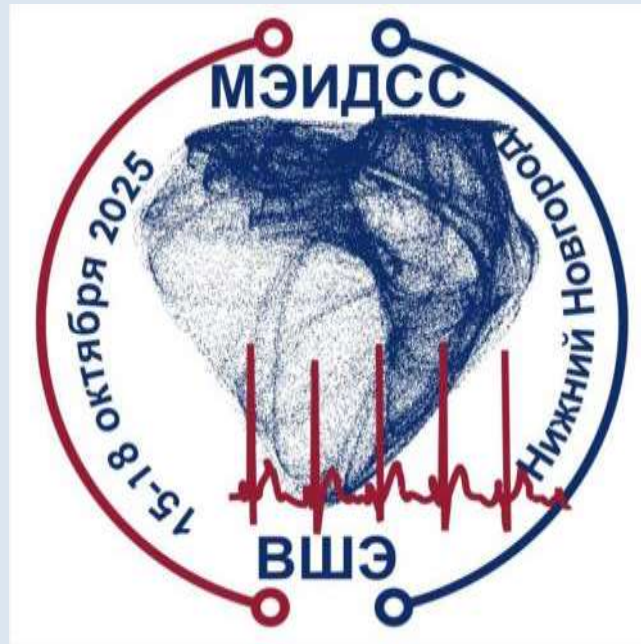


Международная научная конференция

Моделирование и экспериментальные исследования динамики  
сложных  
систем



Сборник трудов

Нижний Новгород - 2025

Нижегородский филиал  
федерального государственного автономного образовательного учреждения  
высшего образования «Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

«Моделирование и экспериментальные исследования  
динамики сложных систем»

Сборник трудов Международной научной конференции

15-18 октября 2025 года

Нижегород  
2025

УДК 517.9, 519.25, 530.182  
ББК 22.312  
Н25

**Моделирование и экспериментальные исследования динамики сложных систем /**

Сборник трудов Международной научной конференции, 15-18 октября 2025 года / Под ред. Н.В. Станкевич - Н.Новгород: НИУ ВШЭ - Нижний Новгород, 20254. - 97 с.

В сборнике опубликованы материалы Международной научной конференции «Моделирование и экспериментальные исследования динамики сложных систем», прошедшей в Нижегородском филиале Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» 15-18 октября 2025 года. Работы участников связаны с анализом и обработкой экспериментальных данных в радиофизических экспериментах, а также данных, полученных в результате мониторингов, изучением сложных, хаотических процессов в динамических системах, применением методов нелинейной динамики в физиологии, медицинской диагностике, информационных системах, радиофизике.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов, специализирующихся в области радиофизики, электроники, математическом моделировании.

Редакционная коллегия:

кандидат физ.-мат. наук Н.В. Станкевич (отв. редактор)

Рецензенты:

доктор мед. наук О.М. Посненкова

(Саратовский государственный медицинский университет им. В.И. Разумовского)

доктор физ.-мат. наук С.В. Гонченко

(НИУ ВШЭ - Нижний Новгород)

кандидат физ.-мат. наук В.В. Семенов

(Национальный исследовательский

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского)

Работа издана в авторской редакции

Конференция организована при финансовой поддержке  
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», программа  
«Зеркальные лаборатории»

УДК 517.9, 519.25, 530.182  
ББК 22.312

## Содержание

<b>Секция «Приложения теории динамических систем» .....</b>	<b>7</b>
<b>Section “Applications of Dynamical Systems Theory”</b>	
<b>Semenov V.V.</b> Delayed-feedback oscillators as complex spatiotemporal systems .....	9
<b>Smirnov L., Munyaev V., Bolotov M., Belykh I.</b> Higher-order reduction of the Kuramoto model with time delay .....	12
<b>Рябов А.А., Рыбалова Е.В., Бух А.В., Вадивасова Т.Е., Семенов В.В.</b> Когерентный резонанс в ансамбле возбудимых осцилляторов с нелокальной связью.....	14
<b>Bolotov M., Smirnov L., Munyaev V., Osipov G., Belykh I.</b> Heterogeneity Induces Cyclops States in Oscillator Network with Higher-Mode Coupling .....	16
<b>Varabash N.V.</b> Sufficient conditions for synchronization in a finite-dimensional swarmalator model on a ring.....	18
<b>Куровская М.К., Москаленко О.И., Семенов В.В., Короновский А.А.</b> Анализ характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации по экспериментальным данным однонаправленно связанных генераторов Чуа с различной топологией аттрактора.....	19
<b>Коротков А.Г., Сюндюкова Е.В., Губина Е.В., Осипов Г.В.</b> Гетероклинические циклы и сети в ансамбле элементов Лотки-Вольтерры.....	21
<b>Щербаков П.В., Осипов Г.В.</b> Когерентно-некогерентно-градиентное состояние в системе детерминированных частиц с внутренней степенью свободы.....	24
<b>Khamkov M., Bolotov M., Smirnov L.</b> Rotobreathing cyclops states in Kuramoto networks with higher-mode Coupling .....	26
<b>Секция «Анализ экспериментальных данных».....</b>	<b>29</b>
<b>Section “Analysis of experimental data”</b>	
<b>Гуйо Г.А., Павлов А.Н.</b> Эффекты координации ритмов мозга во время циклов сна и бодрствования.....	31
<b>Такаишвили Л.В., Сысоев И.В., Пономаренко В.И.</b> Радиофизические модели нейронной активности: ансамбль несвязанных осцилляторов.....	33
<b>Салмиянов В.О., Масловская А.Г.</b> Спектральные характеристики динамики глаукомы по цифровым изображениям оптической когерентной томографии глаза .....	35
<b>Бурмистров С.Е., Боровкова Е.И., Храмов А.Н., Вахлаева А.М., Квасневская П.В.</b> Когнитивная производительность и ментальная усталость: методы классификации на основе параметров variability сердечного ритма с использованием технологий машинного обучения.....	38
<b>Бурцев А.А., Ионин В.В., Михалевский В.А., Киселев А.В., Невзоров А.А., Лотин А.А.</b> Устройства хранения и обработки данных на основе наноструктур фазоизменяемых материалов .....	41
<b>Garanin F., Sadovnikov A., Lomova M.</b> Analysis of spin wave propagation in a cross-shaped demultiplexer with magnetite on the surface.....	43
<b>Багаутдинова Э.Р., Станкевич Н.В.</b> Смешанная динамика в схемотехнической модели радиофизического генератора в присутствии шума .....	45

**Секция «Сложное поведение динамических систем»,  
Section “Complex behaviour of dynamical systems”**

**49**

Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., <b>Станкевич Н.В.</b> , Тюрюкина Л.В. О хаоса с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова и ассоциирующимися эффектами .....	51
<b>Gonchenko S.V.</b> Universal stability windows (shrimps and other) at homoclinic tangency..	55
<b>Zhusubaliyev Zh.</b> , Sopuev U., Atmatbek kyzy Z. Closed invariant curves in discontinuous mappings.....	57
<b>Громько А.А.</b> , Неверова Г.П. Влияние изъятия на сценарии развития протандрических популяций.....	61
<b>Лютарь В.П.</b> , Неверова Г.П. Сложные динамические режимы в модели двухвозрастной популяции с плотно зависимой регуляцией выживаемости.....	64
<b>Оленин С.М.</b> , Леванова Т.А., Писарчик А.Н. Экстремальные события в малом ансамбле нейронов Рутькова с химическими синаптическими связями .....	67
<b>Коннова М.А.</b> , Бобровский А.А., Казаков А.О., Станкевич Н.В. Квазипериодические бифуркации и хаос в связанных генетических осцилляторах.....	70
<b>Panyushev A.</b> , Stankevich N. Destruction of quasi-periodic attractors in the Chialvo map .....	73

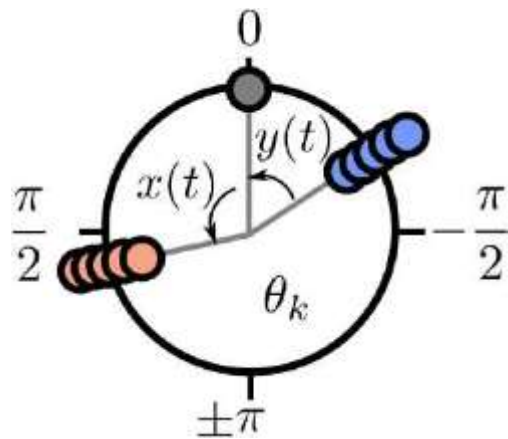
**Секция «Теория динамических систем» .....** **75**  
**Section “Theory of dynamical systems”**

Куликов А.Н., <b>Куликов Д.А.</b> «Плоские» бегущие волны конвективного уравнения Кана-Хиллиарда .....	77
<b>Саруханян С.К.</b> , Масловская А.Г. Клеточный автомат для in silico исследования роста биопленки при вариации режимов питания.....	79
<b>Шевкун И.А.</b> , Масловская А.Г. Модель формирования резистентности к антибиотикам в эволюционирующих бактериальных колониях: детерминированный подход.....	82
<b>Писарев М.И.</b> , Рассадин А.Э. О счетномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, порожденной уравнением Римана.....	85
Проверка универсальных констант скейлинга при формировании хаоса в результате каскада бифуркаций удвоений инвариантных кривых .....	87
<b>Шилов О.М.</b> , Казаков А.О. О различных типах гиперболических хаотических множеств, возникающих в результате возмущений отображения Аносова на двумерном торе.....	90
<b>Сухарев Д.М.</b> , Сафонов К.А. О новом критерии рождения аттрактора Лоренца .....	92

<b>Программный комитет</b> .....	94
<b>Программа конференции</b> .....	99

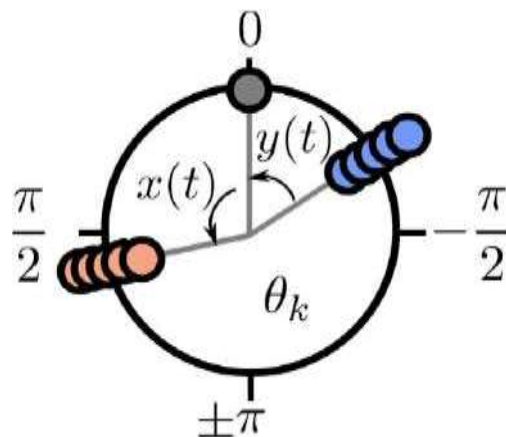
# Секция 1

## «Приложения теории динамических систем»



# Session 1

## «Applications of Dynamical Systems Theory»



## CLOSED INVARIANT CURVES IN DISCONTINUOUS MAPPINGS

Zhanybai Zhusubaliyev

Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

[zhanybai@gmail.com](mailto:zhanybai@gmail.com)

Ulanbek Sopuev

Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

[Usopuev77@gmail.com](mailto:Usopuev77@gmail.com)

Zarina Akmatbek kyzy

Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

[Zarinaakmatbekova6@gmail.com](mailto:Zarinaakmatbekova6@gmail.com)

**Abstract.** We study a pulse-frequency-modulated control system. The behavior of such a system is described by a differential equation with a discontinuous right-hand side, and its symmetry leads to either single symmetric solutions or pairs of asymmetric solutions. We derive a two-dimensional map that is continuous or discontinuous depending on parameters. In parameter plane with periodic dynamics we find closed invariant resonant curves. We demonstrate that with changing parameters the classical invariant curves are replaced by discontinuous invariant curves, where the unstable manifolds of saddles consist of disconnected segments.

**Keywords:** Pulse-frequency modulated system, Arnold tongues, discontinuous maps, bistability, discontinuous invariant curves

## Introduction

In this paper, we focus on the dynamics of a pulse-frequency modulated control, which is widely used in physics, mechanics, and power electronics, as well as in the investigation of nonlinear phenomena in biology and medicine. Pulse-frequency modulated control systems [1, 2] are characterized by control signals composed of rectangular pulses with constant amplitude and duration, modulated in frequency. Interest in such systems stems from the similarity of their dynamics to those of many systems in engineering and applied sciences. For example, pulse-frequency modulated systems exhibit dynamics similar to the rhythmic activity of neurons. Other applications include the analysis of cardiac arrhythmias, such as atrioventricular conduction block, as well as the investigation of biological mechanisms underlying sleep-wake regulation.

Consider the control system consisting of a pulse-frequency modulator (PFM) and a continuous linear part (of the plant), the block diagram of which is shown in Fig. 1. Here  $x$  is the output of the system;  $o(t)$  is an external periodic signal with a period of  $2\pi$ ;  $\dot{\phi} = a(t) - x$  and are

$S$  signals at the input and output of the modulator, respectively;  $W(p) = \frac{1}{T_0 p + 1}$  is the transfer function of the plant, where  $T_0$  is a time constant of the plant.

The behavior of this system is described by a differential equation

$$\dot{x} = f(t, x), f(t, x) = \mathcal{J}(x - S(y)), (t) = a(t) - x(t), o(t + \pi) = -o(t) \quad (1)$$

Here  $t$  is the time variable,  $x$  is an unknown function of  $t$  and  $f$  is a given function of  $t$  and  $x$  ( $t, x, f \in \mathbb{R}$ ).  $\mathcal{J}$  is the derivative of  $x$  with respect to  $t$  and  $S$  is the output (switching function) signal of the pulse frequency modulator;  $\mathcal{J} = -1/T_0$  is the parameter associated with the time constant of the plant, and  $o(t) = j \cos t$ .

The output signal of the modulator, denoted by  $S$ , is determined by the sign of the error signal ( $p = o(t) - x$ ). Specifically, the modulator operates as follows  $S = +1$  if  $\langle p \rangle > 0$  and  $S =$

—1 if  $\phi < 0$ . However, when  $x(t)$  reaches the reference signal, i.e., when  $\phi = 0$  sliding modes may occur. To prevent the appearance of sliding modes introduce a holding mechanism. The modulator switches from  $S = +1$  to  $S = -1$ , or vice versa, whenever the sign of the error signal  $\phi$  changes. Immediately following each switch, a fixed time interval  $z_0 > 0$  is triggered. This mechanism prevents further switching during the interval  $z_0$ , even if the sign of  $\phi$  changes again. Once  $z_0$  has elapsed, the modulator becomes responsive to changes in  $\phi$  again and may switch accordingly. As can be seen from Eq. (1), the right part depends on both  $t$  and  $x$ . The function  $f$  periodically changes by  $t$  with a period of  $2n$ . In the numerical investigations we have assumed the following parameter values:  $A = -3.295$ ;  $q = 4$ . Normalized input voltage  $\Gamma$  and  $z_0$  are treated as control parameters:  $16.0 < \Gamma < 19.0$ ;  $0.06 < z_0 < 0.436$ .

We reduce the differential equation (1) to a 2D mapping

$$F: (\phi, x) \rightarrow F(\phi, x),$$

$$F = \begin{cases} F_0(0, x) & \text{if } q_1(z_0, x) > 0 \text{ and } q_2(z_0, x) < 0 \\ F_+(0, x), & \text{if } q_1(z_0, x) > 0 \text{ and } -q_2(z_0, x) > 0 \\ F_-(0, x), & \text{if } q_1(z_0, x) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Here,  $q_i(z_0, x)$ ,

$$q_1(z_0, x) = j \cos(\theta + z_0) + 1 - (x + 1)e^{Az_0},$$

$$q_2(z_0, x) = j \cos(\theta + 2z_0) - 1 - (x + 1)e^{2Az_0} + 2e^{Az_0}$$

and

$$F_0(0, x) = \begin{cases} \phi + 2z_0 \text{ mod } 2n \\ 1 + (x + 1)e^{2Az_0} - e^{Az_0} \end{cases}$$

$$F_+(0, x) = \begin{cases} \phi + z_0 + z_+ \text{ mod } 2n \\ -1 + (x + 1)e^{A(z_0 + z_+)} - 2e^{Az_0} \end{cases}$$

$$F_-(0, x) = \begin{cases} \phi + z_0 + z_- \text{ mod } 2n \\ 1 + (x + 1)e^{A(z_0 + z_-)} - 2e^{Az_0} \end{cases}$$

where  $z_{\pm}$  are the durations of the positive and negative pulses, respectively. Depending on the parameters, such a mapping may be a continuous or discontinuous. Boundary  $y$ , separating the regions of existence continuous and discontinuous map in the parameter plane  $(z_0, \Gamma)$  given by

$$Y = \{(z_0, \Gamma): r = q^{A+2}, 0.06 < z_0 < 0.436\}.$$

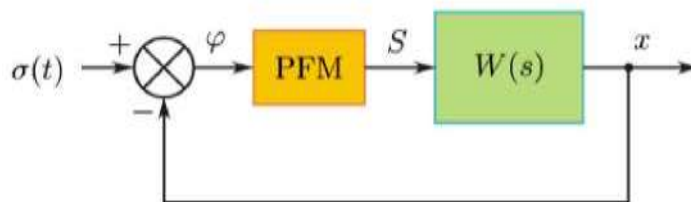


Fig.1. Block diagram of a pulse-frequency modulated system.

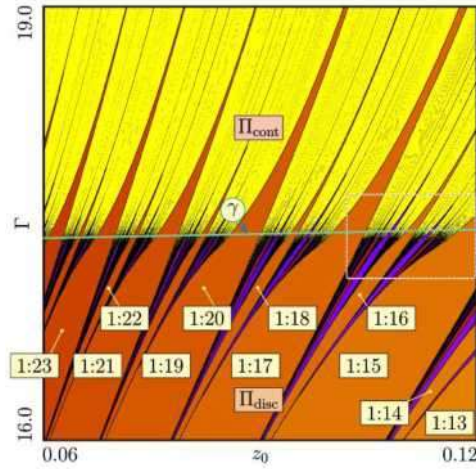


Fig.2. Bifurcation structure of the parameter plane  $(z_0, \Gamma)$ .

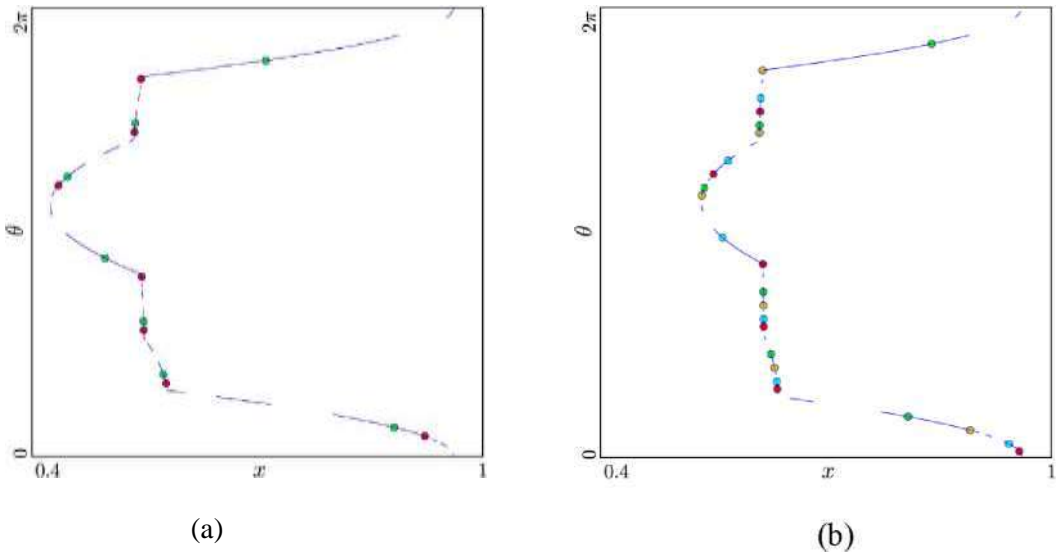


Fig.3. (a) Discontinuous invariant curve consisting of a symmetric stable 7-node, 7-saddle, and the unstable set of the saddle. (b) Discontinuous invariant curve consisting of two asymmetric stable 6-node, a pair 6-saddle, and the unstable sets of the saddles.

**Bifurcation analysis**

Fig.2 presets a 2D bifurcation diagram in the parameter plane  $(z_0, \Gamma)$ . The domains of periodicity in the  $(z_0, \Gamma)$  represent the resonance tongues (Arnold tongues)[3,4]. Several of the most prominent tongues are indicated in this figure.

Above the boundary of  $y$  (within the domain of  $n_{cont}$ ) the mapping is a continuous. The region  $n_{disc}$  corresponds to the region of existence of a discontinuous mapping.

It is well known that inside the Arnold tongues, the asymptotic behavior of the dynamical system is periodic, while it is quasi-periodic outside. In both cases there exists an attracting closed invariant curve. The invariant sets in discontinuous maps play a role analogous in continuous case. Such invariant sets and their transformations are fundamentally different from the continuous case described in the existing literature. Examples of discontinuous invariant curves of the map (2) is showed in Fig.3.

### Conclusions

It is well known a such structure for continuous maps may be associated with the bifurcation from quasi-periodic behavior with two independent frequencies to periodic oscillations with a single frequency. Inside the Arnold tongues, the asymptotic behavior of the map is periodic, while it is quasi-periodic outside. In both cases there exists an attracting closed invariant curve. The invariants sets in discontinuous maps play a role analogous in continuous case. Such invariant sets and their transformations are fundamentally different from the continuous case described in the existing literature.

In this work, we investigated the dynamics of a pulse-frequency modulated (PFM) control system. We illustrated that this equation possesses a symmetry that gives rise to either single symmetric solutions or pairs of asymmetric solutions that are symmetric to each other (see also [ 5,6]).

We derived a discrete-time representation of the system in the form of a two-dimensional map. Depending on the parameter values, this map may be either continuous or discontinuous. We identified the boundary separating these two regimes in the parameter space and demonstrated that the parameter space of the map is organized by a bistability-affected period-adding structure [5]. We examined the role of invariant curves within this bifurcation structure. We showed that classical closed invariant curves are replaced by discontinuous invariant curves, in which the stable manifolds of saddles are given by collections of disconnected segments rather than continuous curves [7].

### Acknowledgments

Zh. T. Zhusubaliyev, U. A. Sopuev and Z. Akmatbek kyzy was supported by the Osh State University.

### References

1. *Kuntsevich V. M., Chekhovoy Yu. N.* Nonlinear control systems with frequency and pulse - width modulation. Technika, 1970. 356 p. (in Russian)
2. *Kuntsevich, V. M., Chekhovoy, Yu.M.* // Automatica. 1971. V.7. No 1, P. 73-81.
3. *Arnold V.I.* // Chaos. 1991. V. 1. No. 1. P. 20-24.
4. *Glass L.* // Chaos. 1991. V. 1. No. 1. P. 13-19.
5. *Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Kucherov A. S., Haroun R., El Aroudi A.* // Phisica D. 2023. V. 444. P.133600.
6. *Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Rubanov V. G., Bushuev D, A.* // Phisica D. 2021. V. 420. P.132870.
7. *Avrutin V., Zhusubaliyev Zh. T.* // Int. J. Bif Chaos (to appear 2026).