4^5 = 0.$$

Учитывая формул (3.3.2) имеем следующее:

$$\mu^1 \Lambda_{41}^5 + \mu^2 \Lambda_{42}^5 + \mu^3 \Lambda_{43}^5 + \mu^4 \Lambda_{44}^5 = 0, \qquad (2.3.10)$$

где Λ_{41}^5 – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{42}^5 – третья кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{43}^5 – вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{44}^5 – первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если имеет место условие (2.3.10), то линия $\mu \in \Delta_{(1234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Найдем касательный вектор образа $f_4^3(\nu) = \overline{\nu}$ линии ν принадлежащей распределению $\Delta_{(2345)}$: $\overrightarrow{\overline{\nu}} = \nu^2 \overrightarrow{m_2} + \nu^3 \overrightarrow{m_3} + \nu^4 \overrightarrow{m_4} + \nu^5 \overrightarrow{m_5}$.

Учитывая формул (2.3.2) имеем следующее:

$$\overrightarrow{\overline{\nu}} = \nu^2 \overrightarrow{e_2} + (\nu^2 m_2^3 + \nu^5 m_5^3)\overrightarrow{e_3} + (\nu^2 m_2^4 + \nu^3 m_3^4 + \nu^4 m_4^4 + \nu^4 m_5^4)\overrightarrow{e_4} +$$
$$+(\nu^2 m_2^5 + \nu^3 m_3^5 + \nu^4 m_4^5 + \nu^5)\overrightarrow{e_5}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{\overline{\nu}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(2345)}$.

Следовательно, линия $\nu \in \Delta_{(2345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Аналогично, найдем касательный вектор образа $f_4^3(\theta)=\overline{\theta}$ линии $\theta \in \varDelta_{(1345)}$ принадлежащей распределению $\varDelta_{(1345)}$:

$$\vec{\overline{\theta}} = \theta^1 \vec{e_1} + (\theta^1 m_1^3 + \theta^5 m_5^3)\vec{e_3} + (\theta^1 m_1^4 + \theta^3 m_3^4 + \theta^4 m_4^4 +$$

$$+\theta^5 m_5^4)\vec{e_4} + (\theta^1 m_1^5 + \theta^3 m_3^5 + \theta^4 m_4^5 + \theta^5)\vec{e_5}.$$

Отсюда имеем выполнение условия $\vec{\theta}$, $\vec{\overline{\theta}}$, $\overrightarrow{XF_1^5} \in \varDelta_{(1345)}$.

Следовательно, линия $\theta \in \varDelta_{(1345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Теперь рассмотрим линию ρ принадлежащую распределению $\varDelta_{(1245)}$. Найдем касательный вектор образа данной линии при частичном отображении f_4^3 в следующем виде:

$$\vec{\overline{\rho}} = \rho^1 \vec{b_1} + \rho^2 \vec{b_2} + \rho^3 \vec{b_3} + \rho^4 \vec{b_4}.$$

Учитывая формул (2.3.2) имеем следующее:

$$\vec{\overline{\rho}} = \rho^1 \vec{e_1} + \rho^2 \vec{e_2} + (\rho^1 m_1^3 + \rho^2 m_2^3 + \rho^5 m_5^3)\vec{e_3} + (\rho^1 m_1^4 + \rho^2 m_2^4 +$$

$$+\rho^4 m_4^4 + \rho^5 m_5^4)\vec{e_4} + (\rho^1 m_1^5 + \rho^2 m_2^5 + \rho^4 m_4^5 + \rho^5)\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\rho}$, $\vec{\overline{\rho}}$, $\overrightarrow{XF_4^3} \in \varDelta_{(1245)}$ имеем:

$$\rho^1 m_1^3 + \rho^2 m_2^3 + \rho^5 m_5^3 = 0.$$

Отсюда, учитывая формул (3.3.2) получаем следующее:

$$\rho^1 \Lambda_{41}^3 + \rho^2 \Lambda_{42}^3 + \rho^5 \Lambda_{45}^3 = 0, \qquad (2.3.11)$$

где Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{42}^3 – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{45}^3 – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если имеет место условие (2.3.11), то линия $\rho \in \varDelta_{(1245)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3

Теперь рассмотрим линию χ принадлежащую распределению $\varDelta_{(1235)}$. Касательный вектор линии $f_4^3(\chi)=\overline{\chi}$ имеет следующий вид:

$\vec{\vec{\chi}} = \chi^1 \vec{e_1} + \chi^2 \vec{e_2} + (\chi^1 m_1^3 + \chi^2 m_2^3 + \chi^5 m_5^3)\vec{e_3} + (\chi^1 m_1^4 + \chi^2 m_2^4 +$
$+\chi^3 m_3^4 + \chi^5 m_5^4)\vec{e_4} + (\chi^1 m_1^5 + \chi^2 m_2^5 + \chi^3 m_3^5 + \chi^5)\vec{e_5}.$

Имеет место условие $\vec{\chi}, \vec{\vec{\chi}}, \overrightarrow{XF_4^3} \notin \Delta_{(1235)}$, так как $\overrightarrow{XF_4^3} = -\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4 \notin \Delta_{(123)}$.

Следовательно, линия $\chi \subset \Delta_{(1235)}$ не может быть квазидвойной линией частичного отображения f_4^3

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 2.3.2. 1) Линии ν, θ, принадлежащие распределению $\Delta_{(2345)}$, $\Delta_{(1345)}$ (соответственно), всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3;

2) Линия $\mu \in \Delta_{(1234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда , когда выполнено условие

$$\mu^1 \Lambda_{41}^5 + \mu^2 \Lambda_{42}^5 + \mu^3 \Lambda_{43}^5 + \mu^4 \Lambda_{44}^5 = 0, \qquad (2.3.10)$$

где Λ_{41}^5 – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{42}^5 – третья кривизна линии ω^2сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{43}^5 – вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{44}^5 – первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

3) Для того, чтобы линия $\rho \subset \Delta_{(1245)}$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\rho^1 \Lambda_{41}^3 + \rho^2 \Lambda_{42}^3 + \rho^5 \Lambda_{45}^3 = 0, \qquad (2.3.11)$$

где Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{42}^3 – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{45}^3 – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

4) Линия $\chi \subset \Delta_{(1235)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

2.4. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_3^2

Псевдофокус $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_3^2} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e_3} = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e_3}. \tag{2.4.1}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, точка F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_5$. Получается частичное отображение $f_3^2 \colon \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$.

Продифференцируя равенство (2.4.1) и применяя деривационные формулы получаем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_3^2} = d\,\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\right)\vec{e_3} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}d\,\vec{e_3} = \omega^i\,\vec{e_i} + \frac{d\Lambda_{32}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e_3} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\,\vec{e_i}$$

или

$$d\,\overrightarrow{F_3^2} = \omega^m\,\overrightarrow{e_m} + \frac{C_{32m}^2\omega^m}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e_3} - \frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e_i},$$

где $d\Lambda_{32}^2 = \left(\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell\right)\omega^m = C_{32m}^2\omega^m$.

Из последнего равенства имеем:

$$d\,\overrightarrow{F_3^2} = \left[\vec{e_1} + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e_3} - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e_i}\right]\omega^1 + \left[\vec{e_2} + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e_3} - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e_i}\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e_3} + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e_3} - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e_i}\right]\omega^3 + \left[\vec{e_4} + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e_3} - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e_i}\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e_5} + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e_3} - \frac{\Lambda_{35}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e_i}\right]\omega^5.$$

Введем следующее обозначение:

$$\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{e_1} + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{c_2} = \overrightarrow{e_2} + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{c_3} = \overrightarrow{e_3} + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{c_4} = \overrightarrow{e_4} + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{c_5} = \overrightarrow{e_5} + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{35}^i}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_i}.$$

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_5$ является циклической сетью Френе, векторы $\overrightarrow{c_i}$ имеют следующий вид:

$$\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_2} + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{c_2} = \overrightarrow{e_2} + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{c_3} = \left[1 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\right]\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_4}; \qquad (2.4.2)$$

$$\overrightarrow{c_4} = -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\overrightarrow{e_2} + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}.$$

К области Ω_3^2 присоеденим подвижной репер $\mathcal{R}' = \left(F_3^2, \overrightarrow{c_i}\right)$. В общем случае векторы (2.4.2) не являются линейно зависимыми.

Рассмотрим линию α принадлежащую распределению $\Delta_{(123)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\alpha} = \alpha^1\,\overrightarrow{e_1} + \alpha^2\,\overrightarrow{e_2} + \alpha^3\,\overrightarrow{e_3}$.

Найдем касательный вектор линии $\overline{\alpha} = f_3^2(\alpha)$ в следующем виде:

$$\overrightarrow{\overline{\alpha}} = \alpha^1 \overrightarrow{c_1} + \alpha^2 \overrightarrow{c_2} + \alpha^3 \overrightarrow{c_3} = \alpha^1 \overrightarrow{e_1} + \alpha^1 c_1^2 \overrightarrow{e_2} + (\alpha^1 c_1^3 + \alpha^2 c_2^3 +$$
$$+\alpha^3 c_3^3) \overrightarrow{e_3} + (\alpha^1 c_1^4 + \alpha^2 c_2^4 + \alpha^3 c_3^4) \overrightarrow{e_4}.$$

Из условия $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\overline{\alpha}}$, $\overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(123)}$ получаем следующее:

$$\alpha^1 c_1^4 + \alpha^2 c_2^4 + \alpha^3 c_3^4 = 0.$$

В силу формулы (2.4.2) получаем следующее:

$$\alpha^1 \Lambda_{31}^4 + \alpha^2 \Lambda_{32}^4 + \alpha^3 \Lambda_{33}^4 = 0. \qquad (2.4.3)$$

где Λ_{31}^4 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{32}^4 – торчосунун вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{33}^4 – первая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.4.3), то линия α принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 (значит и пары $\left(f_3^2, \Delta_{(123)}\right)$).

Теперь рассмотрим линию β принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$. Её касательный вектор имеет вид $\overrightarrow{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\overrightarrow{\overline{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f_3^2(\beta)$ в следующем виде:

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^1 \overrightarrow{e_1} + \beta^1 c_1^{2+} \overrightarrow{e_2} + (\beta^1 c_1^3 + \beta^2 c_2^3 + \beta^4 c_4^3) \overrightarrow{e_3}$$
$$+ (\beta^1 c_1^4 + \beta^2 c_2^4 + \beta^4) \overrightarrow{e_4}.$$

Выполняется условие $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\overline{\beta}}$, $\overrightarrow{XF_3^2} \notin \Delta_{(124)}$, так как $\overrightarrow{XF_3^2} = -\frac{1}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_3 \notin \Delta_{(124)}$.

Следовательно, линия $\beta \subset \Delta_{(124)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Теперь рассмотрим линию δ принадлежащую распределению $\Delta_{(234)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\overrightarrow{\delta} = \delta^2 \vec{e}_2 + \delta^3 \vec{e}_3 + \delta^4 \vec{e}_4$ Касательный вектор линии $f_2^3(\delta) = \overline{\delta}$ находится в следующем виде:

$$\overrightarrow{\overline{\delta}} = \delta^2\,\overrightarrow{c_2} + \delta^3\,\overrightarrow{c_3} + \delta^4\,\overrightarrow{c_4} = \delta^2 c_4^2\,\overrightarrow{e_2} + (\delta^2 c_2^3 + \delta^3 c_3^3 + \delta^4 c_4^3)\,\overrightarrow{e_3} +$$
$$+(\delta^2 c_2^4 + \delta^3 c4 + \delta^4)\,\overrightarrow{e_4}.$$

Отсюда получим, условие $\vec{\delta}\,, \overrightarrow{\overline{\delta}}\,, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(234)}$ всегда выполняется.

$$\mu^1 d_1^4 + \mu^3 d_3^4 = 0.$$

Следовательно, линия δ принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 (значит и пары $\left(f_3^2, \Delta_{(234)}\right)$).

Теперь рассмотрим линию h принадлежащую распределению $\Delta_{(235)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{h} = h^2\vec{e}_2 + h^3\vec{e}_3 + h^5\vec{e}_5$. Найдем касательный вектор $\overrightarrow{\overline{h}}$ линии $\overline{h} = f_3^2(h)$ в следующем виде:

$$\overrightarrow{\overline{h}} = h^2\vec{c}_2 + h^3\vec{c}_3 + h^5\vec{c}_5 = h^5 c_5^2\vec{e}_2 + \left(h^2 c_2^3 + h^3 c_3^3 + h^5 c_5^3\right)\vec{e}_3 +$$
$$+\left(h^2 c_2^4 + h^3 c_3^4 + h^5 c_5^4\right)\vec{e}_4 + h^5\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{h}\,, \overrightarrow{\overline{h}}\,, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(235)}$ имеем:

$$h^2 c_2^4 + h^3 c_3^4 + h^5 c_5^4 = 0.$$

Отсюда учитывая формулы (3.4.2) получаем следующее равенство:

$$h^2\Lambda_{32}^4 + h^3\Lambda_{33}^4 + h^5\Lambda_{35}^4 = 0 \qquad (2.4.4)$$

Обратно, если выполняется условие (2.4.4), то линия h принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Рассмотрим линию p принадлежащую распределению $\Delta_{(345)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{p} = p^3\vec{e}_3 + p^4\vec{e}_4 + p^5\vec{e}_5$.

А касательный вектор линии $f_4^3(s) = \overline{s}$ определяется в следующем виде:

$$\vec{\bar{p}} = p^3\vec{c}_3 + p^4\vec{c}_4 + p^5\vec{c}_5 = (p^4c_4^2 + p^5c_5^2)\vec{e}_2 + (p^3c_1^3 + p^4c_4^3 + p^5c_5^3)\vec{e}_3 + \quad +(p^4 + p^5c_5^4)\vec{e}_4 + p^5\vec{e}_5$$

Из условия $\vec{p}$, $\vec{\bar{p}}$,$\overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(345)}$ имеем

$$p^1c_4^2 + p^5c_5^2 = 0.$$

Отсюда учитывая формулы (3.4.2) получаем следующее:

$$\Lambda_{34}^2 p^4 + \Lambda_{35}^2 p^5 = 0, \qquad (2.4.5)$$

Λ_{34}^2 – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{35}^2 – третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Верно и обратное утверждение. Следовательно, линия p принадлежащая распределению $\Delta_{(345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.4.5).

Теперь рассмотрим линию s принадлежащую распределению $\Delta_{(134)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{s} = s^1\vec{e}_1 + s^3\vec{e}_3 + s^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор линии $f_3^2(s) = \bar{s}$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{s}} = s^2\vec{c}_1 + s^3\vec{c}_3 + s^4\vec{c}_4 = s^1\vec{e}_1 + (s^1c_1^2 + s^4c_4^2)\vec{e}_2 +$$
$$+(s^1c_1^3 + s^3c_3^3 + s^4c_4^3)\vec{e}_3 + (s^1c_1^4 + s^3c_3^4 + s^4)\vec{e}_4.$$

Из условия $\vec{s}$, $\vec{\bar{s}}$,$\overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(134)}$ имеем

$$s^1c_1^2 + s^4c_4^2 = 0$$

или

$$s^1\Lambda_{31}^2 + s^4\Lambda_{34}^2 = 0, \qquad (2.4.6)$$

где Λ_{31}^2 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{34}^2 – $\tilde{\Sigma}_5$ торчосунун четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если координаты вектора $\vec{s}$ удовлетворяют условию (2.4.6), то является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Рассмотрим линию m принадлежащую распределению $\Delta_{(135)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{m} = m^1\vec{e}_1 + m^3\vec{e}_3 + m^5\vec{e}_5$.

Найдем касательный вектор линии $f_3^2(m) = \bar{m}$ в следующем виде:

$\vec{\bar{m}} = m^1\vec{c}_1 + m^3\vec{c}_3 + m^5\vec{c}_5 = m^1\vec{e}_1 + (m^1c_1^2 + m^5c_5^2)\vec{e}_2 + (m^1c_1^3 + $
$+m^3c_3^3 + m^5c_5^3)\vec{e}_3 + (m^1c_1^4 + m^3c_3^4 + m^5c_5^4)\vec{e}_4 + m^5\vec{e}_5.$

Из условия $\vec{m}, \vec{\bar{m}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(135)}$ имеем

$$m^3c_1^2 + m^5c_5^2 = 0;$$

$$m^1c_1^4 + m^3c_3^4 + m^5c_5^4 = 0..$$

Отсюда, учитывая формулы (3.4.2) получаем следующее:

$$m^1\Lambda_{31}^2 + m^3\Lambda_{33}^2 + m^5\Lambda_{35}^1 = 0; \qquad (2.4.7)$$

$$m^1C_{321}^2 + m^3C_{323}^2 + m^5C_{325}^2 = 0. \qquad (2.4.8)$$

Следовательно, координаты m^1, m^3, m^5 вектора $\vec{m}$ являются координатами направляющего вектора прямой получающийся при пересечении плоскостей (2.3.3) и (2.3.4) пространства опирающейся к базису $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, они получаются следующим образом:

$$m^1 = \begin{vmatrix} 0 & \Lambda_{35}^2 \\ \Lambda_{33}^4 & \Lambda_{35}^4 \end{vmatrix}; \quad m^3 = \begin{vmatrix} \Lambda_{35}^2 & \Lambda_{31}^2 \\ \Lambda_{35}^4 & \Lambda_{31}^4 \end{vmatrix}; \quad m^5 = \begin{vmatrix} \Lambda_{31}^2 & 0 \\ \Lambda_{31}^4 & \Lambda_{33}^4 \end{vmatrix}. \qquad (2.4.9)$$

Имеет место обратное. Таким образом, линия m принадлежащая распределению $\Delta_{(135)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда координаты его направляющего вектора $\bar{m}$ удовлетворяют условия (2.4.9).

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 2.4.1. 1) Линия $\alpha \subset \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\alpha^1\Lambda^4_{31} + \alpha^2\Lambda^4_{32} + \alpha^3\Lambda^4_{33} = 0, \qquad (2.4.3)$$

где Λ^4_{31} – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^4_{32} – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^4_{33} – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

2) Линии, принадлежащие распределениям $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $\left(\bar{\imath} \neq 3,\ \bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k} = 1,2,4,5\right)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f^2_3;

3) Линия $\delta \subset \Delta_{(234)}$ всегда является квазидвойной линией частичного

частичного отображения f^2_3;

4) $h \subset \Delta_{(235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f^2_3 тогда и только тогда , когда выполнено условие:

$$h^2\Lambda^4_{32} + h^3\Lambda^4_{33} + h^5\Lambda^4_{35} = 0, \qquad (2.4.4)$$

где Λ^4_{32} – вторая кривизна линии ω^2; сети $\tilde{\Sigma}_{5;}$ Λ^4_{33} – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^4_{35} – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

$$\theta^1\Lambda^2_{31} + \theta^4\Lambda^2_{34} + \theta^5\Lambda^2_{35} = 0, \qquad (2.4.10)$$

где Λ^2_{31} – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^2_{34} – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^2_{35} – третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.4.10), то линия $\theta \in \Delta_{(1345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f^2_3.

Аналогично, найдем касательный вектор образа $\bar{\ell} = f^2_3(\ell)$ линии ℓ принадлежащей распределению $\Delta_{(1235)}$ при частичном отображении f^2_3:

$$\vec{\bar{\ell}} = \ell^1\,\vec{c_1} + \ell^2\,\vec{c_2} + \ell^3\,\vec{c_3} + \ell^5\,\vec{c_5}.$$

Применяя формул (2.4.2) получаем следующее:

$$\vec{\bar{\ell}} = \ell^1\,\vec{e_1} + \left(\ell^1 c_1^2 + \ell^2 + \ell^5 c_5^2\right)\vec{e_2} + \left(\ell^1 c_1^3 + \ell^2 c_2^3 + \ell^3 c_3^3 + \ell^5 c_5^3\right)\vec{e_3} +$$
$$+\left(\ell^1 c_1^4 + \ell^2 c_2^4 + \ell^3 c_3^4 + \ell^5 c_5^4\right)\vec{e_4} + \ell^5\,\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\ell}$, $\vec{\bar{\ell}}$, $\overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(1235)}$ имеем:

$$\ell^1 c_1^4 + \ell^2 c_2^4 + \ell^3 c_3^4 + \ell^5 c_5^4 = 0.$$

Отсюда, учитывая формул (2.4.2) имеем следующее:

$$\ell^1 \Lambda_{31}^4 + \ell^2 \Lambda_{32}^4 + \ell^3 \Lambda_{33}^4 + \ell^5 \Lambda_{35}^4 = 0, \qquad (2.4.11)$$

где Λ_{31}^4 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{32}^4 – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{33}^4 – первая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{35}^4 – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Теперь рассмотрим линию $\chi \in \Delta_{(1245)}$. Найдем касательный вектор образа $\bar{\chi} = f_3^2(\chi)$ данной линии при частичном отображении f_3^2 в следующем виде:

$$\vec{\chi} = \chi^1\,\vec{c_1} + \chi^2\,\vec{c_2} + \chi^4\,\vec{c_4} + \chi^5\,\vec{c_5}.$$

$$\vec{\bar{\chi}} = \chi^1\,\vec{e_1} + (\chi^1 c_1^2 + \chi^2 + \chi^4 c_4^2 + \chi^5 c_5^2)\,\vec{e_2} + (\chi^1 c_1^3 + \chi^2 c_2^3 + \chi^4 c_4^3 +$$
$$+\chi^5 c_5^3)\ \vec{e_3} + (\chi^1 c_1^4 + \chi^2 c_2^4 + \chi^4 + \chi^5 c_5^4)\,\vec{e_4} + \chi^5\,\vec{e_5}.$$

Выполняется условие $\vec{\chi}$, $\vec{\bar{\chi}}$, $\overrightarrow{XF_3^2} \notin \Delta_{(1245)}$, так как $\overrightarrow{XF_3^2} = -\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 \notin \Delta_{(1245)}$.

Таким образом, линия $\chi \subset \Delta_{(1245)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 2.4.2. 1) Линии $\mu \subset \Delta_{(1234)}$ и $\nu \subset \Delta_{(1345)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_3^2;

2) Линия $\theta \subset \Delta_{(1345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\theta^1 \Lambda^2_{31} + \theta^4 \Lambda^2_{34} + \theta^5 \Lambda^2_{35} = 0, \qquad (2.4.10)$$

где Λ^2_{31} – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^2_{34} – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^2_{35} – третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

3) Линия $\ell \in \Delta_{(1235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\ell^1 \Lambda^4_{31} + \ell^2 \Lambda^4_{32} + \ell^3 \Lambda^4_{33} + \ell^5 \Lambda^4_{35} = 0, \qquad (2.4.11)$$

где Λ^4_{31} – третья кривизна линии ω^1 сети $\widetilde{\Sigma_5}$; Λ^4_{32} – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ^4_{33} – первая кривизна линии сети $\widetilde{\Sigma_5}$;

4) Линия $\chi \in \Delta_{(1245)}$ не являются квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

2.5. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_2^1

Псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_2^1} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_2} = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_2}. \qquad (2.5.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, точка F_2^1 описывает свою область $\Omega_2^1 \subset E_5$. Получается частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $f_2^1(X) = F_2^1$.

Продифференцируя равенство (2.5.1) и применяя деривационные формулы получаем следующее:

$$\overrightarrow{dF_2^1} = d\,\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\right)\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\,d\,\overrightarrow{e_2}.$$

Отсюда применяя деривационные формулы (1.1.3), (1.1.5) получаем следующее:

$$\overrightarrow{dF_2^1} = \omega^m\,\overrightarrow{e_m} + \frac{A_{21m}^1\omega^m}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\Lambda_{2m}^i\omega^m\,\overrightarrow{e_i},$$

отсюда $d\Lambda_{21}^1 = \left(\Lambda_{21m}^1 + \Lambda_{2\ell}^5\Lambda_{1m}^\ell + \Lambda_{\ell 1}^1\Lambda_{2m}^\ell\right)\omega^m = A_{21m}^1\omega^m$.

Вектор $d\,\overrightarrow{F_2^1}$ можно записать в следующем виде:

$$d\,\overrightarrow{F_2^1} = \left[\overrightarrow{e_1} + \frac{A_{211}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{21}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^1 + \left[\overrightarrow{e_2} + \frac{A_{212}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{22}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^2 +$$
$$\left[\overrightarrow{e_3} + + \frac{A_{213}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - - \frac{\Lambda_{23}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^3 + \left[\overrightarrow{e_4} + \frac{A_{214}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^4 +$$
$$\left[\overrightarrow{e_5} + \frac{A_{215}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - - \frac{\Lambda_{25}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^5.$$

Когда сеть Френе $\tilde{\Sigma}_5$ является циклической сетью, то $\overrightarrow{dF_2^1} = \omega^i\,\overrightarrow{a_i}$, где векторы $\overrightarrow{a_i}$ имеют следующий вид:

$$\overrightarrow{a_1} = \frac{\Lambda^1_{211}}{(\Lambda^1_{21})^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{21}}{\Lambda^5_{15}}\overrightarrow{e_3};$$

$$\overrightarrow{a_2} = \left[1 + \frac{\Lambda^1_{212}}{(\Lambda^1_{21})^2}\right]\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{22}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_3};$$

$$\overrightarrow{a_3} = -\frac{\Lambda^1_{23}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_1} + \frac{\Lambda^1_{213}}{(\Lambda^1_{21})^2}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \tag{2.5.2}$$

$$\overrightarrow{a_4} = \frac{\Lambda^1_{214}}{(\Lambda^1_{21})^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{24}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{a_5} = -\frac{\Lambda^1_{25}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_1} + \frac{\Lambda^1_{215}}{(\Lambda^1_{21})^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{25}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_5}.$$

Рассмотрим линию ℓ принадлежащую распределению $\Delta_{(123)} = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$. Её касательный вектор: $\vec{\ell} = \ell^1\,\overrightarrow{e_1} + \ell^2\,\overrightarrow{e_2} + \ell^3\,\overrightarrow{e_3}$.

Найдем касательный вектор линии $f_2^1(\ell) = \bar{\ell}$ в следующем виде: $\vec{\bar{\ell}} = \ell^1\,\overrightarrow{a_1} + \ell^2\,\overrightarrow{a_2} + \ell^3\,\overrightarrow{a_3}$. В силу формулы (2.5.2) последнее равенство имеет следующий вид:

$$\vec{\bar{\ell}} = \left(\ell^1 a_1^2 + \ell^2 a_2^2 + \ell^3 a_3^2\right)\overrightarrow{e_2} + \ell^3 a_3^1\,\overrightarrow{e_1} + \left(\ell^1 a_1^3 + \ell^2 a_2^3\right)\overrightarrow{e_3}.$$

Имеет место условие $\vec{\ell}, \vec{\bar{\ell}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(123)}$. Следовательно линия ℓ всегда является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(123)}\right)$.

Рассмотрим линию m принадлежащую распределению $\Delta_{(124)} = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_4}\right)$. Её касательный вектор: $\vec{m} = m^1\,\overrightarrow{e_1} + m^2\,\overrightarrow{e_2} + m^4\,\overrightarrow{e_4}$. Найдем касательный вектор линии $\bar{m} = f_2^1(m)$, который имеет следующий вид:

$$\vec{\bar{m}} = m^4 a_4^1\,\overrightarrow{e_1} + (m^1 a_1^2 + m^2 a_2^2 + m^4 a_4^2)\,\overrightarrow{e_2} + (m^1 a_1^3 + m^2 a_2^3 + m^4 a_4^3)\,\overrightarrow{e_3} + m^4\,\overrightarrow{e_4}.$$

Из условии $\vec{m}, \vec{\bar{m}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(124)}$ имеем следующее:

$$m^1 a_1^3 + m^2 a_2^3 + m^4 a_4^3 = 0.$$

В силу формулы (2.5.2) имеем следующее:

$$\Lambda_{21}^3 m^1 + \Lambda_{22}^3 m^2 + \Lambda_{24}^3 m^4 = 0, \qquad (2.5.3)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{24}^3 – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.5.3), то линия m принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(124)}\right)$.

Аналогичным образом рассмотрим линию k принадлежащую распределению $\Delta_{(125)}$. Её касательный вектор имеет вид:

$$\vec{k} = k^1 \vec{e_1} + k^2 \vec{e_2} + k^5 \vec{e_5} .$$

Найдем касательный вектор линии $\bar{k} = f_2^1(k)$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{k}} = k^1 \vec{a_1} + k^2 \vec{a_2} + k^5 \vec{a_5}.$$

В силу формулы (2.5.2) получаем следующее:

$$\vec{\bar{k}} = k^5 a_5^1 \vec{e_1} + (k^1 a_1^2 + k^2 a_2^2 + k^5 a_5^2) \vec{e_2} + (k^1 a_1^3 + k^2 a_2^3 + k^5 a_5^3) \vec{e_3} +$$
$$+ k^5 \vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{k}, \vec{\bar{k}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(125)}$ имеем:

$$k^1 \Lambda_{21}^3 + k^2 \Lambda_{22}^3 + k^5 \Lambda_{25}^3 = 0, \qquad (2.5.4)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{22}^3– первая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{25}^3 – третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.5.4), то линия k принадлежащая распределению $\Delta_{(125)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(125)}\right)$.

Таким образом, линия k принадлежащая распределению $\Delta_{(125)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда , когда выполняется условие (2.5.4)

Теперь рассмотрим линию h принадлежащую распределению $\Delta_{(135)}$. Её касательный вектор: $\vec{h} = h^1\,\vec{e_1} + h^3\,\vec{e_3} + h^5\,\vec{e_5}$. $\overline{h} = f_2^1(h)$. Найдем касательный вектор линии $\overline{h} = f_2^1(h)$ в следующем виде: $\vec{\overline{h}} = h^1\,\vec{a_1} + h^3\,\vec{a_3} + h^5\,\vec{a_5}$. В силу формулы (2.5.2) имеем следующее:

$$\vec{\overline{h}} = \left(h^3 a_3^1 + h^5 a_5^1\right)\vec{e_1} + \left(h^1 a_1^2 + h^3 a_3^2 + h^5 a_5^2\right)\vec{e_2} +$$
$$+\left(h^1 a_1^3 + h^3 a_2^3 + h^5 a_5^3\right)\vec{e_3} + h^5\,\vec{e_5}.$$

Имеет место условие $\vec{h}\,, \vec{\overline{h}}\,, \overrightarrow{XF_2^1} \notin \Delta_{(135)}$, так как $\overrightarrow{XF_2^1} = -\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 \notin \Delta_{(135)}$. Следовательно линия $h \subset \Delta_{(135)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Аналогично можно показать, что линии принадлежащие распределению $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $\left((\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1{,}3{,}4{,}5\right)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1.

Рассмотрим линию s принадлежащую распределению $\Delta_{(234)} = \left(X, \vec{e_2}\,, \vec{e_3}\,, \vec{e_4}\right)$. Её касательный вектор $\vec{s} = s^2\,\vec{e_2} + s^3\,\vec{e_3} + s^4\,\vec{e_4}$. Найдем касательный вектор линии $f_2^1(s) = \overline{s}$ в следующем виде:

$$\vec{\overline{s}} = s^2\,\vec{a_2} + s^3\,\vec{a_3} + s^4\,\vec{a_4} = (s^3 a_3^1 + s^4 a_4^1)\,\vec{e_1} +$$
$$+(s^2 a_2^2 + s^3 a_3^2 + s^4 a_4^2)\,\vec{e_2} + (s^2 a_2^3 + s^3 + s^4 a_4^3)\,\vec{e_3} + s^4\,\vec{e_4}.$$

Из условии $\vec{s}\,,\ \vec{\overline{s}}\,,\ \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(234)}$ имеем: $s^3 a_3^1 + s^4 a_4^1 = 0$. Учитывая формулы (2.5.2) имеем следующее: $\Lambda_{23}^1 s^3 + \Lambda_{24}^1 s^4 = 0$ или

$$\frac{s^4}{s^3} = -\frac{\Lambda_{23}^1}{\Lambda_{24}^1}, \qquad (2.5.10)$$

где Λ_{23}^1 – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{24}^1 – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.5.10), т.е. координаты s^3, s^4 его касательного вектора удовлетворяют условие (2.3.10), то линия s является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(125)}\right)$.

Рассмотрим линию t принадлежащую распределению $\Delta_{(245)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{t} = t^2\,\vec{e_2} + t^4\,\vec{e_4} + t^5\,\vec{e_5}$. Найдем касательный вектор линии $f_2^1(t) = \bar{t}$ в следующем виде:

$$\vec{\bar{t}} = t^2\,\vec{a_2} + t^4\,\vec{a_4} + t^5\,\vec{a_5} = (t^4 a_4^1 + t^5 a_5^1)\,\vec{e_1} +$$
$$+(t^2 a_2^2 + t^4 a_4^2 + t^5 a_5^2)\,\vec{e_2} + (t^2 a_2^3 + t^4 a_4^3 + t^5 a_5^3)\,\vec{e_3} +$$
$$+t^4\,\vec{e_4} + t^5\,\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{t}$, $\vec{\bar{t}}$, $\overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(245)}$ имеем

$$t^4 a_4^1 + t^5 a_5^1 = 0,$$
$$t^2 a_2^3 + t^4 a_4^3 + t^5 a_5^3 = 0.$$

Отсюда, учитывая формулы (3.5.2) получаем следующее:

$$\Lambda_{24}^1 t^4 + \Lambda_{25}^1 t^5 = 0; \qquad (2.5.11)$$

$$\Lambda_{22}^3 t^2 + \Lambda_{24}^3 t^4 + \Lambda_{25}^3 t^5 = 0. \qquad (2.5.12)$$

Отсюда

$$t^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{24}^1 & \Lambda_{25}^1 \\ \Lambda_{24}^3 & \Lambda_{25}^3 \end{vmatrix}; \qquad t^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{25}^1 & 0 \\ \Lambda_{25}^3 & \Lambda_{22}^3 \end{vmatrix}; \qquad t^5 = \begin{vmatrix} 0 & \Lambda_{24}^1 \\ \Lambda_{22}^3 & \Lambda_{24}^3 \end{vmatrix}. \quad (2.5.13)$$

Обратно, если выполняется условие (3.5.13), то линия t принадлежащая распределению $\Delta_{(245)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(245)}\right)$.

Рассмотрим линию ϑ принадлежащую распределению $\Delta_{(245)}$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\vartheta} = \vartheta^2 \vec{e_2} + \vartheta^3 \vec{e_3} + \vartheta^5 \vec{e_5}$. Найдем касательный вектор линии $f_2^1(\vartheta) = \overline{\vartheta}$ в следующем виде:

$$\vec{\overline{\vartheta}} = (\vartheta^4 a_3^1 + \vartheta^5 a_5^1)\vec{e_1} + (\vartheta^2 a_2^2 + \vartheta^3 a_3^2 + \vartheta^5 a_5^2)\vec{e_2} +$$

$$+(\vartheta^2 a_2^3 + \vartheta^3 + \vartheta^5 a_5^3)\vec{e_3} + \vartheta^5 \vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\vartheta}$, $\vec{\overline{\vartheta}}$, $\overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(235)}$ имеем:

$\vartheta^3 a_3^1 + \vartheta^5 a_5^1 = 0$ или

$$\Lambda_{23}^1 \vartheta^3 + \Lambda_{25}^1 \vartheta^5 = 0. \qquad (2.5.14)$$

Обратно, если выполняется условие (2.5.14), то линия ϑ принадлежащая распределению $\Delta_{(235)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(235)}\right)$.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 2.5.1. 1) Линия $\ell \subset \Delta_{(123)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1;

2) Линия $m \subset \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\Lambda_{21}^3 m^1 + \Lambda_{22}^3 m^2 - \Lambda_{24}^3 m^4 = 0, \qquad (2.5.3)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{24}^3 – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

3) Линия $k \subset \Delta_{(125)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$k^1 \Lambda_{21}^3 + k^2 {\Lambda_{22}^3}^2 + k^5 \Lambda_{25}^3 = 0, \qquad (2.5.4)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{22}^3– первая кривизна линии ω^2 сети $\widetilde{\Sigma_5}$; Λ_{25}^3 – третья кривизна линии ω^5сети Френе;

4) $s \subset \Delta_{(234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\frac{s^4}{s^3} = -\frac{\Lambda_{23}^1}{\Lambda_{24}^1}, \qquad (2.5.10)$$

где Λ_{23}^1 – четвертая кривизна линии ω^3 сети Френе; Λ_{24}^1– третья кривизна линии ω^4 сети Френе;

5) $t \subset \Delta_{(245)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям:

$$t^2 = \begin{vmatrix} \Lambda_{24}^1 & \Lambda_{25}^1 \\ \Lambda_{24}^3 & \Lambda_{25}^3 \end{vmatrix}; \;\; t^4 = \begin{vmatrix} \Lambda_{25}^1 & 0 \\ \Lambda_{25}^3 & \Lambda_{22}^3 \end{vmatrix}; \;\; t^5 = \begin{vmatrix} 0 & \Lambda_{24}^1 \\ \Lambda_{22}^3 & \Lambda_{24}^3 \end{vmatrix}, \qquad (2.5.13)$$

где Λ_{25}^3 – третья кривизна линии ω^5сети Френе; Λ_{25}^1 – вторая кривизна линии ω^5 сети Френе; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети Френе; Λ_{24}^3 – четвертая кривизна линии ω^4 сети Френе;

6) Линия $\vartheta \subset \Delta_{(235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\Lambda_{23}^1\vartheta^3 + \Lambda_{25}^1\vartheta^5 = 0, \qquad (2.5.14)$$

где Λ_{23}^1 – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{25}^1 – вторая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

7) Линии, принадлежащие распределениям $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $\left(\left(\bar{\imath} \neq 2,\ \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1,3,4,5\right)\right.$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1.

Теперь рассмотрим линии принадлежащие четырехмерным распределениям.

Образ линии $\alpha \subset \Delta_{(1234)}$ при частичном отображении f_2^1 обозначим через $f_2^1(\alpha) = \overline{\alpha}$. Найдем касательный вектор образа

$f_2^1(\alpha) = \overline{\alpha}$ линии $\alpha \subset \Delta_{(1234)}$. Касательный вектор линии $f_2^1(\alpha) = \overline{\alpha}$ найдем в виде:

$$\vec{\alpha} = \alpha^1 \overrightarrow{a_1} + \alpha^2 \overrightarrow{a_2} + \alpha^3 \overrightarrow{a_3} + \alpha^4 \overrightarrow{a_4}.$$

В силу формулы (2.5.2) имеем:

$$\vec{\overline{\alpha}} = \alpha^3 a_3^1 \overrightarrow{e_1} + (\alpha^1 a_1^2 + \alpha^2 a_2^2 + \alpha^3 a_3^2 + \alpha^4 a_4^2) \overrightarrow{e_2} + (\alpha^1 a_1^3 + \alpha^2 a_2^3 +$$
$$\alpha^3 + \qquad +\alpha^4 a_4^3) \overrightarrow{e_3} + \alpha^4 \overrightarrow{e_4}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\vec{\alpha}$, $\vec{\overline{\alpha}}$, $\overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(1234)}$. Следовательно, линия $\alpha \subset \Delta_{(1234)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Теперь рассмотрим линию $\beta \subset \Delta_{(2345)}$ принадлежащую распределению $\Delta_{(2345)}$. Найдем касательный вектор образа $f_2^1(\beta) = \overline{\beta}$ линии $\beta \subset \Delta_{(2345)}$ принадлежащей распределению $\Delta_{(2345)}$: $\vec{\beta} = \beta^2 \overrightarrow{a_2} + \beta^3 \overrightarrow{a_3} + \beta^4 \overrightarrow{a_4} + \beta^5 \overrightarrow{a_5}$. Учитывая формул (2.5.2) имеем следующее:

$$\vec{\overline{\beta}} = (\beta^3 a_3^1 + \beta^5 a_5^1) \overrightarrow{e_1} + (\beta^2 a_2^2 + \beta^3 a_3^2 + \beta^4 a_4^2 + \beta^5 a_5^2) \overrightarrow{e_2} +$$
$$+(\beta^2 a_2^3 + \beta^3 + \beta^4 a_4^3 + \beta^5 a_5^3) \overrightarrow{e_3} + \beta^4 \overrightarrow{e_4} + \beta^5 \overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{\beta}$, $\vec{\overline{\beta}}$, $\overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(2345)}$ имеем:

$$\beta^3 a_3^1 + \beta^5 a_5^1 = 0.$$

Подставив вместо a_3^1, a_5^1 выражения из формул (2.5.2) имеем следующее:

$$\beta^3 \Lambda_{23}^1 + \beta^5 \Lambda_{25}^1 = 0, \qquad (2.5.17)$$

где Λ_{23}^1 – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{25}^1 – вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если имеет место условие (2.5.17), то линия $\beta \subset \Delta_{(2345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Найдем касательный вектор образа $f_2^1(\gamma) = \overline{\gamma}$ линии $\gamma \subset \Delta_{(1345)}$:

$$\vec{\gamma} = \gamma^1 \,\vec{a_1} + \gamma^3 \,\vec{a_3} + \gamma^4 \,\vec{a_4} + \gamma^5 \,\vec{a_5}$$

или

$$\vec{\overline{\gamma}} = (\gamma^3 a_3^1 + \gamma^5 a_5^1)\,\vec{e_1} + (\gamma^1 a_1^2 + \gamma^3 a_3^2 + \gamma^4 a_4^2 + \gamma^5 a_5^2)\,\vec{e_2} +$$
$$+(\gamma^1 a_1^3 + \gamma^3 + \gamma^4 a_4^3 + \gamma^5 a_5^3)\,\vec{e_3} + \gamma^4\,\vec{e_4}. + \gamma^5\,\vec{e_5}.$$

Имеет место условие $\vec{\gamma}\,, \vec{\overline{\gamma}}\,, \overrightarrow{XF_2^1} \notin \Delta_{(134)}$, так как $\overrightarrow{XF_2^1} = -\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 \notin \Delta_{(1345)}$.

Следовательно линия $\gamma \subset \Delta_{(1345)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Рассмотрим линию $\delta \subset \Delta_{(1245)}$. Пусть $\overline{\delta} = f_2^1(\delta)$.

Тогда $\vec{\overline{\delta}} = \delta^1\,\vec{a_1} + \delta^2\,\vec{a_2} + \delta^4\,\vec{a_4} + \delta^5\,\vec{a_5}$ или

$$\vec{\overline{\delta}} = \delta^5 a_5^1\,\vec{e_1} + (\delta^1 a_1^2 + \delta^2 a_2^2 + \delta^4 a_4^2 + \delta^5 a_5^2)\,\vec{e_2} + (\delta^1 a_1^3 + \delta^2 a_2^3 +$$
$$+\delta^4 a_4^3 + \delta^5 a_5^3)\,\vec{e_3} + \delta^4\,\vec{e_4} + \delta^5\,\vec{e_5}.$$

Из условия $\vec{\delta}\,, \vec{\overline{\delta}}\,, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(1245)}$ имеем:

$\delta^1 a_1^3 + \delta^2 a_2^3 + \delta^4 a_4^3 + \delta^5 a_5^3 = 0.$

В силу формулы (2.5.2) имеем следующее:

$$\delta^1 \Lambda_{21}^3 + \delta^2 \Lambda_{22}^3 + \delta^4 \Lambda_{24}^3 + \delta^5 \Lambda_{25}^3 = 0, \qquad (2.5.18)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{24}^3 – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$; Λ_{25}^3 – третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$.

Обратно, если выполняется условие (2.3.18), то линия $\delta \subset \Delta_{(1245)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Рассмотрим линию $\theta \subset \Delta_{(1235)}$. Её касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\theta} = \theta^1 \overrightarrow{a_1} + \theta^2 \overrightarrow{a_2} + \theta^3 \overrightarrow{a_3} + \theta^5 \overrightarrow{a_5}$$

Найдем касательный вектор линии $\overline{\theta} = f_2^1(\theta)$:

$$\vec{\overline{\theta}} = (\theta^3 a_3^1 + \theta^5 a_5^1)\, \overrightarrow{e_1} + (\theta^1 a_1^2 + \theta^2 a_2^2 + \theta^3 a_3^2 + \theta^5 a_5^2)\, \overrightarrow{e_2} + (\theta^1 a_1^3 + \\ + \theta^2 a_2^3 \ + \theta^3 + \theta^5 a_5^3)\, \overrightarrow{e_3} + \theta^5\, \overrightarrow{e_5}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\vec{\theta}\,, \vec{\overline{\theta}}\,, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(1235)}$.

Следовательно, линия $\theta \subset \Delta_{(1235)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 2.5.2. 1) Линии $\alpha \subset \Delta_{(1234)}$ и $\theta \subset \Delta_{(1235)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1;

2) Линия $\beta \subset \Delta_{(2345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\beta^3 \Lambda_{23}^1 + \beta^5 \Lambda_{25}^1 = 0, \qquad (2.5.17)$$

где Λ_{23}^1 – четвертая кривизна линии ω^3 сети Френе; Λ_{25}^1 – вторая кривизна линии ω^5 сети Френе;

3) Линия $\gamma \subset \Delta_{(1345)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1;

4) Линия $\delta \subset \Delta_{(1245)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\delta^1 \Lambda_{21}^3 + \delta^2 \Lambda_{22}^3 + \delta^4 \Lambda_{24}^3 + \delta^5 \Lambda_{25}^3 = 0, \qquad (2.5.18)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети Френе; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети Френе; Λ_{24}^3 – четвертая кривизна линии ω^4 сети Френе; Λ_{25}^3 – третья кривизна линии ω^5 сети Френе.

2.6. Необходимое и достаточное условия вырожденности частичных отображений $f_5^4, f_4^3, f_3^2\ f_2^1$

Рассмотрим отображение $f_3^2: \Omega \to \Omega_3^2$, из формулы (2.4.2.) напишем матрицу перехода из базиса $\{\overrightarrow{e_i}\}$ $\left(i, j, k = \overline{1,5}\right)$ в базис $\{\overrightarrow{c_i}\}$:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & c_1^2 & c_1^3 & c_1^4 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^3 & c_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^3 & c_3^4 & 0 \\ 0 & c_4^2 & c_4^3 & 1 & 0 \\ 0 & c_5^2 & c_5^3 & c_5^4 & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_i^j - j$-я координата вектора $\overrightarrow{c_i}$.

Легко можно проверить следующее

$$det\, C = c_4^2 \begin{vmatrix} c_2^3 & c_2^4 \\ c_3^3 & c_3^4 \end{vmatrix}.$$

Пусть $det\, C \neq 0$. Тогда 1) $c_4^2 \neq 0$ и 2) $\begin{vmatrix} c_2^3 & c_2^4 \\ c_3^3 & c_3^4 \end{vmatrix} \neq 0$.

Учитывая формулу (2.4.2) имеем:

1) $c_4^2 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{34}^2 \neq 0$, т.е. $\Lambda_{34}^2 -$ четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_5$ отлична от нуля.

2) $\begin{vmatrix} c_2^3 & c_2^4 \\ c_3^3 & c_3^4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{c}_2 \nparallel \vec{c}_3,$

где $\vec{c}_2 = f_3^2(\vec{e}_2),\ \vec{c}_3 = f_3^2(\vec{e}_3)$.

Отсюда получаем, что отображение f_3^2 будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\overrightarrow{\mathrm{c}_2} \nparallel \overrightarrow{\mathrm{c}_3} \qquad (2.6.1)$$

Рассмотрим отображение $f_4^3: \Omega \to \Omega_4^3$. В этом случае матрицу перехода из базиса $\{\overrightarrow{e_i}\}$ в базис $\{\overrightarrow{m_i}\}$ имеет следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_1^3 & m_1^4 & m_1^5 \\ 0 & 1 & m_2^3 & m_2^4 & m_2^5 \\ 0 & 0 & 0 & m_3^4 & m_3^5 \\ 0 & 0 & 0 & m_4^4 & m_4^5 \\ 0 & 0 & m_5^3 & m_5^3 & 1 \end{pmatrix}$$

где m_i^j – j-я координата вектора $\overrightarrow{m_i}$. Определитель этой матрицы будет в следующем виде:

$$det\,M = m_5^3 \begin{vmatrix} m_3^4 & m_3^5 \\ m_4^4 & m_4^5 \end{vmatrix},$$

пусть $det\,M \neq 0$. Отсюда выходит два случая:

1) $m_5^3 \neq 0$ и 2) $\begin{vmatrix} m_3^4 & m_3^5 \\ m_4^4 & m_4^5 \end{vmatrix} \neq 0.$

Если учитывать формулы (2.4.2) эти два случая имеют следующий геометрический смысл:

$$1)\ m_5^3 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{45}^3 \neq 0,$$

Λ_{45}^3 – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$ отлична от нуля.

$$2) \begin{vmatrix} m_3^4 & m_3^5 \\ m_4^4 & m_4^5 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{m}_3 \nparallel \vec{m}_4. \tag{2.6.2}$$

Таким образом, частичное отображение f_4^3 будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.6.2).

Матрицу перехода из одного базиса в другой базис для частичного отображения $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ напишем в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & a_2^3 & 0 & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4^2 & a_4^3 & 1 & 0 \\ a_5^3 & a_5^3 & a_5^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы имеет вид:

$$det\,\mathrm{A} = a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix},$$

Из условия $det\,\mathrm{A} \neq 0$ имеем следующие два случая:

1) $a_3^1 \neq 0$ и 2) $\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix} \neq 0.$

Последние два неравенства имеют следующий геометрический смысл:

$$1)\ a_3^1 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{23}^1 \neq 0,$$

Λ_{23}^1 – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_5$ всегда отлична от нуля.

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \ \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2, \qquad (2.6.3)$$

$\vec{a}_1 = f_2^1(\vec{e}_1), \vec{a}_2 = f_2^1(\vec{e}_2).$

Таким образом, частичное отображение f_2^1 будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.6.3).

Для отображения $f_1^5\colon \Omega \to \Omega_1^5$ матрица перехода из одного базиса в другой имеет следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ b_2^1 & 1 & 0 & 0 & b_2^5 \\ b_3^1 & b_3^2 & 1 & 0 & b_3^5 \\ b_4^1 & b_4^2 & 0 & 1 & b_4^5 \\ b_5^1 & b_5^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы будет в следующем виде:

$$det\,B = b_2^5 \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_5^1 & b_5^2 \end{vmatrix},$$

Из условия $det\,B \neq 0$ имеем следующее:

1) $b_2^5 \neq 0$ и 2) $\begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_5^1 & b_5^2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Последние неравенства имеют следующий геометрический смысл:

$$1)\ b_2^5 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{12}^5 \neq 0,$$

где Λ_{12}^5 – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_5$;

$$2) \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_5^1 & b_5^2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{b}_1 \nparallel \vec{b}_5, \qquad (2.6.4)$$

$\vec{b}_1 = f_1^5(\vec{e}_1), \vec{b}_5 = f_1^5(\vec{e}_5).$

Таким образом, частичное отображение f_1^5 будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.6.4).

Для отображения $f_5^4: \Omega \to \Omega_5^4$ матрица перехода из одного базиса в другой имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1^4 & d_1^5 \\ d_2^1 & 1 & 0 & d_2^4 & d_2^5 \\ d_3^1 & 0 & 1 & d_3^4 & d_3^5 \\ d_4^1 & 0 & 0 & 0 & d_4^5 \\ d_5^1 & 0 & 0 & 0 & d_5^5 \end{pmatrix},$$

где d_i^j – j- я координа вектора $\overrightarrow{d_i}$.

Определитель этой матрицы будет в следующем виде:

$$det\, D = d_1^4 \begin{vmatrix} d_4^1 & d_4^5 \\ d_5^1 & d_5^5 \end{vmatrix},$$

Из условия $det\, D \neq 0$ имеем:

1) $d_1^4 \neq 0$ и 2) $\begin{vmatrix} d_4^1 & d_4^5 \\ d_5^1 & d_5^5 \end{vmatrix} \neq 0.$

Последние неравенства имеют следующий геометрический смысл:

$$1)\ d_1^4 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{51}^4 \neq 0,$$

Λ_{51}^{4} – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_5$ ($\Lambda_{51}^{4} -$ отлична от нуля), поэтому:

$$2)\ \begin{vmatrix} d_4^1 & d_4^5 \\ d_5^1 & d_5^5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{d}_4 \nparallel \vec{d}_5. \qquad (2.6.5)$$

Таким образом, частичное отображение $f_5^4 \colon \Omega \to \Omega_5^4$ будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.6.5).

Доказана теорема:

Теорема 2.6.1. Частичное отображение $f_i^j \colon \Omega \to \Omega_i^j$ является невырожденным тогда и только тогда, когда векторы $f_i^j(\vec{e}_i)$ и $f_i^j(\vec{e}_j)$ неколлиенарны.

Глава 3. Существование квазидвойных линий частичного отображения пространства E_6 порождаемого заданной циклической сетью френе

3.1. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_3^2

В области $\Omega \subset E_6$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\mathfrak{R} = (X, \vec{e}_i)$ $\left(i, j, k = \overline{1,6}\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [99], для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \overrightarrow{e_\iota},\ d\overrightarrow{e_\iota} = \omega_i^k \overrightarrow{e_k}. \tag{3.1.1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ \ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{3.1.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\overrightarrow{e_\iota}$ образуют сеть Френе Σ_n для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\mathcal{R}$ построен на касательных к линиям сети Σ_n, формы ω_i^k становятся главными [99], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3.1.3}$$

В силу последнего равенства формулы (3.1.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{3.1.4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3.1.3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (3.1.2), отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j .$$

В силу равенства (3.1.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [106] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l \right) \omega^m \qquad (3.1.5)$$

отсюда

$$B_{ikm}^j = \Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l . \qquad (3.1.6)$$

Система величин $\left\{ \Lambda_{ij}^k , \Lambda_{ijm}^k \right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид [93]:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$
$$- - - - - - - - - -$$

$$d_1\vec{e}_{n-1} = -\Lambda^{n-1}_{n-2,1}\vec{e}_{n-2} + -\Lambda^{n}_{n-1,1}\vec{e}_n$$
$$d_1\vec{e}_n = -\Lambda^{n}_{n-1,1}\vec{e}_{n-1}$$

и

$$\Lambda^3_{11} = -\Lambda^3_{11} = 0, \Lambda^4_{11} = -\Lambda^1_{41} = 0, \Lambda^5_{11} = -\Lambda^1_{51} = 0, \Lambda^6_{11} = -\Lambda^1_{61} = 0,$$
$$\Lambda^5_{21} = -\Lambda^2_{51} = 0, \Lambda^4_{21} = -\Lambda^2_{41} = 0, \Lambda^5_{31} = -\Lambda^3_{51} = 0,$$
$$\Lambda^6_{21} = -\Lambda^2_{61} = 0, \Lambda^6_{31} = -\Lambda^3_{61} = 0,\ \Lambda^4_{61} = -\Lambda^6_{41} = 0.$$

Здесь $k^1_1 = \Lambda^2_{11}$, $k^1_2 = \Lambda^3_{21}$, $k^1_3 = \Lambda^4_{31}$, …, $k^1_{n-1} = \Lambda^n_{n-1,1}$– первая, вторая, третья, …, (*n-1*)-я кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [31] $F_i^{\,j}$ $(i \neq j)$ касательной к линии ω^1 сети Σ_6 определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda^j_{ij}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda^i_{jj}}\vec{e}_i. \tag{3.1.8}$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по пять псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы – F^2_1, F^3_1, F^4_1, F^5_1, F^6_1, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – $F^1_2, F^3_2, F^4_2, F^5_2, F^6_2$; на прямой $(X,\vec{e}_3)$ – $F^1_3, F^2_3, F^4_3, F^5_3, F^6_3$; на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – F^1_4, F^2_4, F^3_4, F^5_4, F^6_4; на прямой $(X,\vec{e}_5)$– $F^1_5, F^2_5, F^3_5, F^4_5, F^6_5$; на прямой $(X,\vec{e}_6)$ – F^1_6, F^2_6, F^3_6, F^4_6, F^5_6.

Сеть Σ_6 в $\Omega \subset E_6$ называется циклической сетью Френе [99], если реперы $\mathcal{R}_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6)$, $\mathcal{R}_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1)$, $\mathcal{R}_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\mathcal{R}_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $\mathcal{R}_5 = (X,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5, ω^6 сети Σ_4 одновременно.

Сеть Σ_6 будем считать циклической сетью Френе и её обозначим через $\tilde{\Sigma}_6$.

Псевдофокус $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$ орпеделяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_3^2} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \qquad (3.1.9)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_6$, псевдофокус F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Получается частичное отображение $f_3^2 \colon \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$.

Продифференцируя равенство (3.1.9) и применяя формулы (3.1.3), (3.1.5) получаем следующее:

$$\overrightarrow{F_3^2} = d\,\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\right)\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}d\vec{e}_3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega^i\vec{e}_i$$

или

$$d\,\overrightarrow{F_3^2} = \omega^m\vec{e}_m + \frac{C_{32m}^2\omega^m}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i,$$

где $d\Lambda_{32}^2 = \left(\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell\right)\omega^m = C_{32m}^2\omega^m$.

Последнее равенство можно записать в следующем виде:

$$d\,\overrightarrow{F_3^2} = \left[\vec{e}_1 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e}_5 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{35}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^5 + \left[\vec{e}_6 + \frac{C_{326}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{36}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^6.$$

Введем следующее обозначение:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;$$

$$\vec{c}_2 = \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;$$

$$\vec{c}_3 = \vec{e}_3 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;$$

$$\vec{c}_4 = \vec{e}_4 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;$$

$$\vec{c}_5 = \vec{e}_5 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{35}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;$$

$$\vec{c}_6 = \vec{e}_6 + \frac{C_{326}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{36}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i.$$

Когда сеть Френе $\tilde{\Sigma}_6$ является циклической сетью, векторы $\overrightarrow{c_i}$ имеют следующий вид:

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^5}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_5;$$

$$\vec{c}_2 = \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_3 = \left[1 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4; \qquad (3.1.10)$$

$$\vec{c}_4 = -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4;$$

$$\vec{c}_5 = -\frac{\Lambda_{35}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{35}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 + \vec{e}_5;$$

$$\vec{c}_6 = -\frac{\Lambda_{36}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{326}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{36}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 + \vec{e}_6.$$

В общем случае векторы (3.1.10) не являются линейно зависимыми. К области Ω_4^3 присоеденим подвижной репер $\mathcal{R}' = (F_3^2, \vec{c}_i)$.

Рассмотрим линию δ принадлежащую четырехмерную распределению $\Delta_{(2345)} = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$. Её касательный вектор имеет вид: $\bar{\delta} = \delta^2\vec{e}_2 + \delta^3\vec{e}_3 + \delta^4\vec{e}_4 + \delta^5\vec{e}_5$. Найдем касательный вектор $\overrightarrow{\overline{\delta}}$ линии $\overline{\delta} = f_3^2(\delta)$ в следующем виде:

$$\overrightarrow{\overline{\delta}} = \delta^2\vec{c}_2 + \delta^3\vec{c}_3 + \delta^4\vec{c}_4 + \delta^5\vec{c}_5.$$

В силу формулы (4.1.10) имеем:

$$\overrightarrow{\overline{\delta}} = (\delta^2 + \delta^4 c_4^2 + \delta^5 c_5^2)\vec{e}_2 + (\delta^2 c_2^3 + \delta^3 c_3^3 + \delta^4 c_4^3 + \delta^5 c_5^3)\vec{e}_3 +$$
$$+(\delta^2 c_2^4 + \delta^3 c_3^4 + \delta^4 + \delta^5 c_5^4)\vec{e}_4 + \delta^5\vec{e}_5,$$

где δ_i^j $-j$- координаты вектора $\vec{c}_i$.

Имеет место условие $\vec{\delta}$, $\overrightarrow{\overline{\delta}}$,$\overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(2345)}$. Следовательно, линия δ всегда является квазидвойной линией частичного отображения $f_3^2 \colon \Omega \to \Omega_3^2$.

Аналогично можно показать, что линию γ принадлежащую распределению $\Delta_{(1234)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Теперь рассмотрим линию β принадлежащую распределению $\Delta_{(1345)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$. Её касательный вектор: $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^3\vec{e}_3 + \beta^4\vec{e}_4 + \beta^5\vec{e}_5$. Найдем касательный вектор $\overrightarrow{\overline{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f_3^2(\beta)$ в следующем виде:

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^1\vec{c}_1 + \beta^3\vec{c}_3 + \beta^4\vec{c}_4 + \beta^5\vec{c}_5.$$

В силу формулы (3.1.10) последнее равенство имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^1\vec{e}_1 + (\beta^1 c_1^2 + \beta^4 c_4^2 + \beta^5 c_5^2)\vec{e}_2 +$$
$$+(\beta^1 c_1^3 + \beta^3 c_3^3 + \beta^4 c_4^3 + \beta^5 c_5^3)\vec{e}_3 +$$
$$+(\beta^1 c_1^4 + \beta^3 c_3^4 + \beta^4 + \beta^5 c_5^4)\vec{e}_4 + \beta^5\vec{e}_5.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\overline{\beta}}$, $\overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(1345)}$ имеем:

$$\beta^1 c_1^2 + \beta^4 c_4^2 + \beta^5 c_5^2 = 0.$$

В силу формулы (3.1.10) последнее равенство имеет следующий вид:

$$\Lambda_{31}^2 \beta^1 + \Lambda_{34}^2 \beta^4 + \Lambda_{35}^2 \beta^5 = 0, \qquad (3.1.11)$$

$\Lambda_{31}^2 -$ вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{34}^2 -$ пятая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{35}^2 -$ четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если координаты касательного вектора линию β принадлежащую распределению $\Delta_{(1345)}$ удовлетворяют условие (3.1.11), то линия β является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Рассмотрим линию ρ принадлежащую четырехмерному распределению $\Delta_{(2356)}$.

Её касательный вектор имеет вид: $\overrightarrow{\rho} = \rho^2 \vec{e}_2 + \rho^3 \vec{e}_3 + \rho^5 \vec{e}_5 + \rho^6 \vec{e}_6$. Найдем касательный вектор линии $\overline{\rho} = f_3^2(\rho)$ в следующем виде:

$$\overrightarrow{\overline{\rho}} = \rho^2 \overrightarrow{c_2} + \rho^3 \overrightarrow{c_3} + \rho^5 \overrightarrow{c_5} + \rho^6 \overrightarrow{c_6},$$

$\overrightarrow{\overline{\rho}} = (\rho^5 c_5^2 + \rho^6 c_6^2)\vec{e}_2 + (\rho^2 c_2^3 + \rho^3 c_3^3 + \rho^5 c_5^3 + \rho^6 c_6^3)\vec{e}_3 + (\rho^2 c_2^4 + \rho^3 c_3^4 + +\rho^5 c_5^4 + \rho^6 c_6^4)\vec{e}_4 + \rho^5 \vec{e}_5 + \rho^6 \vec{e}_6.$

Из условия $\overrightarrow{\rho}$, $\overrightarrow{\overline{\rho}}$, $\overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(2356)}$ имеем:
$\rho^2 c_2^4 + \rho^3 c_3^4 + \rho^5 c_5^4 + \rho^6 c_6^4 = 0$. Отсюда, учитывая формулы (3.1.10) получаем следующее:

$$\Lambda_{32}^4 \rho^2 + \Lambda_{33}^4 \rho^3 + \Lambda_{35}^4 \rho^5 + \Lambda_{36}^4 \rho^6 = 0. \qquad (3.1.12)$$

Λ_{32}^4 – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{32}^2 -$ первая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{35}^4 -$ пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{36}^4 -$ четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если координаты касательного вектора $\vec{\rho}$ линию ρ принадлежащую распределению $\Delta_{(2356)}$ удовлетворяют условие (3.1.12) линия ρ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Образ линии $\alpha \subset \Delta_{(1234)}$ при частичном отображении f_3^2 обозначим через $f_2^1(\alpha) = \overline{\alpha}$. Касательный вектор линии $f_2^1(\alpha) = \overline{\alpha}$ найдем в виде:

$$\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{c}_1 + \alpha^2 \vec{c}_2 + \alpha^5 \vec{c}_5 + \alpha^6 \vec{c}_6,$$

или

$$\begin{aligned}\vec{\overline{\alpha}} &= \alpha^1 \vec{e}_1 + (\alpha^1 c_1^2 + \alpha^5 c_5^2 + \alpha^6 c_6^2)\vec{e}_2 + \\ &+(\alpha^1 c_1^3 + \alpha^2 c_2^3 + \alpha^5 c_5^3 + \alpha^6 c_6^3)\vec{e}_3 + \\ &+(\alpha^1 c_1^4 + \alpha^2 c_2^4 + \alpha^5 c_5^4 + \alpha^6 c_6^4)\vec{e}_4 + \alpha^5 \vec{e}_5 + \alpha^6 \vec{e}_6.\end{aligned}$$

Имеет место условие $\overrightarrow{XF_3^2}, \vec{\alpha}, \vec{\overline{\alpha}} \notin \Delta_{(1256)}$,так как $\overrightarrow{XF_3^2} = -\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 \notin \Delta_{(1256)}$.

Следовательно линия $\alpha \subset \Delta_{(1256)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

Рассмотрим линию $\beta \subset \Delta_{(1235)}$. Образ линии $\beta \subset \Delta_{(1235)}$ при частичном отображении f_3^2 обозначим через $\overline{\beta} = f_3^2(\beta)$. Касательный вектор линии $\overline{\beta}$ найдем в виде: $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{c}_1 + \beta^2 \vec{c}_2 + \beta^3 \vec{c}_3 + \beta^5 \vec{c}_5$ или

$$\begin{aligned}\vec{\overline{\beta}} &= \beta^1 \vec{e}_1 + (\beta^1 c_1^2 + \beta^5 c_5^2)\vec{e}_2 + (\beta^1 c_1^3 + \beta^2 c_2^3 + \beta^3 c_3^3 + \beta^5 c_5^3)\vec{e}_3 + \\ &+(\beta^1 c_1^4 + \beta^2 c_2^4 + \beta^3 c_3^4 + \beta^5 c_5^4)\vec{e}_4 + \beta^5 \vec{e}_5.\end{aligned}$$

Из условия $\overrightarrow{XF_3^2}, \vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}} \in \Delta_{(1235)}$ имеем:

$$\beta^1 c_1^4 + \beta^2 c_2^4 + \beta^3 c_3^4 + \beta^5 c_5^4 = 0,$$

В силу формулы (3.1.10) последнее равенство имеет следующий вид:

$$\beta^1 \Lambda_{31}^4 + \beta^2 \Lambda_{32}^4 + \beta^3 \Lambda_{33}^4 + \beta^5 \Lambda_{35}^4 = 0, \qquad (3.1.13)$$

$\Lambda_{31}^4 -$ третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{32}^4 -$ вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{33}^4 -$ первая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{35}^4 -$ пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.1.13), то линия $\beta \subset \Delta_{(1235)}$ является квазидвойной линией частичного отображенияf_3^2.

Равенство (3.1.13) совпадает равенству (2.4.19) параграфа 2.4., т.е. необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии частичного отображения f_3^2 пространства E_6 для линии $\beta \subset \Delta_{(1235)}$ совпадает с необходимым и достаточным условиям существования квазидвойной линии частичного отображения f_3^2 пространства E_5 для линии $\ell \subset \Delta_{(1235)}$.

Рассмотрим линию $\gamma \subset \Delta_{(1346)}$. Найдем касательный вектор линии $f_3^2(\gamma) = \bar{\gamma}$: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1 \vec{c}_1 + \gamma^3 \vec{c}_3 + \gamma^4 \vec{c}_4 + \gamma^5 \vec{c}_5$ или

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1 \vec{e}_1 + (\gamma^1 c_1^2 + \gamma^4 c_4^2 + \gamma^6 c_6^2)\vec{e}_2 + (\gamma^1 c_1^3 + \gamma^3 c_3^3 + \gamma^4 c_4^3 + \gamma^6 c_6^3)\vec{e}_3 + (\gamma^1 c_1^4 + \gamma^3 c_3^4 + \gamma^4 + \gamma^6 c_6^4)\vec{e}_4 + \gamma^6 \vec{e}_6.$$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF_3^2}, \in \Delta_{(1346)}$ имеем:

$$\gamma^1 c_1^2 + \gamma^4 c_4^2 + \gamma^6 c_6^2 = 0$$

или

$$\gamma^1 \Lambda_{31}^2 + \gamma^4 \Lambda_{34}^2 + \gamma^6 \Lambda_{36}^2 = 0, \qquad (3.1.14)$$

где Λ^2_{31} – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ^2_{34} – пятая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ^2_{36} – третья кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.1.14), то линия $\gamma \subset \Delta_{(1346)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f^2_3.

Рассмотрим образ линии $\theta \subset \Delta_{(2346)}$ при частичном отображении f^2_3: $\overline{\theta} = f^2_3(\theta)$. Найдем касательный вектор линии $\overline{\theta} = f^2_3(\theta)$:

$$\vec{\theta} = \theta^2 \vec{c}_2 + \theta^3 \vec{c}_3 + \theta^4 \vec{c}_4 + \theta^6 \vec{c}_6 \text{ или}$$

$$\vec{\overline{\theta}} = \theta^2 (c^3_2 \vec{e}_3 + c^4_2 \vec{e}_4) + \theta^3 (c^3_3 \vec{e}_3 + c^4_3 \vec{e}_4) + \theta^4 (c^2_4 \vec{e}_2 + c^3_4 \vec{e}_3 + \vec{e}_4) +$$
$$+ \theta^6 (c^2_6 \vec{e}_2 + c^3_6 \vec{e}_3 + c^4_6 \vec{e}_4 + \vec{e}_6).$$

Отсюда получаем выполнение условия $\vec{\theta}, \vec{\overline{\theta}}, \overrightarrow{XF^2_3} \in \Delta_{(2346)}$. Следовательно, линия $\theta \subset \Delta_{(2346)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f^2_3.

Рассмотрим образ линии $\omega \subset \Delta_{(3456)}$ при частичном отображении f^2_3: $f^2_3(\omega) = \overline{\omega}$. Найдем касательный вектор линии $f^2_3(\omega) = \overline{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \omega^3 \vec{c}_3 + \omega^4 \vec{c}_4 + \omega^5 \vec{c}_5 + \omega^6 \vec{c}_6 \text{ или}$$

$$\vec{\overline{\omega}} = (\omega^4 c^2_4 + \omega^5 c^2_5 + \omega^6 c^2_6)\vec{e}_2 + (\omega^3 c^3_3 + \omega^4 c^3_4 + \omega^5 c^3_5 +$$
$$+ \omega^6 c^3_6)\vec{e}_3 + (\omega^3 c^4_3 + \omega^4 + \omega^5 c^4_5 + \omega^6 c^4_6)\vec{e}_4 + \omega^5 \vec{e}_5 + \omega^6 \vec{e}_6.$$

Из условия $\vec{\omega}, \vec{\overline{\omega}}, \overrightarrow{XF^2_3} \in \Delta_{(3456)}$ имеем

$$\omega^4 c^2_4 + \omega^5 c^2_5 + \omega^5 c^2_5 + \omega^6 c^2_6 = 0.$$

В силу формулы (4.1.10) имеем следующее:

$$\omega^4 \Lambda^2_{34} + \omega^5 \Lambda^2_{35} + \omega^6 \Lambda^2_{36} = 0, \tag{3.1.15}$$

где $\Lambda_{34}^{2}-$ пятая кривизна линии ω^{4} сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{35}^{2} $-$ четвертая кривизна линии ω^{5} сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{36}^{2}-$ третья кривизна линии ω^{6} сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Геометрически, условие (3.1.15) показывает, что вектор $\vec{\omega}$ ортогонален с вектором

$$\vec{M}=\Lambda_{34}^{2}\vec{e}_4+\Lambda_{35}^{2}\vec{e}_5+\Lambda_{36}^{2}\vec{e}_6.$$

Обратно, если выполняется условие (3.1.15), то линия $\omega\subset\Delta_{(3456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2.

А также доказана теорема:

Теорема 3.1.1. 1) Линии $\gamma\subset\Delta_{(1234)}$, $\delta\subset\Delta_{(2345)}$ и $\theta\subset\Delta_{(2346)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_3^2;

2) Линии $\ell\subset\Delta_{(1245)}$, $\alpha\subset\Delta_{(1256)}$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_3^2;

3) Линия $\beta\subset\Delta_{(1235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\beta^1\Lambda_{31}^{4}+\beta^2\Lambda_{32}^{4}+\beta^3\Lambda_{33}^{4}+\beta^5\Lambda_{35}^{4}=0, \tag{3.1.13}$$

где Λ_{31}^{4} $-$ третья кривизна линии ω^1 сети Френе; Λ_{32}^{4} $-$ вторая кривизна линии ω^2 сети Френе; Λ_{33}^{4} $-$ первая кривизна линии ω^3 сети Френе; Λ_{35}^{4} $-$ пятая кривизна линии ω^5 сети Френе.

4) Линия $\gamma\subset\Delta_{(1346)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\gamma^1\Lambda_{31}^{2}+\gamma^4\Lambda_{34}^{2}+\gamma^6\Lambda_{36}^{2}=0, \tag{3.1.14}$$

где Λ_{31}^{2} – вторая кривизна линии ω^1 сети Френе; Λ_{34}^{2} – пятая кривизна линии ω^4 сети Френе; Λ_{36}^{2} – третья кривизна линии ω^6 сети Френе;

5) Линия $\omega \subset \mathit{\Delta}_{(3456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\omega^4 \mathit{\Lambda}_{34}^2 + \omega^5 \mathit{\Lambda}_{35}^2 + \omega^6 \mathit{\Lambda}_{36}^2 = 0, \qquad (3.1.15)$$

где $\mathit{\Lambda}_{34}^2$ − пятая кривизна линии ω^4 сети Френе; $\mathit{\Lambda}_{35}^2$ − четвертая кривизна линии ω^5 сети Френе; $\mathit{\Lambda}_{36}^2$ − третья кривизна линии ω^6 сети Френе.

3.2. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_2^1

Псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ определяетя следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_2^1} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_2} = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_2}. \qquad (3.2.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_6$ точка F_2^1 описывает свою область $\Omega_2^1 \subset E_6$. Получается частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $f_2^1(X) = F_2^1$.

Продифференцируем равенство (3.2.1):

$$d\,\overrightarrow{F_2^1} = d\,\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\right)\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1} d\,\overrightarrow{e_2}.$$

Отсюда, учитывая формулы (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.5) получаем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_2^1} = \omega^m\,\overrightarrow{e_m} + \frac{A_{21m}^1\omega^m}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\Lambda_{2m}^i\omega^m\,\overrightarrow{e_i}\,, \big(i,j,k = \overline{1,6}\big),$$

где $d\Lambda_{21}^1 = \big(\Lambda_{21m}^1 + \Lambda_{2\ell}^5\Lambda_{1m}^\ell + \Lambda_{\ell 1}^2\Lambda_{2m}^\ell\big)\omega^m = C_{21m}^1\omega^m$.

Вектор $d\,\overrightarrow{F_2^1}$ напишем в следующем виде:

$$d\,\overrightarrow{F_2^1} = \left[\overrightarrow{e_1} + \frac{A_{211}^1}{(\Lambda_{21}^2)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{21}^i}{\Lambda_{21}^2}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^1 + \left[\overrightarrow{e_2} + \frac{A_{212}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^2 +$$
$$+\left[\overrightarrow{e_3} + \frac{A_{213}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{23}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^3 + \left[\overrightarrow{e_4} + \frac{A_{214}^1}{(\Lambda_{21}^2)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{21}^2}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^4 +$$
$$+\left[\overrightarrow{e_5} + \frac{A_{215}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{25}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^5 + \left[\overrightarrow{e_6} + \frac{A_{216}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{16}^i}{\Lambda_{21}^1}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^6.$$

Так как $\tilde{\Sigma}_5$ является циклической сетью Френе, имеет место $d\,\overrightarrow{F_2^1} = \omega^i\,\vec{a}_i$, а вектор $\overrightarrow{a_i}$ имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{a_1} = \frac{\Lambda^1_{211}}{(\Lambda^2_{21})^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{21}}{\Lambda^5_{15}}\overrightarrow{e_3};$$

$$\overrightarrow{a_2} = \left[1 + \frac{\Lambda^1_{212}}{(\Lambda^1_{21})^2}\right]\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{22}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_3};$$

$$\overrightarrow{a_3} = -\frac{\Lambda^1_{23}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^1_{213}}{(\Lambda^1_{21})^2}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}; \qquad (3.2.2)$$

$$\overrightarrow{a_4} = -\frac{\Lambda^1_{214}}{(\Lambda^1_{21})^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{24}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{a_5} = -\frac{\Lambda^1_{25}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_1} + \frac{\Lambda^1_{215}}{(\Lambda^1_{21})^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{25}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_5};$$

$$\overrightarrow{a_6} = -\frac{\Lambda^1_{26}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_1} + \frac{\Lambda^1_{216}}{(\Lambda^1_{21})^2}\overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^3_{26}}{\Lambda^1_{21}}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_6}.$$

В общем случае эти векторы являются линейно независимыми.

Рассмотрим линию α принадлежащую распределению $\Delta_{(123)}$. Найдем касательный вектор его образа $f^1_2(\alpha) = \overline{\alpha}$ в следующем виде:

$$\overrightarrow{\overline{\alpha}} = \alpha^1\,\overrightarrow{a_1} + \alpha^2\,\overrightarrow{a_2} + \alpha^3\,\overrightarrow{a_3}.$$

В силу формулы (3.2.2) получаем следующее:

$$\overrightarrow{\overline{\alpha}} = \alpha^3 a^1_3\,\overrightarrow{e_1} + (\alpha^1 a^2_1 + \alpha^2 a^2_2 + \alpha^3 a^2_3)\,\overrightarrow{e_2} + (\alpha^1 a^3_1 + \alpha^2 a^3_2 + \alpha^3)\,\overrightarrow{e_3}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\overline{\alpha}}, \overrightarrow{XF^1_2} \in \Delta_{(123)}$. Таким образом, линия $\alpha \subset \Delta_{(123)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f^1_2.

Найдем касательный вектор образа $f^1_2(\beta) = \overline{\beta}$ линии $\beta \subset \Delta_{(124)}$:

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^1\,\overrightarrow{a_1} + \beta^2\,\overrightarrow{a_2} + \beta^4\,\overrightarrow{a_4} \text{ или}$$

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^1(a^2_1 + \beta^2 a^2_2 + \beta^4 a^2_4)\,\overrightarrow{e_2} + (\beta^1 a^3_1 + \beta^2 a^3_2 + \beta^4 a^3_4)\,\overrightarrow{e_3} + \beta^4\,\overrightarrow{e_4}.$$

Из условия $\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\overline{\beta}}, \overrightarrow{XF^1_2} \in \Delta_{(124)}$ получаем равенство

$$\beta^1 a^3_1 + \beta^2 a^3_2 + \beta^4 a^3_4 = 0.$$

В силу формулы (3.2.2) имеем следующее:

$$\beta^1 \Lambda_{21}^3 + \beta^2 \Lambda_{22}^3 + \beta^4 \Lambda_{24}^3 = 0, \qquad (3.2.3)$$

Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{24}^3 – пятая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Следующий вектор обозначим через $\overrightarrow{M}$:

$$\overrightarrow{M} = \Lambda_{21}^3 \overrightarrow{e_1} + \Lambda_{22}^3 \overrightarrow{e_2} + \Lambda_{24}^3 \overrightarrow{e_4}, \qquad (3.2.4)$$

из равенства (3.2.3) имеем $\overrightarrow{\beta} \perp \overrightarrow{M}$, т.е. $\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{M} = 0$.

Обратно, если выполняется условие (3.2.3), то линия $\beta \subset \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Теперь рассмотрим линию $\gamma \subset \Delta_{(125)}$. Касательный вектор образа $f_2^1(\gamma) = \overline{\gamma}$ определяется следующим образом: $\overrightarrow{\overline{\gamma}} = \gamma^1 \overrightarrow{a_1} + \gamma^2 \overrightarrow{a_2} + \gamma^5 \overrightarrow{a_5}$ или

$$\overrightarrow{\overline{\gamma}} = \gamma^5 a_5^1 \overrightarrow{e_1} + (\gamma^1 a_1^2 + \gamma^2 a_2^2 + \gamma^5 a_5^2) \overrightarrow{e_2} + (\gamma^1 a_1^3 + \gamma^2 a_2^3 + \gamma^5 a_5^3) \overrightarrow{e_3} + \gamma^5 \overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\overline{\gamma}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(125)}$ получим $\gamma^1 a_1^3 + \gamma^2 a_2^3 + \gamma^5 a_5^3 = 0$ или

$$\gamma^1 \Lambda_{21}^3 + \gamma^2 \Lambda_{22}^3 + \gamma^5 \Lambda_{25}^3 = 0, \qquad (3.2.5)$$

где Λ_{25}^3 – пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Последнее равенство показывает ортогональность следующих векторов $\overrightarrow{\gamma} = \gamma^1 \overrightarrow{e_1} + \gamma^2 \overrightarrow{e_2} + \gamma^5 \overrightarrow{e_5}$ и

$$\overrightarrow{N} = \Lambda_{21}^3 \overrightarrow{e_1} + \Lambda_{22}^3 \overrightarrow{e_2} + \Lambda_{25}^3 \overrightarrow{e_5}. \qquad (3.2.6)$$

Из равенств (3.2.4) и (3.2.6) имеем $\text{пр}_{(X,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})} \overrightarrow{M} = \text{пр}_{(X,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})} \overrightarrow{N}$.

Обратно, если выполняется условие (3.2.5), то линия $\gamma \subset \Delta_{(125)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Рассмотрим линию $\delta \subset \Delta_{(126)}$. Касательный вектор образа $f_2^1(\delta) = \overline{\delta}$ находится в следующем виде:

$$\vec{\bar{\delta}} = \delta^6 a_6^1 \vec{e_1} + (\delta^1 a_1^2 + \delta^2 a_2^2 + \delta^6 a_6^2)\vec{e_2} + (\delta^1 a_1^3 + \delta^2 a_2^3 + \delta^5 a_6^3)\vec{e_3} + \delta^5 \vec{e_6}.$$

Из условия $\vec{\delta}$, $\vec{\bar{\delta}}$, $\overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(126)}$ получаем следующее: $\delta^1 a_1^3 + \delta^2 a_2^3 + \delta^6 a_6^3 = 0$ или

$$\delta^1 \Lambda_{21}^3 + \delta^2 \Lambda_{22}^3 + \delta^6 \Lambda_{26}^3 = 0, \qquad (3.2.7)$$

где Λ_{26}^3 – третья кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$. Обратно, если выполняется условие (3.2.6), то линия $\delta \subset \Delta_{(126)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Через $\vec{K}$ обозначим следующий вектор:

$$\vec{K} = \Lambda_{21}^3 \vec{e_1} + \Lambda_{22}^3 \vec{e_2} + \Lambda_{26}^3 \vec{e_5}. \qquad (3.2.8)$$

Тогда получим $\vec{\delta} \cdot \vec{k} = 0$ и $np_{(X,\vec{e_1},\vec{e_2})}\vec{K} = np_{(X,\vec{e_1},\vec{e_2})}\vec{M} = np_{(X,\vec{e_1},\vec{e_2})}\vec{N}$.

Рассмотрим линию $\theta \subset \Delta_{(345)}$. Касательный вектор образа $f_2^1(\theta) = \bar{\theta}$ находится в следующем виде: $\vec{\bar{\theta}} = \theta^3 \vec{a_3} + \theta^4 \vec{a_4} + \theta^5 \vec{a_5}$ или

$$\vec{\theta} = (\theta^3 a_3^1 + \theta^5 a_5^1)\vec{e_1} + (\theta^3 a_3^2 + \theta^4 a_4^2 + \theta^5 a_5^2)\vec{e_2} + \\ +(\theta^3 + \theta^4 a_4^3 + \theta^5 a_5^3)\vec{e_3} + \theta^4 \vec{e_4} + \theta^5 \vec{e_5}.$$

Выполняется условие $\vec{\theta}$, $\vec{\bar{\theta}}$, $\overrightarrow{XF_2^1} \notin \Delta_{(345)}$ так как $\overrightarrow{XF_2^1} = -\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3 \notin \Delta_{(345)}$. Таким образом, линия $\theta \subset \Delta_{(345)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Аналогично, можно определить, что линии принадлежащие распределениям $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $\left((\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1,2,3,5,6\right)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1.

Доказана следующая теорема

Теорема 3.2.1. 1) Линия $\alpha \subset \Delta_{(123)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1;

2) Линия $\beta \subset \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\beta^1 \Lambda_{21}^3 + \beta^2 \Lambda_{22}^3 + \beta^4 \Lambda_{24}^3 = 0, \qquad (3.2.3)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{24}^3 – пятая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

3) Линия $\gamma \subset \Delta_{(125)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\gamma^1 \Lambda_{21}^3 + \gamma^2 \Lambda_{22}^3 + \gamma^5 \Lambda_{25}^3 = 0, \qquad (3.2.5)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{25}^3 – четвертая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

4) Линия $\delta \subset \Delta_{(126)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\delta^1 \Lambda_{21}^3 + \delta^2 \Lambda_{22}^3 + \delta^6 \Lambda_{26}^3 = 0, \qquad (3.2.7)$$

где Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{26}^3 – третья кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

5) Линии принадлежащие распределению $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $\left(\bar{\imath} \neq 2,\ \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1,3,4,5,6\right)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1.

Теперь рассмотрим линии принадлежащие четырехмерным распределениям.

Найдем касательный вектор образа $f_2^1(d) = \overline{d}$ линии $d \subset \Delta_{(1234)}$:

$$\vec{\overline{d}} = d^1 \overrightarrow{a_1} + d^2 \overrightarrow{a_2} + d^3 \overrightarrow{a_3} + d^4 \overrightarrow{a_4}$$

или

$$\vec{\overline{d}} = d^3 a_3^1 \overrightarrow{e_1} + (d^1 a_1^2 + d^2 a_2^2 + d^3 a_3^2 + d^4 a_4^2) \overrightarrow{e_2} +$$
$$+(d^1 a_1^3 + d^2 a_2^3 + d^4 a_4^3 + d^3) \overrightarrow{e_3} + d^4 \overrightarrow{e_4}.$$

Отсюда получим выполнение условия $\vec{d}, \vec{\overline{d}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(1234)}$.

Таким образом, линия $d \subset \Delta_{(1234)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Касательный вектор линии $\overline{\ell} = f_2^1(\ell)$ $\big($где $\ell \subset \Delta_{(1235)}\big)$ имеет следующий вид:

$$\vec{\overline{\ell}} = \ell^1 \overrightarrow{a_1} + \ell^2 \overrightarrow{a_2} + \ell^3 \overrightarrow{a_3} + \ell^5 \overrightarrow{a_5} \text{ или}$$

$$\vec{\overline{\ell}} = \left(\ell^1 a_3^1 + \ell^5 a_5^1\right) \overrightarrow{e_1} + \left(\ell^1 a_1^2 + \ell^2 a_2^2 + \ell^3 a_3^2 + \ell^5 a_5^2\right) \overrightarrow{e_2} + \big(\ell^1 a_1^3 +$$
$$+\ell^2 a_2^3 + +\ell^3 + \ell^5 a_5^3\big) \overrightarrow{e_3} + \ell^5 \overrightarrow{e_5}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\vec{\ell}, \vec{\overline{\ell}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(1235)}$.

Таким образом, линия $\ell \subset \Delta_{(1235)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Рассмотрим линию $m \subset \Delta_{(1356)}$. Касательный вектор линии $f_2^1(m) = \overline{m}$ находится в следующем виде: $\vec{\overline{m}} = m^1 \overrightarrow{a_1} + m^3 \overrightarrow{a_3} + m^5 \overrightarrow{a_5} + m^6 \overrightarrow{a_6}$ или

$$\vec{\overline{m}} = (m^3 a_3^2 + m^5 a_5^1 + m^6 a_6^1) \overrightarrow{e_1} + (m^1 a_1^2 + m^3 a_3^2 + m^5 a_5^2 +$$
$$+m^6 a_6^2) \overrightarrow{e_2} + (m^1 a_1^3 + m^3 + m^5 a_5^3 + m^6 a_6^3) \overrightarrow{e_3} + m^5 \overrightarrow{e_5} + m^6 \overrightarrow{e_6}.$$

Выполняется условие $\vec{m}, \vec{\vec{m}}, \overrightarrow{XF_2^1} \notin \Delta_{(1356)}$ так как $\overrightarrow{XF_2^1} = -\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 \notin \Delta_{(1356)}$.

Таким образом, линия $m \subset \Delta_{(1356)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Аналогично, можно легко определить, что линии принадлежащие распределениям $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}\bar{\ell})}$ $\left(\left(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}, \bar{\ell} = 1,3,4,5,6\right)\right.$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1.

Рассмотрим линию $\kappa \subset \Delta_{(2345)}$. Касательный вектор линии $f_2^1(\kappa) = \bar{\kappa}$ находится в следующем виде: $\vec{\kappa} = \kappa^2\,\overrightarrow{a_2} + \kappa^3\,\overrightarrow{a_3} + \kappa^4\,\overrightarrow{a_4} + \kappa^5\,\overrightarrow{a_5}$ или

$$\vec{\vec{\kappa}} = (\kappa^3 a_3^1 + \kappa^5 a_5^1)\,\overrightarrow{e_1} + (\kappa^2 a_2^2 + \kappa^3 a_3^2 + \kappa^4 a_4^2 + \kappa^5 a_5^2)\,\overrightarrow{e_2} +$$
$$+(\kappa^2 a_2^3 + \kappa^3 + \kappa^4 a_4^3 + \kappa^5 a_5^3)\,\overrightarrow{e_3} + \kappa^4\,\overrightarrow{e_4} + \kappa^5\,\overrightarrow{e_5}.$$

Из условия $\vec{\kappa}, \vec{\vec{\kappa}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(2345)}$ получаем следующее:

$\kappa^3 a_3^1 + \kappa^5 a_5^1 = 0$ же

$$\kappa^3 \Lambda_{23}^1 + \kappa^5 \Lambda_{25}^1 = 0, \tag{3.2.9}$$

Λ_{23}^1 – пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{25}^1 -$ третья кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.2.9), то линия $\kappa \subset \Delta_{(2345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Касательный вектор образа $f_2^1(u) = \bar{u}$ линии $u \subset \Delta_{(2346)}$ определяется следующим образом: $\vec{u} = u^2\,\overrightarrow{a_2} + u^3\,\overrightarrow{a_3} + u^4\,\overrightarrow{a_4} + u^6\,\overrightarrow{a_6}$ или

$$\vec{\vec{u}} = (u^3 a_3^1 + u^6 a_6^1)\,\overrightarrow{e_1} + (u^2 a_2^2 + u^3 a_3^2 + u^4 a_4^2 + u^6 a_6^2)\,\overrightarrow{e_2} +$$
$$+(u^2 a_2^3 + u^3 + u^4 a_4^3 + u^6 a_6^3)\,\overrightarrow{e_3} + u^4\,\overrightarrow{e_4} + u^6\,\overrightarrow{e_6}.$$

Из условия $\vec{u}$, $\vec{\vec{u}}$, $\overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(2346)}$ получаем $u^3 a_3^1 + u^6 a_6^1 = 0$. Учитывая формулы (3.2.2) получим следующее:

$$u^3 \Lambda_{23}^1 + m^6 \Lambda_{26}^1 = 0, \qquad (3.2.10)$$

где Λ_{23}^1 – пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{26}^1 -$ вторая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.2.10), то линия $u \subset \Delta_{(2346)}$, является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 3.2.2. 1) Линии $d \subset \Delta_{(1234)}$ жана $\ell \subset \Delta_{(1235)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1;

2) Линии, принадлежащие четырехмерному распределению $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $(\imath \bar{\neq} 2,\ \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1{,}3{,}4{,}5{,}6)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1.;

3) Линия $k \subset \Delta_{(2345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$k^3 \Lambda_{23}^1 + k^5 \Lambda_{25}^1 = 0, \qquad (3.2.9)$$

где Λ_{23}^1 – пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{25}^1 -$ третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

4) Линия $u \subset \Delta_{(2346)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$u^3 \Lambda_{23}^1 + m^6 \Lambda_{26}^1 = 0, \qquad (3.2.10)$$

где Λ_{23}^1 – пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{26}^1 -$ вторая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Теперь рассмотрим линии принадлежащие пятимерным распределениям.

Пусть $p \subset \Delta_{(12345)}$. Касательный вектор линии $f_2^1(p) = \overline{p}$ имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{\overline{p}} = (p^3 a_3^1 + p^5 a_5^1)\,\overrightarrow{e_1} + (p^1 a_1^2 + p^2 a_2^2 + p^3 a_3^2 + p^4 a_4^2 + p^5 a_5^2)\,\overrightarrow{e_2} +$$
$$+(p^1 a_1^3 + p^2 a_2^3 + p^3 + p^4 a_4^3 + p^5 a_5^3)\,\overrightarrow{e_3} + p^4\,\overrightarrow{e_4} + p^5\,\overrightarrow{e_5}.$$

Отсюда получаем, что $\overrightarrow{p}\,, \overrightarrow{\overline{p}}\,, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(12345)}$ всегда выполняется. Таким образом, линия $p \subset \Delta_{(12345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Аналогично можно показать, что линия $\mu \subset \Delta_{(12356)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Рассмотрим линию $q \subset \Delta_{(12346)}$. Касательный вектор линии $\overline{q} = f_2^1(q)$ найдем в следующем виде: $\overrightarrow{\overline{q}} = q^1\,\overrightarrow{a_1} + q^2\,\overrightarrow{a_2} + q^3\,\overrightarrow{a_3} + q^4\,\overrightarrow{a_4} + q^6\,\overrightarrow{a_6}$ или

$$\overrightarrow{\overline{q}} = (q^3 a_3^1 + q^6 a_6^1)\,\overrightarrow{e_1} + (q^1 a_1^2 + q^2 a_2^2 + q^3 a_3^2 + q^4 a_4^2 + q^6 a_6^2)\,\overrightarrow{e_2} +$$
$$+(q^1 a_1^3 + q^2 a_2^3 + q^3 + q^4 a_4^3 + q^6 a_6^3)\,\overrightarrow{e_3} + q^4\,\overrightarrow{e_4} + q^6\,\overrightarrow{e_6}.$$

Отсюда получаем, что условие $\overrightarrow{q}\,, \overrightarrow{\overline{q}}\,, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(12346)}$ всегда выполняется. Таким образом, линия $q \subset \Delta_{(12346)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Пусть $s \subset \Delta_{(23456)}$. Касательный вектор линии $\overline{s} = f_2^1(s)$ найдем в следующем виде: $\overrightarrow{\overline{s}} = s^2\,\overrightarrow{a_2} + s^3\,\overrightarrow{a_3} + s^4\,\overrightarrow{a_4} + s^5\,\overrightarrow{a_5} + s^6\,\overrightarrow{a_6}$ или учитывая формул (3.2.2) получаем следующее:

$$\overrightarrow{\overline{s}} = (s^3 a_3^1 + s^5 a_5^1 + s^6 a_6^1)\,\overrightarrow{e_1} + (s^2 a_2^2 + s^3 a_3^2 + s^4 a_4^2 + s^5 a_5^2 +$$
$$+s^6 a_6^2)\,\overrightarrow{e_2} + (s^2 a_2^3 + s^3 + s^4 a_4^3 + s^5 a_5^3 + s^6 a_6^3)\,\overrightarrow{e_3} + s^4\,\overrightarrow{e_4} + s^5\,\overrightarrow{e_5} +$$
$$+s^6\,\overrightarrow{e_6}.$$

Из условия $\vec{s}\,,\,\vec{\bar{s}}\,,\overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(23456)}$ получаем $s^3 a_3^1 + s^1 a_5^1 + s^6 a_6^1 = 0$ или

$$s^3 \Lambda_{23}^1 + s^5 \Lambda_{25}^1 + s^6 \Lambda_{26}^1 = 0, \qquad (3.2.11)$$

где Λ_{23}^1 $-$ пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{25}^1 $-$ третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{26}^1 $-$ вторая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.2.11), то линия $s \subset \Delta_{(23456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

Рассмотрим линию $t \subset \Delta_{(13456)}$. Касательный вектор линии $\bar{t} = f_2^1(t)$ найдем в следующем виде:

$$\vec{\bar{t}} = (t^3 a_3^1 + t^5 a_5^1 + t^6 a_6^1)\,\vec{e_1} + (t^2 a_1^2 + t^3 a_3^2 + t^4 a_4^2 + t^5 a_5^2 + t^6 a_6^2)\,\vec{e_2}$$
$$+(t^1 a_1^3 + t^3 + t^4 a_4^3 + t^5 a_5^3 + t^6 a_6^3)\,\vec{e_3} + t^4\,\vec{e_4} + t^5\,\vec{e_5} + t^6\,\vec{e_6}.$$

Отсюда получаем, что выполняется условие $\vec{t}\,,\,\vec{\bar{t}}\,,\overrightarrow{XF_2^1} \notin \Delta_{(13456)}$, так как $\overrightarrow{XF_2^1} = -\frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2 \notin \Delta_{(13456)}$.

Таким образом, линия $t \subset \Delta_{(13456)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 3.2.3. 1) Линии $p \subset \Delta_{(12345)}$, $q \subset \Delta_{(12346)}$и $\mu \subset \Delta_{(12356)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1;

2) Линия $s \subset \Delta_{(23456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_2^1 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$s^3 \Lambda_{23}^1 + s^5 \Lambda_{25}^1 + s^6 \Lambda_{26}^1 = 0, \qquad (3.2.11)$$

где Λ_{26}^1 $-$вторая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

3) Линии, принадлежащие пятимерному распределению $\Delta_{(13456)}$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_2^1.

3.3. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_1^6

Псевдофокус $F_1^6 \in (X, \vec{e}_1)$ определяетя следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^6 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{66}^1}\vec{e}_1 \qquad (3.3.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_6$, точка F_1^6 описывает свою область $\Omega_1^6 \subset E_6$. Получается частичное отображение $f_1^6: \Omega \to \Omega_1^6$ такое, что, $f_1^6(X) = F_1^6$.

Продифференцируя равенство (3.3.1) и применяя деривационные формулы получаем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_1^6} = d\left(\overrightarrow{X} - \frac{1}{\Lambda_{16}^6}\overrightarrow{e_1}\right) = d\,\overrightarrow{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{16}^6}\right)\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{\Lambda_{16}^6}d\,\overrightarrow{e_1} =$$

$$= \omega^i\,\overrightarrow{e_i} - \frac{d\Lambda_{16}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{\Lambda_{16}^6}\omega_1^i\,\overrightarrow{e_i}.$$

Отсюда применяя формулы (3.3.1), (4.1.15) получаем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_1^6} = \omega^i\,\overrightarrow{e_i} + \frac{Q_{16m}^6\omega^m}{(\Lambda_{16}^6)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{16}^6}\overrightarrow{e_i}\,, \left(i,j,k = \overline{1,6}\right),$$

где $Q_{16m}^6 = \Lambda_{16m}^6 + \Lambda_{1\ell}^6\Lambda_{6m}^\ell + \Lambda_{\ell 6}^6\Lambda_{1m}^\ell$.

Из последнего равенства имеем:

$$d\,\overrightarrow{F_1^6} = \left[\overrightarrow{e_1} + \frac{Q_{161}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{16}^6}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^1 + \left[\overrightarrow{e_2} + \frac{Q_{162}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{16}^6}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\overrightarrow{e_3} + \frac{Q_{163}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{16}^6}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^3 + \left[\overrightarrow{e_4} + \frac{Q_{164}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{16}^6}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\overrightarrow{e_5} + \frac{Q_{165}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\overrightarrow{e_1} - -\frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{16}^6}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^5 + \left[\overrightarrow{e_6} + \frac{Q_{166}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{16}^i}{\Lambda_{16}^6}\overrightarrow{e_i}\right]\omega^6.$$

Введем следующее обозначение:

$$\overrightarrow{q_1} = \overrightarrow{e_1} + \frac{Q^6_{161}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^i_{11}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{q_2} = \overrightarrow{e_2} + \frac{Q^6_{162}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{q_3} = \overrightarrow{e_3} + \frac{Q^6_{163}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{q_4} = \overrightarrow{e_4} + \frac{Q^6_{164}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{q_5} = \overrightarrow{e_5} + \frac{Q^6_{165}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^i_{15}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_i};$$

$$\overrightarrow{q_6} = \overrightarrow{e_6} + \frac{Q^6_{166}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^i_{16}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_i}.$$

Когда сеть Френе $\tilde{\Sigma}_6$ является циклической сетью, то $d\,\overrightarrow{F^6_1} = \omega^i\,\overrightarrow{q_i}$, где векторы $\overrightarrow{q_i}$ имеют следующий вид:

$$\overrightarrow{q_1} = \left[1 + \frac{D^6_{161}}{(\Lambda^6_{16})^2}\right]\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_2};$$

$$\overrightarrow{q_2} = \frac{D^6_{162}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda^6_{12}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_6};$$

$$\overrightarrow{q_3} = \frac{D^6_{163}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^6_{13}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_6}; \qquad (3.3.2)$$

$$\overrightarrow{q_4} = \frac{D^6_{164}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_4} - \frac{\Lambda^6_{14}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_6};$$

$$\overrightarrow{q_5} = \frac{D^6_{165}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{15}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_5} - \frac{\Lambda^6_{15}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_6};$$

$$\overrightarrow{q_6} = \frac{D^6_{166}}{(\Lambda^6_{16})^2}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{16}}{\Lambda^6_{16}}\overrightarrow{e_2}.$$

В общем случае векторы (3.3.2) не являются линейно зависимыми. К области $\Omega_1^6 \subset E_6$ присоединим подвижной репер $\mathcal{R}' = \left(F_1^6, \overrightarrow{q_i}\right)$.

Рассмотрим линию $\alpha \subset \Delta_{(1234)}$. Её касательный вектор $f_1^6(\alpha) = \overline{\alpha}$ имеет вид: $\overrightarrow{\overline{\alpha}} = \alpha^1 \overrightarrow{q_1} + \alpha^2 \overrightarrow{q_2} + \alpha^3 \overrightarrow{q_3} + \alpha^4 \overrightarrow{q_4}$ или

$$\overrightarrow{\overline{q}} = (\alpha^1 q_1^1 + \alpha^2 q_2^1 + \alpha^3 q_3^1 + \alpha^4 q_4^1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha^1 q_1^2 + \alpha^2 + \alpha^3 q_3^2 + \alpha^4 q_4^2)\overrightarrow{e_2} +$$

$$+\alpha^3 \overrightarrow{e_3} + \alpha^4 \overrightarrow{e_4} + (\alpha^2 q_2^6 + \alpha^3 q_3^6 + \alpha^4 q_4^6)\overrightarrow{e_6}.$$

Из условия $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{\overline{q}}$, $\overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(1234)}$ получаем следующее:

$$\alpha^2 q_2^6 + \alpha^3 q_3^6 + \alpha^4 q_4^6 = 0.$$

Учитывая формулы (3.3.2) получаем следующее:

$$\alpha^2 \Lambda_{12}^6 + \alpha^3 \Lambda_{13}^6 + \alpha^4 \Lambda_{14}^6 = 0, \qquad (3.3.3)$$

где Λ_{12}^6 – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{13}^6 – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{14}^6 – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.3.3), то линия $\alpha \subset \Delta_{(1234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Рассмотрим линию $\beta \subset \Delta_{(1235)}$ сызыгын карайлы. Касательный вектор линии $f_1^6(\beta) = \overline{\beta}$ имеет вид: $\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^1 \overrightarrow{q_1} + \beta^2 \overrightarrow{q_2} + \beta^3 \overrightarrow{q_3} + \beta^5 \overrightarrow{q_5}$ или

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = (\beta^1 q_1^1 + \beta^2 q_2^1 + \beta^3 q_3^1 + \beta^5 q_5^1)\overrightarrow{e_1} + (\beta^1 q_1^2 + \beta^2 + \beta^3 q_3^2 + \beta^5 q_5^2)\overrightarrow{e_2}$$

$$+\beta^3 \overrightarrow{e_3} + \beta^5 \overrightarrow{e_5} + (\beta^3 q_3^6 + \beta^5 q_5^6 + \beta^2 q_2^6)\overrightarrow{e_{6.}}$$

Из условия $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\overline{\beta}}$, $\overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(1235)}$ имеем: $\beta^2 q_2^6 + \beta^3 q_3^6 + \beta^5 q_5^6 = 0$.

Учитывая формулы (3.3.2) получаем следующее:

$$\beta^2 \Lambda_{12}^6 + \beta^3 \Lambda_{13}^6 + \beta^5 \Lambda_{15}^6 = 0, \qquad (3.3.4)$$

где Λ_{15}^{6} – вторая кривизна линии ω^{5} сети $\tilde{\Sigma}_{6}$.

Обратно, если координаты β^{2}, β^{3}, β^{5} касательного вектора линия β принадлежащая распределению $\Delta_{(1235)}$ удовлетворяют условие (3.3.4) то линия $\beta \subset \Delta_{(1235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_{1}^{6}.

Образ $f_{1}^{6}(\gamma)=\overline{\gamma}$ линии $\gamma \subset \Delta_{(2345)}$ при частичном отображении f_{2}^{1} имеет касательный вектор в следующем виде:

$\overrightarrow{\overline{\gamma}} = \gamma^{2}\,\overrightarrow{q_{2}} + \gamma^{3}\,\overrightarrow{q_{3}} + \gamma^{4}\,\overrightarrow{q_{4}} + \gamma^{5}\,\overrightarrow{q_{5}}$ или

$$\overrightarrow{\overline{\gamma}} = (\gamma^{2}q_{2}^{1} + \gamma^{3}q_{3}^{1} + \gamma^{4}q_{4}^{1} + \gamma^{5}q_{5}^{1})\,\overrightarrow{e_{1}} + (\gamma^{2} + \gamma^{3}q_{3}^{2} + \gamma^{4}q_{4}^{2} +$$
$$+\gamma^{5}q_{5}^{2})\,\overrightarrow{e_{2}} + \gamma^{3}\,\overrightarrow{e_{3}} + \gamma^{4}\,\overrightarrow{e_{4}} + \gamma^{5}\,\overrightarrow{e_{5}} + (\gamma^{2}q_{2}^{6} + \gamma^{3}q_{3}^{6} + \gamma^{4}q_{4}^{6} + \gamma^{5}q_{5}^{6})\,\overrightarrow{e_{6}}.$$

Имеет место условие $\overrightarrow{\gamma}\,, \overrightarrow{\overline{\gamma}}\,, \overrightarrow{XF_{1}^{6}} \notin \Delta_{(2345)}$, так как $\overrightarrow{XF_{1}^{6}} = -\frac{1}{\Lambda_{16}^{6}}\vec{e}_{2} \notin \Delta_{(2345)}$.

Следовательно линия $\gamma \subset \Delta_{(2345)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_{1}^{6}.

Касательный вектор образа $f_{1}^{6}(p)=\overline{p}$ линии $p \subset \Delta_{(1236)}$ находится в следуюшем: $\overrightarrow{\overline{p}} = p^{1}\,\overrightarrow{q_{1}} + p^{2}\,\overrightarrow{q_{2}} + p^{3}\,\overrightarrow{q_{3}} + p^{6}\,\overrightarrow{q_{6}}$ или

$$\overrightarrow{\overline{p}} = (p^{1}q_{1}^{1} + p^{2}q_{2}^{1} + p^{3}q_{3}^{1} + p^{6}q_{6}^{1})\,\overrightarrow{e_{1}}$$
$$+ (p^{1}q_{1}^{2} + p^{2} + p^{3}q_{3}^{2} + p^{6}q_{6}^{2})\,\overrightarrow{e_{2}} +$$
$$+p^{3}\,\overrightarrow{e_{3}} + (p^{2}q_{2}^{6} + p^{3}q_{3}^{6})\,\overrightarrow{e_{6}}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\overrightarrow{p}\,, \overrightarrow{\overline{p}}\,, \overrightarrow{XF_{1}^{6}} \in \Delta_{(1236)}$.

Следовательно, линия $p \subset \Delta_{(1236)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_{1}^{6}.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема

Теорема 3.3.1. 1) Линия $\alpha \subset \Delta_{(1234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\alpha^2 \Lambda_{12}^6 + \alpha^3 \Lambda_{13}^6 + \alpha^4 \Lambda_{14}^6 = 0. \qquad (3.3.3)$$

2) Линия $\beta \subset \Delta_{(1235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\beta^2 \Lambda_{12}^6 + \beta^3 \Lambda_{13}^6 + \beta^5 \Lambda_{15}^6 = 0. \qquad (3.3.4)$$

3) Линия $p \subset \Delta_{(1236)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6;

4) Линии, принадлежащие четырехмерным распределениям $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}\bar{\ell})}$ $(\big(\bar{\imath},\ \bar{\jmath},\ \bar{k},\ \bar{\ell} = 2,3,4,5,6\big)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_1^6.

Рассмотрим линии принадлежащие пятимерным распределениям.

Касательный вектор образа $f_1^6(\ell) = \bar{\ell}$ линии $\ell \subset \Delta_{(12345)}$ находится в следуюшем: $\vec{\bar{\ell}} = \ell^1 \overrightarrow{q_1} + \ell^2 \overrightarrow{q_2} + \ell^3 \overrightarrow{q_3} + \ell^4 \overrightarrow{q_4} + \ell^5 \overrightarrow{q_5}$ или

$$\vec{\bar{\ell}} = \left(\ell^1 q_1^1 + \ell^2 q_2^1 + \ell^3 q_3^1 + \ell^4 q_4^1 + \ell^5 q_5^1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\ell^1 q_1^2 + \ell^2 + \right.$$
$$\left. + \ell^3 q_3^2 + \ell^4 q_4^2 + \ \ell^5 q_5^2\right)\overrightarrow{e_2} + \ell^3 \overrightarrow{e_3} + \ell^4 \overrightarrow{e_4} + \ell^5 \overrightarrow{e_5} + \left(\ell^2 q_2^6 + \ell^3 q_3^6 + \ell^4 q_4^6 + \right.$$
$$\left. + \ell^5 q_5^6\right)\overrightarrow{e_6}.$$

Из условия $\vec{\ell}\,,\ \vec{\bar{\ell}}\,, \overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(12345)}$ имеем следующее:

$$\ell^2 q_2^6 + \ell^3 q_3^6 + \ell^4 q_4^6 + \ell^5 q_5^6 = 0, \text{ или}$$

$$\ell^2 \Lambda_{12}^6 + \ell^3 \Lambda_{13}^6 + \ell^4 \Lambda_{14}^6 + \ell^5 \Lambda_{15}^6 = 0, \qquad (3.3.7)$$

где Λ_{12}^{6} — пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{13}^{6} — четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{14}^{6} — третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$, Λ_{15}^{6} — вторая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если координаты касательного вектора линии $\ell \subset \Delta_{(12345)}$ удовлетворяют условие (3.3.7), то линия ℓ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Пусть вектор $\vec{L}$ имеет следующий вид: $\vec{L} = \Lambda_{12}^{6}\,\vec{e_2} + \Lambda_{13}^{6}\,\vec{e_3} + \Lambda_{14}^{6}\,\vec{e_4} + \Lambda_{15}^{6}\,\vec{e_5}$. Условие (3.3.7) показывает, что эти векторы ортогональны, т.е. $\vec{\ell} \perp \vec{L}$.

Рассмотрим линию $m \subset \Delta_{(12346)}$. Тогда касательный вектор линии $\overline{m} = f_1^6(m)$ имеет вид:

$$\vec{\overline{m}} = m^1\,\vec{q_1} + m^2\,\vec{q_2} + m^3\,\vec{q_3} + m^4\,\vec{q_4} + m^6\,\vec{q_6} \text{ или}$$

$$\vec{\overline{m}} = (m^1q_1^1 + m^2q_2^1 + m^3q_3^1 + m^4q_4^1 + m^6q_6^1)\,\vec{e_1} + (m^1q_1^2 + m^2 + \\ + m^3q_3^2 + m^4q_4^2)\,\vec{e_2} + m^3\,\vec{e_3} + m^4\,\vec{e_4} + (m^2q_2^6 + m^3q_3^6 + m^4q_4^6)\,\vec{e_6}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\vec{m}, \vec{\overline{m}}, \overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(12346)}$. Следовательно линия $m \subset \Delta_{(12346)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Образ $f_1^6(m) = \overline{k}$ линии $k \subset \Delta_{(23456)}$ имеет следуюший касательный вектор: $\vec{\overline{k}} = k^2\,\vec{q_2} + k^3\,\vec{q_3} + k^4\,\vec{q_4} + k^5\,\vec{q_5} + k^6\,\vec{q_6}$ или

$$\vec{\overline{k}} = (k^2q_2^1 + k^3q_3^1 + k^4q_4^1 + k^5q_5^1 + k^6q_6^1)\,\vec{e_1} + (k^2 + k^3q_3^2 + k^4q_4^2 + \\ + k^5q_5^2 + k^6q_6^2)\,\vec{e_2} + k^3\,\vec{e_3} + k^4\,\vec{e_4} + k^5\,\vec{e_5} + (k^2q_2^6 + k^3q_3^6 + k^4q_4^6 + \\ + k^5q_5^6)\,\vec{e_6}.$$

Имеет место условие $\vec{k}, \vec{\bar{k}}, \overrightarrow{XF_1^6} \notin \Delta_{(23456)}$, так как $\overrightarrow{XF_1^6} = -\frac{1}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2 \notin \Delta_{(2345)}$.

Следовательно, линия $k \subset \Delta_{(23456)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Рассмотрим линию $s \subset \Delta_{(13456)}$. Найдем касательный вектор линии $f_1^6(s) = \bar{s}$ в следующем виде:

$\vec{\bar{s}} = s^1\,\overrightarrow{q_1} + s^3\,\overrightarrow{q_3} + s^4\,\overrightarrow{q_4} + s^5\,\overrightarrow{q_5} + s^6\,\overrightarrow{q_6}$ или

$$\vec{\bar{s}} = (s^1q_1^1 + s^3q_3^1 + s^4q_4^1 + s^5q_5^1 + s^6q_6^1)\,\overrightarrow{e_1} + (s^1q_1^2 + s^3q_3^2 + s^4q_4^2 + $$
$$+s^5q_5^2 + s^6q_6^2)\,\overrightarrow{e_2} + s^3\,\overrightarrow{e_3} + s^4\,\overrightarrow{e_4} + s^5\,\overrightarrow{e_5} + (s^3q_3^6 + s^4q_4^6 + s^5q_5^6)\,\overrightarrow{e_6}.$$

Из условии $\vec{s}, \vec{\bar{s}}, \overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(13456)}$ имеем:

$s^1q_1^2 + s^3q_3^2 + +s^4q_4^2 + s^5q_5^2 + s^6q_6^2 = 0$ или

$$s^1\Lambda_{11}^2 + s^3\Lambda_{13}^2 + s^4\Lambda_{14}^2 + s^5\Lambda_{15}^2 + s^6\Lambda_{16}^2 = 0, \qquad (3.3.9)$$

где Λ_{11}^2 – первая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{13}^2 – пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{14}^2 – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{15}^2 – третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{16}^2 – вторая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если координаты касательного вектора линии $s \subset \Delta_{(13456)}$ удовлетворяют условие (3.3.9), то линия ℓ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Условие (3.3.9) показывает, что векторы $\vec{s}$ и $\vec{\Lambda} = \Lambda_{11}^2\,\overrightarrow{e_1} + \Lambda_{13}^2\,\overrightarrow{e_3} + \Lambda_{14}^2\,\overrightarrow{e_4} + \Lambda_{15}^2\,\overrightarrow{e_5} + \Lambda_{16}^2\,\overrightarrow{e_6}$ ортогональны.

Образ $f_1^6(t) = \bar{t}$ линии $t \subset \Delta_{(12456)}$ имеет следуюший касательный вектор: $\vec{\bar{t}} = t^1\,\overrightarrow{q_1} + t^2\,\overrightarrow{q_2} + t^4\,\overrightarrow{q_4} + t^5\,\overrightarrow{q_5} + t^6\,\overrightarrow{q_6}$ или

$$\overrightarrow{\overline{t}} = (t^1 q_1^1 + t^2 q_2^1 + t^4 q_4^1 + t^5 q_5^1 + t^6 q_6^1)\,\overrightarrow{e_1} + (t^2 q_1^2 + t^2 + t^4 q_4^2 + \\ + t^5 q_5^2 + t^6 q_6^2)\,\overrightarrow{e_2} + t^4\,\overrightarrow{e_4} + t^5\,\overrightarrow{e_5} + (t^2 q_2^6 + t^4 q_4^6 + t^5 q_5^6)\,\overrightarrow{e_6}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{\overline{t}}, \overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(12456)}$. Следовательно, линия $t \subset \Delta_{(12456)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Рассмотрим линию $u \subset \Delta_{(12356)}$. Найдем касательный вектор линии $f_1^6(u) = \overline{u}$, который имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{\overline{u}} = u^1\,\overrightarrow{q_1} + u^2\,\overrightarrow{q_2} + u^3\,\overrightarrow{q_3} + u^5\,\overrightarrow{q_5} + u^6\,\overrightarrow{q_6} \text{ или}$$

$$\overrightarrow{\overline{u}} = (u^1 q_1^1 + u^2 q_2^1 + u^3 q_3^1 + u^5 q_5^1 + u^6 q_6^1)\,\overrightarrow{e_1} + \\ + (u^1 q_1^2 + u^2 + u^3 q_3^2 + u^5 q_5^2 + u^6 q_6^2)\,\overrightarrow{e_2} + \\ + u^3\,\overrightarrow{e_3} + u^5\,\overrightarrow{e_5} + (u^2 q_2^6 + u^3 q_3^6 + u^5 q_5^6)\,\overrightarrow{e_6}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\overline{u}}, \overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(12356)}$. Следовательно, линия $u \subset \Delta_{(12356)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема:

Теорема 3.3.2. 1) Линия $\ell \subset \Delta_{(12345)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\ell^2 \Lambda_{12}^6 + \ell^3 \Lambda_{13}^6 + \ell^4 \Lambda_{14}^6 + \ell^5 \Lambda_{15}^6 = 0, \qquad (3.3.7)$$

где Λ_{12}^6 – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{13}^6 – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{14}^6 – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{15}^6 - \omega^5$ вторая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

2) Линия $k \subset \Delta_{(23456)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6;

3) Линия $s \subset \Delta_{(13456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$s^1\Lambda_{11}^2 + s^3\Lambda_{13}^2 + s^4\Lambda_{14}^2 + s^5\Lambda_{15}^2 + s^6\Lambda_{16}^2 = 0, \qquad (3.3.9)$$

где $\Lambda_{11}^2 -$ пятая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{13}^2 -$ пятая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{14}^2 -$ четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{15}^2 -$ третья кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; $\Lambda_{16}^2 -$ вторая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

4) Линии $m \subset \Delta_{(12346)}$, $t \subset \Delta_{(12456)}$, $u \subset \Delta_{(12356)}$ всегда являеются квазидвойными линиями частичного отображения f_1^6.

Теперь рассмотрим линии принадлежащие трехмерным распределениям.

Образ $\overline{\alpha} = f_1^6(\alpha)$ линии $\alpha \subset \Delta_{(123)}$ имеет следуюший касательный вектор: $\vec{\overline{\alpha}} = \alpha^1 \overrightarrow{q_1} + \alpha^2 \overrightarrow{q_2} + \alpha^3 \overrightarrow{q_3}$ или

$$\vec{\overline{\alpha}} = (\alpha^1 q_1^1 + \alpha^2 q_2^1 + \alpha^3 q_3^1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha^1 q_1^2 + \alpha^2 + \alpha^3 q_3^2)\overrightarrow{e_2} + \alpha^3 \overrightarrow{e_3} +$$
$$+(\alpha^2 q_2^6 + \alpha^3 q_3^6)\overrightarrow{e_6}.$$

Из условия $\overrightarrow{XF_1^6}, \vec{\alpha}, \vec{\overline{\alpha}} \in \Delta_{(123)}$ имеем $\alpha^2 q_2^6 + \alpha^3 q_3^6 = 0$.
Учитывая формулы (3.3.2) имеем следующее:

$$\alpha^2\Lambda_{12}^6 + \alpha^3\Lambda_{13}^6 = 0, \qquad (3.3.10)$$

где Λ_{12}^6 – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{13}^6 – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.3.10), то линия $\alpha \subset \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Рассмотрим линию $\beta \subset \Delta_{(124)}$ касательный вектор линии $f_1^6(\beta) = \overline{\beta}$ имеет вид: $\vec{\overline{\beta}} = \beta^1 \overrightarrow{q_1} + \beta^2 \overrightarrow{q_2} + \beta^4 \overrightarrow{q_4}$ или

$\overrightarrow{\overline{\beta}} = (\beta^1 q_1^1 + \beta^2 q_2^1 + \beta^4 q_4^1)\,\overrightarrow{e_1} + (\beta^1 q_1^2 + \beta^2 + \beta^4 q_4^2)\,\overrightarrow{e_2} + (\beta^2 q_2^6 +$
$+\beta^4 q_4^6)\,\overrightarrow{e_6} + \beta^4\,\overrightarrow{e_4}.$

Из условия $\overrightarrow{\beta}\,, \overrightarrow{\overline{\beta}}\,, \overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(124)}$ имеем $\beta^2 q_2^6 + \beta^4 q_4^6 = 0$.

Учитывая формулы (3.3.2) имеем следующее:

$$\beta^2 \Lambda_{12}^6 + \beta^4 \Lambda_{14}^6 = 0, \tag{3.3.11}$$

где Λ_{12}^6 – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{14}^6 – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.3.10), то линия $\beta \subset \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Рассмотрим линию $\gamma \subset \Delta_{(126)}$. Касательный вектор линии $f_1^6(\gamma) = \overline{\gamma}$ имеет вид: $\overrightarrow{\overline{\gamma}} = \gamma^1\,\overrightarrow{q_1} + \gamma^2\,\overrightarrow{q_2} + \gamma^6\,\overrightarrow{q_6}$ или

$$\overrightarrow{\overline{\gamma}} = (\gamma^1 q_1^1 + \gamma^2 q_2^1 + \gamma^6 q_6^1)\,\overrightarrow{e_1} + (\gamma^1 q_1^2 + \gamma^2 + \gamma^6 q_6^2)\,\overrightarrow{e_2} + \gamma^2 q_2^6\,\overrightarrow{e_6}.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\overrightarrow{\gamma}\,, \overrightarrow{\overline{\gamma}}\,, \overrightarrow{XF_1^6} \in \Delta_{(126)}$. Следовательно, линия $\gamma \subset \Delta_{(126)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Образ $\overline{\delta} = f_1^6(\delta)$ линии $\delta \subset \Delta_{(234)}$ имеет следуюший касательный вектор: $\overrightarrow{\overline{\delta}} = \delta^2\,\overrightarrow{q_2} + \delta^3\,\overrightarrow{q_3} + \delta^4\,\overrightarrow{q_4}$ или

$$\overrightarrow{\overline{\delta}} = (\delta^2 q_2^1 + \delta^3 q_3^1 + \delta^4 q_4^1)\,\overrightarrow{e_1} + (\delta^2 q_2^6 + \delta^3 q_3^6 + \delta^4 q_4^6)\,\overrightarrow{e_6} +$$
$$+(\delta^2 + \delta^3 q_3^2 + \delta^4 q_4^2)\,\overrightarrow{e_2} + \delta^3\,\overrightarrow{e_3} + \delta^4\,\overrightarrow{e_4}.$$

Имеет место условие $\overrightarrow{\delta}\,, \overrightarrow{\overline{\delta}}\,, \overrightarrow{XF_1^6} \notin \Delta_{(234)}$, так как $\overrightarrow{XF_1^6} = -\frac{1}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_1 \notin \Delta_{(234)}$.

Следовательно линия $\delta \subset \Delta_{(234)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6.

Аналогично, можно показать, что линии принадлежащие трехмерному распределению $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $((\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 1,2,3,5,6)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_1^6.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема:

Теорема 3.3.3. 1) Линия $\alpha \subset \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\alpha^2 \Lambda_{12}^6 + \alpha^3 \Lambda_{13}^6 = 0, \qquad (3.3.10)$$

где Λ_{12}^6 – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{13}^6 – четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

2) Линия $\beta \subset \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\beta^2 \Lambda_{12}^6 + \beta^4 \Lambda_{14}^6 = 0, \qquad (3.3.11)$$

где Λ_{12}^6 – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{14}^2 – четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

3) Линия $\gamma \subset \Delta_{(126)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_1^6;

4) Линии, принадлежащие трехмерному распределению $\Delta_{(\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})}$ $(\bar{\imath} \neq 1,\ \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k} = 2,3,4,5,6)$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_1^6.

3.4. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_6^5

Псевдофокус F_6^5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_6^5} = \overrightarrow{X} - \frac{1}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_6 = \overrightarrow{X} + \frac{1}{\Lambda_{55}^6}\vec{e}_6. \qquad (3.4.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_6$, точка F_6^5 описывает свою область $\Omega_6^5 \subset E_6$. Получается частичное отображение $f_6^5 : \Omega \to \Omega_6^5$ такое, что $f_6^5(X) = F_6^5$.

Продифференцируя равенство (3.4.1) и применяя деривационные формулы получаем следующее:

$$d\vec{F}_6^5 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_6\right) = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{65}^5}\right)\vec{e}_6 - \frac{1}{\Lambda_{65}^5}d\vec{e}_6 =$$

$$= \omega^i\vec{e}_i - \frac{d\Lambda_{65}^5}{(\Lambda_{65}^5)^2} - \frac{1}{\Lambda_{65}^5}\omega^i\vec{e}_i.$$

Отсюда применяя формулы (4.1.3), (4.1.5) получаем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_6^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{Q_{65m}^5\omega^m}{(\Lambda_{65}^5)^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda_{6m}^i\omega^m}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_i, \left(i,j,k = \overline{1,6}\right),$$

где $Q_{65m}^5 = \Lambda_{65m}^5 + \Lambda_{6\ell}^5\Lambda_{5m}^\ell + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{6m}^\ell$.

Из последнего равенства имеем:

$$d\,\overrightarrow{F_6^5} = \left[\vec{e}_1 - \frac{Q_{651}^5}{(\Lambda_{65}^5)^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda_{61}^i}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 - \frac{Q_{652}^5}{(\Lambda_{65}^5)^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda_{62}^i}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 - \frac{Q_{653}^5}{(\Lambda_{65}^5)^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda_{63}^i}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 - \frac{Q_{654}^5}{(\Lambda_{65}^5)^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda_{64}^i}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e}_5 - \frac{Q_{655}^5}{(\Lambda_{65}^5)^2}\vec{e}_6 - - \frac{\Lambda_{65}^i}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_i\right]\omega^5 + \left[\vec{e}_6 - \frac{Q_{656}^5}{(\Lambda_{65}^5)^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda_{66}^i}{\Lambda_{65}^5}\vec{e}_i\right]\omega^6.$$

Введем следующее обозначение:

$$\vec{p}_1 = \vec{e}_1 - \frac{Q^5_{651}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda^i_{61}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{p}_2 = \vec{e}_2 - \frac{Q^5_{652}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda^i_{62}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{p}_3 = \vec{e}_3 - \frac{Q^5_{653}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda^i_{63}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{p}_4 = \vec{e}_4 - \frac{Q^5_{654}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda^i_{64}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{p}_5 = \vec{e}_5 - \frac{Q^5_{655}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda^i_{65}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{p}_6 = \vec{e}_6 - \frac{Q^5_{656}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6 - \frac{\Lambda^i_{66}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_i.$$

Когда сеть Френе $\tilde{\Sigma}_6$ является циклической сетью, то $d\overrightarrow{F^5_6} = \omega^i\vec{p}_i$ где векторы $\overrightarrow{p_i}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\vec{p}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^5_{61}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_5 - \frac{Q^5_{651}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6;\\
&\vec{p}_2 = -\frac{\Lambda^1_{62}}{\Lambda^6_{65}}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^5_{62}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_5 - \frac{Q^5_{652}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6;\\
&\vec{p}_3 = \vec{e}_3 - \frac{\Lambda^5_{63}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_5 - \frac{Q^5_{653}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6;\\
&\vec{p}_4 = \vec{e}_4 - \frac{\Lambda^5_{64}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_5 - \frac{Q^5_{654}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6;\\
&\vec{p}_5 = -\frac{\Lambda^1_{65}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_1 - \frac{Q^5_{655}}{(\Lambda^5_{65})^2}\vec{e}_6;\\
&\vec{p}_6 = -\frac{\Lambda^1_{66}}{\Lambda^5_{65}}\vec{e}_1 - \left[1 + \frac{Q^5_{656}}{(\Lambda^5_{65})^2}\right]\vec{e}_6.
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

В общем случае векторы $\overrightarrow{m_i}$ не являются линейно зависимыми.

К области $\Omega_6^5 \subset E_6$ присоеденим подвижной репер $\mathcal{R}' = \left(F_6^5, \overrightarrow{p_i}\right)$.

Теперь рассмотрим линии принадлежащие пятимерному распределению.

Касательный вектор образа $f_6^5(\alpha) = \bar{\alpha}$ линии $\alpha \subset \Delta_{(12345)}$ при частичном отображении f_6^5 найдем в следующем виде:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1 \vec{p}_1 + \alpha^2 \vec{p}_2 + \alpha^3 \vec{p}_3 + \alpha^4 \vec{p}_4 + \alpha^5 \vec{p}_5$$

В силу формулы (4.4.2) имеем следующее:

$$\vec{\bar{\alpha}} = (\alpha^1 + \alpha^2 p_2^1 + \alpha^5 p_5^1)\vec{e}_1 + \alpha^2 \vec{e}_2 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4 + (\alpha^1 p_1^5 + \alpha^2 p_2^5 + \\ + \alpha^3 p_3^5)\vec{e}_5 + (\alpha^1 p_1^6 + \alpha^2 p_2^6 + \alpha^3 p_3^6 + \alpha^4 p_4^6 + \alpha^5 p_5^6)\vec{e}_6.$$

Имеет место условие $\vec{\alpha},\ \vec{\bar{\alpha}},\ \overrightarrow{XF_6^5} \notin \Delta_{(12345)}$так как $\overrightarrow{XF_6^5} \notin \Delta_{(12345)}$.

Следовательно, линия $\alpha \subset \Delta_{(12345)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_6^5.

Рассморим линию $\beta \subset \Delta_{(23456)}$. Найдем касательный вектор линии $f_6^5(\beta) = \overline{\beta}$ в следующем виде: $\vec{\bar{\beta}} = \beta^2 \vec{p}_2 + \beta^3 \vec{p}_3 + \beta^4 \vec{p}_4 + \beta^5 \vec{p}_5 + \beta^6 \vec{p}_6$ или

$$\vec{\bar{\beta}} = (\beta^2 p_2^1 + \beta^5 p_5^1 + \beta^6 p_6^1)\vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + \beta^3 \vec{e}_3 + \beta^4 \vec{e}_4 + \\ + (\beta^2 p_2^5 + \beta^3 p_3^5 + \beta^4 p_4^5)\vec{e}_5 + \\ + (\beta^2 p_2^6 + \beta^3 p_3^6 + \beta^4 p_4^6 + \beta^5 p_5^6 + \beta^6 p_6^6)\vec{e}_6.$$

Из условии $\vec{\beta}\,, \vec{\bar{\beta}}\,, \overrightarrow{XF_6^5} \in \Delta_{(23456)}$ имеем:

$$\beta^2 p_2^1 + \beta^5 p_5^1 + \beta^6 p_6^1 = 0.$$

Учитывая формулы (4.4.2) имеем следующее:

$$\beta^2 \Lambda_{62}^1 + \beta^5 \Lambda_{65}^1 + \beta^6 \Lambda_{66}^1 = 0, \tag{3.3.3}$$

где Λ_{62}^1 – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{65}^1 – вторая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{66}^1 – первая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.3.3) то линия $\beta \subset \Delta_{(23456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_6^5.

Последнее уравнение имеет следующий геометрический смысл:

Векторы $np_{(X,\vec{e}_2,\vec{e}_5,\vec{e}_6)} \overrightarrow{\beta} = \beta^2\vec{e}_2 + \beta^5\vec{e}_5 + \beta^6\vec{e}_6$

и $\overrightarrow{\Lambda} = \Lambda_{62}^1\vec{e}_2 + \Lambda_{65}^1\vec{e}_5 + \Lambda_{66}^1\vec{e}_6$ ортогональны.

Рассмотрим $\gamma \subset \Delta_{(13456)}$. Найдем касательный вектор линии $f_6^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ в следующем виде: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{p}_1 + \gamma^3\vec{p}3 + \gamma^4\vec{p}_4 + \gamma^5\vec{p}_5 + \gamma^6\vec{p}_6$ или

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\gamma^1 + \gamma^5 p_5^1 + \gamma^6 p_6^1)\vec{e}_1 + \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4 + (\gamma^1 p_1^5 + \gamma^3 p_3^5 + \gamma^4 p_4^5)\vec{e}_5 +$$
$$+(\gamma^1 p_1^6 + \gamma^3 p_3^6 + \gamma^4 p_4^6 + \gamma^5 p_5^6 + \gamma^6 p_6^6)\vec{e}_6.$$

Имеет место условие $\vec{\gamma},\ \vec{\bar{\gamma}},\ \overrightarrow{XF_6^5} \in \Delta_{(13456)}$.

Следовательно, линия $\gamma \subset \Delta_{(13456)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_6^5.

Аналогично можно показать, что линии $\delta \subset \Delta_{(12356)}$, $\theta \subset \Delta_{(12456)}$ всегда является квазидвойными линиями частичного отображения f_6^5.

Касательный вектор образа $f_6^5(v) = \bar{v}$ линии $v \subset \Delta_{(12346)}$ найдем в следующем виде: $\vec{\bar{v}} = v^1\vec{p}_1 + v^2\vec{p}_2 + v^3\vec{p}_3 + v^6\vec{p}_6$ или

$$\vec{\bar{v}} = (v^1 + v^2 p_2^1 + v^6 p_6^1)\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3 + v^4\vec{e}_4 + (v^1 p_1^5 + v^2 p_2^5 +$$
$$+v^3 p_3^5 + v^4 p_4^5)\vec{e}_5 + (v^1 p_1^6 + v^2 p_2^6 + v^3 p_3^6 + v^4 p_4^6 + v^6 p_6^6)\vec{e}_6.$$

Из условии $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\bar{v}}, \overrightarrow{XF_6^5} \in \Delta_{(12346)}$ имеем:

$$v^1 p_1^5 + v^2 p_2^5 + v^3 p_3^5 + v^4 p_4^5 = 0.$$

В силу формулы (4.4.2) имеем следующее,

$$v^1\Lambda_{61}^5 + v^2\Lambda_{62}^5 + v^3\Lambda_{63}^5 + v^4\Lambda_{64}^5 = 0 \qquad (3.4.4)$$

где Λ_{61}^{5} – пятая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{62}^{5} – четвертая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{63}^{5} – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{64}^{5} – кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.4.4) то линия $v \subset \Delta_{(12346)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_6^5.

Равенство (3.4.4) имеет следующий геометрический смысл:

Проекция вектора $\vec{v}$ в пространстве $(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ ортогональна вектору $\vec{U} = \Lambda_{61}^{5}\vec{e}_1 + \Lambda_{62}^{5}\vec{e}_2 + \Lambda_{63}^{5}\vec{e}_3 + \Lambda_{64}^{5}\vec{e}_4$.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема:

Теорема 3.4.1. 1) Линии $\gamma \subset \Delta_{(13456)}$, $\delta \subset \Delta_{(12356)}$, и $\theta \subset \Delta_{(12456)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_6^5;

2) Линия $\beta \subset \Delta_{(1235)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_6^5 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\beta^2\Lambda_{62}^{1} + \beta^5\Lambda_{65}^{1} + \beta^6\Lambda_{66}^{1} = 0, \qquad (3.3.3)$$

где Λ_{62}^{1} – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{65}^{1} – вторая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{66}^{1} – первая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

3) Линия $v \subset \Delta_{(12346)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_6^5 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$v^1\Lambda_{61}^{5} + v^2\Lambda_{62}^{5} + v^3\Lambda_{63}^{5} + v^4\Lambda_{64}^{5} = 0, \qquad (3.4.4)$$

где Λ_{61}^{5} – пятая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{62}^{5} – четвертая кривизна линии ω^2 ссети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{63}^{5} – третья кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{64}^{5} – вторая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

4) Линия $\alpha \subset \Delta_{(12345)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_6^5.

3.5. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_4^3

Псевдофокус $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_4^3} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4. \tag{3.5.1}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_6$, точка F_4^3 описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_6$. Получается частичное отображение $f_4^3 \colon \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f_4{}^3(X) = F_4^3$.

Продифференцируя равенство (3.5.1) и применяя деривационные формулы получаем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_4^3} = d\,\overrightarrow{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\right)\vec{e}_4 - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}d\vec{e}_4 = \omega^i\vec{e}_i - \frac{d\Lambda_{43}^3}{(\Lambda_{143}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\omega_4^i\vec{e}_i =$$

$$= \omega^i\vec{e}_i - \frac{M_{43m}^3\omega^m}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{4m}^i\omega^m}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_i, \left(i, j, k, \ell, m = \overline{1,6}\right),$$

где $M_{43m}^3\omega^m = d\Lambda_{43m}^3 = \left(\Lambda_{43m}^3 + \Lambda_{4\ell}^3\Lambda_{3m}^\ell + \Lambda_{\ell 3}^3\Lambda_{4m}^\ell\right)\omega^m$.

Из последнего равенства имеем:

$$d\vec{F}_4^3 = \left[\vec{e}_1 + \frac{M_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{41}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{M_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{42}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+ \left[\vec{e}_3 + \frac{M_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{43}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{M_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{44}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+ \left[\vec{e}_5 + \frac{M_{435}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{45}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_i\right]\omega^5 + \left[\vec{e}_6 + \frac{M_{436}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{46}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_i\right]\omega^6.$$

Введем следующее обозначение:

$$\overrightarrow{m}_1 = \vec{e}_1 + \frac{M_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{41}^i}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_i;$$

$$\vec{m}_2 = \vec{e}_2 + \frac{M^3_{432}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^i_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{m}_3 = \vec{e}_3 + \frac{M^3_{433}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^i_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{m}_4 = \vec{e}_4 + \frac{M^3_{434}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^i_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{m}_5 = \vec{e}_5 + \frac{M^3_{435}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^i_{45}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{m}_6 = \vec{e}_6 + \frac{M^3_{436}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^i_{46}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_i.$$

Учитывая обозначения: $d\,\overrightarrow{F^3_4} = \omega^1\vec{m}_1 + \omega^2\vec{m}_2 + \omega^3\vec{m}_3 + \omega^4\vec{m}_4 + \omega^5\vec{m}_5$

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_6$ является циклической сетью Френе, векторы $\vec{m}_i$ имеют следующий вид:

$$\vec{m}_1 = \vec{e}_1 + \frac{M^3_{431}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^3_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^5_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{m}_2 = \vec{e}_2 + \frac{M^3_{432}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^3_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^5_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{m}_3 = \frac{M^3_{433}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^5_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_5; \qquad (3.5.2)$$

$$\vec{m}_4 = \left[1 + \frac{M^3_{434}}{\Lambda^3_{43}}\right]\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^5_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{m}_5 = -\frac{\Lambda^3_{45}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 + \frac{M^3_{435}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 + \vec{e}_5;$$

$$\vec{m}_6 = -\frac{\Lambda^3_{46}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3 + \frac{M^3_{436}}{(\Lambda^3_{43})^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda^5_{46}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_5 + \vec{e}_6.$$

В общем случае векторы $\vec{m}_i$ не являются линейно зависимыми.

К области $\Omega_4^3 \subset E_6$ присоеденим подвижной репер $\mathcal{R}' = (F_4^3, \vec{m}_i)$.

Теперь рассмотрим линии принадлежащие пятимерному распределению.

Касательный вектор образа $f_4^3(\alpha) = \bar{\alpha}$ линии $\alpha \subset \Delta_{(12345)}$ найдем в следующем виде:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1\vec{m}_1 + \alpha^2\vec{m}_2 + \alpha^3\vec{m}_3 + \alpha^4\vec{m}_4 + \alpha^5\vec{m}_5 \text{ или}$$

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + (\alpha^1 m_1^3 + \alpha^2 m_2^3 + \alpha^5 m_5^3)\vec{e}_3 + (\alpha^1 m_1^4 + \alpha^2 m_2^4 +$$

$$+\alpha^3 m_3^4 + \alpha^4 m_4^4 + \alpha^5 m_5^4)\vec{e}_4 + (\alpha^1 m_1^5 + \alpha^2 m_2^5 + \alpha^3 m_3^5 + \alpha^4 m_4^5 + \alpha^5)\vec{e}_5.$$

Отсюда получим, условие $\vec{\alpha},\ \vec{\bar{\alpha}},\ \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(12345)}$ всегда выполняется.

Следовательно, линия $\alpha \subset \Delta_{(12345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Касательный вектор образа $f_4^3(\beta) = \bar{\beta}$ линии $\beta \subset \Delta_{(13456)}$ найдем в следующем виде:

$$\vec{\bar{\beta}} = \beta^1\vec{m}_1 + \beta^3\vec{m}_3 + \beta^4\vec{m}_4 + \beta^5\vec{m}_5 + \beta^6\vec{m}_6 \text{ или}$$

$$\vec{\bar{\beta}} = \beta^1\vec{e}_1 + (\beta^1 m_1^3 + \beta^5 m_5^3 + \beta^6 m_6^3)\vec{e}_3 + (\beta^1 m_1^4 + \beta^3 m_3^4 + \beta^4 m_4^4 +$$

$$+\beta^5 m_5^4 + \beta^6 m_6^4)\vec{e}_4 + (\beta^1 m_1^5 + \beta^3 m_3^5 + \beta^4 m_4^5 + \beta^5 + \beta^6 m_6^5)\vec{e}_5 +$$

$$+\beta^6\vec{e}_6.$$

Отсюда получим, условие $\vec{\beta},\ \vec{\bar{\beta}},\ \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(13456)}$ всегда выполняется. Следовательно, линия $\beta \subset \Delta_{(13456)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Аналогично, можно показать, что линия $\delta \subset \Delta_{(13456)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Касательный вектор образа $f_4^3(s) = \bar{s}$ линии $s \subset \Delta_{(12356)}$ найдем в следующем виде: $\vec{\bar{s}} = s^1\vec{m}_1 + s^2\vec{m}_2 + s^3\vec{m}_3 + s^5\vec{m}_5 + s^6\vec{m}_6$ или

$\vec{\bar{s}} = s^1\vec{e}_1 + s^2\vec{e}_2 + (s^1m_1^3 + s^2m_2^3 + s^5m_5^3 + s^6m_6^3)\vec{e}_3 + (s^1m_1^4 + s^2m_2^4 + s^3m_3^4 + s^5m_5^4 + s^6m_6^4)\vec{e}_4 + (s^1m_1^5 + s^2m_2^5 + s^3m_3^5 + \beta^5 + s^6m_6^5)\vec{e}_5 + s^6\vec{e}_6.$

Выполняется условие $\vec{s}, \vec{\bar{s}}, \overrightarrow{XF_4^3} \notin \Delta_{(12356)}$, так как $\overrightarrow{XF_4^3} = -\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\overrightarrow{e_4} \notin \Delta_{(12356)}$.

Следовательно, линия $s \subset \Delta_{(12356)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Линия $\beta \subset \Delta_{(23456)}$ также является является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3. Аналогично, можно показать, что линия $\delta \subset \Delta_{(23456)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Касательный вектор образа $f_4^3(\gamma) = \bar{\gamma}$ линии $\gamma \subset \Delta_{(12346)}$ найдем в следующем виде: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{m}_1 + \gamma^2\vec{m}_2 + \gamma^3\vec{m}_3 + \gamma^4\vec{m}_4 + \gamma^6\vec{m}_6$ или

$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + (\gamma^1m_1^3 + \gamma^2m_2^3 + \gamma^6m_6^3)\vec{e}_3 + (\gamma^1m_1^4 + \gamma^2m_2^4 + \gamma^4m_4^4 + \gamma^6m_6^4)\vec{e}_4 + (\gamma^1m_1^5 + \gamma^2m_2^5 + \gamma^3m_3^5 + \gamma^4m_4^5 + \gamma^6m_6^5)\vec{e}_5 + \gamma^6\vec{e}_6.$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(12356)}$ получаем следующее:

$$\gamma^1m_1^5 + \gamma^2m_2^5 + \gamma^3m_3^5 + \gamma^4m_4^5 + \gamma^6m_6^5 = 0.$$

В силу формулы (4.5.2) получаем следующее:

$$\gamma^1\Lambda_{41}^5 + \gamma^2\Lambda_{42}^5 + \gamma^3\Lambda_{43}^5 + \gamma^4\Lambda_{44}^5 + \gamma^6\Lambda_{46}^5 = 0, \qquad (3.5.3)$$

где Λ_{41}^5 – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{42}^5 – третья кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{43}^5 – вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{44}^5 –

первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{46}^5 – пятая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.5.3), то линия $\gamma \subset \Delta_{(12346)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Равенство (3.5.3) имеет следующий геометрический смысл: касательный вектор $\vec{\gamma}$ ортогонален вектору

$$\vec{U} = \Lambda_{41}^5 \vec{e}_1 + \Lambda_{42}^5 \vec{e}_2 + \Lambda_{43}^5 \vec{e}_3 + \Lambda_{44}^5 \vec{e}_4 + \Lambda_{46}^5 \vec{e}_6,$$

т.е. $\vec{\gamma} \cdot \vec{U} = 0$.

Касательный вектор образа $f_4^3(v) = \bar{v}$ линии $v \subset \Delta_{(12456)}$ найдем в следующем виде: $\vec{\bar{v}} = v^1 \vec{m}_1 + v^2 \vec{m}_2 + v^4 \vec{m}_4 + v^5 \vec{m}_5 + v^6 \vec{m}_6$ же

$\vec{\bar{v}} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + (v^1 m_1^3 + v^2 m_2^3 + v^5 m_5^3 + v^6 m_6^3) \vec{e}_3 + (v^1 m_1^4 +$
$+ v^2 m_2^4 + v^4 m_4^4 + v^5 m_5^4 + v^6 m_6^4) \vec{e}_4 + (v^1 m_1^5 + v^2 m_2^5 + v^4 m_4^5 + v^5 +$
$+ v^6 m_6^5) \vec{e}_5 + v^6 \vec{e}_6$.

Из условия $\vec{v}, \vec{\bar{v}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(12456)}$ имеем

$$v^1 m_1^3 + v^2 m_2^3 + v^5 m_5^3 + v^6 m_6^3 = 0.$$

Учитывая формул (3.5.2) имеем следующее:

$$v^1 \Lambda_{41}^3 + v^2 \Lambda_{42}^3 + v^5 \Lambda_{45}^3 + v^6 \Lambda_{46}^3 = 0, \qquad (3.5.4)$$

где Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{42}^3 – третья кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{45}^3 − пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$ Λ_{46}^5 – третья кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.5.4), то линия $v \subset \Delta_{(12456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Равенство (3.5.4) имеет следующий геометрический смысл: касательный вектор $\vec{v}$ проекция опущенная на пространству $(X,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_5,\ \vec{e}_6)$ ортогонален вектору $\vec{V} = \Lambda_{41}^3\vec{e}_1 + \Lambda_{42}^3\vec{e}_2 + \Lambda_{45}^3\vec{e}_5 + \Lambda_{46}^3\vec{e}_6$.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема:

Теорема 3.5.1. 1) Линии $\Delta_{(12345)}$, $\Delta_{(13456)}$, и $\Delta_{(23456)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3;

2) Линия $s \subset \Delta_{(12356)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3;

3) Линия $\gamma \subset \Delta_{(12346)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\gamma^1\Lambda_{41}^5 + \gamma^2\Lambda_{42}^5 + \gamma^3\Lambda_{43}^5 + \gamma^4\Lambda_{44}^5 + \gamma^6\Lambda_{46}^5 = 0, \qquad (3.5.3)$$

где Λ_{41}^5 – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{42}^5 – третья кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{43}^5 – вторая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{44}^5 – первая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{46}^5 – пятая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

4) Линия $v \subset \Delta_{(12456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$v^1\Lambda_{41}^3 + v^2\Lambda_{42}^3 + v^5\Lambda_{45}^3 + v^6\Lambda_{46}^3 = 0, \qquad (3.5.4)$$

где Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{42}^3 – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{45}^3 – пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{46}^5 – четвертая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$;

Теперь рассмотрим линии принадлежащие четырехмерному распределению.

Касательный вектор образа $f_4^3(\ell) = \bar{\ell}$ линии $\ell \subset \Delta_{(1234)}$ найдем в следующем виде: $\vec{\bar{\ell}} = \ell^1\vec{m}_1 + \ell^2\vec{m}_2 + \ell^3\vec{m}_3 + \ell^4\vec{m}_4$ или в силу формулы (3.5.2) имеем:

$$\vec{\bar{\ell}} = \ell^1\vec{e}_1 + \ell^2\vec{e}_2 + \left(\ell^1 m_1^3 + \ell^2 m_2^3\right)\vec{e}_3 + \left(\ell^1 m_1^4 + \ell^2 m_2^4 + \ell^3 m_3^4 + \right.$$
$$\left. + \ell^4 m_4^4\right)\vec{e}_4 + \left(\ell^1 m_1^5 + \ell^2 m_2^5 + \ell^3 m_3^5 + \ell^4 m_4^5\right)\vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{\ell}, \vec{\bar{\ell}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(1234)}$ имеем:

$$\ell^1 m_1^5 + \ell^2 m_2^5 + \ell^3 m_3^5 + \ell^4 m_4^5 = 0$$

или

$$\ell^1 \Lambda_{41}^5 + \ell^2 \Lambda_{42}^5 + \ell^3 \Lambda_{43}^3 + \ell^4 \Lambda_{44}^5 = 0, \qquad (3.5.5)$$

где Λ_{41}^5 – $\tilde{\Sigma}_6$ – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{42}^5 –вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{43}^5 –пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{44}^5 –четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

Обратно, если выполняется условие (3.5.5), то линия $\ell \subset \Delta_{(1234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Касательный вектор образа $f_4^3(\kappa) = \bar{\kappa}$ линии $\kappa \subset \Delta_{(2345)}$ найдем в следующем виде: $\vec{\bar{\kappa}} = \kappa^2\overrightarrow{m}_2 + \kappa^3\overrightarrow{m}_3 + \kappa^4\overrightarrow{m}_4 + \kappa^5\overrightarrow{m}_5$ или

$$\vec{\bar{\kappa}} = \kappa^2\vec{e}_2 + (\kappa^2 m_2^3 + \kappa^5 m_5^3)\vec{e}_3 + (\kappa^2 m_2^4 + \kappa^3 m_3^4 + \kappa^4 m_4^4 + \kappa^5 m_5^4)\vec{e}_4$$
$$+ (\kappa^2 m_2^5 + \kappa^3 m_3^5 + \kappa^4 m_4^5 + \kappa^5)\vec{e}_5.$$

Отсюда получаем выполнение условия $\bar{\kappa}, \vec{\bar{\kappa}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(2345)}$. Следовательно, линия $\kappa \subset \Delta_{(2345)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Аналогично, можно показать, что линии $p \subset \Delta_{(1345)}$, $t \subset \Delta_{(3456)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3.

Теперь рассмотрим линию $s \subset \Delta_{(2356)}$. Касательный вектор линии $\bar{s} = f_4^3(s)$ найдем в следующем виде:

$\vec{\bar{s}} = s^2\overrightarrow{m}_2 + s^3\overrightarrow{m}_3 + s^5\overrightarrow{m}_5 + s^6\overrightarrow{m}_6$ или

$$\vec{\bar{s}} = s^2\vec{e}_2 + (s^2 m_2^3 + s^3 m_5^3 + s^6 m_6^3)\vec{e}_3 +$$
$$+(s^2 m_2^4 + s^3 m_3^4 + s^5 m_5^4 + s^6 m_6^4)\vec{e}_4 +$$
$$+(s^2 m_2^5 + s^3 m_3^5 + s^5 + s^6 m_6^5)\vec{e}_5 + s^6\vec{e}_6.$$

Имеет место условие $\overrightarrow{XF_4^3}, \vec{s}, \vec{\bar{s}} \notin \Delta_{(2356)}$ так как $\overrightarrow{XF}_4^3 = -\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4 \notin \Delta_{(2356)}$.

Следовательно, линия $s \subset \Delta_{(2356)}$ не является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Аналогично, можно показать, что линия $u \subset \Delta_{(1356)}$ всегда является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

Касательный вектор образа $f_4^3(\vartheta) = \bar{\vartheta}$ линии $\vartheta \subset \Delta_{(1456)}$ найдем в следующем виде: $\vec{\bar{\vartheta}} = \vartheta^1\vec{m}_1 + \vartheta^4\vec{m}_4 + \vartheta^5\vec{m}_5 + \vartheta^6\vec{m}_6$ или

$$\vec{\bar{\vartheta}} = \vartheta^1\vec{e}_1 + (\vartheta^1 m_1^3 + \vartheta^5 m_5^3 + \vartheta^6 m_6^3)\vec{e}_3 +$$
$$+(\vartheta^1 m_1^4 + \vartheta^4 m_4^4 + \vartheta^5 m_5^4 + \vartheta^6 m_6^4)\vec{e}_4 +$$
$$+(\vartheta^1 m_1^5 + \vartheta^4 m_4^5 + \vartheta^5 + \vartheta^6 m_6^5)\vec{e}_5 + \vartheta^6\vec{e}_6.$$

Из условия $\vec{\vartheta}, \vec{\bar{\vartheta}}, \overrightarrow{XF_4^3} \in \Delta_{(1456)}$ имеем $\vartheta^1 m_1^3 + \vartheta^5 m_5^3 + \vartheta^6 m_6^3 = 0$.
В силу формулы (3.5.2) имеем следующее:

$$\vartheta^1\Lambda_{41}^3 + \vartheta^5\Lambda_{45}^3 + \vartheta^6\Lambda_{46}^3 = 0 \qquad (3.5.6)$$

где Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{45}^3 – пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{46}^3 – пятая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$

Обратно, если выполняется условие (3.5.6), то линия $\vartheta \subset \Delta_{(1456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3.

На основе вышеизложенного доказана следующая теорема:

Теорема 3.5.2. 1) Линии $\kappa \subset \Delta_{(2345)}$, $t \subset \Delta_{(3456)}$, $p \subset \Delta_{(1345)}$ всегда являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3.

2) Линия $\ell \subset \Delta_{(1234)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\ell^1 \Lambda_{41}^5 + \ell^2 \Lambda_{42}^5 + \ell^3 \Lambda_{43}^3 + \ell^4 \Lambda_{44}^5 = 0, \tag{3.5.5}$$

где Λ_{41}^5 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{42}^5 – вторая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{43}^5 – пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{43}^5 – четвертая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

3) Линия $\vartheta \subset \Delta_{(1456)}$ является квазидвойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

$$\vartheta^1 \Lambda_{41}^3 + \vartheta^5 \Lambda_{45}^3 + \vartheta^6 \Lambda_{46}^3 = 0, \tag{3.5.6}$$

где Λ_{41}^3 – третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{45}^3 – пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_6$; Λ_{46}^3 – пятая кривизна линии ω^6 сети $\tilde{\Sigma}_6$.

4) Линии $s \subset \Delta_{(2356)}, u \subset \Delta_{(1356)}$ не являются квазидвойными линиями частичного отображения f_4^3.

3.6. Необходимое и достаточное условия невырожденности частичных отображений F_s^t $(s = 1,2,3,4,5,6; t = 1,3,4,5,6)$

Матрицу перехода из одного базиса в другой базис для частичного отображения $f_3^2\colon \Omega \to \Omega_3^2$ напишем в следующем виде (см. 3.1, формула (3.1.2)):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_1^2 & c_1^3 & 0 & c_1^5 & 0 \\ 0 & 0 & c_2^3 & c_2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^3 & c_3^4 & 0 & 0 \\ 0 & c_4^2 & c_4^3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_5^2 & c_5^3 & c_5^4 & 1 & 0 \\ 0 & c_6^2 & c_6^3 & c_6^4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После элементарных вычислений имеем следующее:

$$det\, C = c_4^2 \begin{vmatrix} c_2^3 & c_2^4 \\ c_3^3 & c_3^4 \end{vmatrix}.$$

Пусть $det\, C \neq 0$, тогда получим следующее:

$$1)\ c_4^2 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{34}^2 \neq 0,$$

$\Lambda_{34}^2 -$ четвертая кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_6$ отлична от нуля. Следовательно,

$$2) \begin{vmatrix} c_2^3 & c_2^4 \\ c_3^3 & c_3^4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{c}_2 \nparallel \vec{c}_3, \qquad (3.6.1)$$

$\vec{c}_2 = f_3^2(\vec{e}_2), \vec{c}_3 = f_3^2(\vec{e}_3)$.

Отсюда получаем, что отображение f_3^2 будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.6.1).

Матрицу перехода из одного базиса в другой базис для частичного отображения $f_2^1\colon \Omega \to \Omega_2^1$ напишем в следующем виде (см 3.2,формула (3.2.2)):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & a_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4^2 & a_4^3 & 1 & 0 & 0 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & 0 & 1 & 0 \\ a_6^1 & a_6^2 & a_6^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя свойство “определитель можно разложить по элементам одной строки или одного столбца” получаем следующее:

$$det\,\mathrm{A} = \mathrm{a}_3^1 \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1^2 & \mathrm{a}_1^3 \\ \mathrm{a}_2^2 & \mathrm{a}_2^3 \end{vmatrix}.$$

Из условия $det\,\mathrm{A} \neq 0$ имеем следующие случая:

$$1)\ a_3^1 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{23}^1 \neq 0,$$

Λ_{23}^1 $-$ четвертая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_6$ всегда отлична от нуля. Таким образом,

$$2) \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1^2 & \mathrm{a}_1^3 \\ \mathrm{a}_2^2 & \mathrm{a}_2^3 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Leftrightarrow \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2, \tag{3.6.2}$$

$\vec{a}_1 = f_2^1(\vec{e}_1), \vec{a}_2 = f_2^1(\vec{e}_2)$.

Таким образом, частичное отображение f_2^1 будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.6.2).

Для отображения $f_4^3 \colon \Omega \to \Omega_4^3$ матрица перехода из одного базиса в другой имеет следующий вид (см. 3.6, формула (3.2.2)):

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m_1^3 & m_1^4 & m_1^5 & 0 \\ 0 & 1 & m_2^3 & m_2^4 & m_2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3^4 & m_3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4^4 & m_4^5 & 0 \\ 0 & 0 & m_5^3 & m_5^4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_6^3 & m_6^4 & m_6^5 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных вычислений получим следующее:

$$det\,\mathrm{M} = m_5^3 \begin{vmatrix} m_3^4 & m_3^5 \\ m_4^4 & m_4^5 \end{vmatrix}.$$

Из условия $det\,\mathrm{M} \neq 0$ имеем следующие случая:

$$1)\ m_5^3 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{45}^3 \neq 0,$$

где $\Lambda_{45}^3 -$ пятая кривизна линии ω^5 сети $\tilde{\Sigma}_5$ всегда отлична от нуля. Следовательно,

$$2)\ \begin{vmatrix} m_3^4 & m_3^5 \\ m_4^4 & m_4^5 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Leftrightarrow \vec{m}_3 \nparallel \vec{m}_4, \tag{3.6.3}$$

$\vec{m}_3 = f_4^3(\vec{e}_3), \vec{m}_4 = f_4^3(\vec{e}_4)$.

Таким образом, частичное отображение f_4^3 будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.6.3).

Для отображения $f_5^4\colon \Omega \to \Omega_5^4$ матрица перехода из одного базиса в другой имеет следующий вид (см. 3.5 формула (3.5.2)):

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1^4 & d_1^5 & 0 \\ d_2^1 & 1 & 0 & d_2^4 & d_2^5 & 0 \\ d_3^1 & 0 & 1 & d_3^4 & d_3^5 & 0 \\ d_4^1 & 0 & 0 & 0 & d_4^5 & 0 \\ d_5^1 & 0 & 0 & 0 & d_5^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_6^5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы имеет вид:

$$det\,D = -d_1^4 \begin{vmatrix} d_4^1 & d_4^5 \\ d_5^1 & d_5^5 \end{vmatrix}.$$

Из условия $det\,D \neq 0$ имеем следующие два случая:

$$1)\ d_1^4 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{51}^4 \neq 0,$$

Λ_{51}^4 – четвертая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$ всегда отлична от нуля.

Следовательно,

$$2)\begin{vmatrix} d_4^1 & d_4^5 \\ d_5^1 & d_5^5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{d}_5 \nparallel \vec{d}_4, \qquad (3.6.4)$$

$\vec{d}_5 = f_5^4(\vec{e}_5), \vec{d}_4 = f_5^4(\vec{e}_4)$.

Таким образом, частичное отображение f_5^4 будет не вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.6.4).

Для отображения $f_6^5 \colon \Omega \to \Omega_6^5$ матрица перехода из одного базиса в другой имеет следующий вид (см. 3.4 формула (3.4.2)):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & p_1^5 & p_1^6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_2^5 & p_2^6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p_3^5 & p_3^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_4^5 & p_4^6 \\ p_5^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_5^6 \\ p_6^1 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_6^6 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы имеет вид:

$$det\, P = -p_1^5 \begin{vmatrix} p_5^1 & p_5^6 \\ p_6^1 & p_6^6 \end{vmatrix}.$$

Из условия $det\, P \neq 0$ имеем следующие:

$$1)\ p_1^5 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{61}^5 \neq 0,$$

Λ_{61}^5 – пятая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_6$ всегда отлична от нуля. Следовательно,

$$2)\begin{vmatrix} p_5^1 & p_5^6 \\ p_6^1 & p_6^6 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{p}_5 \nparallel \vec{p}_6, \qquad (3.6.5)$$

$\vec{p}_5 = f_6^5(\vec{e}_5), \vec{p}_6 = f_6^5(\vec{e}_6)$.

Обратно, если выполняется условие (3.6.5), то частичное отображение f_6^5 будет не вырожденной.

Матрицу перехода из одного базиса в другой базис для частичного отображения $f_1^6\colon \Omega \to \Omega_1^6$ напишем в следующем виде (см. 3.3, формула(3.3.2)):

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_2^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & q_2^6 \\ q_3^1 & q_3^2 & 1 & 1 & 0 & q_3^6 \\ q_4^1 & q_4^2 & 0 & 1 & 0 & q_4^6 \\ q_5^1 & q_5^2 & 0 & 0 & 1 & q_5^6 \\ q_6^1 & q_6^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$\det \mathrm{Q} = -\mathrm{q}_2^6 \begin{vmatrix} \mathrm{q}_1^1 & \mathrm{q}_1^2 \\ \mathrm{q}_6^1 & \mathrm{q}_6^6 \end{vmatrix}.$$

Из условия $\det \mathrm{Q} \neq 0$ имеем следующие два случая:

$$1)\ q_2^6 \neq 0 \Leftrightarrow \Lambda_{12}^6 \neq 0,$$

Λ_{12}^6 – пятая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_6$ всегда отлична от нуля. Следовательно,

$$2)\begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_6^1 & q_6^6 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \nparallel \vec{q}_6, \qquad (3.6.6)$$

$\vec{q}_1 = f_1^6(\vec{e}_1), \vec{q}_6 = f_1^6(\vec{e}_6)$.

Обратно, если выполняется условие (3.6.6), то частичное отображение f_1^6 будет не вырожденной.

На основе вышеизложенного доказана теорема:

Теорема 3.6.1. Частичное отображение $f_i^j\colon \Omega \to \Omega_i^j$ является невырожденным тогда и только тогда, когда векторы $f_i^j(\vec{e}_i)$ и $f_i^j(\vec{e}_j)$ $(i, j, k - \overline{1{,}6},\ i, j, k$ – разные) неколлинеарны.

Глава 4. Существование квазидвойных линий частичных отображений евклидова пространства E_n, порождаемой заданной циклической сетью френе

4.1. О квазидвойных линиях частичного отображения порождаемого псевдофокусом $F_1^n \in \left(X, \overrightarrow{e_1}\right)$

В области $\Omega \subset E_n$ заданы семейства гладких линий таких, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна и только одна линия ω^1.

Подвижной ортонормированный репер $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_i)(i, j, k = \overline{1, n})$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [99] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, d\,\overrightarrow{e_i} = \omega_i^k \vec{e}_k, \tag{4.1.1}$$

где формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k,\ \ \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{4.1.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\overrightarrow{e_i}$ репера $\mathcal{R}$ образуют сеть Френе Σ_n для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку этот репер построен на касательных к линиям сети Σ_n, формы ω_i^k становятся главными [32], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{4.1.3}$$

В силу последнего равенства формулы (4.1.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kij}^i.$$

Дифференцируя внешним образом равенство (5.1.3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (4.1.2), отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (4.1.3), последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell = 0$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \wedge \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [106] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m. \tag{4.1.4}$$

Формулы Френе [99] для линий ω^1 заданного семейства гладких линий имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^{\rightleftarrows 2}\vec{e}_2,\\
&d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^{\rightleftarrows 1}\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^{\rightleftarrows 3}\vec{e}_3,\\
&d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^{\rightleftarrows 2}\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^{\rightleftarrows 4}\vec{e}_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&d_1\vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,1}^{n-1}\vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,1}^{n}\vec{e},\\
&d_1\vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,1}^{n}\vec{e}_{n-1},
\end{aligned}$$

где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1, $K_i^{(1)} = \Lambda_{i1}^{i+1}$ – i-я кривизна линии ω^1.

$$\Lambda_{i1}^j = 0 (i < j,\ i = 1,2,\ldots,n-2;\ j = 3,4,\ldots,i+1,\ldots,n). \tag{4.1.5}$$

$$\Lambda_{i1}^{i+1} \neq 0 (i < j, i = 1,2,\ldots,n-2). \tag{4.1.6}$$

(где символ $\wedge$ означает значения которые не может принимать индекс j) псевдофокус $F_i^j (i \neq j)$ на касательной линии ω^i определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_j^i}\vec{e}_i. \quad (4.1.7)$$

В каждом касательной $(X, \vec{e}_i)$ существует по *n-1* псевдофокусов. Пусть сеть Σ_n будет циклической сетью Френе.

Определение: Сеть $\Sigma_n \subset \Omega \subset E_n$ называется циклической сетью Френе, если реперы $\mathcal{R}_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n)$, $\mathcal{R}_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{n-1}, \quad \vec{e}_n, \vec{e}_1)$, …, $\mathcal{R}_n = (X, \vec{e}_n, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{n-1})$ являются, соответственно, реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3,..., ω^n одновременно. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_n$.

Псевдофокус $F_1^n \in \left(X, \overrightarrow{e_1}\right)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_1^n} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{1n}^n}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{nn}^1}\vec{e}_1. \quad (4.1.8)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$, псевдофокус F_1^n описывает свою область Ω_1^n. В результате которого получается частичное отображение $f_1^n : \Omega \to \Omega_1^n$ такое, что $f_1^n(X) = F_1^n$.

Дифференцируя равенство (4.1.8) получим следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_1^n} = d\vec{X} - \frac{d\Lambda_{1n}^n}{(\Lambda_{1n}^n)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{1n}^n}d\vec{e}_1.$$

В силу формул (4.1.1), (4.1.2), (4.1.4) имеем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_1^n} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{1ni}^n\omega^i}{(\Lambda_{1n}^n)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{1n}^n}\Lambda_{1i}^k\omega^i\vec{e}_k$$

же

$$d\,\overrightarrow{F_1^n} = \left\{\vec{e}_i + \frac{B_{1ni}^n}{(\Lambda_{1n}^n)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1i}^k}{\Lambda_{1n}^n}\vec{e}_k\right\}\omega^i.$$

Введем следующее обозначение:

$$\vec{c}_i = \frac{B_{1ni}^n}{(\Lambda_{1n}^n)^2}\vec{e}_1 + \overrightarrow{e_i} - \frac{\Lambda_{1i}^k}{\Lambda_{1n}^n}\vec{e}_k. \tag{4.1.9}$$

В области $\Omega_1^n \in E_n$ имеем репер $\mathcal{R}' = (F_1^n, \vec{c}_i)$.

Рассмотрим линию ℓ принадлежащую распределению $\Delta_p = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_p)$. Её касательный вектор $\vec{\bar{\ell}} = \ell^a\vec{e}_a (a, b, c = 1,2, \dots, p, p < n)$.

Касательный вектор линии $\bar{\ell} = f_1^n(\ell)$ найдем в следующем виде:

$\vec{\bar{\ell}} = \ell^a\vec{c}_a$.

Применяя формул (4.1.10) имеем:

$$\vec{\bar{\ell}} = \ell^a\left(\frac{B_{1na}^n}{(\Lambda_{1n}^n)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_a - \frac{\Lambda_{1a}^k}{\Lambda_{1n}^n}\vec{e}_k\right).$$

Из условия $\vec{\ell}, \vec{\bar{\ell}}, \overrightarrow{XF_1^n} \in \Delta_p$ имеем

$$\ell^a\Lambda_{1a}^{\tilde{k}} = 0\big(\tilde{\imath}, \tilde{\jmath}, \tilde{k} = a+1, \dots, n\big). \tag{4.1.10}$$

Обратно, если выполняется условие (4.1.10), то линия $\ell \subset \Delta_p$ является квазидвойной линией частичного отображения f_1^n.

Доказана следующая теорема

Теореме 4.1.1. Для того чтобы линия $\ell \subset \Delta_p$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_1^n необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\ell^a\Lambda_{1a}^{\tilde{k}} = 0\big(\tilde{\imath}, \tilde{\jmath}, \tilde{k} = a+1, \dots, n\big). \tag{4.1.10}$$

Геометрический смысл равенства (4.1.10) имеет вид:

$$\vec{\ell} \perp \vec{\theta}_{\tilde{k}}, \text{ где } \vec{\theta}_{\tilde{k}} = \textstyle\sum_a \Lambda_{1a}^{\tilde{k}}\,\vec{e}_a,\ \Lambda_{1a}^{\tilde{k}} = \vec{e}_{\tilde{k}} d_a \vec{e}_1.$$

4.2. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_i^n

Псевдофокус F_i^n определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_i^n} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{in}^n}\vec{e}_i. \qquad (4.2.1)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$, псевдофокус F_i^n описывает свою область Ω_i^n. В результате которого получается частичное отображение $f_i^n\colon \Omega \to \Omega_i^n$ такое, что $f_i^n(X) = F_i^n$.

Дифференцируя равенство (4.2.1), получим следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_i^n} = d\vec{X} - \frac{d\Lambda_{in}^n}{(\Lambda_{in}^n)^2}\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{in}^n}d\vec{e}_i.$$

В силу равенств (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) имеем следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_i^n} = \omega^i\vec{e}_j + \frac{B_{inj}^n\omega^j}{(\Lambda_{1n}^n)^2}\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{in}^n}\Lambda_{ij}^k\omega^j\vec{e}_k$$

или

$$d\,\overrightarrow{F_i^n} = \left(\vec{e}_j + \frac{B_{inj}^n}{(\Lambda_{in}^n)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ij}^k}{\Lambda_{in}^n}\vec{e}_k\right)\omega^j.$$

Введем следующее обозначение:

$$\vec{c}_j = \frac{B_{inj}^n}{(\Lambda_{in}^n)^2}\vec{e}_i + \vec{e}_j - \frac{\Lambda_{ij}^k}{\Lambda_{in}^n}\vec{e}_k, \qquad (4.2.2)$$

в общем случае векторы $\overrightarrow{c_j}$ являются линейно не зависимыми. Последнее равенство имеет вид: $d\,\overrightarrow{F_i^n} = \omega^j\vec{c}_j$. Таким образом, в области $\Omega_i^n \in E_n$ имеем репер $\mathcal{R}' = \left(F_j^n, \vec{c}_j\right)$.

Рассмотрим линию $d \subset \Delta_p = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_p)$ $(p < n)$. Касательный вектор линии $f_i^n(d) = \overline{d}$ определяется следующим образом:

$$\vec{\bar{d}} = d^a \vec{c}_a \left(a, b, c = \overline{1, p}\right).$$

Учитывая формул (4.2.2) имеем

$$\vec{\bar{d}} = d^a \left(\frac{B_{ina}^n}{(\Lambda_{in}^n)^2} \vec{e}_i + \vec{e}_a - \frac{\Lambda_{ia}^k}{\Lambda_{in}^n} \vec{e}_k \right).$$

Из условия $\bar{d}, \vec{\bar{d}}, \overrightarrow{XF_i^n} \in \Delta_p$ имеем следующее:

$$1)\ d^a \Lambda_{ia}^{\tilde{k}} = 0 \ \left(\tilde{\imath}, \tilde{\jmath}, \tilde{k} = a + 1, \dots, n\right), \qquad (4.2.3)$$

при $i \leq p$,

$$2)\ d^a \Lambda_{ia}^{\tilde{k}} = 0 \wedge d^a B_{ina}^n = 0, \qquad (4.2.4)$$

при $i > p$.

Обратно, если условие (4.2.3) выполняется при $i \leq p$, то линия $d \subset \Delta_p$ является квазидвойной линией частичного отображения f_i^n; если при $i > p$ выполняется условие (4.2.4), то линия $d \subset \Delta_p$ является квазидвойной линией частичного отображения f_i^n. Равенства (4.2.3), (4.2.4) имеют следующий геометрический смысл:

Векторы $\vec{d} = d^a \vec{e}_a$ и $\overrightarrow{\theta_{\tilde{k}}} = \sum_a \Lambda_{ia}^{\tilde{k}} \vec{e}_a$ отрогональны, где $\Lambda_{ia}^{\tilde{k}} = \overrightarrow{d_{\tilde{k}}}\, d_a \vec{e}_i$.

(n-p) векторы $\overrightarrow{\theta_{\tilde{k}}}$ определяют *(n-p)*-мерное распределение $\Delta^{\perp}{}_{(n-p)} = (X, \vec{e}_{a+1}, \dots, \vec{e}_n)$ и это распределение является ортогонально-дополнительным распределением для Δ_p: $\Delta^{\perp}{}_{(n-p)} \perp \Delta_p$.

Таким образом, касательный вектор линии $d \subset \Delta_p$ имеет вид: $\vec{d} \perp \Delta^{\perp}{}_{(n-p)}$.

Равенство $d^a B_{ina}^n = 0$ определяет, что векторы $\vec{d} = d^a \vec{e}_a$ и $\vec{B}_i = \sum_{a=1}^{p} B_{ina}^n \vec{e}_a$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ ортогональны. Таким образом, имеем $\vec{B}_i \in \Delta^{\perp}{}_{n-p}$.

Доказана следующая теорема:

Теореме 4.2.1. Для того чтобы линия $d \subset \Delta_p$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_i^n необходимо и достаточно выполнения условий:

1) при $i \leq p$

$$d^a \Lambda_{ia}^{\tilde{k}} = 0\left(\tilde{\imath}, \tilde{\jmath}, \tilde{k} = a+1, \dots, n\right), \tag{4.2.3}$$

2) при $i > p$

$$d^a \Lambda_{ia}^{\tilde{k}} = 0 \wedge d^a B_{ina}^n = 0. \tag{4.2.4}$$

4.3. Существование квазидвойных линий частичного отображения порождаемого псевдофокусом F_i^j

Псевдофокус $F_i^j \in (X, \vec{e}_i)$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i. \tag{4.3.1}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$, псевдофокус F_i^j описывает свою область Ω_i^j. В результате которого получается частичное отображение $f_i^j: \Omega \to \Omega_i^j$ такое, что $f_i^j(X) = F_i^j$.

Дифференцируя равенство (4.3.1) получим следующее:

$$d\,\overrightarrow{F_i^j} = d\vec{X} - \frac{d\Lambda_{ij}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}d\vec{e}_i.$$

Применяя формул (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3) имеем,

$$d\,\overrightarrow{F_i^j} = \omega^k\vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j\omega^k}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{im}^k\omega^m}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_k.$$

Суммируя индекс m заменяем на k, а индекс k – на ℓ последнее равенство запишем в следующем виде:

$$d\,\overrightarrow{F_i^j} = \left(\vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^\ell}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i\right)\omega^k.$$

Введем следующее обозначение:

$$\vec{a}_k = \vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2}\vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^\ell}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_\ell. \tag{4.3.2}$$

В общем случае векторы $\vec{a}_i$ являются линейно независимыми.

Последнее равенство имеет вид: $d\overrightarrow{F_i^j} = \omega^k \vec{a}_k$. Таким образом, в области Ω_i^j получаем подвижной репер $\mathcal{R}' = \left(F_j^j, \vec{a}_k\right)$.

Рассмотрим линию m принадлежащую распределению $\Delta_p = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_p\right)$ $(p < n)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\bar{m}} = m^a \vec{e}_a$ $\left(a, b, c = \overline{1, p}\right)$. А касательный вектор линии $f_i^j(m) = \bar{m}$ имеет следующий вид:

$$\bar{\bar{m}} = m^a \left(\vec{e}_k + \frac{B_{ijk}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2} \vec{e}_i - \frac{\Lambda_{ik}^\ell}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i \right)$$

или

$$\vec{\bar{\bar{m}}} = m^a \vec{e}_a + \frac{m^a B_{ija}^j}{\left(\Lambda_{ij}^j\right)^2} \vec{e}_i - \frac{m^a \Lambda_{ia}^\ell}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_\ell.$$

Из условия $\vec{m}, \vec{\bar{m}}, \overrightarrow{XF_i^j} \in \Delta_p$ имеем:

$$m^a \Lambda_{ia}^{\tilde{k}} = 0, \tag{4.3.3}$$

при $i \leq p$,

$$m^a \Lambda_{ia}^{\tilde{k}} = 0, B_{ija}^j m^a = 0, \tag{4.3.4}$$

при $i > p$.

Обратно, если при $i \leq p$ выполняется условие (4.3.3), также при $i > p$ выполняется условие (4.3.4) одновременно, то линия $m \subset \Delta_p$ вляется квазидвойной линией частичного отображения f_i^j.

Доказана следующая теорема

Теореме 4.3.1. Для того чтобы линия $m \subset \Delta_p$ являлась квазидвойной линией частичного отображения f_i^j необходимо и достаточно выполнения условий:

1) при $i \leq p$

$$m^a \Lambda_{ia}^{\tilde{k}} = 0, \tag{4.3.3}$$

2) при $i > p$

$$B_{ija}^{j} m^a = 0. \tag{4.3.4}$$

Геометрический смысл равенств (4.3.3) и (4.3.4) выражается как геометрический смысл равенств (4.2.3), (4.2.4).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Абдуллаева, Ч. Х.** О двойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Н. Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – Москва, 2015.– № 10-1. – С. 20-26. https://elibrary.ru/item.asp?id=24318951

2. **Абдуллаева, Ч. Х.** О квазидвойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [текст]/ Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Н. Н. Курбанбаева // Актуальные процессы формирования науки в новых условиях, сборник статей международной научно-практической конференции. – Москва, 2016. – С. 7-13. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=25617403

3. **Абдуллаева, Ч. Х.** О свойствах частичного отображения евклидова пространства E_5 [текст]/ Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева // American Scientific Journal. – Нью Йорк, 2016. – № 5. – С. 44-48. https://elibrary.ru/item.asp?id=29038009

4. **Абдуллаева, Ч. Х.** Об одном вырожденном частичном отображении пространстваE_5 [текст]/ Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева // American Scientific Journal. – Нью Йорк, 2016. – № 5. – С. 49-53. https://elibrary.ru/item.asp?id=29038010

5. **Abdullaeva, Ch. H.** The geometry of the degenerate partial mapping of euclidean space E_5 [text]/ Ch. H. Abdullaeva // Modern Science. – Москва, 2016. № 8. С. 5-10. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=26619367

6. **Абдуллаева, Ч. Х.** Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии одного частичного отображения пространства E_4 [текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Н. Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – Уфа, 2016. – № 4-4. С. – 8-14. https://elibrary.ru/item.asp?id=25809569

7. **Абдуллаева, Ч. Х.** Об одной сети двойных линий в пространстве E_5 [текст]/ Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева // Евразийский союз ученых. – Москва, 2016. – № 28-2. – С. 73-76. https://elibrary.ru/item.asp?id=28099079

8. **Абдуллаева, Ч. Х.** Необходимое и достаточное условия вырожденности одного частичного отображения пространства E_5 [текст]/ Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева//IN SITU. – Москва, 2016. – №6. – С. 5-9. https://elibrary.ru/item.asp?id=26282748

9. **Абдуллаева, Ч. Х.** О двойных линиях пары $(f_1^5, \Delta_{(1t)})$ евклидовом пространстве E_5 [текст]/ Ч. Х. Абдуллаева // In Situ. – Москва, 2016. – № 8. – С. 5-10. https://elibrary.ru/item.asp?id=27185370

10. **Абдуллаева, Ч. Х.** Об одной сети двойных линий частичного отображения пространства E_5 [текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева // Знание. – Москва, 2016. – № 7-1 (36). – С. 11-15. https://elibrary.ru/item.asp?id=26556221

11. **Абдуллаева, Ч. Х.** Двойные линии пары $\left(f_3^2, \Delta_{(3i)}\right)$ в евклидовом пространстве E_5 [Текст]/ Ч. Х. Абдуллаева // Современные концепции развития науки, Международная научно-практическая конференция НИЦ «АЭТЕРНА». – Казань, 2016. – С. 6-11.

12. **Абдуллаева, Ч. Х.** О двойных линиях частичного отображения f_5^4 в евклидовом пространстве E_5 [Текст]/ Ч. Х. Абдуллаева // Информация как двигатель научного прогресса: сборник международной научно-практической конференции. – Уфа: МЦИИ «ОМЕГА САЙНС», 2016. – С. 3-7.

13. **Абдуллаева Ч. Х.** К геометрии двойных линий частичного отображения пространства E_5 [Текст] / Ч. Х. Абдуллаева // Актуальные проблемы в современной науке и пути их решения. XXVI международная научно–практическая конференция. Евразийских Союз Ученых. – Москва, 2016. – Ч.1, № 8(29). – С. 85-89.

14. **Абдуллаева, Ч. Х.** О существовании квазидвойных линий пары в евклидовом пространстве E_5 [текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Ж. А. Артыкова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2017. – № 5. – С. 143-147. https://elibrary.ru/item.asp?id=29931308

15. **Абдуллаева, Ч. Х.** О неподвижных прямых одного частичного отображения евклидова пространства E_5 [текст] / Г. Матиева, Ч. Х.

Абдуллаева, Т. М. Папиева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2017. – № 5. – С. 148-151. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=29931309

16. **Абдуллаева, Ч. Х.** Евклиддик үч ченемдүү мейкиндикти бөлүктөп чагылтууда координаталык түз сызыктардын кыймылсыз болуштарынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] / Ч. Х. Абдуллаева, К. Элчибек уулу, К. Жамшитбек кызы // Наука. Образование. Техника. – Ош, 2019. – № 1 (64). – С. 35-40. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=42827227

17. **Абдуллаева, Ч. Х.** Үч ченемдүү евклиддик мейкиндикти бөлүктөп чагылтуудагы кыймылсыз түз сызыктардын жашашы жөнүндө [текст] / Ч. Х. Абдуллаева, К. Жамшитбек кызы, О. Кенжаев // Наука. Образование. Техника. – Ош, 2019. – № 1(64). – С. 31-35. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=42827226

18. **Abdullaeva, Ch. H.** About existence of quasi-double lines of the partial mapping of space E_n [text]/ G. Matieva, Ch. H. Abdullaeva, A. A. Ahkmedov // Journal of Physics: Conference Series, Volume 1366, Number 1. – Kuantan, Pahang, 2019. – **DOI** 10.1088/1742-6596/1366/1/012061 https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85076117007&origin=resultslist

19. **Abdullaeva, Ch. H.** Existence of immovability lines of a partial mapping of Euclidean space E_5 [text]/ G. Matieva, Ch. H. Abdullaeva, A. A. Ahkmedov // Journal of Physics: Conference Series, Volume 1366, Number 1. – Kuantan, Pahang, 2019**. – DOI** 10.1088/1742-6596/1366/1/012060 https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85076114129&origin=resultslist

20. **Абдуллаева, Ч. Х.** E_4 мейкиндигин бөлүктөп чагылтуунун кошмок сызыгынын жашашы [текст] / Ч. Х. Абдуллаева, Н. Н. Курбанбаева, Н. Акылбек уулу // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2019. – №3(66). – С. 27-30. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=42818965

21. **Абдуллаева, Ч. Х.** Необходимое и достаточное условие существования квазидвойной линии пары в евклидовом пространстве

[текст] / Ч. Х. Абдуллаева, М. Х. Абдулазизова, Б. Т. Адиева, Б. У. Кулматова // Наука. Образование. Техника. – Ош, 2021. – №2 (71). – С. 13-20. (IF: 0,274) https://elibrary.ru/item.asp?id=47331601

22. **Abdullaeva, Ch. H.** Existence of quasidouble lines of a pair (f_1^5 $\Delta_{(135)}$) in Euclidean space [text]/ G. Matieva, Ch. H. Abdullaeva, Z. A. Artykova // Journal of Physics: Conference Series. 28, Sains Matematik Wahana Pencetus Inovasi Sejagat. – 2021. – С. 012082. – **DOI** 10.1088/1742-6596/1988/1/012082 https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85114197020&origin=resultslist

23. **Абдуллаева, Ч. Х.** E_5 евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө [текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Н. О. Рустамова // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2022. – №3(75). – С. 39-49. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=49900609

24. **Абдуллаева, Ч. Х.** E_5 евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Н. Т. Нышанбаева // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2022. – №3(75). – С. 32-99. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=49900608

25. **Абдуллаева, Ч. Х.** Евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө [текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Н. Н. Курбанбаева // Ош мамлекеттик университетинин жарчысы, серия: Математика. Физика. Техника. – №1(2). – Ош, 2023. – С. 141-152. (РИНЦ) https://elibrary.ru/item.asp?id=54704254

26. **Алексеева, Л. И**. К геометрии отображений трехмерных евклидовых пространств [Текст] / Л. И. Алексеева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр. – Калининград, 1988. – Вып.19. – С. 10-14.

27. **Алиев, Н.** О некоторых отображениях поверхностей евклидовых пространств [Текст] / Н. Алиев // Материалы III конгресса

всемирного математического общества тюркоязычных стран. КазНУ им.Аль-Фараби, Алматы, 2009. – С. 68.

28. **Базылев, В. Т.** О многомерных сетях и преобразованиях [Текст] / В. Т. Базылев // Итоги науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 138-164.

29. **Базылев, В. Т.** К геометрии плоских многомерных сетей [Текст] / В. Т. Базылев //Ученые записки. Т.243. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1965. – С. 29-37.

30. **Базылев, В. Т.** О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В. Т. Базылев //Литовский математический сборник, VI. – 1966. – №4. – С. 475-491.

31. **Базылев, В. Т.** Об одном аддитивном представлении тензора Риччи р–поверхности евклидова пространства [Текст] / В. Т. Базылев //Сибирский математический журнал. – 1966. – Т. 3. – С. 499-511.

32. **Базылев, В. Т.** О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [Текст] / В. Т. Базылев // Изв. вузов. Математика. – 1967. – Т. 9. – С. 3-11.

33. **Базылев, В. Т.** Сети на многообразиях [Текст] / В. Т. Базылев //Труды геометрического семинара. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1974. – Т. 6. – С. 189-205.

34. **Базылев, В. Т.** Об одном замечательном классе сетей [Текст] / В. Т. Базылев //Проблемы геометрии. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1975. – Т. 7. – С. 105-116.

35. **Базылев, В. Т.** О конструктивных способах задания многомерных сетей [Текст] / В. Т. Базылев //Тезисы докладов Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии – Вильнюс, 1975. – С. 21-22.

36. **Базылев, В. Т.** Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств [Текст] / В. Т. Базылев //Ученые записки. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. – Т. 1. – №374. – С. 28-40.

37. **Базылев, В. Т.** К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространства [Текст] / В. Т. Базылев // Ученые записки. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. – Т. 1. №374. – С. 41-51.

38. **Базылев, В. Т.** К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространств [Текст] / В. Т. Базылев // В кн: III Межвузовская конференция по проблемам геометрии. – Казань: Казанский университет, 1967. – С. 8.

39. **Базылев, В. Т.** Многомерные сети двойных линий [Текст] / В. Т. Базылев // В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Москва, 1975. – Вып. 6. – С. 19-25.

40. **Грачева, В. И.** К вопросу о дифференцируемых отображениях евклидовых пространств // Труды Международного конгресса ассоциации «Женщины – математики». – Вып. 3. – Нижний Новгород: ННГУ, 1994. – С. 11-15.

41. **Дулалаева, Т. А.** О некоторых свойствах двойных линий пары гиперраспределений [Текст] / Т. А. Дулалаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Сборник научных трудов Калининградского госуниверситета. – Вып. 15. – Калининград, 1984. – С. 48-53.

42. **Дулалаева, Т. А.** К геометрии пары гиперраспределений в проективном пространстве *Pn* [Текст] / Т. А. Дулалаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сборник научных трудов Калининградского госуниверситета. – Калининград, 1998. – Вып. 12. – С. 23-26.

43. **Евтушик, Л. Е.** Дифференциально геометрические структуры на многообразиях [Текст] / Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану //Проблемы геометрии. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1979. – Т.9. – С. 7-234.

44. **Есин, В. А.** К геометрии сетей на поверхностях коразмерности два [Текст] / В. А. Есин //Геометрия погруженных многообразий. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1980. – С. 29-32.

45. **Есин, В. А.** О сопряженных и ортогональных сетях на поверхностях коразмерности два [Текст] / В. А. Есин // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: КГУ, 1981. – Вып.12. – С. 27-30.

46. **Есин, В. А.** О поверхностях коразмерности два [Текст] / В. А. Есин //Геометрия погруженных многообразий. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1981. – С. 40-44.

47. **Казанова, Р.** О гармоническом полюсе [Текст] /Р. О. Казанова // Математика – №5. – Москва, 1956. – С. 104.

48. **Казнина, О. В.** Об отображении $f\colon(V_p \subset E_n) \to (\bar{V}_p \subset E_{p+r})$ в задаче Фубини-Чеха [Текст] / О. В. Казнина // Дифференциальная геометрия много-образий фигур. – Калининград: КГУ, 1986. – Вып.17. – С. 40-42.

49. **Казнина, О. В.** Об отображении сетей в задаче Фубини-Чеха [Текст] / О. В. Казнина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат.сб.науч. тр. – Калининград, 1988. – Вып. 16. – С. 27-29.

50. **Казнина, О. В.** О свойствах проектирования Фубини-Чеха [Текст] / О. В. Казнина // Труды III Международной конференции женщин-математиков (29 мая – 2 июня 1995 г., Воронеж). – Н. Новгород: ННГУ, 1996. – Вып. 2. – С. 120-124.

51. **Киреева, С. В.** О геометрии пары сетей [Текст] / С. В. Киреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: КГУ, 1985. – Вып.16. – С. 30-33.

52. **Киреева, С. В.** О паре сетей [Текст] / С. В. Киреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. – Калининград: КГУ, 1983. С. 26-31.

53. **Кузьмин М. К.,** Сети, определяемые распределениями в евклидовом ространстве E_n [Текст] / М. К. Кузьмин // Проблемы геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1975. – Т. 7. – С. 215-229.

54. **Курбанбаева, Н.Н.** Существование двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // IN-SITU. – №4. – Москва, 2015. – С. 14-20.

55. **Курбанбаева, Н.Н.** Об одной двойной линии частичного отображения евклидова пространства Е4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 50-55.

56. **Курбанбаева, Н.Н.** К геометрии частичных отображений евклидова пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 55-60.

57. **Курбанбаева, Н. Н.** О существовании двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации. – №1. – Бишкек, 2016. – С. 3-6.

58. **Курбанбаева, Н. Н.** О квазидвойных линиях частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации. – №1. – Бишкек, 2016. – С. 7-10.

59. **Курбанбаева, Н. Н.** Необходимое и достаточное условия существования квазидвойных линий частичного отображения пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №3-4. – Уфа, 2016. – С. 24-30.

60. **Лаптев, Г. Ф**. Распределения касательных элементов [Текст] / Г. Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. – Москва, 1976. – Т.3. – С. 29-48.

61. **Лаптев, Г. Ф.** О распределениях m-мерных линейных элементов в n-мерно проективном пространстве [Текст] / Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану //Москва: ВИНИТИ, 1971. – №3683-71. – С. 56-68.

62. **Лаптев, Г. Ф.** Распределения m – мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I [Текст] / Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану //Труды геометрического семинара. – Москва, 1971. – Т. 3. – С. 49-94.

63. **Лаптев, Г. Ф.** Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [Текст] / Г. Ф. Лаптев //Труды Московского Математического Общества. – Москва, 1953. – №2. – С. 275-382.

64. **Лаптев, Г. Ф.** Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [Текст] / Г. Ф. Лаптев //Труды 30го Всесоюзного математического съезда. – Т.2. – Москва: АН СССР, 1956. – С. 60-62**.**

65. **Марюков, М. Н.** О некоторых частичных отображениях евклидовых n-пространств [Текст] / М. Н. Марюков //Дифференциальная геометрия многообразий фигур. –Калининград: КГУ, 1985. – Вып. 16. – С. 41-44.

66. **Марюков, М. Н.** О сетях, инвариантно связанных с парой p-распределений в E_n [Текст] / М. Н. Марюков //Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: КГУ, 1986. – Вып. 17. – С. 66-69.

67. **Матиева, Г.** Об одной сети Френе [Текст] / Г. Матиева //Тезисы докладов IX Всесоюзной научной конференции по дифференциальной геометрии. – Кишинёв, 1988. – С. 20.

68. **Матиева, Г.** О двойных линиях пары в евклидовом пространстве [Текст] / Г. Матиева //Дифференциальная геометрия многообразий фигур. –Калининград: КГУ, 1990. – Вып. 21. – С. 59-61.

69. **Матиева, Г.** К геометрии частичных отображений [Текст] / Г. Матиева //Лобачевский и современная геометрия: тезисы докладов международной научной конференции. – Казань, 1992. – С. 76**.**

70. **Матиева, Г.** О двойных линиях одного частичного отображения [Текст] / Г. Матиева // Нучные труды ОшГУ. – Ош, 1995. – вып.1. – С. 20-22.

71. **Матиева, Г.** Об одном случае частичного отображения Евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева //Научные

труды Ошского государственного университета: физико-математические науки. – Ош, 1999. – Вып. 2. – С. 220-227**.**

72. **Матиева, Г.** О фокусах касательных прямых линий циклической сети Френе [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева // Современные проблемы химии и химической технологии. Актуальные вопросы естественных и гуманитарных наук: труды международной научной конференции. – Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук. – Ош: Билим, 2001. – №3. – С. 169-176.

73. **Матиева, Г.** Кривизны, кручения линии сети Френе и существование фокусов касательных [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева, Д. Камилова // Актуальные вопросы естественных и гуманитарных наук: труды международной научной конференции. – Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук. – Ош: Билим, 2001. – №3. – С. 177-184.

74. **Матиева, Г.** К геометрии трехмерных распределений евклидова пространства E_5 [Текст] / Г. Матиева, М. К. Чамашев //Проблемы математики и информатики в XXI веке: труды международной научной конференции. – Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Сер. 3. Естественно-технические науки. – Бишкек, 2000.– №4. – С. 56-59.

75. **Матиева, Г.** Об одном частичном отображении пространства E_3 [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева //Проблемы математики и информатики в XXI веке: труды международной научной конференции. – Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Сер. 3. Естественно-технические науки. – Бишкек, 2000. – №4. – С. 52-56.

76. **Матиева, Г.** К геометрии частичных отображений евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева //Проблемы математики и информатики в XXI веке: труды международной научной конференции. – Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Сер. 3. Естественно-технические науки. – Бишкек, 2000. – №4. – С. 48-52**.**

77. **Матиева, Г.** Об одном частичном отображении евклидова пространства, порожденном заданным семейством гладких линий [Текст] /

Г. Матиева, Г. М. Борбоева //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2000. – Вып. 29. – С. 423-430.

78. **Матиева, Г.** Об одном дифференцируемом отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2000. – Вып. 29. – С. 430-437.

79. **Матиева, Г.** Об одном частичном отображении n-мерного евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001. – Вып.30. – С.278-285.

80. **Матиева, Г.** О характеристических линиях частичного отображения, порожденного заданиям распределением [Текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева //Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века: труды международной научно-теоретической конференции. – Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук.– Ош, 2001. – №4. – С. 174-179**.**

81. **Матиева, Г.** Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным распределением [Текст] / Г. Матиева, Д. Камилова //Наука и новые технологии. – Бишкек, 2002. – С. 35-40.

82. **Матиева, Г.** К геометрии частичных отображений евклидова трехмерного пространства [Текст] / Г. Матиева //Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук. – Ош, 2002. – №5. – С. 152-161.

83. **Матиева, Г.** Об одном частичном отображении евклидова пространства E_n, порожденном заданным семействам гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева //Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук. – 2002. №5. – С. 161-166.

84. **Матиева, Г.** Об одном группе преобразований евклидова трехмерного пространства и ее подгруппе [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева //Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук. – Ош, 2002. – №5. – С. 166-170**.**

85. **Матиева, Г.** О двойных линиях частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 287-291.

86. **Матиева, Г.** Необходимое и достаточное условия существования двойных линий одного частичного отображения [Текст] / Г. Матиева, Г. М. Борбоева //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 281-287.

87. **Матиева, Г.** Об одной группе линейных преобразований трехмерного евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 264-269.

88. **Матиева, Г.** К геометрии частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 275-281.

89. **Норден, А. П.** Пространства аффинной связности [Текст] /А. П. Норден. – Москва: Наука, 1976. – 432 с.

90. **Папиева, Т. М.** Циклическая сеть Френе в четырехмерном евклидовом пространстве [Текст] / Т. М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып. 40. – С. 294-298.

91. **Папиева, Т. М.** Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Т. М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 42. – С. 180-184.

92. **Папиева, Т. М.** Двойные линии частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Т. М. Папиева // Исследования по

интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 42. – С. 185-189.

93. **Папиева, Т. М.** Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т. М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 43. – С. 199-203.

94. **Папиева, Т. М.** Циклическая сеть Френе в n-мерном евклидовом пространстве E_n [Текст] / Т. М. Папиева // Вестник КРСУ – Бишкек, 2010. – Т. 10. – № 9. – С. 40-43.

95. **Папиева, Т. М.** Свойства частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т. М. Папиева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 161-165.

96. **Рыжков, В. В.** Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами [Текст] / В. В. Рыжков //Итоги Науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 22-30.

97. **Смогоржевский, А. С.** Справочник по теории кривых третьего порядка [Текст] / А. С. Смогоржевский, Е. С. Столова // Москва: Физматгиз, 1961. – 263 с.

98. **Силаева, Г. М.** Двойные линии отображения и их гиперсферическое изображение [Текст] / Г. М. Силаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: КГУ, 1988. – Вып. 19. – С. 82-84.

99. **Соловьев, А. Ф.** Кривизна распределения [Текст] / А. Ф. Соловьев // Математические заметки. – Т.35. – №1. – 1984. – С. 111-124.

100. **Схоутен, И. А.,** Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст] / И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк. – Москва: ИЛ, 1948. – Т.II. – 348 с.

101. **Тихонов, В. А.** Сети, определяемые гиперраспределениями в аффинном пространстве и их обобщения [Текст] / В. А. Тихонов // Проблемы геометрии. – Москва: ВИНИТИ, 1977. – Т.8. – С. 197-223.

102. **Фавар, Ж.** Курс локальной дифференциальной геометрии [Текст] / Ж. Фавар // Издательство иностранных литератур. – М., 1960. – 560 с.

103. **Фиников, С. П.** О сети двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей [Текст] / С. П. Фиников // Математический сборник. – М., 1939. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 475-520**.**

104. **Фиников, С. П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С. П. Фиников. – М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.

105. **Чешкова, М. А.** О конформном отображении ортогональных поверх-ностей в E_{2n} [Текст] / М. А. Чешкова // Математические заметки. – М., 2001. – Т. 70. – №5. – С. 798-800.

106. **Шинкунас, Ю. И.** О распределении m-мерных плоскостей в n-мерном римановом пространстве [Текст] / Ю. И. Шинкунас // Труды Геометрического Семинара. – Москва: ВИНИТИ, 1973. – Т.5. – С.123-133**.**

107. **Шуликовский, В. И**. Классическая дифференциальная геометрия [Текст] / В. И. Шуликовский. – Москва: Физматгиз, 1963. – 540 с.

108. **Mikeš, J.** Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces [Text] / J. Mikeš // Math. Sci. – New York, 1996. – №78:3. – P. 311-333.

109. **Mikeš, J.** Geodesic Ricci mappings of two-symmetric Riemann spaces [Text] / J. Mikeš // Math. Notes. – №28. – 1981. – P. 622–624.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Формулы циклического репера Френе пространства E_5

$\mathcal{R} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$

$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2\vec{e}_2;$

$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3\vec{e}_3;$

$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4;$

$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5\vec{e}_5;$

$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4\vec{e}_4;$

$\Lambda_{11}^3 = \Lambda_{11}^4 = \Lambda_{11}^5 = 0;$

$\Lambda_{21}^4 = \Lambda_{21}^5 = 0;$

$\Lambda_{31}^5 = \Lambda_{31}^1 = 0;$

$\Lambda_{41}^1 = \Lambda_{41}^2 = 0;$

$\mathcal{R}' = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1)$

$d_2\vec{e}_2 = \Lambda_{22}^3\vec{e}_3;$

$d_2\vec{e}_3 = \Lambda_{32}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4;$

$d_2\vec{e}_4 = \Lambda_{42}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{42}^5\vec{e}_5;$

$d_2\vec{e}_5 = \Lambda_{52}^4\vec{e}_4 + \Lambda_{52}^1\vec{e}_1;$

$d_2\vec{e}_1 = \Lambda_{12}^5\vec{e}_5;$

$\Lambda_{22}^1 = \Lambda_{22}^4 = \Lambda_{11}^5 = 0;$

$\Lambda_{32}^4 = \Lambda_{32}^5 = 0;$

$\Lambda_{42}^1 = \Lambda_{42}^2 = 0;$

$\Lambda_{52}^2 = \Lambda_{52}^3 = 0;$

$\Lambda_{12}^2 = \Lambda_{12}^3 = \Lambda_{12}^4 = 0.$

$$\mathcal{R}'' = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

$$d_3\vec{e}_3 = \Lambda_{33}^4\vec{e}_4;$$

$$d_3\vec{e}_4 = \Lambda_{43}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{43}^5\vec{e}_5;$$

$$d_3\vec{e}_5 = \Lambda_{53}^4\vec{e}_4 + \Lambda_{53}^1\vec{e}_1;$$

$$d_3\vec{e}_1 = \Lambda_{13}^5\vec{e}_5 + \Lambda_{13}^2\vec{e}_2;$$

$$d_3\vec{e}_2 = \Lambda_{23}^1\vec{e}_1;$$

$$\Lambda_{33}^1 = \Lambda_{33}^2 = \Lambda_{33}^5 = 0;$$

$$\Lambda_{43}^1 = \Lambda_{43}^2 = 0;$$

$$\Lambda_{53}^2 = \Lambda_{53}^3 = 0;$$

$$\Lambda_{13}^3 = \Lambda_{13}^4 = 0;$$

$$\Lambda_{23}^3 = \Lambda_{23}^4 = 0.$$

$$\mathcal{R}''' = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$$

$$d_4\vec{e}_4 = \Lambda_{44}^5\vec{e}_5;$$

$$d_4\vec{e}_5 = \Lambda_{54}^4\vec{e}_4 + \Lambda_{54}^1\vec{e}_1;$$

$$d_4\vec{e}_1 = \Lambda_{14}^5\vec{e}_5 + \Lambda_{14}^2\vec{e}_2;$$

$$d_4\vec{e}_2 = \Lambda_{24}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{24}^3\vec{e}_3;$$

$$d_4\vec{e}_3 = \Lambda_{34}^2\vec{e}_2;$$

$$\Lambda_{44}^1 = \Lambda_{44}^2 = \Lambda_{44}^3 = 0;$$

$$\Lambda_{54}^2 = \Lambda_{54}^3 = 0;$$

$$\Lambda_{14}^3 = \Lambda_{14}^4 = 0;$$

$$\Lambda_{24}^4 = \Lambda_{24}^5 = 0;$$

$$\Lambda_{34}^1 = \Lambda_{34}^4 = \Lambda_{34}^5 = 0.$$

$\mathcal{R}^{IV} = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$

$d_5\vec{e}_5 = \Lambda_{55}^1\vec{e}_1;$

$d_5\vec{e}_1 = \Lambda_{15}^5\vec{e}_5 + \Lambda_{15}^2\vec{e}_2;$

$d_5\vec{e}_2 = \Lambda_{25}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{25}^3\vec{e}_3;$

$d_5\vec{e}_3 = \Lambda_{35}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{35}^4\vec{e}_4;$

$d_5\vec{e}_4 = \Lambda_{45}^3\vec{e}_3;$

$\Lambda_{55}^2 = \Lambda_{55}^3 = \Lambda_{55}^4 = 0;$

$\Lambda_{15}^3 = \Lambda_{15}^4 = 0;$

$\Lambda_{25}^4 = \Lambda_{25}^4 = 0;$

$\Lambda_{35}^1 = \Lambda_{35}^5 = 0;$

$\Lambda_{45}^1 = \Lambda_{45}^2 = 0.$

Приложение 2

Формулы циклического репера Френе пространства E_6

$\mathcal{R} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$

$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2\vec{e}_2;$

$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3\vec{e}_3;$

$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4;$

$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5\vec{e}_5;$

$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4\vec{e}_4 + \Lambda_{51}^6\vec{e}_6,$

$\Lambda_{11}^3 = \Lambda_{11}^4 = \Lambda_{11}^5 = \Lambda_{11}^6 = 0;$

$\Lambda_{21}^4 = \Lambda_{21}^5 = \Lambda_{21}^6 = 0;$

$\Lambda_{31}^1 = -\Lambda_{11}^3 = \Lambda_{31}^5 = \Lambda_{31}^6 = 0;$

$\Lambda_{41}^1 = -\Lambda_{11}^4 = \Lambda_{41}^2 = \Lambda_{41}^6 = 0;$

$\Lambda_{51}^1 = -\Lambda_{11}^5 = \Lambda_{51}^2 = \Lambda_{51}^3 = 0;$

$\Lambda_{61}^1 = -\Lambda_{11}^6 = \Lambda_{61}^2 = \Lambda_{61}^3 = \Lambda_{61}^4 = 0.$

$\mathcal{R}' = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1)$

$d_2\vec{e}_2 = \Lambda_{22}^3\vec{e}_3;$

$d_2\vec{e}_3 = \Lambda_{32}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^4\vec{e}_4;$

$d_2\vec{e}_4 = \Lambda_{42}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{42}^5\vec{e}_5;$

$d_2\vec{e}_5 = \Lambda_{52}^4\vec{e}_5 + \Lambda_{52}^6\vec{e}_6;$

$d_2\vec{e}_6 = \Lambda_{62}^5\vec{e}_5 + \Lambda_{62}^1\vec{e}_1;$

$d_2\vec{e}_1 = \Lambda_{12}^6\vec{e}_6;$

$\Lambda_{22}^1 = \Lambda_{22}^4 = \Lambda_{22}^5 = \Lambda_{22}^6 = 0;$

$\Lambda_{32}^1 = \Lambda_{32}^5 = \Lambda_{32}^6 = 0;$

$\Lambda_{42}^1 = \Lambda_{42}^2 = \Lambda_{42}^6 = 0;$

$\Lambda_{52}^1 = \Lambda_{52}^2 = \Lambda_{52}^3 = 0;$

$\Lambda_{62}^1 = \Lambda_{62}^2 = \Lambda_{62}^3 = \Lambda_{62}^4 = 0.$

$\mathcal{R}'' = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$d_3\vec{e}_3 = \Lambda_{33}^4 \vec{e}_4;$

$d_3\vec{e}_4 = \Lambda_{43}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{43}^5 \vec{e}_5;$

$d_3\vec{e}_5 = \Lambda_{53}^4 \vec{e}_4 + \Lambda_{53}^6 \vec{e}_1;$

$d_3\vec{e}_6 = \Lambda_{63}^5 \vec{e}_5 + \Lambda_{63}^1 \vec{e}_1;$

$d_3\vec{e}_1 = \Lambda_{13}^5 \vec{e}_5 + \Lambda_{13}^2 \vec{e}_2;$

$d_3\vec{e}_1 = \Lambda_{13}^6 \vec{e}_6 + \Lambda_{13}^2 \vec{e}_2,$

$d_3\vec{e}_2 = \Lambda_{23}^1 \vec{e}_1;$

$\Lambda_{33}^1 = \Lambda_{33}^2 = \Lambda_{33}^5 = \Lambda_{33}^6 = 0;$

$\Lambda_{43}^1 = \Lambda_{43}^2 = \Lambda_{43}^3 = 0;$

$\Lambda_{53}^1 = \Lambda_{53}^2 = \Lambda_{53}^3 = 0;$

$\Lambda_{63}^1 = \Lambda_{63}^2 = \Lambda_{63}^3 = \Lambda_{63}^4 = 0;$

$\Lambda_{13}^2 = \Lambda_{13}^3 = \Lambda_{13}^4 = \Lambda_{13}^5 = 0;$

$\Lambda_{23}^3 = \Lambda_{23}^4 = \Lambda_{23}^5 = \Lambda_{23}^6 = 0.$

$\mathcal{R}''' = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$d_4\vec{e}_4 = \Lambda_{44}^5 \vec{e}_5;$

$d_4\vec{e}_5 = \Lambda_{54}^4 \vec{e}_4 + \Lambda_{54}^6 \vec{e}_6;$

$d_4\vec{e}_6 = \Lambda_{64}^5 \vec{e}_5 + \Lambda_{64}^1 \vec{e}_1;$

$d_4\vec{e}_1 = \Lambda_{14}^6 \vec{e}_6 + \Lambda_{14}^2 \vec{e}_2;$

$d_4\vec{e}_2 = \Lambda_{24}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{24}^3 \vec{e}_3,$

$d_4\vec{e}_3 = \Lambda_{34}^2 \vec{e}_2;$

$\Lambda_{44}^1 = \Lambda_{44}^2 = \Lambda_{44}^3 = \Lambda_{44}^6 = 0;$

$\Lambda_{54}^1 = \Lambda_{54}^2 = \Lambda_{54}^3 = 0;$

$\Lambda_{64}^1 = \Lambda_{64}^2 = \Lambda_{64}^3 = \Lambda_{64}^4 = 0;$

$\Lambda_{14}^3 = \Lambda_{14}^4 = \Lambda_{14}^5 = 0;$

$\Lambda_{24}^4 = \Lambda_{24}^5 = \Lambda_{24}^6 = 0;$

$\Lambda_{34}^1 = \Lambda_{34}^4 = \Lambda_{34}^5 = \Lambda_{34}^6 = 0.$

$$\mathcal{R}^{IV} = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$$

$$d_5\vec{e}_5 = \Lambda_{55}^6\vec{e}_6;$$

$$d_5\vec{e}_6 = \Lambda_{65}^5\vec{e}_5 + \Lambda_{65}^1\vec{e}_1;$$

$$d_5\vec{e}_1 = \Lambda_{15}^6\vec{e}_6 + \Lambda_{15}^2\vec{e}_2;$$

$$d_5\vec{e}_2 = \Lambda_{25}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{55}^3\vec{e}_3;$$

$$d_5\vec{e}_3 = \Lambda_{35}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{35}^4\vec{e}_4;$$

$$d_5\vec{e}_4 = \Lambda_{45}^3\vec{e}_3;$$

$$\Lambda_{55}^1 = \Lambda_{55}^2 = \Lambda_{55}^3 = \Lambda_{55}^4 = 0;$$

$$\Lambda_{65}^2 = \Lambda_{65}^3 = \Lambda_{65}^4 = 0;$$

$$\Lambda_{15}^3 = \Lambda_{15}^4 = \Lambda_{15}^4 = 0;$$

$$\Lambda_{25}^4 = \Lambda_{25}^5 = \Lambda_{25}^6 = 0;$$

$$\Lambda_{35}^1 = \Lambda_{35}^5 = \Lambda_{35}^6 = 0;$$

$$\Lambda_{45}^1 = \Lambda_{45}^2 = \Lambda_{45}^5 = \Lambda_{45}^6 = 0.$$

$$\mathcal{R}^{V} = (X, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$$

$$d_6\vec{e}_6 = \Lambda_{66}^1\vec{e}_1;$$

$$d_6\vec{e}_1 = \Lambda_{16}^6\vec{e}_6 + \Lambda_{16}^2\vec{e}_2;$$

$$d_6\vec{e}_2 = \Lambda_{26}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{26}^3\vec{e}_3;$$

$$d_6\vec{e}_3 = \Lambda_{36}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{36}^4\vec{e}_4;$$

$$d_6\vec{e}_4 = \Lambda_{46}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{46}^5\vec{e}_5;$$

$$d_6\vec{e}_5 = \Lambda_{56}^4\vec{e}_4;$$

$$\Lambda_{66}^2 = \Lambda_{66}^3 = \Lambda_{66}^4 = \Lambda_{66}^5 = 0;$$

$$\Lambda_{16}^3 = \Lambda_{16}^4 = \Lambda_{16}^5 = 0;$$

$$\Lambda_{26}^4 = \Lambda_{26}^5 = \Lambda_{26}^6 = 0;$$

$$\Lambda_{36}^1 = \Lambda_{36}^5 = \Lambda_{36}^6 = 0;$$

$$\Lambda_{46}^1 = \Lambda_{46}^2 = \Lambda_{46}^6 = 0;$$

$$\Lambda_{56}^1 = \Lambda_{56}^2 = \Lambda_{56}^3 = \Lambda_{56}^6 = 0.$$