МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме **«Геометрия частичных отображений и сетей евклидова пространства, порождаемых заданным распределением»**

(*Промежуточный*)

Ош – 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 514:757

№ госрегистрации

Инв. №

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе
и внешним связям ОшГУ,
д.б.н., профессор Жумабаева Т.Т.
____
«_ _» ____________ 2015 год.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме **«Геометрия частичных отображений и сетей евклидова пространства, порождаемых заданным распределением»**

(*Промежуточный*)

Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор Матиева Г.

Директор ИФПИ при ОшГУ, д.ф.-м.н.,
член корр. АН КР, профессор Алымкулов К.

Планово-экономический отдел Тойчиева Б.Т.

Ош – 2015

Список исполнителей

№	Ф.И.О.	Ученая степень, ученое звание	Наименование должности
1	Матиева Г.	д.ф.-м.н., профессор	г.н.с.
2	Ободоева Г.С.	к.ф.-м.н., доцент	н.с.
3	Борбоева Г.М.	к.ф.-м.н.	с.н.с.
4	Папиева Т.М.	к.ф.-м.н.	с.н.с.
5.	Артыкова Ж.А.	к.ф.-м.н.	в.н.с.
6	Сарыгулова Н. А.		м.н.с.
7	Каныбекова Н.		м.н.с
8	Мурзакматова З.		лаб.

СОДЕРЖАНИЕ

Реферат …………………………………………………………………… 5

§1. Свойства одного частичного отображения евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий …………………………………………….. 9

§2. О двойных линиях одного вырожденного частичного отображения, порождаемого заданным распределением ………… 17

§3. Геометрия частичного отображения 4-мерного евклидова пространства, порождаемого заданным распределением 23

Выводы ………………………………………………………………….. 31

Литература ……………………………………………………………… 33

Приложение …………………………………………………………… 36

РЕФЕРАТ

Отчет написано в 36 страницах, состоит из 21 литературных источников.

Ключевые слова: частичное отображение, сеть Френе, двойная линия, распределение.

Срок исполнения проекта: с 01.01.2015г. по 31.12.2015г.

Руководитель проекта: Матиева Г., д. ф.-м.н., профессор ОшГУ

Актуальность темы: Теория гладких отображений занимает главное место в современной дифференциальной геометрии. Частичные отображения евклидова пространства играет большую роль не только в решении геометрических проблем, они имеют широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Огромный интерес представляют гладкие частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданной сетью Френе, так как сети Френе значительно упрощают не только моделирование явлений и процессов, а также рациональные решения проблем связанные с ними.

Сети Френе и ее образы в различных гладких частичных отображениях в случае вырождения способствуют решению многих проблем теории линейных и нелинейных волн (Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны // Москва: Мир, 1977. – 624 с).

В настоящее время дифференцируемыми отображениями евклидова пространства E_n в аффинное пространство A_m $(m < n)$ работают российские ученые Е. Т. Ивлев, А. А. Лучинин и другие, а также ученые ОшГУ.

Над гладкими отображениями Римановых пространств работают Йозеф Микеш (Чехия) и его ученики.

Г. Матиевой, Т. М. Папиевой изучено частичное отображение четырехмерного евклидова пространства, порождаемое заданной циклической сетью Френе.

Рассмотрение данной проблемы в общем случае, а также случаи вырождения рассматриваемых отображений представляют научный и практический интерес.

Цель проекта. Получение необходимого и достаточного условий для того, чтобы гладкое частичное отображение f евклидова пространства E_4, порождаемое заданным распределением являлось вырожденным, а также существования двойных линий частичного отображения f и пары $f, \Delta_{(i,j)}$, где $\Delta_{(i,j)}$ - двумерное расприделение.

Задачи исследования:

- Доказать необходимое и достаточное условия минимальности образа данного распределения в рассматриваемом частичном отображении;
- Получить необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии заданной сети являлись двойными линиями частичного отображения, порожденного заданным распределением;
- Доказать необходимое и достаточное условия невырожденности частичного отображения пространства E_4, порождаемого заданным распределением;
- Найти необходимого и достаточного условий существования двойных линий пары (f, Δ_2), где f рассматриваемое отображение, Δ_2 – отображение, определяемое сетью Френе;

Объект исследования: 4-мерное евклидово пространство; частичное отображение, порождаемое заданной сетью Френе.

Методы исследования: метод внешних форм Картана, подвижного репера, метод Лаптева Г. Ф.

Краткие результаты исследования:

1) Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии ω^a, $\overline{\omega}^a = f_1^4(\omega^a)$ $(a = 2,3,4)$ являлись двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^a циклической сети Френе являлась двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(1a)}\right)$, где $\left(\Delta_{(1a)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_a)\right)$- двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_1, \vec{e}_a$.

2) Доказано, что если линия ω^2 циклической сети Френе является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, то никакая другая линия, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)}$, не может быть двойной линией этой пары.

3) Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, являлась двойной линией пары$\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$.

4) В случае, когда сеть Σ_4 является циклической сетью Френе [5], доказано, что если линия ω^4 циклической сетью Френе является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$, то никакая другая линия (отличная от линией ω^3, ω^4), принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, не может быть двойной линией этой пары;

5) Найдены необходимое достаточное условия для того, чтобы любая линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(32)})$;

6) В случае, когда сеть Френе является циклической сетью Френе, доказано, что все трехмерные и двумерные распределения, определяемые касательными к линиям этой сети, не могут быть минимальными распределениями.

7) Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ циклической сети Френе $\tilde{\sum}_4$ являлись двойными линиями частичного отображения $f^3{}_4 : \Omega \to \Omega_4^3$.

§1. Свойства одного частичного отображения евклидова E_4, пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий гладких линий

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \{X, \vec{e}_i\}$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_4, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda^k_{j\ell}\omega^j_i \wedge \omega^\ell = d\Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j_\ell \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j \wedge \omega^j - \Lambda^k_{j\ell}\omega^j_i \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda^k_{ij} - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j - \Lambda^k_{\ell j}\omega^\ell_i\right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda^k_{ij} - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j - \Lambda^k_{\ell j}\omega^\ell_i = \Lambda^k_{ijm}\omega^m$$

или

$$d\Lambda^k_{ij} = \left(\Lambda^k_{ijm} + \Lambda^k_{il}\Lambda^l_{jm} + \Lambda^k_{lj}\Lambda^l_{im}\right)\omega^m . \tag{5}$$

Система величин $\Lambda^k_{ij}, \Lambda^k_{ijm}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$\begin{aligned}
d_1\vec{e}_1 &= \Lambda^2_{11}\vec{e}_2 ,\\
d_1\vec{e}_2 &= \Lambda^1_{21}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{21}\vec{e}_3 ,\\
d_1\vec{e}_3 &= \Lambda^2_{31}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{31}\vec{e}_4 ,\\
d_1\vec{e}_4 &= \Lambda^3_{41}\vec{e}_3
\end{aligned}$$

и

$$\Lambda^3_{11} = -\Lambda^1_{31} = 0 ,\ \Lambda^4_{11} = -\Lambda^1_{41} = 0 , \tag{6}$$

$$\Lambda^4_{21} = -\Lambda^2_{41} = 0 . \tag{7}$$

Здесь $k^1_1 = \Lambda^2_{11}$, $k^1_2 = \Lambda^3_{21}$, $k^1_3 = \Lambda^4_{31}$ - первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F^j_i $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_4 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}^j_i = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda^j_{ij}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda^i_{jj}}\vec{e}_i . \tag{8}$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть Σ_4 в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети Σ_4 одновременно.

Пусть сеть Σ_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$.

Псевдофокус $F_1^4 \in (X,\vec{e}_1)$ определяется радиус – вектором:

$$F_1^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^1}\vec{e}_1, \qquad (9)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_1^4 описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Определяется частичное отображение $\varphi: \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $\varphi(X) = F_1^4$.

Продифференцируем обычным образом (9) и учитываем деривационные формулы:

$$dF_1^4 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1\right) = d\vec{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{44}^1}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}d\vec{e}_1 = \omega^i\vec{e}_i - \frac{d\Lambda_{14}^4}{(\Lambda_{14}^4)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Учитывая равенство (9) отсюда имеем:

$$dF_1^4 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{(\Lambda_{14}^4 + \Lambda_{1l}^4\Lambda_{4m}^l + \Lambda_{l4}^4\Lambda_{1m}^l)\omega^m}{(\Lambda_{14}^4)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Введем обозначение :

$$B_{14m}^4 = \Lambda_{14m}^4 + \Lambda_{1l}^4\Lambda_{4m}^l + \Lambda_{l4}^4\Lambda_{1m}^l.$$

Тогда, в силу равенства (8) , отсюда получим

$$dF_1^4 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B^4_{14m}\omega^m}{(\Lambda^4_{14})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^1_{1m}\omega^m}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i .$$

или

$$dF_1^4 = \left[\vec{e}_1 + \frac{B^4_{141}}{(\Lambda^4_{14})^2}\vec{e}_1 + \frac{\Lambda^i_{11}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i\right] = \left[\vec{e}_2 + \frac{B^4_{142}}{(\Lambda^4_{14})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B^4_{143}}{(\Lambda^4_{14})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B^4_{144}}{(\Lambda^4_{14})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i\right]\omega^4$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B^4_{141}}{(\Lambda^4_{14})^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{11}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i; \quad \vec{b}_2 = \frac{b^4_{142}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^4_{12}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^4_{143}}{(\Lambda^4_{14})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i + \vec{e}_3; \quad \vec{b}_4 = \frac{B^4_{144}}{(\Lambda^4_{144})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_i + \vec{e}_4 .$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}_1^4 = \omega^1\vec{b}_1 + \omega^2\vec{b}_2 + \omega^3\vec{b}_3 + \omega^4\vec{b}_4$$

Так как заданная сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B^4_{141}}{(\Lambda^4_{14})^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2; \quad \vec{b}_2 = \frac{b^4_{142}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{12}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4; \tag{10}$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^4_{143}}{(\Lambda^4_{14})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4 + \vec{e}_3; \quad \vec{b}_4 = \frac{B^4_{144}}{(\Lambda^4_{14})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2 .$$

В общем случае эти векторы линейно независимы. Найдем необходимое и достаточное условия вырожденности отображения $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$. Потребуя линейной зависимости векторов $\vec{b}_i$ получим:

$$\Lambda^4_{12}\left\{\Lambda^2_{14}\left[(\Lambda^4_{14})^2 + B^4_{141}\right] - \Lambda^2_{11}B^4_{144}\right\} = 0$$

Отсюда имеем: а) $\Lambda^4_{12}=0$ 11)

или б) $\Lambda^2_{14}\left[(\Lambda^4_{14})^2+B^4_{141}\right]-\Lambda^2_{11}B^4_{144}=0$ (12)

Геометрический смысл равенств (11),(12) заключаются в следующем: $d_2\vec{e}_1=\vec{0}$, $k^1_1(\vec{e}_1 d_4\vec{k}_{14})=\left[(k^1_4)^2-\vec{e}_1 d_1\vec{k}_{14}\right]k^4_2$, соответственно, где $k^1_1=\Lambda^2_{11}$ - первая кривизна линии ω^1, $k^4_1=\Lambda^1_{44}=-\Lambda^4_{14}$ - первая кривизна, $\vec{k}_{14}=\Lambda^1_{44}\vec{e}_1=-\Lambda^4_{14}$ - вектор первой кривизны линии ω^4 циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе, d_i - символ дифференцирования вдоль линии ω^i.

Обратно, если имеет место одно из условий (11),(12), то частичное отображение $f^4_1:\Omega\to\Omega^4_1$ является вырожденным. Таким образом доказана:

Теорема 1. Для того, чтобы частичное отображение f^4_1 являлось вырожденным необходимо и достаточно выполнения одного из условий (11),(12).

Линий ω^i, $g(\omega^i)=\varpi^i$ называются двойными линиями отображения g, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках x и $g(x)$ пересекаются, либо параллельны [7].

Линия ℓ называется двойной линией пары $(g,\ \Delta_p)$, если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Рассмотрим векторы: $\vec{e}_1,\vec{b}_1,\overrightarrow{XF^4_1}=-\left(\frac{1}{\Lambda^4_{14}}\right)\vec{e}_1$ где $\vec{b}_1=f^4_1(\vec{e}_1)$.

Учитывая первое равенство формулы (10) получим, что эти векторы принадлежат плоскости $(x,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Следовательно, справедлива

Лемма. Линии $\omega^1, f^4_1(\omega^1)=\varpi^1$ всегда являются двойными линиями частично отображения f^4_1, а линия ω^1 циклические сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f^4_1,\Delta_{(12)})$, где $\Delta_{(12)}=(x,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Из условия $\vec{e}_2, \vec{b}_2 = f_1^4(\vec{e}_2), \overrightarrow{XF}{}_1^4 \in (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2,)$

имеем: $\Lambda_{12}^4 = 0$, (13)

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$d_2\vec{e}_1 = \Lambda_{12}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{12}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{12}^4\vec{e}_4 = \vec{0}$$

Следовательно, линии $\omega^2, \varpi^2 = f_1^4(\omega^2)$является двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^2 циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$где $\Delta_{(12)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$тогда и только тогда, когда имеет место условия(13).

Рассмотрим векторы $\vec{e}_3, \vec{b}3 = f_1^4(\vec{e}_3), \overrightarrow{XF1}{}^4$. Из условия компланарности этих векторов получим:

$$\Lambda_{13}^2 = 0, \quad \Lambda_{13}^4 = 0, \tag{14}$$

геометрический смысл которых заключаются в следующем:

$$d_3\vec{e}_1 = \Lambda_{13}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{13}^4\vec{e}_4 = \vec{0}$$

Следовательно, линии $\omega^3, \varpi^3 = f_1^4(\omega^3)$являются двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^3циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$, где $\Delta_{(13)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$тогда и только тогда, когда имеют места условия (14)

Из условия $\vec{b}_4, \vec{e}_4, \overrightarrow{XF}{}_1^4 \in \Delta_{(14)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$

получим: $\Lambda_{14}^2 = 0$. (15)

Таким образом доказана:

Теорема 2. а) Линии $\omega^2, \varpi^2 = f_1^4(\omega^2)$является двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^2 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, где $\Delta_{(12)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (13);

б) линии ω^3, $\overline{\omega}^3 = f_1^4(\overline{\omega}^3)$ являются двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^3 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(13)}\right)$ (где $\Delta_{(13)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (14);

в) линий $\omega^4, \omega^4 = f_1^4\left(\omega^4\right)$ являются двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^4 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$, (где $\Delta_{(14)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (15).

Из (11),(13) получим

Следствие. Если линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, то частичное отображение f_1^4 становится вырожденным.

Рассмотрим линию ℓ, принадлежащую двумерному распределению $\Delta_{(12)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Ее касательный вектор имеет вид $\vec{e} = (\ell^1\vec{e}_1 + \ell^2\vec{e}_2)$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\ell}}$ образа линии е в отображение f_1^4: $\vec{\bar{\ell}} = \ell^1\vec{b}_1 + \ell^2\vec{b}_2$.

Учитывая формул (10) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\ell}} = \left(\ell^1 b_1^1 + \ell^2 b_2^1\right)\vec{e}_1 + (\ell^1 b_1^1 + \ell^2)\vec{e}_2 + \ell^2 b_2^4 \vec{e}_4.$$

Отсюда получим:

$$\vec{\ell}, \vec{\bar{\ell}}, \overrightarrow{XF_1^4} \in \Delta_{(12)} \Leftrightarrow \ell^2 b_2^4 = 0,$$

где $b_i^j - j-$та координата вектора $\vec{b}_i$, $\quad b_2^4 = -\dfrac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4}$.

Следовательно имеем: либо

а) $\ell^2 = 0;$ либо б) $\Lambda_{12}^4 = 0.$ Из условия а) определяется линия ω^1, а из условия б) имеем, что линии ω^2 является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$.

Таким образом доказана

Теорема 3. Если линия ω^2 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$,то такая другая линия ℓ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ не может быть двойной линией этой пары.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(14)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{a}}$ линии $f_1^4(\gamma) = \bar{\gamma}:$ $\vec{\bar{a}} = a^1\vec{\bar{e}}_1 + a^4\vec{\bar{e}}_4$.

Учитывая (10), отсюда получим $\vec{\bar{a}} = (a^1\vec{e}_1 + a^4\vec{e}_4)\vec{e}_1 + (a^1 b_1^2 + a^4 b_4^2)\vec{e}_2$.

Из условия $\vec{a}, \vec{\bar{a}}, \overrightarrow{XF}{}_1^4 \in \Delta_{(14)}$ имеем: $a^1 b_1^2 + a^4 b_4^2 = 0.$ или

$$\frac{a^1}{a^4} = -\frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{11}^2}. \qquad (16)$$

Верно и обратное. Следовательно доказана

Теорема 4. Линия γ, принадлежащий распределению $\Delta_{(14)}$, является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию (16) .

Следствие. Если линия ω^4 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$, то ни какая другая линия, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$ не может быть двойной линией этой пары.

§2. О двойных линиях одного вырожденного частичного отображения, порождаемого заданным распределением

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in \; X, \vec{e}_3$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \tag{1}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Получается частичное отображение $\psi : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $\psi \;\; X \;\; = F_3^2$. Присоединим к области Ω_3^2 подвижной репер $\Re' = \;\; F_3^2, \vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4$, где векторы $\vec{m}_i$ определяются следующим образом. Продифференцируя обычным образом равенство (9) и учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3\right) = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\right)\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}d\vec{e}_3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{\Lambda_{32}^2 \;\; ^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i.$$

В силу равенства (4) отсюда получим:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell \quad \omega^m}{\Lambda_{32}^2 \;\; ^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i.$$

Введем обозначение:

$$B_{32m}^2 = \Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell.$$

Тогда, в силу равенства (3), отсюда имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{32m}^2\omega^m}{\Lambda_{32}^2 \;\; ^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i$$

или

$$d\vec{F}_3^2 = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{321}^2}{\Lambda_{32}^2 \;\; ^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{322}^2}{\Lambda_{32}^2 \;\; ^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B^2_{323}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{33}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B^2_{324}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{34}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i\right]\omega^4 .$$

Введем обозначения:

$$\vec{m}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B^2_{321}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{31}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i; \quad \vec{m}_2 = \vec{e}_1 + \frac{B^2_{322}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{32}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{m}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B^2_{323}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{33}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i; \quad \vec{m}_4 = \vec{e}_1 + \frac{B^2_{324}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{34}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_i. \qquad (10)$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}^2_3 = \omega^1\vec{m}_1 + \omega^2\vec{m}_2 + \omega^3\vec{m}_3 + \omega^4\vec{m}_4 . \qquad (11)$$

Так как заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе [5] получим:

$$\vec{m}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{31}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_2 + \frac{B^2_{321}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^4_{31}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_4; \quad \vec{m}_2 = \frac{B^2_{322}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^4_{32}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_4;$$

$$\vec{m}_3 = \left[1 + \frac{B^2_{323}}{(\Lambda^2_{32})^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^4_{33}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_4; \quad \vec{m}_4 = -\frac{\Lambda^2_{34}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_2 + \frac{B^2_{324}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4. \qquad (12)$$

Из условия линейной зависимости векторов $\vec{m}_i$ получим:

$$\Lambda^2_{34} = 0 \qquad (13)$$

или

$$B^2_{322}\Lambda^4_{33} - \Lambda^4_{32}\left[(\Lambda^2_{32})^2 + B^2_{323}\right] = 0 . \qquad (14)$$

Обратно, если выполнено одно из условий (13), (14), то отображение f^2_3 является вырожденным.

Таким образом доказана

Теорема 1. Частичное отображение $f^2_3 : \Omega \to \Omega^2_3$ является вырожденным тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий (13), (14).

Рассмотрим векторы $\vec{e}_4, \vec{m}_4, \overrightarrow{XF^2_3} = -\frac{1}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_3$.

$\vec{e}_4, \vec{m}_4, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(34)}$ имеем:

$$\Lambda_{34}^2 = 0. \qquad (15)$$

Следовательно, линии $\omega^4,\ f_3^2(\omega^4) = \omega^4$ являются двойными линиями частичного отображения f_3^2 (тем самым линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$) тогда и только тогда, когда имеем место равенство (15). Справедливо.

Следствие 1. Если линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$, то частичное отображение f_3^2 является вырожденным.

Линия $\omega^i,\ f_3^2(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения f_3^2, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f_3^2(X)$, пересекаются, либо параллельны [7].

Линия l называются двойной линией пары (f_3^2, Δ_p) (где Δ_p $-$ p-мерное распределение, определенное векторными полями $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$), если она является двойной линией отображения f_3^2 и принадлежит распределению Δ_p [7].

Рассмотрим векторы $\vec{e}_3, \vec{m}_3, \overrightarrow{XF_3^2} = -\dfrac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3$. Учитывая (12) получим, что $\vec{e}_3, \vec{m}_3, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(34)}$, т.е. линии $\omega^3, \overline{\omega}^3 = f_3^2(\omega^3)$ всегда являются двойными линиями частичного отображения f_3^2 (тем самым линия ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$).

Рассмотрим произвольную линию l принадлежащую распределению $\Delta_{(34)} = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{l} = l^3\vec{e}_3 + l^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{l}} = f_3^2(\vec{l}\,)$ линии $f_3^2(l) = \bar{l}$. Учитывая (10) имеем:

$$\vec{\bar{l}} = l^3\vec{m}_3 + l^4\vec{m}_4 = l^3 (m_3^3\vec{e}_3 + m_3^4\vec{e}_4) + l^4 (m_4^2\vec{e}_2 + m_4^3\vec{e}_3 + \vec{e}_4) =$$

$$= l^4 m_4^2\vec{e}_2 + (l^3 m_3^3 + l^4 m_4^3)\vec{e}_3 + (l^3 m_3^4 + 1\cdot l^4)\vec{e}_4,$$

где m_i^j – j-тая координата вектора $\vec{m}_i$.

Из условия $\vec{l}\,, \bar{\vec{l}}\,, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(34)}$ получим: $l^4 m_4^2 = 0$, где $l^4 \neq 0$ (т.к. линия l не совпадает с линией ω^3). Следовательно имеем $m_4^3 = 0$, т.е. $\Lambda_{34}^2 = 0$. Мы получим условие (13). Таким образом доказана

Теорема 2. Если линия ω^4 является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$, то никакая другая линия (отличная от линий ω^3, ω^4), принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, не может быть двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_2, \vec{m}_2, \overrightarrow{XF_3^2}$. Из условия $\vec{e}_2, \vec{m}_2, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(23)}$ получим:

$$\Lambda_{32}^4 = 0. \tag{16}$$

Следовательно, линии $\omega^2, \bar{\omega}^2 = f_3^2(\omega^2)$ являются двойными линиями частичного отображения f_3^2 (тем самым линия) ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(23)})$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (16).

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(23)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\bar{\vec{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_3^2(\gamma)$. Учитывая (10)

$$\bar{\vec{\gamma}} = \gamma^2\vec{m}_2 + \gamma^3\vec{m}_3 = \gamma^2 (m_2^3\vec{e}_3 + m_2^4\vec{e}_4) + \gamma^3 (m_3^3\vec{e}_3 + m_3^4\vec{e}_4) =$$

$$= (\gamma^2 m_2^3 + \gamma^2 m_3^3)\vec{e}_3 + (\gamma^2 m_2^4 + \gamma^3 m_3^4)\vec{e}_4,$$

где m_i^j – j-тая координата вектора $\vec{m}_i$. Из условия $\vec{\gamma}, \bar{\vec{\gamma}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(23)}$ получим: $\gamma^2 m_2^4 + \gamma^3 m_3^4 = 0$. Отсюда имеем:

$$\frac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\frac{m_2^4}{m_3^4}.$$

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\frac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{33}^4} \tag{17}$$

Обратно, если имеет место условие (17), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(23)}$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(23)})$.

Таким образом справедлива

Теорема 3. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(23)}$, является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(23)})$ тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию (17).

Из (16), (17) получим, что справедливо

Следствие 2. Если линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(23)})$, то эта пара не имеет других (кроме линий ω^2, ω^4) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(23)}$.

Из условия $\vec{e}_1, \vec{m}_1, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(31)}$ получим:

$$\Lambda_{31}^2 = 0, \Lambda_{31}^4 = 0. \tag{18}$$

Геометрических смысл этих равенств заключаются в следующем: $\vec{\Lambda}_{31} = \vec{0}$, где $\vec{\Lambda}_{31} = d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4$.

Следовательно, если имеет место условия (17), то линии $\omega^1, \overline{\omega}^1 = f_3^2(\omega^1)$ являются двойными линиями частичного отображения f_3^2, а линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(13)})$.

Теперь рассмотрим произвольную линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(13)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f_3^2(\beta)$:

$$\vec{\vec{\beta}} = \beta^1\vec{m}_1 + \beta^3\vec{m}_3 = \beta^1\left(\vec{e}_1 + m_1^2\vec{e}_2 + m_1^3\vec{e}_3 + m_1^4\vec{e}_4\right) + \beta^3\left(m_3^3\vec{e}_3 + m_3^4\vec{e}_4\right) =$$
$$= \beta^1\vec{e}_1 + \beta^1 m_1^2\vec{e}_2 + \left(\beta^1 m_1^3 + \beta^3 m_3^3\right)\vec{e}_3 + \left(\beta^1 m_1^4 + \beta^3 m_3^4\right)\vec{e}_4 .$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\vec{\beta}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(13)}$ получим:

$$\begin{cases} \beta^1 m_1^2 = 0; \\ \beta^1 m_1^4 + \beta^3 m_3^4 = 0. \end{cases}$$

Из первого равенства имеем $m_1^2 = 0$ (т.к. $\beta^1 \neq 0$). Из второго получим:

$$\frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{m_1^4}{m_3^4}.$$

Учитывая (12) эти условия имеют вид:

$$\Lambda_{31}^2 = 0. \tag{19}$$

$$\frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{33}^4}. \tag{20}$$

Обратно если имеют места равенства (19) и (20), то линия β является двойной линией пары $\left(F_3^2, \Delta_{(13)}\right)$. Таким образом справедлива

Теорема 4. Произвольная линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$ является двойной линией пары $\left(F_3^2, \Delta_{(13)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям (19) и (20).

Из (19), (20), (18) получим, что справедливо

Следствие 3. Если линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(F_3^2, \Delta_{(13)}\right)$, то это пара не имеет других (кроме линий ω^1, ω^4) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(13)}$.

§3. Геометрия частичного отображения 4-мерного евклидова пространства, порождаемого заданным распределениям

В области Ω евклидова пространства E_4 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \{X, \vec{e}_i\}$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1, С. 481-482], [2, с. 348] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе $\sum_4$ для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети $\sum_4$, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda^k_{j\ell}\omega^j_i \wedge \omega^\ell = d\Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j_\ell \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda^k_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j \wedge \omega^j - \Lambda^k_{j\ell}\omega^j_i \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda^k_{ij} - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j - \Lambda^k_{\ell j}\omega^\ell_i\right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [3, с. 432] отсюда имеем:

$$d\Lambda^k_{ij} - \Lambda^k_{i\ell}\omega^\ell_j - \Lambda^k_{\ell j}\omega^\ell_i = \Lambda^k_{ijm}\omega^m$$

или

$$d\Lambda^k_{ij} = B^k_{ijm}\omega^m , \tag{5}$$

где $B^k_{ijm} = \Lambda^k_{ijm} + \Lambda^k_{i\ell}\Lambda^\ell_{jm} + \Lambda^k_{\ell j}\Lambda^\ell_{im}$.

Система величин $\Lambda^k_{ij}, \Lambda^k_{ijm}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$\begin{aligned} d_1\vec{e}_1 &= \Lambda^2_{11}\vec{e}_2 , \\ d_1\vec{e}_2 &= \Lambda^1_{21}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{21}\vec{e}_3 , \\ d_1\vec{e}_3 &= \Lambda^2_{31}\vec{e}_2 + \Lambda^4_{31}\vec{e}_4 , \\ d_1\vec{e}_4 &= \Lambda^3_{41}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

и

$$\Lambda^3_{11} = -\Lambda^1_{31} = 0 ,\ \Lambda^4_{11} = -\Lambda^1_{41} = 0 , \tag{6}$$

$$\Lambda^4_{21} = -\Lambda^2_{41} = 0 . \tag{7}$$

Здесь $k^1_1 = \Lambda^2_{11}$, $k^1_2 = \Lambda^3_{21}$, $k^1_3 = \Lambda^4_{31}$ - первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4, С. 475-491] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети $\tilde{\Sigma}_4$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \tag{8}$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть $\sum_4$ в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [5, С. 212-219], если реперы $\Re_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети $\sum_4$ одновременно.

Пусть сеть $\sum_4$ является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\sum}_4$. Рассмотрим псевдофокус $F_4^3 \in (X,\vec{e}_4)$, определяемый радиус-вектором

$$\vec{F}_4^3 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4. \tag{9}$$

Когда точка X смещается в области Ω, точка $F_4^3 \in (X,\vec{e}_4)$ описывает свою область $\Omega_4^3 \subset E_4$. Получим частичное отображение $f: \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f(X) = F_4^3$.

Продифференцируя обычным образом равенство (9) получим:

$$d\vec{F}_4^3 = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\right)\vec{e}_4 - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}d\vec{e}_4.$$

Учитывая (9) отсюда имеем:

$$d\vec{F}_4^3 = \omega^i\vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{43}^3}{{\Lambda_{43}^3}^2}\vec{e}_4 - \frac{1}{\Lambda_{43}^3}\omega_4^i\vec{e}_i.$$

В силу равенств (3), (4) последнее равенство имеет вид:

$$d\vec{F}_4^3=\omega^i\vec{e}_i+\frac{B^3_{43m}\omega^m}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{4m}\omega^m}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k=\left[\vec{e}_1+\frac{B^3_{431}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k\right]\omega^1+$$

$$+\left[\vec{e}_2+\frac{B^3_{432}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k\right]\omega^2+\left[\vec{e}_3+\frac{B^3_{433}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k\right]\omega^3+$$

$$+\left[\vec{e}_4+\frac{B^3_{434}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k\right]\omega^4,$$

где $B^3_{43m}=\Lambda^3_{43m}+\Lambda^3_{4\ell}\Lambda^\ell_{3m}+\Lambda^3_{\ell 3}\Lambda^\ell_{4m}$, $d\Lambda^3_{43}=B^3_{43m}\omega^m$.

Введем обозначения:

$$\vec{c}_1=\vec{e}_1+\frac{B^3_{431}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k;\qquad \vec{c}_2=\vec{e}_2+\frac{B^3_{432}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_3=\vec{e}_3+\frac{B^3_{433}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k;\qquad \vec{c}_4=\vec{e}_4+\frac{B^3_{434}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4-\frac{\Lambda^k_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_k.$$

Тогда получим:

$$d\vec{F}_4^3=\omega^1\vec{c}_1+\omega^2\vec{c}_2+\omega^3\vec{c}_3+\omega^4\vec{c}_4.$$

Область Ω^3_4 отнесем к подвижному реперу $\Re'=\{F_4^3,\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3,\vec{c}_4\}$.

Так как сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, координатные векторы репера $\Re'$ имеют вид:

$$\begin{aligned}&\vec{c}_1=\vec{e}_1-\frac{\Lambda^3_{41}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3+\frac{B^3_{431}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4;\quad \vec{c}_2=-\frac{\Lambda^1_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1+\vec{e}_2-\frac{\Lambda^3_{42}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_3+\frac{B^3_{432}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4;\\ &\vec{c}_3=-\frac{\Lambda^1_{43}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1+\frac{B^3_{433}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\vec{e}_4;\qquad \vec{c}_4=-\frac{\Lambda^1_{44}}{\Lambda^3_{43}}\vec{e}_1+\left(1+\frac{B^3_{434}}{{\Lambda^3_{43}}^2}\right)\vec{e}_4.\end{aligned}\tag{10}$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $f:\Omega\to\Omega^3_4$ является невырожденным.

Потребуя линейной зависимости векторов $\vec{c}_i$ получим:

$$\Lambda^3_{41}\left(\Lambda^1_{44}B^3_{433}-\Lambda^1_{43}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2+B^3_{434}\right]\right)=0,\tag{11}$$

где

$$B^3_{433} = -\vec{e}_3 d_3 \vec{k}_{13}, \quad B^3_{434} = -\vec{e}_4 d_4 \vec{k}_{13}, \tag{12}$$

$\vec{k}_{13} = \Lambda^4_{33}\vec{e}_4 -$ вектор первой кривизны линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$, $k^3_2 = \Lambda^1_{43} = -\Lambda^4_{13}$ – вторая кривизна линии ω^3, $k^4_1 = \Lambda^1_{44} = -\Lambda^4_{14}$ – первая кривизна линии ω^4, $k^3_1 = \Lambda^4_{33} = -\Lambda^3_{43}$ – первая кривизна линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из (11) имеем: а) $\Lambda^3_{41} = 0$ или

$$\text{б) } \Lambda^1_{44} B^3_{433} = \Lambda^1_{43}\left[\left(\Lambda^3_{43}\right)^2 + B^3_{434} \right]. \tag{13}$$

Справедлива

Теорема 1. Частичное отображение $f : \Omega \to \Omega^3_4$ является вырожденным тогда и только тогда, когда выполнены одно из условий а), б).

Геометрический смысл условий а), б) заключается в следующем, соответственно:

а) $d_1\vec{e}_4 = \vec{0}$ (т.е. $\Lambda^3_{41} = 0$, где Λ^3_{41} третья кривизна линии ω^{13} сети $\tilde{\Sigma}_4$);

б) $k^3_2\left[\left(k^3_1\right)^2 - \vec{e}_4 d_4 \vec{k}_{13} \right] = k^4_1 \left(\vec{e}_4 d_3 \vec{k}_{13}\right)$.

Рассмотрим двумерные распределения $\Delta_{ij} = (X, \vec{e}_i, \vec{e}_j)$ $(i, j = 1,2,3,4, \quad i \neq j)$, определяем касательными векторами $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ к линиям ω^i, ω^j циклической сети Френе и найдем их векторы средних кривизны [6, С. 215-229]. Через $\vec{M}_{ij}$ обозначим вектор средней кривизны двумерного распределения Δ_{ij}. Тогда имеем:

$$\vec{M}_{12} = \frac{1}{2}\left[(\Lambda^3_{11} + \Lambda^3_{22})\vec{e}_3 + (\Lambda^4_{11} + \Lambda^4_{22})\vec{e}_4\right].$$

Так как сеть является циклической сетью Френе, отсюда получим:

$$\vec{M}_{12} = \frac{1}{2}\Lambda^3_{22}\vec{e}_3,$$

где Λ^3_{22} - первая кривизна линии ω^2 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$.

Аналогичным образом найдем:

$\vec{M}_{13}=\frac{1}{2}(\Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2+\Lambda_{33}^{4}\vec{e}_4)$; $\vec{M}_{14}=\frac{1}{2}\Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2$; $\vec{M}_{23}=\frac{1}{2}\Lambda_{33}^{4}\vec{e}_4$; $\vec{M}_{24}=\frac{1}{2}(\Lambda_{22}^{3}\vec{e}_3+\Lambda_{44}^{1}\vec{e}_1)$;

$\vec{M}_{34}=\frac{1}{2}\Lambda_{44}^{1}\vec{e}_1$.

Отсюда очевидно, что

$$\vec{M}_{13}=\vec{M}_{14}+\vec{M}_{23};\quad \vec{M}_{24}=\vec{M}_{12}+\vec{M}_{34}.$$

Так как $\Lambda_{11}^{2}, \Lambda_{33}^{4}, \Lambda_{44}^{1}$ - первые кривизны линий $\omega^1, \omega^3, \omega^4$ (соответсвенно) циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$, то векторы $\vec{M}_{12}, \vec{M}_{13}, \vec{M}_{14}, \vec{M}_{23}, \vec{M}_{24}, \vec{M}_{34}$ не могут быть нулевыми векторами, т.е. двумерные распределения.

$\vec{\Delta}_{12}, \vec{\Delta}_{13}, \vec{\Delta}_{14}, \vec{\Delta}_{23}, \vec{\Delta}_{24}, \vec{\Delta}_{34}$ не могут быть минимальными [6, С. 215-229].

Рассмотрим трехмерные распределения $\Delta_{ijk}=(X,\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k)$, определяемые касательными векторами $\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k$ к линиям $\omega^i, \omega^j, \omega^k$ сети $\tilde{\Sigma}_4$ и найдем их вектора средних кривизн:

$\vec{M}_{123}=\frac{1}{3}\Lambda_{33}^{4}\vec{e}_4$; $\vec{M}_{124}=\frac{1}{3}\Lambda_{22}^{3}\vec{e}_3$; $\vec{M}_{234}=\frac{1}{3}\Lambda_{44}^{1}\vec{e}_1$; ; $\vec{M}_{134}=\frac{1}{3}\Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2$.

Эти вектора тоже не могут быть нулевыми векторами, т.к. сеть $\tilde{\Sigma}_4$- циклическая сеть Френе. Следовательно, трехмерные распределения Δ_{ijk} $(i<j<k)$ не могут быть минимальными.

Таким образом доказана

Теорема 2. а) Если сеть Френе является циклической сетью Френе, то все трехмерные и двумерные распределения, определяемые касательными к линиям этой сети, не могут быть минимальными распределениями.

б) Между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределении существуют связи следующего вида:

$$2\vec{M}_{13}=3(\vec{M}_{123}+\vec{M}_{134});\quad 2\vec{M}_{24}=3(\vec{M}_{124}+\vec{M}_{234}).$$

$$2\vec{M}_{14}=3\vec{M}_{134};\quad 2\vec{M}_{34}=3\vec{M}_{234};\ 2\vec{M}_{23}=3\vec{M}_{123}.$$

Линии ω^i, $f_4^3(\omega^i)=\overline{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения f_4^3, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f_4^3(X)$ пересекаются, либо параллельны [7. С. 19-25].

Рассмотрим векторы $\vec{e}_4, \vec{c}_4 = f_4^3(\vec{e}_4)$, $\overrightarrow{XF}_4^3 = -\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4$, где $\vec{c}_4 = \frac{\Lambda_{44}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \left(1+\frac{B_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\right)\vec{e}_4$. Отсюда видно, что эти векторы компланарны, т.е. $\vec{e}_4, \vec{c}_4, \overrightarrow{XF}_4^3 \in (X, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$. Следовательно, линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ всегда является двойной линией отображении f_4^3. Аналогично, рассмотрим векторы $\vec{e}_3, \vec{c}_3 = f_4^3(\vec{e}_3)$, $\overrightarrow{XF}_4^3$, где $\vec{c}_3 = -\frac{\Lambda_{43}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \frac{B_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4$.

Из условия компланарности этих векторов получим $\Lambda_{43}^1 = 0$, т.е. $\vec{e}_3, \vec{c}_3, \overrightarrow{XF}_4^3 \in (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \Leftrightarrow \Lambda_{43}^1 = 0$, где Λ_{43}^1 - вторая кривизна линии ω_i сети $\tilde{\Sigma}_4$. Линия ω_i сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда $\Lambda_{43}^1 = 0$.

Из условия компланарности вектора $\vec{e}_2, \vec{c}_2$, $\overrightarrow{XF}_4^3$ получим:

$$\Lambda_{42}^1 = 0,\ \Lambda_{43}^2 = 0. \tag{14}$$

Следовательно, линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда выполнены условия (14), геометрический смысл которых заключается в следующем:

$$d_2\vec{\Lambda}_{14} = \Lambda_{42}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{42}^3\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Рассмотрим векторы: $\vec{e}_1, \vec{c}_1 = f_4^3(\vec{e}_1)$, $\overrightarrow{XF}_4^3 = -\frac{1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_4$, где

$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{41}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4$. $\vec{e}_1, \vec{c}_1, \overrightarrow{XF}_4^3 \in (X, \vec{e}_1, \vec{e}_4) \Leftrightarrow \Lambda_{41}^3 = 0$.

Следовательно, линия ω^1 сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$ является двойной линией частичного отображения f_4^3 тогда и только тогда, когда $\Lambda_{41}^3 = -\Lambda_{31}^4 = 0$, где Λ_{31}^4 - третья кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$.

Из вышеизложенного следует

Теорема 3. Линии $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$ являются двойными линиями частичного отображения $f^3{}_4 : \Omega \to \Omega_4^3$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1), 2), 3), соответственно:

$$1)\ \Lambda_{41}^3 = 0; \quad 2)\ \Lambda_{42}^1 = 0;\ \Lambda_{42}^3 = 0; \quad 3)\ \Lambda_{43}^1 = 0 \tag{15}$$

Из (13) и (15) получим:

Следствие. Если линия ω^1 сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$ является двойной линией частичного отображения f_4^3 (т.е. $\Lambda_{41}^3 = 0$), то это отображение становится вырожденным.

Рассмотрим случай когда линия ω^1 сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$ не является двойной линией отображения f_4^3 и оно является вырожденным. Тогда из условия (11) имеем:

$$\Lambda_{44}^1 B_{433}^3 - \Lambda_{43}^1 [(\Lambda_{43}^3)^2 + B_{434}^3] = 0. \tag{16}$$

В этом случае, если линия ω^3 сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$ является двойной линией отображения f_4^3 (т.е. $\Lambda_{43}^1 = 0$), то из (16) получим: $\Lambda_{44}^1 B_{433}^3 = 0$, где $\Lambda_{44}^1 \neq 0$. Следовательно имеем: $B_{433}^3 = 0$ геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\vec{e}_3 d_3 \vec{k}_{13} = 0. \tag{17}$$

Выводы

1. Поставленная цель проекта почти выполнена.
2. Получены следующие результаты:

1) Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии ω^a, $\overline{\omega}^a = f_1^4(\omega^a)\ (a = 2,3,4)$ являлись двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^a циклической сети Френе являлась двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(1a)}\right)$, где $\left(\Delta_{(1a)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_a)\right)$- двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_1, \vec{e}_a$.

2)Доказано, что если линия ω^2 циклической сети Френе является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, то никакая другая линия, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)}$, не может быть двойной линией этой пары.

3)Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, являлась двойной линией пары$\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$.

4)В случае, когда сеть Σ_4 является циклической сетью Френе [5], доказано, что если линия ω^4 циклической сетью Френе является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$, то никакая другая линия (отличная от линией ω^3, ω^4), принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, не может быть двойной линией этой пары;

5)Найдены необходимое достаточное условия для того, чтобы любая линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(32)})$;

6)В случае , когда сеть Френе является циклической сетью Френе, доказано что все трехмерные и двумерные распределения, определяемые касательными к линиям этой сети, не могут быть минимальными распределениями.

7) Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ являлись двойными линями частичного отображения $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$.

Литература

1. Ж.А. Артыкова Некоторые свойства присоединенной поверхности графика отображения // Наука и новая технология, Вестник ИСРиП,

№1 – Бишкек, 2014. – С. 3-6.

2. Базылев В.Т. О многомерных сетях и преобразованиях // Итоги науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 138-164.

3. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей // Ученые записки. Т.243. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1965. – С. 29-37.

4. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.

5. Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей // Изв. вузов. Математика, 1967. Т.9. – С. 3-11.

6. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространств // В кн: III Межвузовская конференция по проблемам геометрии. Тезисы докладов. – Казань: Казанский университет, 1967. – С. 8.

7. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств // Ученые записки. Т.1., № 374. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. – С. 28-40.

8. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространства // Ученые записки. Т.1. №374. – Москва: МГПИ им. В.И.Ленина, 1970. – С. 41-51.

9. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства // Монография. – Ош, 2003. – С. 212-219.

10. Матиева Г., Папиева Т.М. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.

11. Матиева Г., Папиева Т. Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.

12. Матиева Г. Необходимое и достаточное условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении евклидова пространства // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 259-264.

13. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва, Наука, 1967. – С. 481-482.

14. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии / И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк // Москва: ИЛ, 1948. Т.II. – 348 с.

15. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии // М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.

16. Matieva G., Papieva T.M. The double lines of a partial mapping of n - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. Almaty, June 30 – July 4, 2009. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 93-96.

17. Г. Матиева, Ч. А. Мустапакулова Об одном вырожденном частичном отображении, порождаемом заданной циклической сетью Френе // Сборник научных трудов II международной научно-практической конференции ученых. Бийск, 2014 г. – С. 113-117.

18. Г. Матиева, Ч. А. Мустапакулова, Т.М. Папиева О двойных линиях одного вырожденного частичного отображения евклидова пространства // Сборник научных трудов XI международной конференции студентов и молодых ученых. Россия, Томск, 2014. – С. 633-635.

19. Matieva G., Artykova J., Djanibekov T. About adjoined mapping tangent spaces of surfaces in Euclidean space // Abstracts, V Congress of the Turkic world mathematicans, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 2014. – P. 45.
20. Matieva G., Papieva T., Orkoshov S. Propereties of a partial mapping of E uclidean space , generated by the given set of smooth lines // Abstracts, V Congress of the Turkic world mathematicans, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 2014. – P. 46.
21. Tolstopyatov V., Matieva G., Obodoeva G. About a partial mapping of 4-dimensional Euclidean space? Generated by the given set of a smooth lines // Abstracts, V Congress of the Turkic world mathematicans, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 2014. – P. 55.

Приложение

Опубликованные статьи

1. Г.Матиева, Ж.А.Артыкова О частичном отображении 4-мерного евклидова пространства, порождаемом заданной сетью гладких линий \\ Международный научный журнал “Символ науки”. Уфа, 2015 г – С. 10-16.

2. Matieva G., doctor of ph.-m.s., Artykova J. (Osh) About a partial mapping of 4-dimensional Euclidean space generated by the given set of smooth lines // Abstracts the Issyk-Kul International Mathematical Forum. – Бишкек, 2015. – P. 18.

3. Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева О двойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий // Международный научный журнал “Инновационная наука”. –. Уфа, 2015. – С. 26-29.

4. О свойствах одного частичного отображения евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий \\ Международный научный журнал «Символ науки». Уфа, 2015г.-С.