Ош мамлекеттик университетинин ЖАРЧЫСЫ

ВЕСТНИК Ошского государственного университета

№3 - 2012

выпуск III

ISBN 9967-03-030-5

ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР СЕРИЯСЫ

«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ»

ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ

2012-жыл, №3, III чыгарылыш

Башкы редактор,
ф.и.д., профессор Исаков К.А.

Башкы редактордун орун басары,
б.и.д., профессор Жумабаева Т.Т.

ISBN 9967-03-030-5

ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР СЕРИЯСЫ

РЕДАКЦИЯЛЫК КОЛЛЕГИЯ:

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКАЛЫК ИЛИМДЕРИ:

Математика:

1. Алымкулов К.А. - ф.м.-и.д., проф.
2. Каримов С.К. - ф.м.-и.д., проф.
3. Матиева Г.М. - ф.м.-и.д., проф.
4. Сатаров Ж.С. - ф.м.-и.д., проф.

Механика:

1. Кенжаев И.Г. - тех.и.д., проф.

Физика:

1. Арапов Б.А. - ф.м.-и.д., проф.
2. Саипбекова А.М. - ф.м.-и.д., проф.
3. Ташполотов И.Т. - ф.м.-и.д., проф.

ТЕХНИКАЛЫК ИЛИМДЕРИ:

***Энергетика*:**

1. Кенжаев И.Г. - тех.и.д., проф (теплофизика, теор. механика).
2. Айдарбеков З.Ш. **-** тех.и.д., доц.

Ош МУнун редакциялык-басма кеңешинин чечими менен басууга сунушталды

****Берилген материалдардын сабаттуулук деңгээлине, илимий мазмунуна, автор, рецензиялаган окумуштуу жана сунуштаган кафедра жооптуу***

МАЗМУНУ

1. ***А.М. Абдукаримов.*** О квадратичной интегрируемости решений систем линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра-Стильтеса второго порядка с частными производными на неограниченных областях …… 9

2. ***А.М. Абдукаримов.*** Об ограниченности решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на бесконечных областях …… 16

3. ***Ч.Х. Абдуллаева.*** Метод униформизации для сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с регулярной особой точкой, в случае когда, решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет логарифмический рост в особой точке …….. 23

4. ***К.С. Алыбаев, Т.К. Нарымбетов, А.Б. Мурзабаева.*** Устойчивость решений сингулярной возмущенных уравнений и область притяжения точки покоя …… 28

5. ***К. Алымкулов, Ч.Х. Абдуллаева.*** Метод униформизации для решения сингулярного возмущенного уравнения второго порядка с регулярной особой точкой …… 30

6. ***К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков.*** Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка …… 35

7. ***К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков, Д.А. Турсунов.*** Асимптотическое разложение решения сингулярно-возмущенного уравнения с двумя точками поворота ***……*** 40

8. ***Г. Анарбаева, М. Азимбаев, М. Маматкулова.*** Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы линейных дифференциальных уравнений в особо критическом случае …….. 44

9. ***А. Асанов, Т.О. Бекешов, С.М. Чоюбеков.*** О решении некласического интегального уравнения I рода в пространстве не прерывных функции …… 48

10 ***З.А. Асилова, В.Т. Мураталиева, А. Мамбеткожоева, Т.А. Абдукеримов.*** Кыргызча математикалык окуу китептеринин өнүктүрүлүшү ……. 54

11. ***А.Ж. Аширбаева.*** Исследование решений квазилинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка 57

гиперболического типа …….

12. ***С. Бабаев, З.М. Бекмаматов.*** Задачи сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка …… 61

13. ***К. Байгазиев, Т. Акматова.*** Терс эмес бүтүн сандарды кошуу жана кемитүү амалдарын көптүктөр теориясы менен негиздөө …….. 66

14. ***Т.А. Золотарева.*** Вычисление коэффициентов парной, множественной и частной корреляции на примере …….. 73

15. ***Ж. А. Зулпукаров.*** Единственность решения краевой задачи для вырождающегося уравнения в частных производных второго порядка ……. 76

16. ***И.К. Карасаев.*** О парных уравнениях ……. 80

17. ***И.К. Карасаев.*** Устранение носителей поляризации 83

18. ***С.Каримов.*** Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае (1) ……. 87

19. ***С. Каримов.*** Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае (2) ……. 93

20. ***С. Каримов, И. Бектеналиев.*** Равномерные приближения решения сингулярно – возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае (3) ……. 99

21. ***А.Ж. Кудуев, Абдыкалык кызы Ж., Б.Ш. Шумилов.***

Кубические мультивейвлеты, ортогональные многочленам, и трассирование автомобильных дорог …….. 105

22. ***Г. Матиева, Ж.А. Артыкова.*** Свойства отображения трехмерной поверхности в трехмерную плоскость в евклидовом пространстве …… 110

23. ***Т.Ы. Саадалов.*** Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике …….. 114

24. ***А. Сопуев, Т.Ы. Саадалов.*** Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области …… 122

25. ***А.Сопуев, А.Э. Сатаров.*** Задача сопряжения для нелинейных уравнений в 128

частных производных четвертого порядка …….

26. ***А.К. Тойгонбаева.*** Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода …….. 138

27. ***А.М. Токторбаев***. Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений реагирующей смеси газов 142

28. ***Д.А. Турсунов, Б.М. Шумилов, А.Ж. Кудуев, Э.А.Турсунов.*** Мультивейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка 147

29. ***Э.А.Турсунов, М.В. Колупаев, Б.М.Шумилов.*** Применение мультивейвлетов и графического процессора при визуализаций данных лазерного сканирования автомобильных дорог …….. 152

30. ***А. Халматов.*** Аналог метода погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка …….. 157

31. ***У.З. Эркебаев, Д.А. Турсунов.*** Применение кубических мультвейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка с условием Неймана ……. 163

32. ***З.Ш. Айдарбеков, А.М. Жороев, Ж.А. Жумакулов.*** Исследование и определение параметров аккумулирующих систем, входящих в энергосистему …… 168

33. ***Б.А. Арапов, Б.А. Каденова, М.М. Садырова.*** Механизмы радиационного дефектообразования в щелочно - галоидных кристаллах ……. 172

34. ***А. Багышев, Ташполотов Ы.,*** Фрактальные антенны и методы их проектирования ……. 178

35. ***М. К. Жанкуанышев.*** Факторы выбора и критерии оптимизации режима нейтрали ……. 182

36. ***Н.А. Калдыбаев, К.Ч. Кожогулов.*** Концепция комплексного освоения малых месторождений нерудных строительных материалов Кыргызской Республики 187

37. ***Б.Э. Кудайбердиев.*** Комбинированная биоэнергетическая установка с двигателем Стирлинга …….. 191

38. ***А. Дж. Обозов, С. Насирдинова.*** О повышении к. п. д. термосифонной солнечной установки …… 194

39. ***И.А. Ормонова, М.Р.Ормонов.*** Моделирование беспроводных сенсорных сетей …… 197

40. ***И.А. Ормонова, М.Р. Ормонов.*** Интегральная оценка качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи …… 205

41. ***Ы.Дж. Осмонов, И.Э. Турдуев.*** Обоснование параметров устройств для загрузки камеры шерстопресса немытой шерстью 209

42. ***А.Б.Сатыбалдыев, Матисаков Т.К.*** Суу ысытуучу күн коллекторлорунун техникалык экономикалык эффективдүүлүгүн анализдөө 212

43. ***К.Т.Шадыханов, З.Ш. Айдарбеков, А.М. Жороев, Р.Ж.Ураимов.***

Анализ водных ресурсов Кыргызстана и перспектива использования малых водотоков для выработки электроэнергии на малых и микроГЭС …….. 215

Мүчөлтойлор

44. ***Алымкулов Келдибай*** 220

45. ***Каримов Салы***..... 221

Эстутум

46. ***Турмашев Эркинбай***
..... 222

47. ***Заитов Ферран*** 223

ПАЙГАМБАР ЖАШЫҢ КУТ БОЛСУН, ОШ МУ!

Ош шаары – дүйнөдөгү байыркы шаарлардын бири. Ырыскы-берекеси төгүлүп турган Ош шаарындагы билим журту болгон Ош мамлекеттик университетинин жамааты быйылкы жылы 60 жылдык мааракесин эл журтубуздун алдында жүзү жарык белгилеп жатат.

Ош мамлекеттик университетинин өзөгү 1939-жылдан – Ош мугалимдер институтунан башталып, 1951-жылы мугалимдер институтунун базасында Ош мамлекеттик педагогикалык институту болуп түзүлгөн.

1992-жылы Кыргызстандын эгемендүүлүгүнүн алгачкы жылдарында Ош мамлекеттик университети аталып статусу жогорулаган.

Ош мамлекеттик университети геосаясий жагынан да уникалдуу аймакта жайгашкан. Ош МУ – эл жыш жайгашкан Фергана өрөөнүндөгү эң таанымал, көрүнүктүү университеттердин бири.

Ош шаары – Кытай Эл Республикасы, Өзбекстан, Тажикстан сыяктуу өлкөлөр менен чектешип, Улуу Жибек Жолун байланыштырып турган Кыргызстандын түштүк борбору.

Ош МУ башаты мөңгү сууларынан башталган кереметтүү Ак-Буура дарыясынын жээгинде, экинчи Мекке аталган ыйык Сулайман тоосунун этегинде жайгашкандыгы менен да айырмаланып, кайталангыс кооз жерде жайгашкан.

Университетте студенттер үчүн сапаттуу билим алууга бардык шарттар түзүлгөн. Билим берүүнүн автоматташтырылган системасы, окутуунун классикалык формасы жана инновациялык технологиялары кеңири колдонулат. Ош МУ өзүн коомчулуктун көзөмөлүндө турган ачык университет катары көрсөтүп келе жатат.

Студенттерибиз өзүнүн ыймандуулугу, окууга дилгирлиги менен, окутуучу профессорлорубуз илимий-педагогикалык, интеллектуалдык потенциалы, ал эми билим берүү базабыз алдыңкы технологиялары менен коомчулуктун алдында сыймыктана алат.

Ал эми алдыңкы бүтүрүүчүлөрүбүз Кыргызстандын, Американын, Европанын, Азиянын, белгилүү эл аралык мекеме ишканаларында, түрдүү абройлуу уюмдарда башкалардан профессионалдык, интеллектуалдык деңгээли төмөн эмес экендигин далилдеп ийгиликтүү иштеп жатышат.

Бүтүрүүчүлөрдүн арасында Эл мугалимдери, Эл артисттери, академиктер, мамлекеттик жана коомдук ишмерлер, министрлер, депутаттар, акимдер,

ОшМУга 60 жыл

саясатчылар, көрүнүктүү мугалимдер, дарыгерлер, юристтер, чыгаан журналисттер ж. б. тармактардын белгилүү өкүлдөрү бар.

Азыр университетте түрдүү багыттар боюнча 27 000ден ашуун студенттер окушат.

Бүгүн Ош МУда 27 мамлекеттен келген 1500дөн ашуун чет өлкөлүк студенттер да билим алышат.

60 жыл аралыгында Ош мамлекеттик университети да эли-журтубуз менен кошо кээде өсүп-өнүгүүдө болсо, кээде өсүүсү басаңдап, кээде өнүгүүнүн бийиктигине чыккан жылдары болду. Университеттин адистиктери жабылып, окуу корпустары башкага берилип кеткен учурларга кабылды.

Бирок кандай кырдаал болсо да ынтымактуу жамаатыбыз университетти сактап, чыңдап, бекемдеп өнүктүрүп келди.

Бүгүн мен университеттин ректору катары – Ош МУга өмүрүн, жаштык жигерин, билим, тажрыйбасын арнаган агай-эжейлердин асыл эмгегине башымды ийип таазим кылам. Сиздер өмүрүңүздөрдү эң асыл ишке арнадыңыздар. Сиздердин эмгегиңиздер менен Ош МУ бүгүн өзүнүн бараандуу ордун сактап дүйнөлүк билим берүүгө интеграцияланып жатат.

Ош МУ өнүгүүнүн жаңы сапаттык деңгээлине чыгуу үчүн өз башынан изденүүлөрдү, алга умтулууларды өткөрүп келүүдө.

Ал эми регионубуздагы келечекке ишенимдүү караган улан-кыздар, жаштар Ош МУнун студенти болууну самашат. Бизге мындан өткөн сыймык, мындан өткөн коомдук жоопкерчилик жок.

60 жыл айтканга оңой болгон менен ушул аралыкта бир коомдук система кыйрап, бир коомдук система жаңыдан түптөлдү. Бүтүндөй бир доор тарых бүктөмүндө калды.

60 жаш – биздин университеттин, жамааттын акыл-эси, тажрыйбасы толуп-ташып, жаштарга насаат, накыл айта турган кези.

60 жаш – адам өмүрү менен алып караганда пайгамбарлык курак.

Пайгамбар жашың кут болсун, Ош МУ!

Ош МУ – эли журтубузга, мамлекетибизге өзүнүн гумандуу нурун чачкан билим бешиги болуп жашай берет.

Исаков К.А.
Ош МУнун ректору, профессор

УДК 517.968

Абдукаримов А.М., ИТиПМ НАН КР г. Бишкек

О квадратичной интегрируемости решений систем линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра-Стильтеса второго порядка с частными производными на неограниченных областях

Бул макалада Вольтер-Стильтес тибиндеги эки өлчөмдүү интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн чексиз областтагы чектүү чыгарылыштар системалары боюнча маселелер каралат.

В этой статье изучается квадратичная интегрируемость решений систем на бесконечной области для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра-Стильтеса.

Abstract

In this paper we study the quadratic integrability of solutions of systems on an infinite domain for two-dimensional Volterra-Ctiltes integral equation.

Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$P(t,x)u_{tx}(t,x)+A(t,x)u_x(t,x)+B(t,x)u_t(t,x)+C(t,x)u(t,x)+\int_0^t M(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^x N(t,x,y)u(t,y)d\psi(y)+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=f(t,x),(t,x)\in G \qquad (1)$$

$G=\{(t,x):0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\}$, $(t,x)\in G$

с условиями

$$f(t,x)\in L^{2,n}_{\varphi,\psi}(G)\cap C(G), \qquad (f')$$

$$u(0,x)=0,\qquad x\in[0,\quad +\infty),$$

$$u(t,0)=0,\qquad t\in[0,\quad +\infty), \qquad (*)$$

где $P(t,x),A(t,x),B(t,x),C(t,x),M(t,x,s),K(t,x,s,y),N(t,x,y)$ - $n\times n$ мерные самосопряженные заданные матричные функции, $f(t,x)$ - заданная и $u(t,x)$ - неизвестная n - мерные вектор-функции; $(t,x)\in G$.

$\varphi(t)$, $\psi(x)$ - строго возрастающие дифференцируемые n - мерные вектор - функции соответственно в области $G=\{(t,x):0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\}$, тогда $u_x(t,x),u_t(t,x)$ определяется следующим равенством

$$u_x(t,x)=\frac{\partial u(t,x)d\psi(x)}{\partial\psi(x)dx}=\psi_x(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial\psi(x)},u_t(t,x)=\frac{\partial u(t,x)d\varphi(t)}{\partial\varphi(t)dt}=\psi_t(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial\varphi(t)}$$

$$u_{tx}(t,x)=\varphi_t(t)\psi_x(x)u_{\varphi\psi}(t,x).$$

Обозначим через $C(G)$ - пространство всех непрерывных функций на $G=\{(t,x)/\,0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\}$. Через $L^{2,n}_{\varphi,\psi}(G)$ обозначим пространство всех n - мерные вектор - функции $u(t,x)$ удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\|u(t,x)\|^2\,d\varphi(t)d\psi(x)<\infty.$$

В дальнейшем нам понадобятся легко доказуемые следующие леммы:

ЛЕММА 1. Пусть k – самосопряженная дифференцируемая матричная функция размера $n\times n$ и $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)$, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ – дифференцируемая вектор функция. Тогда справедливо соотношение

$$\left\langle k\vartheta,\vartheta_{\varphi(s)}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle k\vartheta,\vartheta\right\rangle_{\varphi(s)}-\frac{1}{2}\left\langle k_{\varphi(s)}\vartheta,\vartheta\right\rangle, \text{ где } \left\langle u,\vartheta\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_i\vartheta_i;$$

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых K,ν имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\nu_{\varphi(\tau)\psi(z)}\right\rangle=\left\langle K\nu\right\rangle_{\varphi(\tau)\psi(z)}-\left\langle K_{\varphi(\tau)}\nu\right\rangle_{\psi(z)}-\left\langle K_{\psi(z)}\nu\right\rangle_{\varphi(\tau)}+\left\langle K_{\varphi(\tau)\psi(z)}\nu\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\nu-n$ - мерный вектор.

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых K,ϑ имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\vartheta,\vartheta_{\varphi(s)\psi(y)}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle K\vartheta,\vartheta\right\rangle_{\varphi(s)\psi(y)}-\frac{1}{2}\left\langle K_{\varphi(s)}\vartheta,\vartheta\right\rangle_{\psi(y)}-\frac{1}{2}\left\langle K_{\psi(y)}\vartheta,\vartheta\right\rangle_{\varphi(s)}+$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle K_{\varphi(s)\psi(y)}\vartheta,\vartheta\right\rangle-\left\langle K\vartheta_{\varphi(s)},\vartheta_{\psi(y)}\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\vartheta(s,y)$ - n – мерный вектор.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции

$P(t,x)\psi_x(x)\varphi_t(t), A(t,x)\psi_x(x), B(t,x)\varphi_t(t), C(t,x), A_{\psi(x)}(t,x)\psi_x(x),\ B_{\varphi(t)}(t,x)\varphi_t(t)\in C_{n\times n}(G)$,

$A(t,x)\ge 0,\ \varphi_t(t)\ge 0,\psi_x(x)\ge 0, B(t,x)\ge 0$,

$C(t,x)-\frac{1}{2}A_{\psi(x)}(t,x)\psi_x(x)-\frac{1}{2}B_{\varphi(t)}(t,x)\varphi_t(t)\ge\alpha\cdot E,\ \alpha>0$ при *(t, x)∈ C(G),*

$P(t,x)\ge 0,\left[P(t,x)\psi_x(x)\varphi_t(t)-1\right]\ge\beta>0$

б) матричные функции $M(t,x,s), M_{\varphi(t)}(t,x,s), M_{\varphi(s)}(t,x,s), M_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\in C_{n\times n}(G_1)$,

$M(t,x,0)\ge 0,\ \ M_{\varphi(t)}(t,x,0)\le 0,$ при $(t,x)\in G$ и $M_{\varphi(s)}(t,x,s)\ge 0,\ M_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1=\{(t,x,s):0\le s\le t<\infty,0\le x<\infty\}$;

в) матричные функции $N(t,x,y), N_{\psi(x)}(t,x,y), M_{\psi(y)}(t,x,y),\ N_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\in C_{n\times n}(G_2)$,

$N(t,x,0)\ge 0$, $N_{\psi(x)}(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$ и $N_{\psi(y)}(t,x,y)\ge 0,\ \ N_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2=\{(t,x,s):0\le t<\infty,0\le y\le x<\infty\}$;

г) матричные функции

$K(t,x,s,y), K_{\psi(y)}(t,x,s,y), K_{\varphi(s)}(t,x,s,y), K_{\varphi(t)}(t,x,s,y), K_{\psi(x)}(t,x,s,y),\ K_{\phi(t)\phi(s)}(t,x,s,y),$

$K_{\phi(t)\psi(x)}(t,x,s,y), K_{\psi(x)\phi(s)}(t,x,s,y), K_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,s,y),\ K_{\phi(t)\psi(x)\psi(y)}(t,x,s,y),$

$K_{\phi(t)\psi(x)\phi(s)}(t,x,s,y),\ K_{\psi(x)\phi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)$ и $K_{\varphi(t)\psi(x)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\in C_{n\times n}(G_3)$,

$K_{\psi(y)}(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K_{\varphi(s)}(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$,

$K(t,x,0,0)\ge 0,\ K_{\phi(t)}(t,x,0,0)\le 0,\ K_{\psi(x)}(t,x,0,0)\le 0, K_{\phi(t)\psi(x)}(t,x,0,0)\ge 0$ при $(t,x)\in G$ и

$K_{\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\ge 0,\ K_{\varphi(t)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\le 0,\ K_{\psi(x)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\le 0,$

$K_{\varphi(t)\psi(x)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3=\{(t,x,s,y):0\le s\le t<\infty,0\le y\le x<\infty\};$,

д) для любых $u,\vartheta \in R^n$ $< -M_{\varphi(t)}(t,x,0)u,u > -2 < K(t,x,0,0)u,\vartheta > - < N_{\psi(x)}(t,x,0)\vartheta,\vartheta > \le 0$ при $(t,x) \in G$, то задача (1) – (*) имеет единственное решение в $L^{2,n}_{\varphi,\psi}(G) \cap C_n(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части системы (1) скалярно умножим на $u(t,x)$ и проинтегрируем по области $G_{tx} = \{(s,y): 0 \le s \le t,\ 0 \le y \le x\}$. Тогда имеем

$$\int_0^t\int_0^x < P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y) > d\varphi(s)d\psi(y) + \int_0^t\int_0^x < A(s,y)\psi_y(y)u_{\psi(y)}(s,y),$$

$$,u(s,y) > d\varphi(s)\,d\psi(y) + \int_0^t\int_0^x < B(s,y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)}(s,y),u(s,y) > d\varphi(s)\,d\psi(y) +$$

$$+\int_0^t\int_0^x < C(s,y)u(s,y),u(s,y) > d\varphi(s)\,d\psi(y) + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)u(\tau,y),u(s,y) > \times$$

$$\times d\varphi(\tau)\,d\psi(y)\,d\varphi(s) + \int_0^t\int_0^x\int_0^y < N(s,y,z)u(s,z),u(s,y) > d\psi(z)\,d\psi(y)\,d\varphi(s) +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)u(\tau,z),u(s,y) > d\psi(z)\,d\phi(\tau)\,d\psi(y)\,d\phi(s) =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < f(s,y),u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) \qquad (2)$$

На основании леммы 1 первое слагаемое левой части системы (2) преобразуется к следующему виду

$$\int_0^t\int_0^x < A(s,y)\psi_y(y)u_{\psi(y)}(s,y),u(s,y) > d\varphi(s)d\psi(y) = \frac{1}{2}\int_0^t < A(s,x)\psi_y(y)u(s,x),u(s,x) > d\varphi(s) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < A_{\psi(y)}(s,y)\psi_y(y)u(s,y),u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3)$$

Аналогично для второго слагаемого получаем

$$\int_0^t\int_0^x < B(s,y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)}(s,y),u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) = \frac{1}{2}\int_0^x < B(t,y)\varphi_s(s)u(t,y),u(t,y) > d\psi(y) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < B_{\varphi(s)}(s,y)\varphi_s(s)u(s,y),u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (4)$$

Преобразуем четвертое слагаемое в левой части соотношения (2). Используя формулу интегрирования по частям и формулу Дирихле, получим

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)u(\tau,y),u(s,y) > d\varphi(\tau)\,d\psi(y)\,d\varphi(s) = -\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\varphi(\tau)} \times$$

$$\times\left(\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\varphi(\xi)\right)d\varphi(\tau),u(s,y) > d\psi(y)\,d\varphi(s) = \int_0^t\int_0^x < M(s,y,0)\left(\int_0^s u(\xi,y)\,d\varphi(\xi)\right),$$

$$u(s,y) > d\psi(y)\,d\varphi(s) + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < M_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\varphi(\xi)\right),u(s,y) > \times$$

$$\times\, d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s) = = \frac{1}{2}\int_0^t < M(t,y,0)\left(\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right),\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi) > d\psi(y) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_{\varphi(s)}(s,y,0)\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi), \int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi) >$$

$$d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi), \int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi) > d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi), \int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s). \quad (5)$$

Аналогично получим для пятого слагаемого

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N(s,y,z)u(s,z), u(s,y) > d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s) = \frac{1}{2}\int_0^t <N(s,x,0)\int_0^x u(s,\nu)d\psi(\nu),$$

$$\int_0^x u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\varphi(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_{\psi(y)}(s,y,0)\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu), \int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu) > \times$$

$$\times d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_{\psi(z)}(s,x,z)\int_z^x u(s,\nu)d\psi(\nu), \int_z^x u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu), \int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s). \quad (6)$$

Для преобразования пятого слагаемого соотношения (2) используем лемму 2. Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)u(\tau,z), u(s,y) > d\psi(z)d\psi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s) = \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial\varphi(\tau)\partial\psi(z)}\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\phi(\xi)\right)d\psi(z)d\varphi(\tau), u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) =$$

$$=\int_0^t\int_0^x < K(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi), u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi), u(s,y) > d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\psi(z)}(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi), u(s,y) > d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right), u(s,y) > d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s). \quad (7)$$

Далее, используя лемму 3 и формулу Дирихле, из последнего соотношения получим

$$\int_0^t\int_0^x < \int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)u(\tau,z), u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau) > d\psi(y)d\varphi(s) = \frac{1}{2} < K(t,x,0,0)\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi), \int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > -\frac{1}{2}\int_0^t < K_{\varphi(s)}(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)\times$$

$$\times d\psi(\nu)d\varphi(\xi), \int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(s) - \frac{1}{2}\int_0^x < K_{\psi(y)}(t,y,0,0)\int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),$$

$$\int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(y)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)\times$$

$$d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(y)d\varphi(s)-\int_0^t\int_0^x < K(s,y,0,0)(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)),\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t < K_{\varphi(\tau)}(t,x,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < K_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,x,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s < K_{\varphi(\tau)\psi(y)}(t,y,\tau,0)\int_\tau^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(y)d\varphi(\tau)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau)\times$$

$$\times d\psi(y)d\varphi(s)-\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,0)\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_0^y u(s,\nu)d\nu > d\varphi(\tau)d\varphi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x < K_{\psi(z)}(t,x,0,z)\int_0^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\psi(z)\varphi(s)}(s,x,0,z)\int_0^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y < K_{\varphi(s)\psi(y)}(t,y,0,z)\int_0^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z)d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,0,z)\int_0^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > \times$$

$$d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)-\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\psi(z)}(s,y,0,z)\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_z^y u(s,y)d\psi(\nu) > \times$$

$$d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),$$

$$\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z)d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(t,y,\tau,z)$$

$$\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi) > d\varphi(\tau)\times$$

$$\times d\psi(z)d\varphi(s)-\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi),\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu) > d\psi(z)d\varphi(\tau)\times$$

$$\times d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),$$

$$\int_{\tau}^{s}\int_{z}^{y} u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi) > d\psi(z)\,d\varphi(\tau)\,d\psi(y)\,d\varphi(s) \tag{8}$$

Учитывая соотношения (3), (4), (5), (6), (7), (8), условия г) и формулу Дирихле, из (2) имеем

$$\int_0^t\int_0^x < P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y), u(s,y) > d\varphi(s)d\psi(y) +$$

$$+\int_0^t\int_0^x < \left\{C(s,y) - \frac{1}{2}\left[A_{\psi(y)}(s,y)\psi_y(y) + B_{\varphi(s)}(s,y)\varphi_s(s)\right]\right\}u(s,y), u(s,y) > d\psi(y)d\varphi(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t < A(s,x)\psi_x(x)u(s,x), u(s,x) > d\varphi(s) + \frac{1}{2}\int_0^x < B(t,y)\varphi_t(t)u(t,y), u(t,y) > d\psi(y) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x < M(t,y,0)\int_0^t u(\xi,y)\,d\varphi(\xi)\int_0^t u(\xi,y)\,d\varphi(\xi) > d\psi(y) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t < N(s,x,0)\int_0^x u(s,\nu)\,d\psi(\nu), \int_0^x u(s,\nu)\,d\psi(\nu) > d\varphi(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_{\psi(z)}(s,x,z)\int_z^x u(s,\nu)\,d\psi(\nu), \int_z^x u(s,\nu)\,d\psi(\nu) > d\psi(z)d\varphi(s) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\int_\tau^t u(\xi,y)\,d\varphi(\xi), \int_\tau^t u(\xi,y)\,d\varphi(\xi) > d\psi(y)d\varphi(\tau) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \Big[< M_{\varphi(s)}(s,y,0)\int_0^t u(\xi,y)\,d\varphi(\xi), \int_0^s u(\xi,y)\,d\varphi(\xi) > +$$

$$+2 < K(s,y,0,0)\int_0^s u(\xi,y)\,d\varphi(\xi), \int_0^y u(s,\nu)\,d\psi(\nu) > +$$

$$+ < N_{\psi(y)}(s,y,0)\int_0^y u(s,\nu)\,d\psi(\nu), \int_0^y u(s,\nu)\,d\psi(\nu) > \Big] d\psi(y)\,d\varphi(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y \Big\{ < \frac{1}{y}M_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau) \times$$

$$\times\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\varphi(\xi), \int_\tau^s u(\xi,y)\,d\varphi(\xi) > +2 < K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\varphi(\xi), \int_z^y u(s,\nu)\,d\psi(\nu) > +$$

$$+ < \frac{1}{s}N_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)\int_z^y u(s,\nu)\,d\psi(\nu), \int_z^y u(s,\nu)\,d\psi(\nu) > \Big\} d\psi(z)\,d\varphi(\tau)\,d\psi(y)\,d\varphi(s) +$$

$$\frac{1}{2} < K(t,x,0,0)\int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi), \int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi) > -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t < K_{\varphi(s)}(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi), \int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi) > d\varphi(s) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x < K_{\psi(y)}(t.y,0,0)\int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi)\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi) > d\varphi(s),$$

$$, \int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)\,d\psi(\nu)\,d\varphi(\xi) > d\psi(y) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <K_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <K_{\varphi(\tau)\psi(z)}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\psi(z)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y <K_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>\times$$

$$\times d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s <K_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),$$

$$\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\varphi(\tau)d\psi(z)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y <K_{\psi(z)\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)\times$$

$$\times\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi),\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)>d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x <f(s,y),u(s,y)>d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (9)$$

В силу условий а), б), в), г) и д), из (9) имеем

$$\int_0^t\int_0^x <P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)+$$

$$+\alpha\int_0^t\int_0^x \|u(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)\le\int_0^t\int_0^x <P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x <\left\{\tilde{N}(s,y)-\frac{1}{2}\left[A_{\psi(y)}(s,y)\psi_y(y)+B_{\varphi(s)}(s,y)\varphi_s(s)\right]\right\}u(s,y),u(s,y)>$$

$$d\psi(y)d\varphi(s)\le\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|\|u(s,y)\|d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (10)$$

Отсюда получаем $\int_0^t\int_0^x <P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)\le$

$$\le\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|\|u(s,y)\|d\psi(y)d\varphi(s)$$

$$\int_0^t\int_0^x <P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)u_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y),u(s,y)>d\varphi(s)d\psi(y)\le$$

$$\int_0^t\int_0^x <P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)\left[\left(\frac{1}{2}\|u_{\varphi\psi}(s,y)\|^2+\frac{1}{2}\|u(s,y)\|^2\right)\right]d\varphi(s)d\psi(y)$$

$$\int_0^t\int_0^x <f(s,y),u(s,y)>d\psi(y)d\varphi(s)\le\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \|u(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)$$

с учетом этого из (10) имеем $\int_0^t\int_0^x <P(s,y)\psi_y(y)\varphi_s(s)\left[\left(\frac{1}{2}\|u_{\varphi\psi}(s,y)\|^2+\frac{1}{2}\|u(s,y)\|^2\right)\right]d\varphi(s)d\psi(y)\le$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \|u(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)$$

Отсюда в силу условия а) и (f') имеем

$$\int_0^t\int_0^x \psi_y(y)\varphi_s(s)(P(s,y)-1)\|u(s,y)\|^2 d\varphi(s)d\psi(y) \le \le \int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)$$

$$\int_0^t\int_0^x \|u(s,y)\|^2 d\varphi(s)d\psi(y) \le \frac{1}{\beta}\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s)$$

Из последнего неравенства, переходя к пределу при $t \to \infty$ и $x \to \infty$ получим

$$\|u(t,x)\|_{L^{2,n}_{\phi\psi}(G)} = \int_0^\infty\int_0^\infty \|u(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s) \le \frac{1}{\beta}\int_0^\infty\int_0^\infty \|f(s,y)\|^2 d\psi(y)d\varphi(s) = \frac{1}{\beta}\|f(t,x)\|_{L^{2,n}_{\varphi\psi}(G)}$$

Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно - возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1974. - 352 с.
2. Асанов А. Манас университети, Табигый Илимдер журналы, 1 (Бишкек, 2001).
3. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. КГНУ. – Бишкек, 2001. -Вып. 6. – С. 80-84.
4. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вест. ОшГУ. Сер. физ.-мат. наук. – Ош. 2003. – Вып. 7. – С. 35-40.
5. Асанов А. Манас университети, Табигый Илимдер журналы, 2 (Бишкек, 2002).
6. Асанов А. Манас университети, Табигый Илимдер журналы, 4 (Бишкек, 2003).

УДК 517.968

Абдукаримов А.М., ИТиПМ НАН КР г. Бишкек

Об ограниченности решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на бесконечных областях

Бул макалада Вольтер тибиндеги эки өлчөмдүү интегро-дифференциалдык теңдемелер системалары үчүн чексиз областтагы чектүү чыгарылыштар боюнча маселелер каралат.

В этой статье изучается об ограниченности решений систем на бесконечной области для двумерных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

In this paper we study the boundedness of solutions of systems on an infinite domain for two-dimensional integro-differential equations of Volterra type.

Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$u_{tx}(t,x)+C(t,x)u(t,x)+\int_0^t M(t,x,s)u_{xs}(s,x)ds+\int_0^x N(t,x,y)u_{ty}(t,y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u_{sy}(s,y)dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G=\{(t,x)/0\le t<\infty,0\le x<\infty\} \qquad (1)$$

$$f(t,x)\in L_{2,n}(G)\cap C_n(G),\ (f')$$

с условиями

$$u(0,x)=0,\qquad x\in[0,\ +\infty),$$
$$u(t,0)=0,\qquad t\in[0,\ +\infty),\ (*)$$

где $C(t,x),M(t,x,s),K(t,x,s,y),N(t,x,y)$ – $n\times n$ - мерные самосопряженные заданные матричные функции; $f(t,x)$ – заданная и $u(t,x)$ –неизвестная n-мерные вектор-функции; $(t,x)\in G$.

Под скалярным произведением векторов $\vartheta,w\in R^n$ будем принимать соотношение $<\vartheta,w>=\sum_{i=1}^{n}\vartheta,w;\ \vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,\cdots\vartheta_n),\ w=(w_1,w_2,\cdots w_n)$. Будем считать, что вектор $\vartheta(t,x)\in L_{2,n}(G)$, если его каждая компонента квадратично суммируема в G, т.е. для любого $i\ (i=1,2,...,n)\ \vartheta_i(t,x)\in L_{2,n}(G)$, где $\vartheta(t,x)=(\vartheta_1(t,x),\vartheta_2(t,x),...,\vartheta_n(t,x))$.

ЛЕММА 1. Пусть k – самосопряженная дифференцируемая матричная функция размера $n\times n$ и $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)$, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ – дифференцируемая вектор функция. Тогда справедливо соотношение

$$\langle k\vartheta,\vartheta_s\rangle=\frac{1}{2}\langle k\vartheta,\vartheta\rangle_s-\frac{1}{2}\langle k_s\vartheta,\vartheta\rangle,\ \text{где}\ \langle u,\vartheta\rangle=\sum_{i=1}^{n}u_i\vartheta_i;$$

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых K,ν имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\langle K\nu_{\tau z}\rangle=\langle K\nu\rangle_{\tau z}-\langle K_\tau\nu\rangle_z-\langle K_z\nu\rangle_\tau+\langle K_{\tau z}\nu\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\nu-n$ - мерный вектор.

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых K,ϑ имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\langle K\vartheta,\vartheta_{sy}\rangle=\frac{1}{2}\langle K\vartheta,\vartheta\rangle_{sy}-\frac{1}{2}\langle K_s\vartheta,\vartheta\rangle_y-\frac{1}{2}\langle K_y\vartheta,\vartheta\rangle_s+\frac{1}{2}\langle K_{sy}\vartheta,\vartheta\rangle-\langle K\vartheta_s,\vartheta_y\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\vartheta(s,y)$ - n – мерный вектор.

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции $C(t,x),\in C_{n\times n}(G),C_t(t,x)\le 0,C_x(t,x)\le 0,C(t,x)\ge\alpha>0,$ $C_{t,x}(t,x)\ge 0$ при $(t,x)\in G,$

б) матричные функции $M(t,x,s),M_t(t,x,s),M_s(t,x,s),M_{ts}(t,x,s)\ \in C_{n\times n}(G_1),$

$<M(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\ge 0,<M_t(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\le 0,$ при $(t,x)\in G$ и $<M_s(t,x,s)\vartheta,\vartheta>\ge 0,$

$<M_{ts}(t,x,s)\vartheta,\vartheta>\ \le 0$ при $(t,x,s)\in G_1=\{(t,x,s)/0\le s\le t<\infty,0\le x<\infty\}$

в) матричные функции $N(t,x,y),N_x(t,x,y),M_y(t,x,y),\ N_{xy}(t,x,y)\ \in C_{n\times n}(G_2),$

$< N(t,x,0)\vartheta,\vartheta > \geq 0$, $< N_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta > \leq 0$ при $(t,x)\in G$ и $< N_y(t,x,y)\vartheta,\vartheta > \geq 0$, $< N_{xy}(t,x,y) > \leq 0$ при $(t,x,y)\in G_2 = \{(t,x,y)/\, 0\leq t<\infty, 0\leq y\leq x<\infty\}$

г) матричные функции $K(t,x,s,y), K_y(t,x,s,y), K_s(t,x,s,y), K_t(t,x,s,y), K_x(t,x,s,y)$, $K_{ts}(t,x,s,y), K_{tx}(t,x,s,y), K_{xs}(t,x,s,y), K_{xy}(t,x,s,y), K_{txy}(t,x,s,y), K_{tys}(t,x,s,y), K_{xsy}(t,x,s,y)$ и $K_{txsy}(t,x,s,y) \in C_{n\times n}(G_3)$, $K_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$, $< K(t,x,0,0)\vartheta,\vartheta > \geq 0$, $< K_t(t,x,0,0)\vartheta,\vartheta > \leq 0$, $< K_x(t,x,0,0)\vartheta,\vartheta > \leq 0$, $< K_{tx}(t,x,0,0)\vartheta,\vartheta > \geq 0$ при $(t,x)\in G$ и $< K_{sy}(t,x,s,y)\vartheta,\vartheta > \geq 0$, $< K_{tsy}(t,x,s,y)\vartheta,\vartheta > \leq 0$, $< K_{xsy}(t,x,s,y)\vartheta,\vartheta > \leq 0$, $< K_{txsy}(t,x,s,y)\vartheta,\vartheta > \geq 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3 = \{(t,x,s,y)/\, 0\leq s\leq t<\infty, 0\leq y\leq x<\infty\}$

д) для любых $\vartheta, w\in R^n$ $< -M_t(t,x,0)\vartheta,\vartheta > -2< \left[K(t,x,0,0)+C(t,x)\right]\vartheta, w > - < N_x(t,x,0)w, w > \leq 0$ при $(t,x)\in G$, то задача (1) – (*) имеет единственное решение в $\overline{C}_n(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведем следующую подстановку

$$u(t,x) = \int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)dyds, \quad (t,x)\in G. \tag{2}$$

Тогда задача (1)-(*) сводится к следующей системе интегральных уравнений второго рода:

$$\vartheta(t,x) + C(t,x)\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)dyds + \int_0^t M(t,x,s)\vartheta(s,x)ds + \int_0^x N(t,x,y)\vartheta(t,y)dy +$$

$$+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)\vartheta(s,y)dyds = f(t,x). \tag{3}$$

Ясно, что, задача (1)-(*) эквивалентна системе интегральных уравнений (2)-(3). Умножив скалярно обе части системы (3) на вектор функцию $\vartheta(t,x)$ и интегрируя по области $G_{tx} = \{(s,y): 0\leq s\leq t,\ 0\leq y\leq x\}$,

имеем: $\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y)\vartheta(\tau,z), \vartheta(s,y) > dzd\tau dyds +$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\vartheta(\tau,y), \vartheta(s,y) > d\tau dyds$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N(s,y,z)\vartheta(s,z), \vartheta(s,y) > dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z), \vartheta(s,y) > dzd\tau dyds = \int_0^t\int_0^x < f(s,y), \vartheta(s,y) > dyds. \tag{4}$$

Заметим, что $\frac{\partial^2}{\partial s\partial y}\int_0^s\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau = \vartheta(s,y)$, второе слагаемое левой части системы (4) перепишем в виде:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y)\vartheta(\tau,z), \vartheta(s,y) > dzd\tau dyds = \frac{1}{2} < C(t,x)\int_0^t\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^t\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t < C_s(s,x)\int_0^s\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^s\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > ds - \frac{1}{2}\int_0^x < C_y(t,y)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu,$$

$$\int_0^t\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > +\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{sy}(s,y)\int_0^s\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^s\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > dyds -$$

$$-\int_0^t\int_0^x < C(s,y)\int_0^s \vartheta(\zeta,y)d\zeta, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dyds . \qquad (5)$$

На основании лемму 1 преобразуем третье слагаемое в левой части соотношения (4). Используя формулу интегрирования по частям и формулу Дирихле, получим:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\vartheta(\tau,y), \vartheta(s,y) > d\tau dyds = -\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi\right)d\tau, \vartheta(s,y) > dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < M(s,y,0)\left(\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi\right), \vartheta(s,y) > dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < M_\tau(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi\right), \vartheta(s,y) > d\tau dyds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t < M(t,y,0)\left(\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi\right), \int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dy - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_s(s,y,0)\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi >$$

$$dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dyd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < M_{\tau s}(s,y,\tau)\times$$

$$\times \int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi > d\tau dyds . \qquad (6)$$

Аналогично получим для четвертого слагаемого:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N(s,y,z)\vartheta(s,z), \vartheta(s,y) > dzdyds = \frac{1}{2}\int_0^t <N(s,x,0)\int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_y(s,y,0)\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_z(s,x,z)\int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu >$$

$$dzds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N_{zy}(s,y,z)\int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dzdyds . \qquad (7)$$

Для преобразования пятого слагаемого соотношения (4) интегрируя по частям, имеем:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z), \vartheta(s,y) > dzd\tau dyds = \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\times$$

$$\times\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)dzd\tau, \vartheta(s,y) > dyds = \int_0^t\int_0^x < K(s,y,0,0)\int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \vartheta(s,y) > dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_\tau(s,y,\tau,0)\int_\tau^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \vartheta(s,y) > d\tau dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_z(s,y,0,z)\times$$

$$\times\int_0^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \vartheta(s,y) > dzdyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi\right), \vartheta(s,y) > dzd\tau dyds .$$

Далее, используя лемму 3 и формулу Дирихле, из последнего соотношения получим:

$$\int_0^t\int_0^x < \int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\vartheta(\tau,z), \vartheta(s,y)dzd\tau > dyds = \frac{1}{2} < K(t,x,0,0)\times$$

$$\times \int_0^t \int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t \int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > -\frac{1}{2}\int_0^t < K_s(s,x,0,0) \int_0^s \int_0^x \vartheta(\xi,\nu)\times$$

$$\times d\nu d\xi, \int_0^s \int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > ds - \frac{1}{2}\int_0^x < K_y(t,y,0,0) \int_0^t \int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_0^t \int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dy + \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^x K_{sy}(s,y,0,0) \int_0^s \int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s \int_0^y \vartheta(\xi,\nu)\times$$

$$d\nu d\xi > dyds - \int_0^t \int_0^x < K(s,y,0,0)(\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi), \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dyds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t < K_\tau(t,x,\tau,0) \int_\tau^t \int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\xi d\nu, \int_\tau^t \int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\xi d\nu > d\tau -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^s < K_{\tau s}(s,x,\tau,0) \int_\tau^s \int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s \int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau\, ds -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^s < K_{\tau y}(t,y,\tau,0) \int_\tau^t \int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^t \int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dyd\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^x \int_0^s < K_{\tau sy}(s,y,\tau,0) \int_\tau^s \int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s \int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau dyds -$$

$$- \int_0^t \int_0^x \int_0^s < K_\tau(s,y,\tau,0) \int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > d\tau dyds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^x < K_z(t,x,0,z) \int_0^t \int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t \int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dz -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^x < K_{zs}(s,x,0,z) \int_0^s \int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s \int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzds -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^x \int_0^y < K_{zy}(t,y,0,z) \int_0^t \int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t \int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdy +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^x \int_0^y < K_{zsy}(s,y,0,z) \int_0^s \int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s \int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyds - \int_0^t \int_0^x \int_0^y < K_z(s,y,0,z)\times$$

$$\times \int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_z^y \vartheta(s,y)d\nu > dzdyds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^x < K_{\tau z}(t,x,\tau,z) \int_\tau^t \int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t \int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^x \int_0^y < K_{\tau zy}(t,y,\tau,z) \int_\tau^t \int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^t \int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyd\tau -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^x \int_0^s < K_{\tau zs}(s,x,\tau,z) \int_\tau^s \int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s \int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau \times$$

$$\times dzds - \int_0^t \int_0^x \int_0^s \int_0^y < K_{\tau z}(s,y,\tau,z) \int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > dzd\tau dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_{\tau sy}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau dyds . \quad (8)$$

Учитывая соотношения (5), (6), (7), (8) условия д) и формулу Дирихле, из (4) имеем:

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \frac{1}{2} < C(t,x)\int_0^t\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^t\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > -\frac{1}{2}\int_0^t < C_s(s,x)\times$$

$$\times \int_0^s\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^s\int_0^x \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x < C_y(t,y)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu, \int_0^t\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{sy}(s,y)\int_0^s\int_o^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu,$$

$$\int_0^s\int_0^y \vartheta(\zeta,\nu)d\zeta d\nu > dyds + \frac{1}{2}\int_0^x < M(t,y,0)\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi \times \times \int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dy +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t < N(s,x,0)\int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_0^x \vartheta(s,\nu)d\nu > ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < N_z(s,x,z)\int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_z^x \vartheta(s,\nu)d\nu > dzds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < M_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_\tau^t \vartheta(\xi,y)d\xi > dyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\Big[< M_s(s,y,0)\int_0^t \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi > +2 < [K(s,y,0,0)+C(s,y)]\int_0^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > +$$

$$+ < N_y(s,y,0)\int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_0^y \vartheta(s,\nu)d\nu > \Big]dyds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y \Big\{ < \frac{1}{y}M_{\tau s}(s,y,\tau)\times$$

$$\times \int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi > +2 < K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s \vartheta(\xi,y)d\xi, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > +$$

$$+ < \frac{1}{s}N_{zy}(s,y,z)\int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu, \int_z^y \vartheta(s,\nu)d\nu > \Big\}dzd\tau dyds + \frac{1}{2} < K(t,x,0,0)\times$$

$$\times \int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > -\frac{1}{2}\int_0^t < K_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x < K_y(t.y,0,0)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^t\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dy + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{sy}(s,y,0,0)\times$$

$$\times \int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_0^s\int_0^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dyds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < K_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_{\tau sy}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^t\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_{\tau zs}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^x \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau dzds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y <K_{z\tau sy}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi, \int_\tau^s\int_z^y \vartheta(\xi,\nu)d\nu d\xi > dz d\tau dy ds =$$

$$=\int_0^t\int_0^x < f(s,y),\vartheta(s,y) > dy ds\,. \qquad (9)$$

В силу этих условий левая часть (9) неотрицательна и отсюда с учетом (4) следует оценка

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dy ds + \frac{\alpha}{2}\|u(t,x)\|^2 \le \left\|\int_0^t\int_0^x < f(s,y),\vartheta(s,y) > dy ds\right\|. \qquad (10)$$

В правой части неравенства (12) применяем неравенство Коши – Буняковского.

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dy ds + \frac{\alpha}{2}\|u(t,x)\|^2 \le \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 dy ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dy ds\,.$$

$$\int_0^t\int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dy ds + \alpha\|u(t,x)\|^2 \le \int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 dy ds\,,$$

$$\|u(t,x)\|^2 \le \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^x \|f(s,y)\|^2 dy ds, \quad (t,x)\in G\,.$$

Из последнего неравенства переходом к пределу при $t\to\infty$ и $x\to\infty$ получим:

$$\|u(t,x)\| \le \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\int_0^\infty \|f(s,y)\|^2 dy ds \quad \text{при } (t,x)\in G\,.$$

Таким образом теорема доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных систем. – Фрунзе: Илим, 1974. – 352 с.
2. Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений // Мат. анализ. – Казань: Из-во Казанск. ун-та, 1978. – С. 103–107.
3. Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. О существовании предела при $t\to\infty$ решения нелинейного уравнения Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1971. –Т.7, N 12. –С. 2253–2258.
4. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. КГНУ. – Бишкек, 2001. – Вып. 6. – С. 80–84.
5. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. ОшГУ. Сер. физ.-мат. наук. – Ош, 2003. – Вып. 7. – С. 35–40.

УДК 517. 928

Абдуллаева Ч.Х., ОшГСУ

Метод униформизации для сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с регулярной особой точкой, в случае когда, решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет логарифмический рост в особой точке

Методом униформизации строится асимптотика решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет логарифмическую рост в особой точке.

By method of uniformitarian is constructed the asymptotic of the solution of the singularly perturbed nonlinear differentialy equation, when asolution of corresponding unperturbed equation have logarithmical growth on the regular singular point.

Кадимки өзгөчө чекиттүү сингулярдуу козголгон экинчи тартиптеги дифференциалдык тендеменин чечимин табууда униформизация методун колдонууда өзгөчө чекиттүү сингулярдуу козголгон теңдеме өзгөчө чекитте логарифмдик өсүшкө ээ болот.

Рассматривается задача Коши [1]

$$u(1) = u^{(0)}, u'(1) = u^{(1)} \tag{1}$$

для уравнения

$$(x + \varepsilon\alpha u'(x)u''(x) + q(x)u'(x) + p(x)u(x) = r(x) \tag{2}$$

где $\alpha, u^{(0)}, u^{(1)}$-заданные постоянные, $0 \quad 0 < \varepsilon << 1$-малый параметр, $x \in [0,1]$-независимая переменная , $p(x), q(x), r(x) \in C^{\infty}[0,1]$, $u(x)$-неизвестная функция

Для невозмущенной задачи (2)

$$Lu_0(x) = xu_0''(x) + q(x)u_0'(x) + p(x)u_0(x) = r(x) \tag{3}$$

$$u_0(1) = u^0, \qquad u_0'(1) = u^{(1)}. \tag{4}$$

Точка $x = 0$ является регулярной особой точкой.

Мы будем предполагать, что $q(0) = 1$. Тогда однородное уравнение соответствующее к уравнению (3), имеет две линейно независимые решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, такие что [2]

$$\varphi_1(1) = 1, \qquad \varphi_1(1) = 0, \qquad \varphi_2(1) = 0, \qquad \varphi_2(1) = 1$$

$$\varphi_1(x) \in C^{\infty}[0,1],\ \varphi_2(x) = a_0(x)\ln x + a_1(x),\ a_{00} = a_0(0) \neq 0, a_0(x), a_1(x) \in C^{\infty}[0,1] \tag{5.0}$$

Общее решение уравнения (3) можно записать в виде

$$u_0(x) = u^{(0)}\varphi_1(x) + u^{(1)}\varphi_2(x) + \int_1^x W^{-1}(x)[\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)]r(s)ds \tag{5.1}$$

где $W(x)$-вронскиан решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$. Из формулы Лиувилля,[2] имеем

$$W(x) = \exp\left\{-\int_1^x q(s)s^{-1}ds\right\} = x^{-1}P(x) \tag{5.2}$$

где

$$P(x) = \exp\left\{\int_1^x s^{-1}[1 - q(s)]ds\right\} \in C^{\infty}[0,1]$$

Общее решение уравнения (3) будет записать в следующем виде

$$u_0(x) = u^{(0)}\varphi_1(x) + u^{(1)}\varphi_2(x) + \int_1^x W^{-1}(x)[\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)]s^{-1}(s)ds, \tag{6}$$

где $W(x)$ - вронскиан решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Из формулы Лиувилля вытекает, что

$$W(x) = \exp\left\{-\int_1^x q(s)s^{-1}ds\right\} = x^{-1}P(x),\ P(x) = \exp\left\{\int_1^x s^{-1}(1 - q(s))ds\right\} \in C^{\infty}[0,1] \tag{7}$$

Из (5.2),(6) и (7) имеем:

$$u_0(x) = u^0\varphi_1(x) + u^{(1)}\varphi_2(x) + \int_1^x P^{-1}(s)[\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)]r(s)ds, \quad (8)$$

или

$$u_0(x) = u^{(0)})\varphi_1(x) + u^{(1)}\varphi_2(x) + \int_1^x P^{-1}(s)\varphi_1(s)ds - \varphi_1(x)\int_1^x P^{-1}(s)r(s)\varphi_2(s)ds =$$

$$= u^{(0)}\varphi_1(x) + \varphi_2(x)a_0(x) + \varphi_1(x)\int_1^x [a_0(s)\ln s + a_1(s)]ds = a_0(x) + a_1(x)\ln x$$

Таким образом

$$u_0(x) = a_0(x) + \ln x \cdot a_1(x) \quad (8.0)$$

Здесь и далее через $a_j(x)$ $(j = 0,1,2,...)$ обозначим функции из класса $C^{\infty}[0,1]$

Значит,
$$u_0'(x) = x^{-1}a_0(x) + \ln x a_1(x), \quad (8.1)$$
$$u''(x) = x^{-2}a_0(x) + \ln x a_1(x)$$

Внешнее решение задачи ищем в виде

$$u(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + ... \quad (9)$$

Подставляя (9) в (2) для определения функций $u_j(x)(j = 0,1...)$ получим следующие задачи

$$L_0u_1 = -\alpha u_0' u_0''(x), \qquad u_1(1) = u_1'(1) = 0, \quad (10.1)$$

$$L_0u_0 = -\alpha u_0'(x)u_1''(x) - \alpha u_0''(x)\cdot u_1'(x), \qquad u_2(1) = u_2'(1) = 0 \quad (10.2)$$

$$L_3u_3 = -\alpha u_0'(x)u_2''(x) - \alpha u_1'(x)u_1''(x) - \alpha u_0''(x)u_2'(x), \qquad u_3(1) = u_3'(1) = 0, \quad (10.3)$$

……

$$L_0u_n = -\alpha \sum_{i+j=n-1} u_i'(x)u_j''(x), \qquad u_n(1) = u_n'(1) = 0 \quad (10.n)$$

.....

В силу (8.2)и(8.3) задачу (10.1) можно записать в виде
Уравнение (10.1) будет в виде

$$L_0u_1 = r_1(x) := x^{-3}a_0(x) + x^{-2}\ln x\, a_1(x) + \ln^2 x\, a_3(x)$$

Теперь используя формулу (8) имеем

$$u_1(x) = \int_1^x P^{-1}(s)[[\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)]r_1(s)ds$$

Интегрируя это выражение найдем асимптотику $u_1(x)$:

$$u_1(x) = x^{-2}\ln x a_0(x) + x^{-2}a_1(x) + x^{-1}\ln^2 x a_2(x) + \ln^3 x a_3(x)$$

$$u_1'(x) = x^{-3}\ln x a_0 + x^{-3}a_1 + x^{-2}\ln^2 x a_2 + \ln^3 x a_3$$

$$u_1''(x) = x^{-4}\ln x a_0 + x^{-4}a_1(x) + x^{-3}\ln^2 x a_2(x) + \ln^3 x a_3(x)$$

Используя эти вкражения, уравнение(10.2). Имеет вид

$$Lu_2 = x^{-5}\ln x a_0 + x^{-5}a_1 + x^{-4}\ln^2 x a_2 + x^{-4}\ln x a_3 + x^{-3}\ln^3 x a_4 + \ln^4 x a_5 := r_2(x)$$

Отсюда

$$u_2(x) = \varphi_2(x)\int_1^x P^{-1}(s)\varphi_1(s)r_2(s)ds - \varphi_1(x)\int_1^x P^{-1}(s)r_2(s)\varphi_2(s)ds$$

Отсюда получим

$$u_2(x) = x^{-4}\ln^2 x a_0 + x^{-4}\ln x a_1 + x^{-4}a_2(x) + x^{-3}\ln^3 x a_3(x) + x^{-2}\ln^4 x a_4(x) + \ln^5 x a_5(x)$$

$$u_2' = x^{-5}\ln^2 x a_0 + x^{-5}\ln x a_1 + x^{-5}a_2(x) + x^{-4}\ln^3 x a_3(x) + x^{-3}\ln^2 x a_4(x) + \ln^5 x a_{5(x)};$$

$$u_2''(x) = x^{-6}\ln^2 x a_0 + x^{-6}\ln x a_1 + x^{-6}a_2(x) + x^{-5}\ln^3 x a_3(x) + x^{-4}\ln^2 x a_4(x) + \ln^5 x a_5(x)$$

$$Lu_3(x) = r_3(x) = x^{-7}\ln^2 x a_0(x) + x^{-7}\ln x a_1(x) + x^{-7}a_2(x) + x^{-6}\ln^3 a_3 + x^{-5}\ln^4 x a_4 +$$

$$+ x^{-3}\ln^5 x a_6 + \ln^6 x a_7(x).$$

Решая это уравение, имеем

$$u_3(x) = x^{-6}\ln^3 xa_0 + x^{-6}\ln^2 xa_1 + x^{-6}\ln xa_2 + x^{-6}a_3 + x^{-5}\ln^5 xa_4 + x^{-4}\ln^5 x + x^{-2}\ln^6 xa_2 + \ln^7 xa_2$$

$$u_3(x) = x^{-6}[a^{(3,3,0)}\ln^3 x + \ln^2 xa^{(3,2,0)}(x) + \ln xa^{(3,1,0)}(x) + x\ln^4(x)a^{(3,4,2)}(x) + x^2\ln^5 xa^{(3,5,2)}(x) +$$

$$+ x^4\ln^6 xa^{(3.6.4)}(x) + x^6\ln^7 xa^{(3.7.6)}(x)]$$

Далее, методом математической индукции, получим

$$u_n(x) = x^{-2n}[\ln^n xa^{(n,n,0)}(x) + \ln^{(n+1)} xa^{(n,n-1,0)}(x) + ... + a^{(n,0,0)}(x) + x\ln^{n+1} xa^{(n,n+1,1)}$$

$$+ x^2\ln^{n+2} xa^{(n,n+2,2)}(x) + x^4\ln^{n+3} xa^{(n,n+3,4)}(x) + ... + x^{2n-2}\ln^{2n} xa^{(n,2n,2n-2)}(x) \qquad (11.n)$$

$$+ x^{2n}\ln^{2n-1} xa^{(n,2n-1,2n)}(x)]$$

…….

Если в ряде (9) оставим только главные асимптотические члены, то ряд имеет вид

$$u(x,\varepsilon) = \ln x^{-1}a^{(0,1,0)}(x) + \varepsilon x^{-2}\ln x^{-1}a^{(1,1,0)}(x) + (\varepsilon x^{-2}\ln x^{-1})^2 a^{(2,2,0)}(x) + ... +$$

$$+ (\varepsilon x^{-2}\ln x^{-1})^n a^{(n,n,0)}(x) + ...$$

Этот ряд является асимптотическим рядом на отрезке $[x_0(\varepsilon), 1]$, где $x_0(\varepsilon) = o(\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \to 0$. $\tilde{x}_0 = (\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{2}}$ - решение уравнения $\varepsilon\eta^2\ln\frac{1}{\eta} = 1$.Значит, классическим методом возмущения не можем достигать точку $x = 0$.

Поэтому эту задачу будем решать методом униформизации [3].

Уравнение (1) запишем в виде системы

$$\begin{cases} u'(\xi) = \vartheta, & u(1) = u^0 \\ (x + \varepsilon\alpha\vartheta)\vartheta'(x) = -q(x)\vartheta(x) - p(x)u(x) + r(x), & v(1) = u^{(1)} \end{cases}$$

Эту систему униформизируем следующим образом

$$\varepsilon\frac{du(\xi)}{d\xi} = (x(\xi) + \varepsilon\alpha\vartheta(\xi))\vartheta, \qquad u(1) = u^0,$$

$$\xi\frac{d\vartheta(\xi)}{d\xi} == q(x(\xi))\vartheta(\xi) - p(x(\xi))u(\xi) + r(x(\xi)), \qquad \vartheta(1) = u^{(1)}, \qquad (12)$$

$$\xi\frac{dx}{d\xi} = x(\xi) + \varepsilon\alpha\vartheta(\xi), \qquad x(1) = 1$$

Решение задачи (12) ищем в виде

$$\begin{cases} u(\xi) = u_0(\xi) + eu_1(\xi) + e^2u_2(\xi) + .. \\ \vartheta(\xi) = v_0(\xi) + ev_,(\xi) + e^2v_2(\xi) + ... \\ x(\xi) = \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + ... \end{cases} \qquad (13)$$

Подставляя ряды (13) в (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{du_0}{d\xi} = \vartheta_0(\xi) \qquad u_0(1) = u^{(0)},$$

$$\xi\frac{d\vartheta_0}{d\xi} = -q(\xi)\vartheta_0(\xi) - p(\xi)u_0(\xi) + r(\xi), \qquad \vartheta_0(1) = u^{(1)}, \qquad (14.0)$$

$$\xi\frac{du_1}{d\xi}=\xi\vartheta_1(\xi)+\alpha\vartheta_0{}^2(\xi)+x_1(\xi)\vartheta_0(\xi),\qquad u_1(1)=0$$

$$\xi\frac{d\vartheta_1}{d\xi}=-q(\xi)\vartheta_1(\xi)-p(\xi)u_1(\xi)+r(\xi)-q'(\xi)x_1(\xi)\vartheta_0(\xi)-p'(\xi)x_1(\xi)u_0(\xi)+$$

$$+r'(\xi)x_1(\xi),\qquad \vartheta_1(1)=0$$

$$\xi\frac{dx_1(\xi)}{d\xi}=x_1(\xi)+\alpha\vartheta_0(\xi),\qquad x_1(1)=0\ , \tag{14.1}$$

$$\xi\frac{du_2}{d\xi}=\xi\vartheta_2(\xi)+x_2(\xi)\vartheta_0(\xi)+2\alpha\vartheta_0\vartheta_1+x_1\vartheta_1,$$

$$\xi\frac{d\vartheta_2}{d\xi}=-q(\xi)\vartheta_2-p(\xi)u_2-q'(\xi)x_2\vartheta_0-p'(\xi)x_2u_0+q'(\xi)x_1\vartheta_1-\frac{q''(\xi)}{2}x_1{}^2\vartheta_0-$$

$$-p'(\xi)x_1u_1-\frac{p''(\xi)}{2}x_1{}^2u_0+r'(\xi)x_2+\frac{r''(\xi)}{2}x_1{}^2,$$

$$\xi\frac{dx_2}{d\xi}=x_2(\xi)+\alpha\vartheta_1, \tag{14.2}$$

$$\xi\frac{du_3}{d\xi}=\xi\vartheta_3(\xi)+x_3(\xi)\vartheta_0(\xi)+2\alpha\vartheta_0\vartheta_2+x_1\vartheta_2+x_2\vartheta_1,\qquad u_3(1)=0,$$

$$\xi\frac{d\vartheta_3}{d\xi}=-q(\xi)\vartheta_3-p(\xi)u_3-q'(\xi)(x_1\vartheta_2+x_2\vartheta_1+x_3\vartheta_0)-p'(\xi)(x_1u_2+x_2u_1+x_3u_0)-$$

$$-\frac{q''(\xi)}{2}(x_1{}^2\vartheta_1+2x_1x_2\vartheta_0)-\frac{p''(\xi)}{2}(x_1{}^2u_1+2x_1x_2u_0)-\frac{q'''(\xi)}{3!}x_1{}^3\vartheta_0-\frac{p'''(\xi)}{3!}x_1{}^3u_0,\vartheta_3(1)=0,$$

$$\xi\frac{dx_3}{d\xi}=x_3(\xi)+\alpha\vartheta_2,\qquad x_3(1)=0\ . \tag{14.3}$$

……

Уравнение (14.0) эквивалентно уравнению (3) по переменной ξ, поэтому

$u_0(\xi)\sim a_0(\xi)\ln\xi+a_1(\xi),\qquad u_1'(\xi)=u_0(\xi)\xi^{-1}.$

Учитывая эту асимптотику функций

$u_0(\xi),u_0{}'(\xi)$ при $\xi\to 0$ из (18.1),(18.2),(18.3) получим

$$u_1(\xi)\sim a_1\xi^{-2q_0},\ \vartheta_1(\xi)\sim b_1\xi^{-2q_0},\qquad x_1(\xi)\sim c_1\xi^{-q_0}\qquad \left(c_1=\frac{\alpha b_0}{1+q_0}\right)$$

$$u_2(\xi)\sim a_2\xi^{3-q_0},\qquad \vartheta_2(\xi)\sim b_2\xi^{-3q_0},\qquad x_2(\xi)\sim c_2\xi^{-2q_0},$$

……

$$u_n(\xi)\sim a_n\xi^{-nq_0},\quad \vartheta_n(\xi)\sim b_n\xi^{-nq_0},\quad x_n(\xi)\sim c_n\xi^{-nq_0},\qquad \forall n\in N$$

Таким образом ряды можно записать в виде $\vartheta_0(\xi)\sim a_{00}\xi^{-1}(a_{00}=a_0(0))$, поэтому из уравнения для $x_1(\xi)$ получим

$$x_1=d\xi\int_1^{\xi}s^{-2}\vartheta_0(s)ds\sim\alpha a_{00}(2\xi)^{-1}=D_1\xi^{-1},\qquad D_1=(-2\xi)^{-1}a_{00}$$

Решение для определения $u_1(\xi)$ и $\vartheta_1(\xi)$ ищем в виде

$u_1=A_1\xi^{-\alpha},\qquad \vartheta_1=B_1\xi^{-\beta},$

Тогда, имеем $\alpha=\beta=2$, т.е. $u_1(\xi)=A_1\xi^{-2},\qquad \vartheta_1(\xi)=B_1\xi^{-2},$

Теперь решая систему (14.2), получим

$u_2(\xi) = A_2\xi^{-3}, \vartheta_2(\xi) = B_2\xi^{-3}, x_2(\xi) = D_2\xi^{-3}$

Далее $\forall n \in N_\xi$ имеем:

$u_n(\xi) \sim A_n\xi^{=n-1}, \qquad \vartheta_n(\xi) \sim B_n\xi^{-n-1}, \qquad x_n(\xi) \sim D_n\xi^{-n}, \ \xi \to 0$

Таким образом, выделяя главные части ряда (13) можно записать в виде

$$u(\xi) = a_0(\xi)\ln\xi + \xi^{-1}\left[A_1\varepsilon\xi^{-1} + A_2(\varepsilon\xi)^{-2} + ... + A_n(\varepsilon\xi)^{-n} + ...\right],$$

$$\vartheta(\xi) = a_{00}\xi^{-1} + \xi^{-1}\left[B_1\varepsilon\xi^{-1} + B_2(\varepsilon\xi)^{-2} + ... + B_n(\varepsilon\xi)^{-n} + ...\right]$$

$$x(\xi) = \xi + D_1\varepsilon\xi^{-1} + D_2(\varepsilon\xi^{-1})^2 + ... + D_n(\varepsilon\xi^{-1})^n + ...$$

Отрсюда видно, что этот ряд асимптотически сходится на отрезке $[\varepsilon^\gamma, 1]$, где $0 < \gamma < 1$

Теперь выясним, на каком отрезке изменяется переменная ξ. Для этого решим уравнение $x(\eta) = 0$, т.е. $\eta - \frac{\xi}{2}\alpha a_{00}\eta^{-1} + o(\xi\eta)^{-2} = 0$

Предположим, что $a_{00}\alpha > 0$. Тогда из этого уравнения получим

$x_0 = \eta \sim (\varepsilon\alpha a_{00}2^{-1})^{\frac{1}{2}}$. На отрезке $[x_0, 1]$, где $x_0 \sim (\varepsilon\alpha a_{00}2^{-1})^{-1}$

На отрезке $[x_0, 1]$ решение (13) является асимптотическим рядом.

Теперь докажем, что уравнение $x(\xi) + \varepsilon\alpha u'(\xi) = 0$ не имеет решения на отрезке $[\xi, 1]$. В самом деле, пусть это уравнение имеет корень на этом отрезке, тогда $x(\xi) + \varepsilon\alpha u'(\xi) \sim \xi + \varepsilon\alpha a_{00}\xi^{-1} + o(\varepsilon\xi)^{-1} = 0$.Это уравнение не имеет решения на отрезке $[\eta, 1]$. Следовательно задача (12) эквивалентно задаче (1), при $\xi \in [x_0, 1]$

Таким образом доказана

Теорема 2. Пусть $\alpha a_{00} > 0$. Тогда решение задачи (1)-(2) существует на отрезке $[0,1]$ и ее асимптотику можно получить из униформизованной задачи(12). Решение этой задачи представляется в виде (13).

Строгое доказательство этой теоремы проводится методом мажоранта.

Литература

1. M. G. Lighthill, A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid. Phil. Mag., 40 (1949), 1179-1201.
2. Степанов В.В. Курс диффренциальных уравнений. Москва, ГИТТЛ,1957.
3. Алымкулов К. Метод униформизации и обосн. метода Лайтхилла. Изв. АН Кирг. ССР, 1981, №1, стр. 3-7.

УДК 517.9

Алыбаев К.С., Нарымбетов Т.К., ЖАГУ
Мурзабаева А.Б., ОшТУ

Устойчивость решений сингулярной возмущенных уравнений и область притяжения точки покоя

Жумушта кубулган теңдемеси бир нече чечимге ээ болгон сингулярдык козголгон теңдеме каралган. Сингулярдык козголгон теңдеме үчүн биргелешкен системанын тең салмактуулук чекитинин туруктуулук шарты бузулат. Баштапкы маселенин чечиминин туруктуулугу жана тең салмактуулук чекиттин тартылуу областы изилденди.

В данной работе рассматривается сингулярно возмущенное уравнение, вырожденное уравнение которой имеет несколько решений. Точка покоя присоединенной системы теряет устойчивость. Исследовано решение началной задачи на устойчивость и области притяжения точка покоя.

In this paper we consider a singularly perturbed equation, reduced equation that has several solutions. Stationary point of the connected system looses stability and the domain of attraction point of rest.

Пусть

$$\varepsilon x' = \varphi(t,x) \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x_0 \tag{2}$$

$0 < \varepsilon$ малый параметр; $x_0 - cons;;\ \ t \in [t_0,T];\ \ f(t,x) \in (C[t\ ,T]\times(|x| \le \delta - const))$ – пространство непрерывных функций, x – скаляр.

При $\varepsilon = 0$ из (1) имеем вырожденное уравнение

$$f(t,\xi) = 0 \tag{3}$$

Пусть уравнение (3) имеет решение

$$\xi = \varphi(t),$$

причем $\varphi(t) \in C[t_0,T]$.

Определение. Если для любого $t \in (t_0,T]$ выполняется

$|x(t,\varepsilon)| - \varphi(t) \le \lambda(\varepsilon)\ \ \ (\lambda(\varepsilon) \to 0$, при $(\varepsilon) \to 0$, то решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (1) – (2) назовем устойчивым для $\xi = \varphi(t)$ на промежутке (t_0,T).

Как известно $[1-2]$ при исследовании задачи (1) - (2) основной проблемой является устойчивость решения данной задачи.

В $[2]$ сформулированы достаточные условия устойчивости решения задачи (1) - (2) для систем гораздо более общего вида.

Среди условий основным является устойчивость точки покоя присоединенной системы для (1).

Далее x_0 должна принадлежать области влияния устойчивой точки покоя.

Если уравнение (3) имеет несколько решений, то исследование устойчивости точек покоя и области влияния усложняется.

В общем случае решение данной проблемы является неразрешимым.

Поставим задачу исследования устойчивости точек покоя и ее области влияния для некоторых классов сингулярной возмущенных уравнений.

Пусть

$$f(t,x) = \lambda(t)x(x-a_1)(x-a_2), \tag{4}$$

где $\lambda(t) \in C[t_0,T]$, $a_j \in R$ - множество действительных чисел.

$$U.\ \ \lambda(t) < 0, t_0, \le t < T_0, \lambda(T_0) = 0, \lambda(t) > 0, T_0 < t \le T$$

При выполнении этих условий вырожденное уравнение имеет решение

$$\xi_1 = 0,\ \ \xi_2 = a_1,\ \ \ \xi_3 = a_2.$$

Без ограничения общности будем считать что

$$a_j > 0,\ \ a_1 < a_2,\ \ x > 0 \tag{5}$$

Проведем исследование устойчивости точек покоя и ее области влияния.

Согласно (4) решение задачи (1)- (2) можно представить в виде.

$$\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-a_1}+\frac{A_3}{x-a_2}\right)dx=\frac{1}{\varepsilon}\lambda(t)dt\,, \tag{6}$$

где A_1, A_2, A_3 - некоторые числа, которые определяются методом неопределенных коэффициентов или

$$\begin{aligned} &A_1+A_2+A_3=0\\ &A_1(a_1+a_2)+A_2a_2+A_3a_1=0\\ &A_1a_1a_2=1 \end{aligned} \tag{7}$$

Если учесть (5) то из (7) следует, что

$$A_1>0,\ A_2<0,\ A_3>0 \tag{8}$$

С учетом (8), (6) представим так

$$\frac{A_1}{x}dx+\frac{A_2}{a_1-x}d(a_1-x)+\frac{A_3}{a_2-x}d(a_2-x)=\frac{1}{\varepsilon}\lambda(t)dt \tag{9}$$

Проинтегрировав (9), решения задачи (1)-(2) получим в следующем в виде

$$\ln\frac{x^{A_1}(a_2-x)^{A_3}}{(a_1-x)^{-A_2}}-\ln\frac{x_0^{A_1}(a_2-x_0)^{A_3}}{(a_1-x_0)^{-A_2}}=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\,.$$

Отсюда имеем

$$\frac{x^{A_1}(a_2-x)^{A_3}}{(a_1-x)^{-A_2}}=\frac{x_0^{A_1}(a_2-x_0)^{A_3}}{(a_1-x_0)^{-A_2}}=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds \tag{10}$$

Множество $\Omega=\{(t,x):t_0\le t\le T_0 x>0\}$ прямыми $t=t_0$, $t=T_0$, $t=T$, $x=0$, $x=a_1$, $x=a_2$ разделяется на 6 частей:

$$\begin{aligned} &\Omega_j=\{(t_0,x):t_0\le t\le T_0, a_{j-1}<x<a_j\},\\ &\Omega_{3+j}=\{(t\ ,x):T_0<t\le T\ , a_{j-1}<x<a_j\},\\ &j=1,2,3, a_0=0, a_3=+\infty; \end{aligned}$$

Каждая из этих областей является областью притяжения одного из точек покоя $x=0, x=a_1, x=a_2$

К примеру возьмем Ω_1.

Для любого $(t,x)\in\Omega_1$ учитывая (5) имеем

$$x(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\lambda(t)x(x-a_1)(x-a_2)<0.$$

Таким образом если $x(t,\varepsilon)$ - решение задачи (1) – (2) и $(t_0,x_0)\in\Omega_1$, то эта функция убывает для $t_0\le t<T_0$; при $t=T_0, x'(T_0,\varepsilon)=0$, а для

$$T_0<t\le T: x'(t,\varepsilon)>0$$ т.е. $x(t,\varepsilon)$ возрастает

Отсюда следует, что для любого $(t_0,x_0)\in\Omega_1$, Ω_1 является областью притяжения точки покоя $x=0$.

Согласно сказанному интегральная кривая соответствующее решению задачи (1) - (2) для значений $t\in(t_0,T_1)$ стремится к прямой $x=0$ и для $t\in(T_0,T)$ должна отойти от этой прямой.

Поставим вопрос: что же происходит с решением когда нарушается условие устойчивости?

Отметим, когда нарушается условия устойчивости , то интегральная кривая будет находится в области H_4

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим (10). Исследуем (10) при $\varepsilon\to 0$.

Предел (10) при $\varepsilon \to 0$.зависит от знака функции $F(t_0) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds$. Если учесть U, то $F(t)$ убывает при $t_0 \le t < T_0$ и возрастает при $T_0 < t \le T$, причем $F(t_0) = 0$.Таким образом $F(t) < 0$ для $t_0 \le t < T_{01}$ ($T_0 < T_{01}, T, (T_{01} - T_0)$ - число не зависящие от ε) и

$$\forall t \in (t_0, T_{0_1}) : e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds} \to 0 .$$

Так как $0<x<a_1$, то из (10) следует, что $\forall t \in (t_0, T_{0_1}) : x(t, \varepsilon) \to 0$ т.е решение не сразу отходит от точки покоя $\xi = 0$, а еще конечное время находится близи него.

Пусть при $t = T_{01}$ имеем $F(T_{01}) = 0$, хотя имеются и другие варианты.

Таким образом при $t = T_{01}$, решение задачи (1)-(2) отходит на расстояние x_0 от прямой $x = 0$.

Если $T_0 < t \le T$,то $F(t) > 0$. Следовательно

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds} \to +\infty$$

Из (10) следует, что

$$\forall t \in (T_{0_1} < t \le T) : x(t, \varepsilon) \to a_1 .$$

При этом $(t_0, x) \in H_4$.

Если предположить $(t_0, x) \in H_5$, то $x'(t_0, \varepsilon) < 0$ т.е функции убывает и стремится к $x = a_1$.

Подведя итог можем сказать, что в рассматриваемом случае решение задачи $x\ (t_0, \varepsilon)$ начав свой путь от $(t_0, x_0) \in H_1$, быстро устремляется к $x = 0$, затем при $t = T_{01}$ отходит на конечное расстояние и устремляется к прямой $x = a_1$ (причем $x < a_1$).

Аналогичным образом исследуются другие случаи.

Литература

1. Алыбаев К.С. //Вестник КГНУ. Серия 3. 2001. Выпуск 6. с. 190-200
2. Василева А.Б., Бутузов В.Ф. //Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1968

УДК 517. 928

Алымкулов К., ОшГУ
Абдуллаева Ч.Х., ОшГСУ

Метод униформизации для решения сингулярного возмущенного уравнения второго порядка с регулярной особой точкой

Кадимки өзгөчө чекиттүү сингулярдуу козголгон экинчи тартиптеги дифференциалдык тендеменин чечимин табууга униформизация методун колдонуу.

Методом униформизации [1] строится асимптотика решения сингулярного возмущенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее уравнение имеет регулярную особую точку.

By method of uniformization is constructed the asymptotical of the singulary perturbed nonlinear differentially education when corresponding education have regulary singular point.

Рассматривается задача Коши [2]

$$u(1) = u^{(0)}, u'(1) = u^{(1)} \quad (1)$$

для уравнения

$$(x + \varepsilon\alpha u'(x)u''(x) + q(x)u'(x) + p(x)u(x) = r(x) \quad (2)$$

где $\alpha, u^{(0)}, u^{(1)}$ - заданные постоянные, $0 \quad 0 < \varepsilon << 1$-малый параметр, $x \in [0,1]$ - независимая переменная , $p(x), q(x), r(x) \in C[0,1]$, $u(x)$ -неизвестная функция

Для невозмущенной задачи (2)

$$Lu_0(x) = xu_0''(x) + q(x)u_0'(x) + p(x)u_0(x) = r(x) \quad (3)$$

$$u_0(1) = u^0, \qquad u_0'(1) = u^{(1)} \quad (4)$$

Точка x=0 является регулярной особой точкой.

Мы будем предполагать, что $q(0) = q_0 > 1$ является иррациональной точкой. Тогда однородное уравнение соответствующее к уравнению (3) имеет двух линейно независимых решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, таких что

$$\varphi_1(1) = 1, \qquad \varphi_1(1) = 0, \qquad \varphi_2(1) = 0, \qquad \varphi_2(1) = 1 \quad (5.1)$$

$$\varphi_1(x) \sim A_0 x^{1-\ddot{u}_0}, \qquad \varphi_2(x) \sim B_0 = const, \qquad x \to 0 \quad (5.2)$$

Общее решение уравнения (3) запишется в виде [3]

$$u_0(x) = u^{(0)}\varphi_1(x) + u^{(1)}\varphi_2(x) + \int_1^x W^{-1}(x)[\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)]r(s)ds \quad (6)$$

где $W(x)$ -вронскиан решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$. Из формулы Лиувилля имеем

$$W(x) = \exp\left\{-\int_1^x q(s)s^{-1}ds\right\} = x^{-q_0}P(x) \quad (7)$$

где

$$P(x) = \exp\left\{\int_1^x \frac{q_0 - q(s)}{s}ds\right\} \in C^\infty[0,1]$$

из (5.2) и (7) вытекает, что

$$u_0(x) = x^{1-q_0}a(x) + b(x) \quad (8)$$

$$u_0'(x) = x^{-q_0}c(x) + x^{1-q_0}d(x) + e(x) \quad (9)$$

где $a(x), b(x), c(x), (1-q_0)a(x), d(x), e(x) \in C^\infty[0,1]$ - известные функции. Будем предполагать, что $c(0) = c_0 \neq 0$. Если искать решение задачи (1), (2) методом классического малого параметра, т.е. в виде

$$u(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + ... + \varepsilon^n u_n(x) + ... \quad (10)$$

то, для определения неизвестных функции $u_n(x)(n = 1,2,...)$ получим уравнения

$$Lu_1 = -\alpha u_0' u_0''(x), \qquad u_1(1) = u_1'(1) = 0 \quad (11.1)$$

$$Lu_2 = -\alpha u_0' u_1''(x) - \alpha u_0''(x)u_1'(x), \qquad u_2(1) = u_2'(1) = 0 \quad (11.2)$$

……

$$Lu_n = -\alpha \sum_{i+j=n-1} u_i'(x)u_j''(x), \qquad u_n(1) = u_n'(1) = 0 \quad (11.n)$$

…….

В силу (8) и(9) уравнение (11.1) можно записать в виде

$$Lu_1(x) = x^{-2q_0-1}a_0(x) + x^{-q_0-1}a_1(x) + a_2(x) = r_1(x), \quad (12.1)$$

где $a_0(x), a_1(x), a_2(x) \in C^{\infty}[0,1]$.

Далее, через $a_j(x)$ обозначим функции из класса $C^{\infty}[0,1]$. Из (12.1) используя формулу (6) получим

$$u_1(x) = x^{-2q_0}u_0(x) + x^{-q_0}a_1(x) + x^{-q_0+1}\ln x a_2(x) + a_3(x), \qquad (13.1)$$

Используя (8),(9),(13.1), уравнение (11.2) для определения $u_2(x)$ запишем в виде

$$Lu_2(x) = x^{-3q_0-2}a_0(x) + x^{-2q_0-2}a_1(x) + x^{-2q_0-1}\ln x a_2(x) + x^{-q_0-2}a_3(x) + \\ + x^{-q_0-1}\ln x a_4(x) + a_5(x) = r_2(x) \qquad (12.2)$$

Отсюда для $u_2(x)$ получим выражение

$$u_2(x) = x^{-3q_0-1}a_0(x) + x^{-2q_0-1}a_1(x) + x^{-2q_0}\ln x a_2(x) + x^{-q_0}\ln x a_3(x) + \\ + x^{-q_0+1}\ln^2 x a_4(x) + a_5(x), \qquad (12.3)$$

С учетом (8),(13.1),(13.2) уравнение для определения функции $u_3(x)$ запишется в виде

$$Lu_3(x) = x^{-4q_0-3}a_0(x) + x^{-3q_0-3}a_1(x) + x^{-2q_0-3}a_3(x) + x^{-3q_0-2}\ln x a_4(x) + + x^{-2q_0-1}\ln^2 x a_5(x) + \\ x^{-q_0-3}a_6(x) + x^{-q_0-2}\ln x a_7(x) + x^{-q_0-1}\ln^2 x a_8(x) + + a_9(x) = r_3(x), \qquad a_k(x) \in C^{\infty}[0,1]$$

Интегрируя это уравнение получим

$$u_3(x) = x^{-4q_0-2}[a_0(x) + x^{q_0}(a_1(x) + x\ln x a_2(x)) + x^{2q_0}(a_3(x) + x\ln x a_4(x) + x^2\ln^2 x a_5(x)) + \\ + x^{3q_0}(a_6(x) + x\ln x a_7(x) + x^2\ln^2 x a_8(x) + x^3\ln^3 x a_9(x)) + x^{4q_0=2}a_{10}(x)], \qquad (a_k(x)) \in C^{\infty}[0,1]$$

Далее, методом полной математической индукции, имеем

$$u_n(x) = x^{-(n+1)q_0-n+1}[a^{(n,0,0,0)}(x) + x^{q_0}(a^{(n,1,0,0)}(x) + x\ln x d^{(n,1,1,1)}(x) + x^{2q_0}(a^{(n,2,0,0)}(x) + x\ln x d^{(n,2,1,1)}(x) + \\ + x^2\ln^2 x d^{(n,2,2,2)}(x) + \ldots + x^{nq_0}(a^{(n,n,0,0)}(x) + x\ln x d^{(n,n,1,1)}(x) + \ldots + x^n\ln^n x d^{(n,n,n,n)}(x)) + \\ + x^{(n+1)q_0+n-1}a^{(n,n+1,n-1,0)}(x)], \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

(12.n)

Отметим, что $a^{(n,m,s,v)}(x) \in C^{\infty}[0,1]$ и индексы n, m, s, v соответственно указывает номер функции $u_n(x)$, m-степень при x^{q_0}, s-также степень x, v-степень $\ln x$.

Поэтому решение (10) запишется в виде

$$u(x,\varepsilon) = x^{1-q_0}\{a_0(x) + x^{q_0}b_0(x) + \varepsilon x^{-1-q_0}[a^{(1,0,0,0)}(x) + x^{q_0}(a^{(1,1,0,0)}(x) + x\ln x a^{(1,1,1,1)}(x)] + \\ + (\varepsilon x^{-1-q_0})^2[a^{(2,0,0,0)}(x) + x^{q_0}(a^{(2,1,1,0)}(x) + x\ = \ln x a^{(2,1,1,1)}(x) + x^{2q_0}(a^{(2,2,0,0)}(x) + \\ + x\ln x a^{(2,1,1,1)}(x) + x^2\ln^2 x a^{(2,2,2,2)}(x)) + x^{1+3q_0}a^{(2,3,1,0)}(x) + (\varepsilon x^{-1-q_0})[a^{(3,0,0,0)}(x) + x^{q_0}(a^{(3,1,1,0)}(x) + \\ + x\ln x a^{(3,1,1,1)}(x)) + x^{2q_0}(a^{(3,2,0,0)}(x) + x\ln x a^{(3,2,1,1)}(x) + x^2\ln^2 x a^{(3,2,2,2)}(x) + x^{3q_0}(a^{(3,3,0,0)}(x) + \\ + x\ln x a^{(3,3,1,1)}(x) + x^2\ln^2 x a^{(3,3,2,2)}(x) + x^3\ln^3 x a^{(3,3,3,3)}(x) + x^{4q_0+2}a^{(3,4,2,0)}(x)] + \\ + \ldots + (\varepsilon x^{-1-q_0})^n[a^{(n,0,0,0)}(x) + x^{q_0}(a^{(n,1,0,0)}(x) + x\ln x a^{(n,n,0,0)}(x) + x^{2q_0}(a^{(n,2,0,0)}(x) + x\ln x a^{(n,2,1,1)}(x) + \\ x^2\ln^2 x a^{(n,2,2,2)}(x)) + \ldots + x^{nq_0}(a^{(n,n,0,0)}(x) + x\ln x a^{(n,n,1,1)}(x) + \ldots + x^n\ln^n x a^{(n,n,n,n)}(x)) + \\ + x^{(n+1)q_0+n-1}a^{(n,n+1,n-1,0)}(x)] + \ldots\}. \qquad (14)$$

Из (14) вытекает следующая

Теорема 1. Асимптотический ряд (10) или (14) полученный методом классического малого параметра является асимптотическим рядом только на отрезке $[\varepsilon^{\beta},1]$, $0<\beta<(q_0+1)^{-1}$. Полное доказательство этой теоремы можно доказать методом мажорант.

Таким, образом классическим методом малого параметра нельзя получить на всем отрезке [0,1].

Чтобы получить решение задачи (1)-(12) отрезке [0,1] используем метод униформизации (т.е. параметризации).

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$u_1'(x)=\vartheta, \qquad u(1)=u_0$$

$$(x+\varepsilon\alpha\vartheta)\vartheta'(x)=-q(x)\vartheta(x)-p(x)u(x)+r(x), \qquad u_1(1)=u^{(1)}$$

Эту систему униформизируем следующим образом

$$\xi\frac{du}{d\xi}=(x(\xi)+\varepsilon\alpha\vartheta(\xi)$$

$$\xi\frac{d\vartheta}{d\xi}=-q(x(\xi))\vartheta(\xi)-p(x(\xi))u(\xi)+r(x(\xi)), \qquad \vartheta(1)=\vartheta^{(1)}, \qquad (15)$$

$$\xi\frac{dx}{d\xi}=x(\xi)+\varepsilon\alpha\vartheta(\xi), \qquad x(1)=1,$$

где $\xi\in[\xi_0(\varepsilon),1]$, $\xi_0(\varepsilon)>0$ при малом $\varepsilon>0$.

Если

$$x(\xi)+\varepsilon\alpha\vartheta(\xi)\neq 0, \qquad \xi\in[\xi_0(\varepsilon),1], \qquad (16)$$

то система (15) эквивалентна к уравнению (16).

Решение системы (15) ищем в виде

$$u(\xi)=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2u_2(\xi)+...+\varepsilon^nu_n(\xi)+...$$

$$\vartheta(\xi)=\vartheta_0(\xi)+\varepsilon\vartheta_1(\xi)+\varepsilon^2\vartheta_2(\xi)+...+\varepsilon^n\vartheta_n(\xi)+... \qquad (17)$$

$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2x_2(\xi)+...+\varepsilon^nx_n(\xi)+...$$

Подставляя ряд (17) в (15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{du_0}{d\xi}=\vartheta_0(\xi) \qquad u_0(1)=u^{(0)}$$

$$\xi\frac{d\vartheta_0}{d\xi}=-q(\xi)\vartheta_0(\xi)-p(\xi)u_0(\xi)+r(\xi), \qquad \vartheta_0(1)+-=u^{(1)} \qquad (18.0)$$

$$\xi\frac{du_1}{d\xi}=\xi\vartheta_1(\xi)+\alpha{\vartheta_0}^2(\xi)+x_1(\xi)\vartheta_0(\xi), \qquad u_1(1)=0$$

$$\xi\frac{d\vartheta_1}{d\xi}=-q(\xi)\vartheta_1(\xi)-p(\xi)u_1(\xi)+r(\xi)-q'(\xi)x_1(\xi)\vartheta_0(\xi)-p'(\xi)x_1(\xi)u_0(\xi)+$$

$$+r'(\xi)x_1(\xi), \qquad \vartheta_1(1)=0$$

$$\xi\frac{dx_1(\xi)}{d\xi}=x_1(\xi)+\alpha\vartheta_0(\xi), \qquad x_1(1)=0 \qquad (18.1)$$

$$\xi\frac{du_2}{d\xi}=\xi\vartheta_2(\xi)+x_2(\xi)\vartheta_0(\xi)+2\alpha\vartheta_0\vartheta_1+x_1\vartheta_1,$$

$$\xi\frac{d\vartheta_2}{d\xi}=-q(\xi)\vartheta_2-p(\xi)u_2-q'(\xi)x_2\vartheta_0-p'(\xi)x_2u_0+q'(\xi)x_1\vartheta_1-\frac{q''(\xi)}{2}x_1{}^2\vartheta_0-$$

$$-p'(\xi)x_1u_1-\frac{p''(\xi)}{2}x_1{}^2u_0+r'(\xi)x_2+\frac{r''(\xi)}{2}x_1{}^2,$$

$$\xi\frac{dx_2}{d\xi}=x_2(\xi)+\alpha\vartheta_1, \qquad (18.2)$$

$$\xi\frac{du_3}{d\xi}=\xi\vartheta_3(\xi)+x_3(\xi)\vartheta_0(\xi)+2\alpha\vartheta_0\vartheta_2+x_1\vartheta_2+x_2\vartheta_1, \qquad u_3(1)=0$$

$$\xi\frac{d\vartheta_3}{d\xi}=-q(\xi)\vartheta_3-p(\xi)u_3-q'(\xi)(x_1\vartheta_2+x_2\vartheta_1+x_3\vartheta_0)-p'(\xi)(x_1u_2+x_2u_1+x_3u_0)-$$

$$-\frac{q''(\xi)}{2}(x_1{}^2\vartheta_1+2x_1x_2\vartheta_0)-\frac{p''(\xi)}{2}(x_1{}^2u_1+2x_1x_2u_0)-\frac{q'''(\xi)}{3!}x_1{}^3\vartheta_0-\frac{p'''(\xi)}{3!}x_1{}^3u_0, \qquad \vartheta_3(1)=0,$$

$$\xi\frac{dx_3}{d\xi}=x_3(\xi)+\alpha\vartheta_2, \qquad x_3(1)=0 \qquad (18.3)$$

……

Уравнение (18.0) эквивалентно уравнению (3) по переменной ξ, поэтому

$u_0(\xi)\sim a_0\xi^{1-q_0}$, $\vartheta_0=u_0'(\xi)\sim b_0\xi^{-q_0}$, $\xi\to 0$.

Учитывая эту асимптотику функций

$u_0(\xi),u_0'(\xi)$ при $\xi\to 0$ из (18.1),(18.2),(18.3) получим

$$u_1(\xi)\sim a_1\xi^{-2q_0},\ \vartheta_1(\xi)\sim b_1\xi^{-2q_0}, \qquad x_1(\xi)\sim c_1\xi^{-q_0} \qquad \left(c_1=\frac{\alpha b_0}{1+q_0}\right)$$

$$u_2(\xi)\sim a_2\xi^{3-q_0}, \qquad \vartheta_2(\xi)\sim b_2\xi^{-3q_0}, \qquad x_2(\xi)\sim c_2\xi^{-2q_0},$$

……

$$u_n(\xi)\sim a_n\xi^{-nq_0}, \quad \vartheta_n(\xi)\sim b_n\xi^{-nq_0}, \quad x_n(\xi)\sim c_n\xi^{-nq_0}, \qquad \forall n\in N$$

Таким образом, ряд (17) можно записать в виде

$$u(\xi)\sim a_0\xi^{1-q_0}+\varepsilon\xi^{-2q_0}[a_1+\varepsilon a_2\xi^{-q_0}+a_3(\varepsilon\xi^{-q_0})^2+\ldots+a_n(\varepsilon\xi^{-q_0})^{n-1}+\ldots],$$

$$\vartheta(\xi)\sim\xi^{-q_0}[b_0+b_1\varepsilon\xi^{-q_0}+b_2(\varepsilon\xi^{-q_0})^2+\ldots+b_n(\varepsilon\xi^{-q_0})^n+\ldots] \qquad (19)$$

$$x(\xi)\sim\xi+\varepsilon\xi^{-q_0}c_1+c_2(\varepsilon\xi^{-q_0})^2+\ldots+c_n(\varepsilon\xi^{-q_0})^n+\ldots$$

Теперь определим нижнюю границу изменения переменной ξ. Для этого решим уравнение

$$x(\xi)=\eta+\varepsilon x_1(\xi)+\ldots=\eta-\frac{\alpha b_0}{1-q_0}\eta\varepsilon^{-q_0}+o(\eta^{-2q_0})=0, \qquad (\eta\to 0) \qquad (20)$$

Предполагая, то $\alpha b_0>0$, отсюда имеем

$$\eta=\xi_0(\varepsilon)\sim\left(\frac{\alpha b_0\varepsilon}{1+q_0}\right)^{\frac{1}{1+q_0}}$$

Теперь докажем, что на отрезке $[\xi_0(\varepsilon),1]$ изменения переменной ξ, выражение

$x(\xi)+\varepsilon\alpha u'(\xi)\neq 0$

Действительно, предположим ,что

$x(\xi)+\varepsilon\alpha u'(\xi)=0$

тогда $x(\xi)+\varepsilon\alpha u'(\xi)=\xi+\frac{\alpha\varepsilon b_0}{1-q_0}\xi^{-q_0}+0((\varepsilon\xi^{-q_0})^2)=0$

Но это уравнение не имеет решения.

Таким образом, уравнение (1)и (15) эквивалентны. С другой стороны ряд (19) является асимптотическим на отрезке

$[\xi_0(\varepsilon),1]$, т.к. $\varepsilon\xi^{-q_0} = o(\varepsilon^{-q_0})$

на этом отрезке.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть 1) $q(x), p(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$,

2) $\alpha b_0 > 0$.

Тогда решение задачи (1)-(2)существует на отрезке $[0,1]$ и его параметрическое представление можно получить из униформизованного уравнения (15) и асимптотика его решения представляется в виде (17).

Литература

1. M. G. Lighthill, A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid, Phil. Mag., 40 (1949), 1179-1201.
2. Алымкулов К. Метод униформизации и обосн. метода Лайтхилла. Изв. АН Кирг. ССР, 1981, №1, ctr 3-7.
3. Степанов В.В. Курс диффренциальных уравнений Москва, ГИТТЛ,1957.

УДК 517.928

Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., ОшГУ

Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка

В работе доказана возможность применения метода погранфункций для построения асимптотики решения краевой задачи для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второй степени с точкой поворота.

It is proved the possibility of using of the method boundary layer functions for construction of the asymptotic of the boundary value problem for the besingular perturbed ordinary differential equation of the order two, i.e. for the equations with the turning point,where the Tihonov's condition not correct.

Впервые равномерная асимптотика для решения сингулярно возмущенных уравнеий типа Прандтля-Тихонова методом сращивания получена А.Б.Васильевой (1960 г.), затем В. Вазовым и Сибуйя (1971). Метод погранфункций для линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной для уравнений в частных производных систематически был применен М.И. Вишиком и Л.А. Люстерником (1957 г.), а для нелинейных дифференциальных уравнений А.Б. Васильевой [1-2] и М.И. Иманалиевым [3], R.E. O'Malley и F. Hoppensteadt [5]. Исторический обзор теории сингулярных возмущений имеются в [4 ,6, 7]. Метод погранфункций применяется для построения асимптотики решения уравнении типа Прандтля-Тихонова, в случае экспоненциальной асимптотической устойчивости решения уравнения в быстрой переменной, т.е. при выполнении условия теоремы А.Н.Тихонова.

Здесь доказана возможность применения метода погранфункций для построения асимптотики решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного уравнения второго порядка, т.е. для уравнения с точкой поворота, где условие теоремы Тихонова не выполнено. Такая применимость метода погранфункций была указана в тезисах (К. Алымкулова) конференции, посвященной Г.И. Петровскому, проведенной в 2007 году в МГУ.

Рассматривается задача

$$L(y,\varepsilon) := \varepsilon y''(x) + xy'(x) - q(x)y(x) = f(x), \qquad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = y^{(0)}, \qquad (2)$$

где $0 < \varepsilon << 1$ - малый параметр, $y^{(0)}$ - заданная постоянная. На известные функции налагаются следующие условия U : $q(x), \quad f(x) \in C^{\infty}[0,1]$. Отсюда, в частности следует, что

$$q(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} q_k x^k, \quad f(x) = \Sigma_0^{\infty} f_k x^k, \quad q_k = q^{(k)}(0)/k!, \quad f_k = f^{(k)}(0)/k!$$

Эти равенства понимаются в асимптотическом смысле. Здесь для простоты рассматривается случай: $q_0 = q(0) = 1$.

Решение невозмущенной задачи $(\varepsilon = 0)$

$$My_0 := xy_0'(x) - q(x)y(x) = f(x), \quad y(1) = y^{(0)} \tag{3}$$

представляется в виде

$$y_0(x) = xp(x)[y^{(0)} + \int_1^x r(s)ds/s^2], \; r(x) = p^{-1}(x)f(x), \tag{4}$$

$$p(x) = \exp\{\int_1^x [(q(s)-1)/s]ds\}.$$

Выделяя в (4) главную часть интеграла в смысле Адамара [8], его можно представить в виде

$$y_0(x) = a(x) + r_1 xp(x)\ln x, \tag{5}$$

$$a(x) = xp(x)[y^{(0)} + \int_1^x (r(s) - r_0 - r_1 s)s^{-2}ds] + r_0 p(x)[x-1], \; r_0 = p^{-1}(0)f(0), \tag{6}$$

$$r_1 = (p^{-1}(x)f(x))'\big|_{x=0}.$$

Из (5) вытекает следующая

Лемма 1. Задача

$$My_0(x) = f(x) - r_1 xp(x), \; y(1) = y^{(0)},$$

имеет единственное решение из класса $C^{(\infty)}[0,1]$ и его можно представить в виде $y_0(x) = a(x)$, где $a(x)$ определяется формулой (6),причем $y_0(1) = a(1) = y^{(0)}$.

Решение задачи (1)-(2) ищется в виде ряда

$$y(x) = y_0(x) + \pi_0(t) + \mu(y_1(x) + \pi_1(t)) + ... + \mu^n(y_n(x) + \pi_n(t)) + ..., \tag{7}$$

где $t = x/\mu, \quad \varepsilon = \mu^2, \quad \pi_k(t) \in C^{(\infty)}[0, \mu_0], \mu_0 = \mu^{-1}, y_k(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$.

Отметим, что, $\pi_k(t) = \pi_k(t,\mu)$, т.е. $\pi_k(t)$ зависит также от μ, но эту зависимость мы для краткости не пишем.

Начальные данные для функций $\pi_k(t)$ берем в виде

$$\pi_v(0) = -y_v(0), \; \pi_v(\mu_0) = 0 \; (v = 0,1,2...).$$

Отметим, что функции $y_k(x)(k = 1,2...)$ будут удовлетворять нулевым краевым условиям при $x = 1$ (см.внизу).

Сначала уравнение (1) запишем в следующем виде

$$L(y,\varepsilon) = f(x) - r_1 x\, p(x) + r_1 x\, p(x) + \varepsilon R[\overline{y}_r]xp(x) - \varepsilon R[y_r]x\, p(x), \tag{8}$$

где $R[y_r] = [p^{-1}(x)y_r''(x)]'_{x=0}, y_r(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + ...$

Вставляя ряд (7) в (8) для определения неизвестных функций $y_k(x)$ и $\pi_k(t)$ получаем следующие уравнения

$$My_0(x) = f(x) - r_1 xp(x), \; y_0(1) = y^{(0)}, \tag{9.0}$$

$$L_\mu \pi_0(t) := \pi_0''(t) + t\pi_0'(t) - q(\mu t)\pi_0(t) = r_1 \mu\; tp(\mu t), \pi_0(0) = -y_0(0), \pi_0(\mu_0) = 0, \tag{10.0}$$

$$My_1(x) = 0, \; y_1(1) = 0, \tag{9.1}$$

$$L_\mu \pi_1(t) = 0, \; \pi_1(0) = 0, \; \pi_1(\mu_0) = 0 \tag{10.1}$$

$$My_2(x) = y_0''(x) - R[y_0]xp(x), \; y_2(1) = 0, \tag{9.2}$$

$$L_\mu \pi_2(t) = \mu\ R[y_0]t\ p(\mu t),\ \pi_2(0) = -y_2(0),\ \pi_2(\mu_0) = 0, \qquad (10.2)$$

- -

$$My_{2n-1}(x) = R[y_{2n-3}], \quad y_{2n-1}(0) = 0, \qquad (9.2n\text{-}1)$$

$$L_\mu \pi_{2n-1}(t) = 0,\ \pi_{2n-1}(0) = -y_{2n-1},\ \pi_{2n-1}(\mu_0) = 0, \qquad (10.2n\text{-}1)$$

$$My_{2n}(x) = y_{2n-2}(x) - R[y_{2n-2}]xp(x),\ y_{2n}(1) = 0 \qquad (9.2n)$$

$$L_\mu \pi_{2n}(t) = R[y_{2n-2}]\mu\ t\ p(\mu t),\ \pi_{2n}(0) = -y_{2n}(0), \pi_{2n}(\mu_0) = 0\ , \qquad (10.2n)$$

……..….

Из леммы 1 следует, что все функции $y_k(x)$ определяются единственным образом из класса $C^{(\infty)}[0,1]$.

Для того, чтобы определить функции $\pi_k(t)(k = 0,1,2,...)$, мы нуждаемся в следующих леммах.

Лемма 2. Однородное уравнение

$$L_0\xi(t) = \xi''(t) + t\xi'(t) - \xi(t) = 0 \qquad (11)$$

имеет двух линейно независимых решений вида

$X_1(t) = t,\ X\ (t) = t\int_t^{\mu_0} \tilde{a}^{-s^2/2}s^{-2}ds, X(0) = 1$.

Для $X(t)$ имеет место следующие оценки:

$a)\ 0 \le X(t) \le e^{-t^2/2} \le 1\ , 0 \le X(t) \le t^{-2}e^{-t^2/2}$, $X'(t) \le 0\ \ (t > 0)$,

$b)\ \left|X(t) - t^{-2}e^{-t^2/2}\right| \le 3t^{-4}e^{-t^2/2}, (t > 0)$ - которое вытекает из равенства

$$X(t) = t^{-2}e^{-t^2/2} - 3t\int_t^{\mu_0} s^{-4}e^{-s^2/2}ds.$$

Кроме того, имеют место следующие асимптотические представления

$$X\ (t) = \begin{cases} 1 + 0(t),\ t \to 0, \\ e^{-t^2/2}t^{-2}(1 - 3t^{-2} + 0(t^{-4})),\ t \to \infty. \end{cases}$$

Лемма 3. Решение задачи

$$L_0\xi(t) = f(t), \quad \xi(0) = \xi(1/\mu) = 0,$$

где $f(t) \in C[0,\ \mu_0]$, представляется в виде

$$\xi(t) = \int_0^{\mu_0} K(t,s)f(s)ds := K[f], \qquad (12)$$

$$K(t,s) = \begin{cases} -tX(s)e^{s^2/2},\ 0 \le t \le s; \\ -X(t)se^{s^2/2},\ s \le t \le \mu_0. \end{cases}$$

Если $\|f\| \le m,\ t \in [0,\mu_0]$ ($\|f\| := \sup\{_{0\le t\le 1}|f(t)|, {}_{1\le t\le \mu_0}|f(t)|\}$), тогда $\|Kf\| \le 2m$. Здесь и далее все постоянные не зависящие от параметра μ обозначим m. Доказательство. Имеем

$$|\xi(t)| \le mX(t)\int_0^t se^{s^2/2}ds + mt\int_t^{\mu_0} X(s)e^{s^2/2}ds \le m + mt\int_t^{\mu_0} s^{-2}ds \le 2m.$$

Здесь в доказательстве второго неравенства, мы использовали свойство $a)$ для $X(t)$.

Лемма 4. Граничная задача

$$\xi''(t) + t\xi'(t) - q(\mu t)\xi = f(t),\ \xi(0) = \xi(\mu_0) = 0, \qquad (13)$$

где $\|f\| \le m$, имеет единственное ограниченное решение на сегменте $[0,\mu_0\ ]$.

Доказательство. Задача (13) эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$\xi(t) = K[(q(\mu s) - 1)\xi(s)] + K[f(s)] := S[\xi], \qquad (14)$$

Из леммы 3 следует, что оператор S отображает шар $\gamma: \|\xi\| \le 2m$ в себя. Докажем, что он является также сжимающим.

Оператор S оценим на отрезках $t \in [0,l]$ и $[l,\mu_0]$.Заметим, что в качестве l можно взять любое положительное число, большее или равное единицы, не зависящее от μ. Для простоты берем $l=1$.

Пусть 1) $t \in (0,1]$, тогда используя неравенство $|q(\mu s)-1| \le \mu s m$, имеем

$|S[\xi_1]-S[\xi_2]| \le h(t)\|\xi_1-\xi_2\|$, где $h(t)=\left|\int_0^{\mu_0} K(t,s)(q(\mu s)-1)ds\right|$.

Оценивая, $h(t)$ имеем

$h(t) \le \mu m \int_0^t X(t)s^2 e^{s^2/2}ds + \mu m t \int_t^{\mu_0} s e^{s^2/2} X(s)ds = 0(\mu \ln \mu_0), \mu \to 0$.

Здесь для оценки второго интеграла использована оценка $a)$ для $X(t)$. Поэтому, оператор S является сжимающим на отрезке [0,1] с коэффициентом сжатия $0(\mu \ln \mu_0)$.

Если $t \in [1,\mu_0]$, то интегральный оператор K в S разложим на два вольтерровы операторы, используя свойство $b)$ функции $X(t)$:

$S[\xi] = K[f] + S_1[\xi] + S_2[\xi]$,

где

$S_1[\xi] = \int_0^t K(t,s)(q(\mu s)-1)\xi(s)ds - t\int_t^{\mu_0} e^{s^2/2}(X(s)-s^{-2}e^{-s^{-2}/2})(q(\mu s)-1)\xi(s)ds$,

$S_2[\xi] = -\int_t^{\mu_0} ts^{-2}(q(\mu s)-1)\xi(s)ds$.

Обозначим $K[f]+S_1[\xi]=g(\xi)$ и считая $g(\xi)$ известным, решаем интегральное уравнение Вольтерра

$$\xi(t) = S_2[\xi] + g(\xi)$$

методом последовательных приближений. Ядро $K_2(t,s) = ts^{-2}\mu^{-1}(q(\mu s)-1)$ Вольтеррова оператора $S_2[\xi]$ ограничено, так как $|K_2(t,s)| \le m,\ (1 \le t \le \mu_0)$. Поэтому, имеем

$$\xi(t) = g(\xi) + \mu\int_t^{\mu_0} R(t,s,\mu)g(\xi(s))ds := T[\xi], \qquad (15)$$

где $R(t,s,\mu)$ резольвента ядра $K_2(t,s)$. Для $R(t,s,\mu)$ имеет место оценка

$$|R(t,s,\mu)| \le me^{m\mu(t-s)}. \qquad (16)$$

Так как $\mu\int_t^{\mu_0}|R(t,s,\mu)|ds \le m$, достаточно доказать что оператор $g(\xi)$ является сжимающим при $t \in [1,\mu_0]$. Имеем

$|g(\xi_1)-g(\xi_2)| \le h_1(t)|\xi_1-\xi_2|$,

где

$h_1(t) = \int_0^t X(t)e^{s^2/2}s|q(\mu s)-1|ds + t\int_t^{\mu_0} e^{s^2/2}\left|X(s)-s^{-2}e^{-s^2/2}\right||q(\mu s)-1|ds$

Учитывая , что $|q(\mu s)-1| \le m\mu s$ и используя для оценки второго интеграла в этом выражении, свойство $b)$ функции $X(t)$ имеем

$$h_1(t) \le \mu m X(t)\int_0^t s^2 e^{s^2/2}ds + 3\mu m t\int_t^{\mu_0} s^{-3}ds \le$$

$$\le \mu m t X(t)\int_0^t s e^{s^2/2}ds + 3m\mu(2t)^{-1} \le \mu m t\, X(t)e^{t^2/2} + 3\mu m \le 4\mu m = 0(\mu).$$

Последнем неравенстве мы использовали свойство $a)$ функции $X(t)$. Отсюда следует, оператор S является сжимающим и на отрезке $[1, \mu_0]$ с коэффициентом сжатия $0(\mu)$. Значит, на всем отрезке $[0, \mu_0]$ оператор $S[\xi]$ является сжимающим с коэффициентом $0(\mu \ln \mu_0)$.

Таким образом, уравнение (13) имеет единственное решение в шаре γ.

Уравнение, для определения $\pi_0(t)$, можно представить в виде

$$L_0\pi_0(t) = h(t,\pi_0),\ \pi_0(0) = -y_0(0),\ \pi_0(1/\mu) = 0,$$

где $h(t,\pi_0) = (q(\mu t)-1)\pi_0(t) + r_1\mu^2 tp(\mu t)$. Решение этой задачи представляется в виде

$$\pi_0(t) = -y_0(0)X(t) + \int_0^{\mu_0} K(t,s)[(q(\mu s)-1)\pi_0(s) + r_1\mu\ sp(\mu s)]ds.$$

Из леммы 4 следует, что это уравнение имеет единственное ограниченное решение на сегменте $[0,\ \mu_0]$.

Аналогично все функции $\pi_k(t)$ $(k \in N)$ из уравнений (10.к) определяются единственным образом и $|\pi_k(t)| \le m$.

Пусть

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m} (y_k(x) + \pi_k(t))\mu^m + \mu^{m+1}\xi(x,\varepsilon)\ . \qquad (14)$$

Справедлива следующая

Теорема**.** Решение задачи (1)-(2) единственным образом представляется в виде (14) и $|\xi(x,\varepsilon)| \le m$, то есть ряд (7) является асимптотическим.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений, Наука, М., 1973.
2. Vasil'eva A. B., Butuzov V.F., Kalachev L. V., The Boundary Function Method for Singular Perturbed Problems, SIAM (Cambridge University Press), 1987.
3. Иманалиев М. И., Асимптотические методы в теории интегро-дифференциальных систем, Илим, Бишкек, 1972.
4. Треногин В. А., Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика, Успехи математических наук, 25:4 (1970), 121-156.
5. Smith D. R., Singular perturbation theory, Cambridge university press, 1985.
6. O'Malley R. E., Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, 1991.
7. Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Dover Publ., Inc., New York, 1987.
8. Мищенко Е. Ф., Розов Н.Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, Наука, М., 1975.

УДК 517.928

Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Турсунов Д.А., ОшГУ

Асимптотическое разложение решения сингулярно-возмущенного уравнения с двумя точками поворота

Эки бурулуу чекитине ээ болгон экинчи тартиптеги сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн чек-аралык маселенин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыратмасы жалпыланган чек-аралык функциялар усулу [1, 2] менен тургузулган.

Обобщенным методом погранфункций [1, 2] строится равномерное асимптотическое разложение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота.

Generalized method of boundary functions [1, 2] is constructed uniform asymptotic expansion of solutions of boundary value problems for singularly perturbed ordinary differential equations of second order with two turning points.

Задачи с двумя точками поворота представляют интерес по двум причинам. Одна из них – это связь с уравнением Вебера, решениями которого являются так называемые функции параболического цилиндра. Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра представляет интерес во многих физических задачах. Вторая причина по которой уравнение (1) заслуживает внимания, состоит в том, что это простейшее уравнение, имеющее две точки поворота. Следовательно, если бы асимптотические свойства (1) были, основательно изучены можно было, бы свести асимптотическое исследование других уравнений с двумя точками поворота к этому уравнению [5].

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y''(x) - x(1-x)q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = \alpha, y(1) = \beta, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ - малый параметр, α, β – const, $q(x) > 0, x \in [0,1]$.

В работах [3, 4] методом согласования рассмотрена задача

$$\varepsilon y''(x) - xq(x)y(x) = f(x), \qquad y(0) = 0, y(1) = 0,$$

где $q(x) > 0, x \in [0,1]$, т.е. с одной точкой поворота. Решения состоит из трех функций т.е.

$$y = V^{\text{внеш}} + L^{\text{внут}} - V^{\text{внеш внут}},$$

где $L^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки x=0.

Если асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) построить методом согласования [3, 4], то разложение решения состоит из пяти функций:

$$y = V^{\text{внеш}} + R^{\text{внут}} + L^{\text{внут}} - R^{\text{внут внеш}} - L^{\text{внут внеш}},$$

где $R^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки x=1 (правый конец отрезка),

$L^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки x=0 (левый конец отрезка).

Поэтому мы используем метод [1, 2], в итоге мы получим разложение решения состоящую из трех функций.

Условие U_1: $q(x), f(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$. Для простоты предположим $q(x) \equiv 1$.

Если внешнее разложение решения задачи (1)-(2) искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad \varepsilon \to 0, \tag{3}$$

где U – это пока формальный ряд, то мы получим рекуррентную систему уравнений:

$-x(1-x)\,u_0(x) = f(x)$, $x(1-x)u_k(x) = u''_{k-1}(x), \quad k \geq 1$.

Отсюда однозначно определяются все $u_k(x)$.

$$u_0(x) = -\frac{f(x)}{x(1-x)}, \quad u_k(x) = \frac{u''_{k-1}(x)}{x(1-x)}, \quad k \geq 1.$$ однако на обоих концах рассматриваемого отрезка т.е. при x=0, x=1 все эти функции, вообще говоря, имеют особенности:

$$u_k(x) = x^{-3k-1}(1-x)^{-3k-1}C_k(x), \quad C_k(x) \in C^{\infty}_{[0,1]}. \tag{4}$$

Таким образом, задача (1)-(2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности при x=0, x=1 иногда эти точки называют **точками**

поворота [5]. В окрестности этих точек ряд (3) не только не приближает решение $y(x,\varepsilon)$, но даже теряет асимптотический характер.

Таким образом, внешнее решение задачи (1)-(2) представляется в виде

$$U=\frac{1}{x(1-x)}\left(C_0(x)+\frac{\varepsilon}{(x(1-x))^3}C_1(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^n}{(x(1-x))^{3n}}C_n(x)+\ldots\right), \quad (5)$$

где $C_k(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}$.

Из (5) вытекает, что оно является асимптотическим на отрезке $J(\varepsilon)=\left[\varepsilon^{\gamma},1-\varepsilon^{\gamma}\right],0<\gamma<1/3$.

Равномерно пригодное решение задачи (1)-(2) на всем отрезке включая границы, строим методом [1, 2].

Решение ищем в виде

$$y(x,\varepsilon)=V_n(x,\varepsilon)+P(\tau,\mu)+Q(\xi,\mu)+R_{n+1}(x,\varepsilon), \quad (6)$$

где

$$V_n(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x),\ P(\tau,\mu)=\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^k P_k(\tau),\ Q(\xi,\mu)=\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^k Q_k(\xi),$$

$\tau=x/\mu,\ \xi=(1-x)/\mu,\ \varepsilon=\mu^3$.

Подставляя (6) в (1) получим:

$$\varepsilon\left(V_n''(x,\varepsilon)+\frac{1}{\mu^2}P''(\tau,\mu)+\frac{1}{\mu^2}Q''(\xi,\mu)+R''_{n+1}(x,\varepsilon)\right)- \quad (7$$

$$-x(1-x)\left(V_n(x,\varepsilon)+P(\tau,\mu)+Q(\xi,\mu)+R_{n+1}(x,\varepsilon)\right)=f(x)-H(x,\varepsilon)+H(x,\varepsilon), \quad)$$

где $H(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^n h_k(x)$ – пока неизвестная функция.

Оно определяется следующим образом:

$$v_0(x)=-\frac{f(x)-h_0(x)}{x(1-x)},\ v_k(x)=-\frac{v''_{k-1}(x)-h_k(x)}{x(1-x)},$$

и отсюда выберем $h_k(x)$ таким образом, что $v_k(x)\in C^{\infty}_{[0,1]},k=\overline{1,n}$:

$$h_0(x)=f(0)(1-x)+f(1)x,\ h_k(x)=v''_{k-1}(0)(1-x)+v''_{k-1}(1)x,\ k=\overline{1,n}.$$

Регулярная часть асимптотики решения уже построена:

$$V_n(x,\varepsilon)=v_0(x)+\varepsilon v_0(x)+\varepsilon^2 v_2(x)+\ldots+\varepsilon^n v_n(x).$$

Теперь приступим к построению пограничных функций $P(\tau,\mu)$ и $Q(\xi,\mu)$.

Из (7) для $P(\tau,\mu)$ получим:

$$P''_{-1}-\tau P_{-1}=h_{00},\ P_{-1}(0,\mu)=\mu(\alpha-v_0(0)), \quad (8.1)$$

$$P''_0-\tau P_0=-\tau P''_{-1},\quad P_0(0,\mu)=0, \quad (8.2)$$

$$P''_{3k-1}-\tau P_{3k-1}=h_{0k},P_{3k-1}(0,\mu)=0,\ k=\overline{1,n}, \quad (8.3)$$

$$P''_{3k}-\tau P_{3k}=-\tau P''_{3k-1},\quad P_{3k}(0,\mu)=-v_k(0),\ k=\overline{1,n}, \quad (8.4)$$

$$P''_{3k+1} - \tau P_{3k+1} = -\tau^2 P_{3k},\ P_{3k+1}(0,\mu) = 0,\ k = \overline{0,n}, \tag{8.5}$$

$$P_m(\tau,\mu) \to 0, \tau \to +\infty,\ m = \overline{-1,3n+1}. \tag{8.6}$$

где $h_{00} = f(0),\ h_{0k} = v''_{k-1}(0),\ k = \overline{1,n}$.

Как нам известно, уравнение Эйри $z'' - \tau z = 0$ имеет два независимых решений Ai(τ) и Bi(τ) которые называются функциями Эйри:

$$Ai(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{\pi}},\ Bi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(w_1(x) + w_2(x)),\ \text{где}$$

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xt+t^3/3)} dt,\quad w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\infty e^{-2\pi i/3}}^{0} + \int_{0}^{\infty} \right) e^{xt - t^3/3} dt,\ w_1(x) = \overline{w_2(x)}.$$

Ai(τ) – экспоненциально быстро стремится к нулю при τ→+∞, и с его помощью можно удовлетворить краевым условиям (8.6), Bi(τ) –экспоненциально растет при τ→+∞.

Для $P_k(\tau, \mu)$ получим:

$$P_{-1}(\tau,\mu) = -\pi h_{00} \left[Ai(\tau) \int_0^\tau Bi(s)ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty Ai(s)ds \right] + c_1 Ai(\tau),\ c_1 = \frac{\mu(\alpha - v(0))}{Ai(0)},$$

$$P_0(\tau,\mu) = \pi \left[Ai(\tau) \int_0^\tau sP''_{-1}(s,\mu) Bi(s)ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty sP''_{-1}(s,\mu) Ai(s)ds \right],$$

$$P_{3k-1}(\tau,\mu) = -\pi h_{0k} \left[Ai(\tau) \int_0^\tau Bi(s)ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty Ai(s)ds \right],\ k = \overline{1,n},$$

$$P_{3k}(\tau,\mu) = \pi \left[Ai(\tau) \int_0^\tau sP''_{3k-1}(s,\mu) Bi(s)ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty sP''_{3k-1}(s,\mu) Ai(s)ds \right] + c_{3k} Ai(\tau),$$

$$c_{3k} = \frac{-v_k(0)}{Ai(0)},\ k = \overline{1,n}$$

$$P_{3k+1}(\tau,\mu) = \pi \left[Ai(\tau) \int_0^\tau s^2 P_{3k}(s,\mu) Bi(s)ds + Bi(\tau) \int_\tau^\infty s^2 P_{3k}(s,\mu) Ai(s)ds \right],\ k = \overline{0,n}.$$

При τ→+∞ имеем:

$$P_{-1}(\tau,\mu) = -\frac{h_{00}}{\tau} \left(1 + \frac{2}{\tau^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\tau^6} + \ldots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3k-2)(3k-1)}{\tau^{3k}} + \ldots \right) = O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$P_0(\tau,\mu) = -\frac{h_{00}}{\tau^3} \left(2 + \frac{48}{\tau^3} + \frac{3696}{\tau^6} + \ldots \right) = O\left(\frac{1}{\tau^3}\right),\ P_1(\tau,\mu) = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right).$$

$$P_{3k-1}(\tau,\mu) = -\frac{h_{0k}}{\tau} \left(1 + \frac{2}{\tau^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\tau^6} + \ldots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3k-2)(3k-1)}{\tau^{3k}} + \ldots \right) = O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$P_{3k}(\tau,\mu) = -\frac{h_{0k}}{\tau^3} \left(2 + \frac{48}{\tau^3} + \frac{3696}{\tau^6} + \ldots \right) = O\left(\frac{1}{\tau^3}\right),\ P_{3k+1}(\tau,\mu) = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right),\ k = \overline{1,n}.$$

Т.е. все $P_k(\tau, \mu)\to 0$, при $\tau\to+\infty$, $k=\overline{-1,3n+1}$.

Аналогично из (7) для $Q(\xi,\mu)$ получим:

$$Q_{-1}''-\xi Q_{-1}=h_{10},\ Q_{-1}(0,\mu)=\mu(\beta-v_0(1)), \tag{9.1}$$

$$Q_0''-\xi Q_0=-\xi Q_{-1}'',\ \ Q_0(0,\mu)=0, \tag{9.2}$$

$$Q_{3k-1}''-\xi Q_{3k-1}=h_{1k}, Q_{3k-1}(0,\mu)=0,\ \ k=\overline{1,n}, \tag{9.3}$$

$$Q_{3k}''-\xi Q_{3k}=-\xi Q_{3k-1}'',\ \ Q_{3k}(0,\mu)=-v_k(1),\ k=\overline{1,n}, \tag{9.4}$$

$$Q_{3k+1}''-\xi Q_{3k+1}=-\xi^2 Q_{3k},\ \ Q_{3k+1}(0,\mu)=0,\ k=\overline{0,n}, \tag{9.5}$$

$$Q_m(\xi,\mu)\to 0,\xi\to+\infty,\ m=\overline{-1,3n+1}. \tag{9.6}$$

где $h_{10}=f(1),\ h_{1k}=v_{k-1}''(1),\ k=\overline{1,n}$.

Для остаточной функций $R_{n+1}(\varepsilon,x)$ имеем следующую задачу:

$$\varepsilon R_{n+1}''(x,\varepsilon)-x(1-x)R_{n+1}(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1}),\ \ R_{n+1}(0,\varepsilon)=R_{n+1}(1,\varepsilon)=0. \tag{10}$$

Для решения задачи (10) справедлива оценка:

$$|R_{n+1}(x,\varepsilon)|\le c\varepsilon^{n+1},\ x\in[0,1].$$

Теорема. Пусть f(0)≠0, f(1)≠0 и выполняется условие U_1. Тогда (6) является равномерно асимптотическим разложением функции y(x,ε) – решение задачи (1)-(2) на отрезке [0, 1] и справедлива оценка:

$$|y(x,\varepsilon)-V_n(x,\varepsilon)-P(\tau,\mu)-Q(\xi,\mu)|\le c\varepsilon^{n+1},\ c>0-\text{const}.$$

Отметим, что для простоты мы рассмотрели случай $q(x)\equiv 1$, аналогично исследуется случай $q(x)>0, x\in[0,1]$.

Заметим, что если асимптотическое разложение решения задачи

$$\varepsilon y''(x)-xq(x)y(x)=f(x),$$

$$y(0)=0, y(1)=0,$$

рассмотренного в работах [3, 4] построить обобщенным методом погранфункций, то разложение решения состоит из двух функций:

$$y=V^{внеш}+P,$$

где P – обобщенная погранфункция, вблизи точки $x=0$.

Литература

1. Алымкулов К. Аналог метода погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке. В сб. тезисов «Дифференциальные уравнения и оптимальное упарвление», посвящ. 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко.-М., 2012, – С.12-14.
2. Alymkulov K. Extension of boundary layer function method for singularly perturbed differential equation of Prandtle - Tichonov and Lighthill types // Reports of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries, Almaty, June July, 2009, pp 256-259.
3. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 248 с.
4. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач.–М.: Наука, 1989. –334 с.

5. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. –М.: Мир, 1968.

УДК 517.928

Анарбаева Г., Азимбаев М., Маматкулова М., ОшГУ

Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы линейных дифференциальных уравнений в особо критическом случае

Бул жумушта сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечиминин бир калыпта жакындашуусу каалаган тактыкта өзгөчө учурда тургузулган.

В данной работе построены равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений с любой степенью точностью в особо критическом случае.

In this paper uniform approximations are constructed for solving singularly – perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case.

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon[f(t) + B(t)x(t,\varepsilon)], \qquad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon),\ \left\|x^0(\varepsilon)\right\| = O(\varepsilon), \qquad (2)$$

где $D(t) - diag(\lambda_1(t),\lambda_2(t))$; $f(t) = colon(f_1(t),f_2(t))$; $B(t) = (b_{kj}(t))_1^2$;

$\varepsilon > 0-$ малый параметр; $[t_0,T_0]$- отрезок действительной оси, $t_0 < T_0$;

$H_0 = \{(t_1,t_2): t_0 \le t \le T_0,\ -\infty < t < +\infty\}$. $\hat{O}(H_0)-$пространство аналитических функций в H_0;

Решение $x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon))$ будем искать в классе $x_k(t,\varepsilon) \in \hat{O}(H_0)$ $(k=1,2)$ по $\boldsymbol{t}$.

Пусть

I. $\lambda_k(t) \in \hat{O}(H_0);\ f_k(t) \in \hat{O}(H_0);\ b_{kj}(t) \in \hat{O}(H_0);\ (k,j=1,2).$

II. $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t);\ \lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t),$ где $\alpha(t),\beta(t)-$ действительные функции, причем $\alpha(t) < 0$ при $t_0 \le t < a_0$;

$\alpha(t) > 0$ при $a_0 < t \le T_0$;

$\alpha(a_0) = 0$, но $\beta(a_0) \ne 0$;

$t = t_1 + it_2;\ \tau = \tau_1 + \tau_2, \tau_1, \tau_2, t_1, t_2 -$ действительные переменные;

$u_k(t_1,t_2) = \operatorname{Re}\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds \le 0, k = 1,2; \quad H_0 = \{(t_1,t_2): u_k(t_1,t_2) \le 0, k = 1,2\};$

$\alpha_k(t)$ не имеет нулей в области H_0; $u_1(t_0,t_2) = u_1(T_0,t_2) = 0$ при $-\infty < t_2 < +\infty$.

III. Будем предполагать, что если (t_1,t_2)- внутренняя точка области H_0, то гармоническая функция $Jm\lambda_1(t_1,t_2) > 0$ и если (t_1,t_2) - граничная точка области H_0, то может иметь место $Jm\lambda_1(t_1,t_2) = 0$.

Сначала задачу (1), (2) заменим на следующую эквивалентную задачу:

$$x(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)[B(\tau)x(\tau,\varepsilon) + f(\tau)]d\tau, \qquad (3)$$

где $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s))ds$.

Как в работе [2] рекуррентно определим следующие функции:

$$x^{(0)}(t,\varepsilon)\equiv 0;\quad x^{(1)}(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau;$$

$$x^{(k+1)}(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)\tilde{o}^{(k)}(\tau,\varepsilon)d\tau\quad(k=1,2,...). \tag{4}$$

Тогда решение задачи (1), (2) представимо в виде:

$$\tilde{o}(t,\varepsilon)=\tilde{o}^{(1)}(t,\varepsilon)+\tilde{o}^{(2)}(t,\varepsilon)+...+\tilde{o}^{(k)}(t,\varepsilon)+.... \tag{5}$$

Здесь $\tilde{o}^{(1)}(t,\varepsilon)$ определяется как первое приближение из уравнения (3), а $\tilde{o}^{(k)}(t,\varepsilon)$ $(k=2,3,...,)$ не является обычным последовательным приближением уравнения (3) (последовательность определяется по формуле (4)). Теперь задача состоит в том, как построить мажорантный сходящий ряд для функционального ряда (5) при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0,\ t\in H_0,\ (\varepsilon_0-const;)$.

Из работы [1] следует, что $\lim\limits_{t_2\to-\infty}u_1(t_1,t_2)=0$ $(\lim\limits_{t_2\to+\infty}u_2(t_1,t_2)=0)$ или $\lim\limits_{t_2\to+\infty}u_1(t_1,t_2)=0$ $(\lim\limits_{t_2\to-\infty}u_1(t_1,t_2)=0$ при фиксированном t_1.

Числа p,q будем выбирать так, чтобы для них имело место неравенство: $0<p<q<1$. Заметим, что из равенства

$$u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon^p\qquad(u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon^q;u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon), \tag{6}$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^*=\tilde{t}_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется

$$t_1^*=t_0+\delta(\varepsilon)\qquad(t_1^*=t_0+\gamma(\varepsilon);t_1^*=t_0+\gamma_1(\varepsilon)),$$

где $\delta(\varepsilon)\ge 0$ $(\gamma(\varepsilon)\ge 0;\gamma_1(\varepsilon)\ge 0)-$ непрерывная функция от ε при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$,

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$ $\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0;\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_1(\varepsilon)=0\right)$.

Здесь все условия существования неявной функции выполняются. Аналогично из равенства (6) в некоторой окрестности точки $(t_1^*=T_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется

$t_1^*=T_0-\tilde{\delta}(\varepsilon)$ $(t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}(\varepsilon);\ t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}_1(\varepsilon))$,

где $\tilde{\delta}(\varepsilon)\ge 0$ $(\tilde{\gamma}(\varepsilon)\ge 0;\tilde{\gamma}_1(\varepsilon)\ge 0)$- непрерывная функция от ε при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ $(\varepsilon_0>0)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\delta}(\varepsilon)=0\ \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}(\varepsilon)=0;\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}_1(\varepsilon)=0\right).$$

Для оценки функций $\{x_k^{(n)}\}$ $(n=2,...;k=1,2)$ будем использовать основную лемму 4 работы [3]. В рассматриваемом случае все условия этой леммы выполняются. Поэтому имеет место заключение этой леммы.

Пусть линия уровня (C_1) соединяет точки $(t_0+\gamma(\varepsilon),0),(T_0-\widetilde{\gamma}(\varepsilon),0)$; линия уровня (C_2) соединяет точки $(t_0+\delta(\varepsilon),0),(T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon),0)$; а линия уровня $(\overline{C})$ соединяет точки $(t_0+\gamma_1(\varepsilon),0),(T_0-\widetilde{\gamma}_1(\varepsilon),0)$. Через точки $(T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon),0)$ проведем прямую, параллельную оси t_2. Эта прямая имеет единственную точку пересечения $(T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon),t_{21})$ с линией уровня (C_1) (условие $Jm\lambda_1(t)>0$).

Введем в рассмотрение полосу П, ограниченную линиями уровня (C_1) и (C_2), отрезком действительной оси $[t_0+\gamma(\varepsilon),T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon)]$ и отрезком, соединяющим точки $(T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon),0),(T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon),t_{21})$.

На полосе П рассмотрим уравнение

$$u_1(t_1,t_2)=at_1+b, \qquad (7)$$

где $a=\dfrac{\varepsilon^q-\varepsilon^p}{T_0-t_0-\gamma(\varepsilon)-\widetilde{\delta}(\varepsilon)}$, $b=\dfrac{\varepsilon^p[t_0+\gamma(\varepsilon)]-\varepsilon^q[T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon)]}{T_0-t_0-\gamma(\varepsilon)-\widetilde{\delta}(\varepsilon)}$.

В полосе П существует непрерывно дифференцируемая кривая (K_0), соединяющая точки $(t_0+\gamma(\varepsilon),0),(T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon),0)$ и имеющая уравнение (7). Причем из (7) однозначно определяется $t_2=\varphi(t_1)$ с областью существования $t_0+\gamma(\varepsilon)\le t_1\le T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon)$ и $u_1(t_1,\varphi(t_1))$ убывает при $t_0+\gamma(\varepsilon)\le t_1\le T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon)$.

Возьмем кривую (K_0^*), симметричную (K_0). Область, ограниченную кривыми (K_0) и (K_0^*) обозначим $\mathrm{K}_\varepsilon\subset H_0$; Еще возьмем кривую (C^*), симметричную к $(\overline{C})$. Область, ограниченную кривыми $(\overline{C})$ и (C^*), обозначим $\overline{\mathrm{K}}\in H_0(\mathrm{K}_\varepsilon\subset\overline{\mathrm{K}})$.

Путь интегрирования l для $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)(n=1,2....)$ определяется в зависимости от того, какому множеству принадлежит точка (t_1,t_2).

Пусть $\widetilde{\mathrm{K}}=\Delta_1\cup\overline{\mathrm{K}}\cup\widetilde{\Delta}_1$, $\widetilde{\mathrm{K}}_\varepsilon=\Delta\cup\mathrm{K}_\varepsilon\cup\widetilde{\Delta}$,

где $\Delta_1=\{(t_1,t_2): t_0\le t_1\le t_0+\gamma_1(\varepsilon);\quad t_2=0\}$,

$\widetilde{\Delta}_1=\{(t_1,t_2): T_0-\widetilde{\gamma}(\varepsilon)\le t_1\le T_0;\quad t_2=0\}$;

$\Delta=\{(t_1,t_2): t_0\le t_1\le t_0+\gamma(\varepsilon);\quad t_2=0\}$,

$\widetilde{\Delta}=\{(t_1,t_2): T_0-\widetilde{\delta}(\varepsilon)\le t_1\le T_0;\quad t_2=0\}$.

Из результатов работы [1] следует, что для $(t_1,t_2)\in\widetilde{K}$ справедливы оценки:

$$\left|\tilde{o}_1^{(1)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon,$$

$$\left|\tilde{o}_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon,\ \tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\ c-const.$$

Путь интегрирования l для $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)(n=1,2....)$ определяется в зависимости от того, к какому множеству принадлежит точка (t_1,t_2).

Если $(t_1,t_2)\in\Delta_1 \quad (t=t_1,\ t_2=0)$, то l состоит из одного отрезка прямой, соединяющего точку $(t_0,0)$ с точкой $(t_1,0)$ $(\mathrm{t}_0\le t_1\le t_0+\gamma_1(\varepsilon))$.
В этом случае $\operatorname{Re}\lambda_k(t)\le-\alpha,\ \alpha>0-const.$

Если $(t_1,t_2)\in K_\varepsilon$, то $l=\bigcup_{k=1}^{3}l^{(1)}$, где $l^{(1)}$ – отрезок прямой соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_0+\gamma(\varepsilon),0)$; l^2 – отрезок кривой (K_0) соединяющий точки $(t_0+\gamma_1(\varepsilon),0)$ с точкой $(t_1,t_2^*=\widetilde{\varphi}(t_1,\varepsilon))$; $l^{(1)}$ – отрезок прямой соединяющий точки (t_1,t_2^*) с точкой $(t_1,t_2).t_2^*=\widetilde{\varphi}(t_1,\varepsilon)$. Здесь $t_2^*=\widetilde{\varphi}(t_1,\varepsilon)$ определяется из

$$u_1(t_1,t_2^*)=-\beta(\varepsilon),\ \tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\ \varepsilon\le\beta(\varepsilon)\le\varepsilon^p.$$

Для $x_2^{(n)}(t,\varepsilon)\,(n\ge2)$ путь интегрирования $\widetilde{l}$ симметричен для l относительно действительной оси.

Справедливы следующие оценки:

$$\left|\tilde{o}_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon\left(c\varepsilon^{p_0}\right)^{k-1}\quad(j=1,2;k=1,2,...),\tag{8}$$

где $c>0-const$, не зависит ни от *к,* ни от $\varepsilon;\ p_0=1-p-q,\ \ 0<p<q<\frac{1}{2}.$

Имеет место следующая

Теорема: Пусть выполнены условия I, II, III. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно на $\Delta\cup K_\varepsilon$ и справедлива оценка (8), т.е. функциональный ряд (5) при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0,\ \ (\varepsilon_0-const;),\ t\in\Delta\cup K_\varepsilon$ сходится равномерно и абсолютно.

Примечание. Если величины $-\varepsilon^p$, $-\varepsilon^q$, соответственно, заменить на $2\alpha_0(\varepsilon),\alpha_0(\varepsilon)$, то оценка (8) имеет другой вид. Здесь $\alpha_0(\varepsilon)=\varepsilon\ln\varepsilon$ при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0-const,\alpha_0(0)=0.$

Литература

1. Азимбаев М.А. Устойчивость решений начальной задачи линейных сингулярно возмущенных уравнений. - Дис. …канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ош, 2010, С. 1-116.
2. Каримов С.К. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром, при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений»: - Дисс…. докт. Физ.-математ. наук: 01.01.02. - Ош, 1983. – 260 с.
3. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: - Дисс….док. физ.-математ. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2001. – 204 с.

УДК: 517.956.6

Асанов А., Бекешов Т.О., Чоюбеков С.М., ОшГУ

О решении некласического интегрального уравнения I рода в пространстве непрерывных функции

Көптөгөн прикладдык мүнөздөгү маселелердин модели интегралдык теңдемеге келтирилет. Алардын ичинен классикалык эмес теңдемелер азыраак каралган жана өзгөчө кызыктырууну жаратат.

Бул макалада үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде Липщиттин шарты менен Вольтерранын I типтеги классикалык эмес теңдемесине регуляризациялоочу теңдеме тургузулган.

Модели многих задачи прикладного характера сводится к интегральным уравнением, среди которых неклассические уравнение представляют особые интересы и мало изучены. В данной работе построено регуляризирующее уравнение для неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода в пространстве непрерывных функций со условиям Липщица.

A model of many problems, of applied nature is reduced to an integral equation, including neoclassical equation of special interest and is poorly understood. In this paper we built a regularizing equation for neoclassical Volterra integral equation of type I in the space of continuous functions with Lipschitz conditions.

Рассмотрим интергальное уравнение

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t) \quad t \in [t_0;T] \tag{1}$$

где $\alpha(t) \in C[t_0,T]$ $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \le t$ при всех $t \in C[t_0;T]$, $K(t,s)$ и $f(t)$ известные фунции в области $G = \{(t,s): t_0 \le t \le T; \alpha(t) \le s \le t\}$ и на отрезке $[t_0;T]$ соответственно, $f(t_0) = 0.$

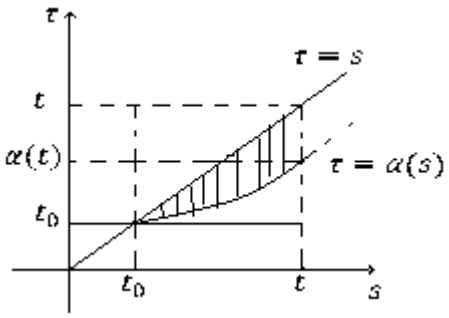
Лемма 1. (Обобщенная формула Дирихле). Пусть $\alpha(t) \in C[t_0;T]$ $\alpha(t_0) \in t_0$, $\alpha(t) -$ строго возрастающая функция на $[t_0;T]$, $\alpha(t) \le t$ при всех $t \in C[t_0,T]$ $F(t,s) \in C(G)$, $G = \{(t,s): \quad t_0 \le t \le T, \quad \alpha(t) \le s \le t.\}$ Тогда для любого $t \in C[t_0,T]$

$$\int_0^t [\int_{\alpha(t)}^{s} F(s,\tau)d\tau]ds = \int_{t_0}^{t} [\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)} F(s,\tau)ds]d\tau + \int_{\alpha(t)}^{t} [\int_{\tau}^{t} F(s,\tau)ds]d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{t} [\int_{t_0}^{\varepsilon(s)} F(s,\tau)d\tau]ds = \int_{t_0}^{\alpha(t)} [\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} F(s,\tau)ds]d\tau.$$

где $\alpha^{-1}(\tau) -$ обратная функция к $\alpha(t).$

Доказательство. Доказательство вытекает из следующего графика:



Предполагаем выполнение следующих условий

1^0 $\alpha(t) \in C^1[t_0;T], \quad \alpha'(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0;T];$

2^0 $K(t,t) \in C[t_0;T]$ и $K(s,s) \ge m > 0$ при всех $s \in [t_0;T];$

3^0 Функция $K(t,s)$ удовлетворяет условию Липщица по t, т.е. $\forall t,\tau \in [t_0;T](t > \tau)$ и при всех $(t,s),(\tau,s) \in G$ $|K(t,s) - K(\tau,s)| \le L(t-s), \quad L > 0$ - const.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u(t_0), \quad t \in [t_0;T]; \tag{2}$$

где, $u(t)$ - решение уравнения (1).

Его решение будем искать в виде

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon) \tag{3}$$

Тогда из (2) имеем $\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int\limits_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon(u(t)-u(t_0))$.

Последнее перепишем в следующем виде

$$\xi(t)+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds=\frac{(-1)}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds-(u(t)-u(t_0)) \quad (4)$$

Используя резольвенту ядра $-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)$, из (4) получим

$$\xi(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds-(u(t)-u(t_0))+$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\{\int\limits_{\alpha(s)}^{s}[K(s,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau-\int\limits_{t_0}^{\alpha(s)}K(\tau,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\varepsilon(u(s)-u(t_0))\}ds.$$

Из последнего переходим

$$\xi(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds-(u(t)-u(t_0))+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\alpha(s)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds+ \quad (5)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(s)-u(t_0)]ds;$$

Применим обобщенную формулу Дирихле, преобразуем двойные интегралы в (5):

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}[\int\limits_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$\times(K(s,\tau)-K(t,\tau))ds]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\alpha(t)}^{t}[\int\limits_{\tau}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}(K(s,\tau)-K(t,\tau))ds]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}\}\times$$

$$\times[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(\tau)}^{t}[1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad (7)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\alpha(s)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds=\frac{-1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(\tau,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(s,s)ds}\xi(\tau,\varepsilon)d\tau; \quad (8)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(s)-u(t_0)]ds = u(t)-u(t_0)-[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t0}^{t} K(s,s)ds} - \\ -\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]ds; \tag{9}$$

В силу (6) - (9) уравнение (5) примет вид

$$\xi(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}\{K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(s,s)ds} + \int_{t_0}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds + \\ +[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(\tau,\tau)d\tau}][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\}\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}\{-[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)] + \\ +\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{\tau} K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds + [1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}]\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}\{-[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)] + \frac{1}{\varepsilon} \tag{10}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{\tau} K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds + [1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\}\xi(\tau,\varepsilon)d\tau - \\ -[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]\}ds.$$

Введем обозначения

$$H_0(t,\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(s,s)ds}, \tag{11}$$

$$H_1(t,\tau,\varepsilon) = -e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)++\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon^2}K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)- \\ -K(t,\tau)]ds + \frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau)-K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau}, \tag{12}$$

$$H_2(t,\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(s,s)ds}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)] - -\int_{\tau}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,\tau)-K(s,\tau)]ds, \tag{13}$$

$$U(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]ds. \tag{14}$$

Учитывая обозначения (11)-(14) уравнение (10) запишем в следующем виде

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{\alpha(t)} H_0(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_{t_0}^{\alpha(t)} H_1(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_{\alpha(t)}^{t} H_2(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + U(t,s), \tag{16}$$

где $t \in [t_0, T]$.

Далее нам понадобится следующая

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1^0 -3^0 и функции $H_0(t,\tau,\varepsilon)$, $H_1(t,\tau,\varepsilon)$ и $H_2(t,\tau,\varepsilon)$ определены формулами (11), (12) и (13). Тогда справедливы следующие оценки:

$$1)\quad \int_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(t,\tau,\varepsilon)|d\tau \le \gamma_0, \quad t\in[t_0,T]; \tag{16}$$

где $\gamma_0 = \sup\limits_{v\in[t_0,T]} \dfrac{|K(v,\alpha(v)|\alpha'(v)}{|K(v,v)|}$;

$$2)\quad |H_1(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{L}{m}(2e^{-1}+1), \quad (t,\tau)\in G_1 = \{(t,\tau): t_0 \le t \le T, t_0 \le \tau \le \alpha(t)\}; \tag{17}$$

$$3)\quad |H_2(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{L}{m}, \quad (t,\tau)\in G_2 = \{(t,\tau): t_0 \le t \le T, \alpha(t) \le \tau \le t\}; \tag{18}$$

Доказательство. 1) Учитывая (11) и сделав подстановку $v = \alpha^{-1}(\tau)$, имеем

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(\alpha^{-1}(\tau),\tau,\varepsilon)|d\tau \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)} |K(\alpha^{-1}(\tau),\tau,)| e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(s,s)ds} d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{|K(v,\alpha(v))|K(v,v)}{K(v,v)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{v}^{s} K(s,s)ds} \alpha'(v)dv \le \gamma_0 [e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{v}^{s} K(s,s)ds}]\Big|_{v=t_0}^{v=t} \le \gamma_0, \ t\in[t_0,T], \quad \varepsilon > 0$$

2) Учитывая условия 2^0 и 3^0, из (12) можно получить требуемое.

3) Учитывая условия 2^0 и 3^0, интегрируя по частям, из (13) имеем

$$|H_2(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{L}{\varepsilon}(t-\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} K(s,s)ds} + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tau}^{t} L(t-s)K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} =$$

$$= \frac{L}{m}(t-\tau)e^{-1\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} K(s,s)ds} + \frac{L}{\varepsilon}(t-s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} K(\tau,\tau)d\tau}\Big|_{s=\tau}^{s=t} + \frac{L}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} ds \le \frac{L}{m}, \ (t,\tau)\in G_2.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма. Пусть выполняются условия 2^0 и $U(t,\varepsilon)$ определен формулой (14). Тогда:

$$1)\quad \text{если} \quad u(t)\in C[t_0,T] \quad \text{то} \quad \|u(t,\varepsilon)\|_c \le 2\|u(t)\|_c e^{-\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta), \quad 0<\beta<1, \tag{19}$$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|t-s|\le\varepsilon^\beta} |u(t)-u(s)|$;

$$2)\quad \text{если } u(t)\in C^\gamma[t_0,T], \ 0<\gamma<1, \ \text{то } \|U(t,\varepsilon)\|_c \le c_0 c_\gamma \varepsilon^\gamma, \tag{20},$$

где $c_\gamma = \sup\limits_{t,s\in[t,T]} \dfrac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\gamma}$, $c_0 = \int\limits_0^\infty e^{-mv}v^{\gamma-1}dv.$

Доказательство: 1) Пусть $t_0 \le t \le t_0+\varepsilon^\beta$, $0<\beta<1$. Тогда из (14) имеем

$$|U(t,\varepsilon)| \le \omega_u(\varepsilon^\beta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\int_{\tau}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} ds = \omega_u(\varepsilon^\beta). \tag{21}$$

Если $t_0+\varepsilon^\beta \le t \le T$, то

$$|U(t,\varepsilon)| \le 2\|u(t)\|_c e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^{t} K(s,s)ds} + \int_{t_0}^{t-\varepsilon^\beta} \frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} 2\|u(t)\|_c ds +$$

$$+\int_{t-\varepsilon^{\beta}}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}\omega_u(\varepsilon^{\beta})ds\le 2\|u(t)\|_c e^{-\frac{m}{\varepsilon}\varepsilon^{\beta}}+\omega_u(\varepsilon^{\beta})=2\|u(t)\|_c e^{-\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_u(\varepsilon^{\beta}). \qquad (22)$$

Из оценки (21) и (22) вытекает оценка (19).

2) Из (14) имеем

$$|U(t,\varepsilon)|\le c_\gamma(t-t_0)^{\gamma}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_0}^{t}K(s,s)ds}+c_\gamma\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\gamma}-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)ds\le c_\gamma\gamma\varepsilon^{\gamma}\int_0^{\infty}e^{-mv}v^{\gamma-1}dv=c_0c_\gamma\varepsilon^{\gamma}, \qquad (23)$$

где $t\in[t_0,T]$.

Из (23) следует оценка (20). Лемма 3 доказана.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1^0 -3^0 и $\gamma_0 b<1$, где $\gamma_0=\sup\limits_{v\in[t_0,T]}\dfrac{|K(v,\alpha(v)|\alpha'(v)}{|K(v,v)|}$,

$b_0=\exp[\dfrac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)]$.

Тогда:

1) если уравнение (1) имеет решение $u(t)\in C[t_0;T]$, то решение (2) при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_c\le e^{-\frac{m}{\varepsilon}\varepsilon^{\beta}}+\omega_u(\varepsilon^{\beta})=2\|u(t)\|_c e^{-\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_u(\varepsilon^{\beta}). \qquad (24)$$

где $\omega_u(\delta)=\sup\limits_{|t-s|\le\delta}|u(t)-u(s)|$;

2) если уравнение (1) имеет решение $u(t)\in C^{\gamma}[t_0;T]$, $0<\gamma\le 1$, то решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_c\le\frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}c_0c_\gamma\varepsilon^{\gamma}, \qquad (25)$$

где $c_\gamma=\sup\limits_{(t,s)\in[t_0,T]}\dfrac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^{\gamma}}$; $C_0=\gamma\cdot\int_0^{\infty}e^{-m\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$.

Доказательство. В силу оценки (16), (17), (18) из уравнения (15), имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)|\le\gamma_0\|\xi(t,\varepsilon)\|_c+\int_{t_0}^{\alpha(t)}\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)|\xi(s,\varepsilon)|ds+\int_{\alpha(t)}^{t}\frac{L}{m}|\xi(s,\varepsilon)|ds+|U(t,\varepsilon)|,\quad t\in[t_0,T].$$

Отсюда, имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)|\le\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)\int_{t_0}^{t}|\xi(s,\varepsilon)|ds+\gamma_0\|\xi(t,\varepsilon)\|_c+\|U(t,\varepsilon)\|_c,\ t\in[t_0,T]. \qquad (26)$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, из (26) имеем

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_c\le[\gamma_0\|\xi(t,\varepsilon)\|_c+\|U(t,\varepsilon)\|_c]e^{\frac{L}{em}(2e^{-1}+1)(T-t_0}.$$

Отсюда вытекает

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_c\le\frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}\|U(t,\varepsilon)\|_c. \qquad (27)$$

В силу оценки (19) и (20), из (27) получим требуемые оценки (24) и (25). Теорема 1 доказана.

Литература

1. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений первого рода //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. -Фрунзе: Илим 1988,-вып.21-С.3-38.
2. Апарцин А.С. Неклассические упавнения Вольтера I рода. Теория и численные методы.
3. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование равивающихся систем. –М.: Наука 198-350 с.
4. Мартынюк А.А. Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. Киев: Наукова думка, 1979.-271 с.

УДК:510

Асилова З.А., Мураталиева В.Т.,
Мамбеткожоева А., Абдукеримов Т.А., ЖАМУ

Кыргызча математикалык окуу китептеринин өнүктүрүлүшү

Макалада математикалык окуу китептеринин кыргыз тилинде чыга баштаган тарыхынан баштап, азыркы кездеги абалына чейин анализ жасалып, сын пикирлер айтылган.

В статье приводится история развития математических учебников на кыргызском языке и их анализ. Даются рекомендации по дальнейшей работе с этой проблемой.

The history of the development mathematical textbook happens to in article on kyrgyz language and their analysis. The recommendations are given on the further work with this problem.

Туркестан райондорунун көчмө калктарына арналып жазылган математика боюнча биринчи окуу китеби 1920 – жылы жарыкка чыгат. Ал казак тилинде, араб тамгасында басылган. М. Дуулатовдун 1-класс үчүн арифметика боюнча окуу китеби эле. Ал революцияга чейин эски мектептердин схоластикалык методу боюнча жазылып, бирдиктүү элдик мектептин программасына аздыр-көптүр ылайыкташтырылган китеп болгон.

Окуучуларга гана эмес, окутуучуларга да түшүнүксүз, татаал болушу менен бирге анын саясий идеялык денгээли да төмөн болгон.

Мисалы: «Дыйкан базарга 12 койду айдап бара жатты. Анын 6 коюн жолдон милиционер тартып алды. Дыйкандын канча кою калды?» деген сыяктуу маселелер жолугат.

Кыргыз мектептеринин мугалимдеринин билим деңгээли жетишсиздигине, казак тилин анчалык билбегендигине, тиражынын аздыгына байлыныштуу ал китеп Кыргызстандын аймагындагы мектептеринде дээрлик колдонулбаган.

1924-жылы Кыргыз автономиялык республикасынын түзүлүшү жана араб алфавитинин негизинде кыргыз элинин жазмасын кабыл алуу математика боюнча эне тилиндеги окуу куралдарынын жаратылышына тийиштүү мүмкүнчүлүктөрдү түздү [1].

Кыргыз элинин маданий өсүш жактан артта болгондугу ал кезде математикалык окуу китептерди жазууга жөндөмдүү болгон жергиликтүү авторлордун дээрлик жок болгондугуна байланыштуу эне тилиндеги алгачкы окуу адабиятын жаратуу казак тилиндеги китептерди которуудан башталат.

1925-жылы Москвада, СССР элдеринин типографиясында араб тамгасында басылып чыккан С. Зенченко, Э. Эменовдун III класс үчүн арифметика боюнча эсеп китеби эне тилинде жарык көргөн биринчи математикалык окуу куралы болгон. Ал орусчадан казак тилине которулуп, андан кыргызчага которулган вариантын Б. Данияров аткарган.

Республикада котормочулук боюнча тийиштүү тажрыйбанын терминологиялык базанын жоктугу, котормочунун илимий – методикалык деңгээлинин жетишсиздиги ал котормонун сапатына өз таасирин тийгизди. Андагы математикалык түшүнүктөрдүн, терминдердин, сүйлөмдөрдүн котормосунда орчундуу кемчилдиктер байкалат.

Мисалы: «туурасы» деген түшүнүк - эден, «сумма» - кошунду, «сандардын чоңдугу» – белги деп которулган. Китептин оригиналында бир топ илимий-методикалык кемчилдиктер жиберилип ал кыргыз мектептери үчүн татаал болгондугунан ал кайрадан басылган эмес [2].

1927-жылы С. Хаджановдун башталгыч мектептер үчүн арифметика боюнча эсеп китеби казакчадан которулат (Б. Данияровдун араб тамгасындагы котормосу). Китепте бүтүн сандар менен арифметикалык төрт амал, алардын касиеттери, метрикалык чендер каралат [3].

Ал эски арабча китептердеги догматикалык жол менен жазылгандыктан колдонууга татаал, түшүнүксүз болгон. Алсак, 212 ни 53кө бөлүү иреттеп кемитүү жолу менен төмөндөгүчө түшүндүрүлөт:

212 : 53=?

212 – 53=159 159-53=106 106-53= 53 53-53=0

Демек: 212:53=4.

60 ты бешке бөлүү амалы төмөнкүчө жазылган:

60=12+12+12+12+12

Тийинди 12 ни кандайча табуу керек экендиги айтылбайт. Көбөйтүү, калдыктуу бөлүү амалдарын аткаруу да ушул сыяктуу түшүнүксүз.

Ошол эле жылы Б. Данияровдун которуусунда казак автору М. Дуулатовдун 1-класска арналган эсеп китеби араб тилинде Фрунзеде Кыргыз мамлекеттик басмада басылат. Китепте көргөзмөлүүлүк, жеткиликтүүлүк, курчап турган турмуш практика менен байланыштыруу сыяктуу дидактикалык принциптерди ишке ашыруу аракеттери жасалгандыгы байкалат.

Мисалы, сан жөнүндөгү түшүнүк колдун манжаларын, көздү, класстагы буюмдардын, окуучулардын санын аныктоо аркылуу кийирилет.

2 3=5 3 4=7 3 2 =1 2 5 =10

сыяктуу мисалдарда коюлбаган амал белгилерин табууга, өз алдынча мазмундуу маселелерди түзүүгө көнүгүүлөр келтирилген. Окуучулардын алгачкы геометриялык маалыматтар менен тааныштырууга көңүл бурулган.

Китептин жалпы саясий идеялык, илимий - методикалык деңгээлин төмөн болгондугун белгилеп кетүү керек. Маселелер, мисалдар тийиштүү эрежелерге, талаптарга ылайыксыз түзүлгөндүгү байкалат. Мисалы: «Боз эчки улак тууду. Быйылкы жылы 3 улак тууду» «менин карындашыма, мага 4метр чыт керек, экөөбүзгө канча метр чыт керек» деген одоно маселелер бар.

Которууга жеңил болгондугу менен казак авторлорунун китептеринин саясий-идеялык, илимий - методикалык деңгээли тийиштүү талаптарга жооп берген эмес, мектептин программаларына да анчалык ылайыктуу болбогон. Ошондуктан математикалык окуу китептер боюнча мектептердин муктаждыктарын канааттандыруу орус авторлорунун китептерин которууга багытталган.

Араб алфавитинин негизинде эне тилинде жазманын кабыл алынышы прогрессивдүү көрүнүш болсо да анын кыргыз тилине ыңгайсыздыгын практика көрсөттү. Алфавиттин татаалдыгы айрыкча математиканы окуутуда өтө терең таасир кылат. Тыныш белгилерин, баш тамгаларын жоктугу, жетишпеген ариптердин ордуна «кыбача» деп атала турган кошумча белгилерди колдонуу тексттерди шар окуп, алардын мазмунун түшүнүүгө тоскоол болду. Арабча жазмада тексттин оңдон солго карай, арифметикалык амалдардын тескерисинче жазылышы, математиканы окуутуда зор методикалык кыйынчылыктарды алып келди.

Кыргыз жазмасынын 1928 - жылдан баштап латын алфавитине өтүшү математикалык окуу куралдарын жаратуу жана колдонуу ишин өтө зор жеңилдетти.

Окуу китептердин санын, сапатын жакшыртууга жана илимий-методикалык деңгээлин жогорулатууга мүмкүнчүлүк түздү.

1925-1933 жылдарда жалпысынан алганда, башталгыч жана жети жылдык мектептер үчүн эне тидинде 15 ке жакын котормо жана оригиналдуу окуу куралдары жарыкка чыгарылды. Булардын көпчүлүгү башталгыч мектептерге тиешелүү болгон. Колдонууда болгон математикалык китептердин бир тектүү болбогондугу, сапаттарынын талапка ылайыксыздыгы, жетишсиздиги балдарга математикалык билим берүү ишин жакшыртууга көрсөтүп жаткан терс таасири айкын байкалууда эле [3].

Окуу пландарынын өзгөрбөй туруктуу болушу математика боюнча котормо китептердин сапаты барган сайын жакшыртылышына, терминдердин такталып бир тектүү болушуна тийиштүү шарттарды түздү.

Кыргыз тилиндеги математикалык адабият негизинен илимий-методикалык, саясий-теориялык деңгээли жагынан алдыда болгоп орусча методикалык математикалык адабияттарынын негизинде калыптанып өнүгүп-өстү деп айтууга болот.

Мектептерде математикалык билим берүүнүн сапатын жогорлатууда окуу куралдарынын айрыкча окуу китептеринин сапаттуу болушуна көңүл бурулушу зарыл. Анткени китептер окуу куралдарынын бирден бир булагы болуп санала тургандыгы белгилүү. Математика боюнча ушул убакка чейин орус мектептери үчүн жазылган окуу китептердин котормолору пайдаланып келинген.

1940-жылга чейин кыргыз тилинде 60 ка жакын котормо жана оригиналдуу окуу китептери жаңыланган. Мектептердин муктаждыктарын канаттандырууга көмөкчү болгону менен ошол мезгилде жаратылган, жарыкка чыгарылган китептердин көпчүлүгү илимий-методикалык, дидактикалык принциптерди чагылдыруу талапка ылайыктуу болгон эмес. Ал жергиликтүү авторлордун, котормочулардын математикалык билим денгээли төмөн болгондугу менен түшүндүрүлөт.

Илимий-техникалык прогресстин өнүгүшүнө, коомдук талаптардын өзгөрүшүнө, илимий-педогогикалык жактан жаңыча талаптардын пайда болушуна байланыштуу окуу китептердин учурдагы деңгээлин эскерип, болжол менен 10-15 жылда жаңыча жазылган окуу куралдары колдонула башташы керек. Жалпы орто билим берүүчү мектептерде азыркы кездеги колдонуудагы окуу куралдары талапка жооп бербей жаткандыгы арийне.

Акыркы жылдарда билим берүү министирлиги тарабынан азыркы жаңыча талаптарга жооп бере турган окуу куралдарын мектеп үчүн жаратуу боюнча конкурс жарыяланган. Андай китептерди жазууга көп жылдар боюнча математиканы окуткан тажырыйбалуу адистер, теориялык жактан билимдүү болгон методистер, илимий окмуштуулар тартылуулары керек. Конкурсту өткөрүүдө информациялык жетектөөчүлүк иштер талапка ылайык болушу керек. Болочок авторлорду сапаттуу программалар менен камсыздалышын эстен чыгарбоо зарыл. Ошону менен бирге программалык өзгөртүүлөр да эстен чыгарылбашы абзел.

Жаңыча талаптарга ылайык жазылган окуу китептери, окутулуучу материал жеткиликтүү, түшүнүктүү, кызыктуу жазылып, окуучу менен пикир алмашуу денгээлде болушу керек, башкача айтканда, коммуникативдүү сапатка ээ болушу талап кылынат. Учурдагы методикалык талаптарга ылайык китепте инновациялык ыкмалар чагылдырылышы абзел.

Окуу китебин жазууга киришүүдө авторлор окуучулардын психико-физикалык өзгөчөлүктөрүн ар тараптан эске алуусу талап кылынат.Албетте китептер балдардын жаштык өзгөчөлүктөрүнө жараша жазылышы керек экендиги түшүнүктүү. Окуу китеби аларга коюлган негизги талаптарга толугу менен жооп бериши керек. Анда китепти пайдалануунун мотивациялык функциялары эске алынышы абзел.

Окуучунун окууга кызыгуусуна түрткү берүүчү материалдар чагылдырышы талап кылынат. Анда баяндалуучу материалдын сырткы курчап турган практикалык турмуш менен байланыштуу болушу эске алынышы керек.

Окуучунун окуу китеби менен өз алдынча материалды өздөштүрүүгө жардам берүүчү тапшырмалардын үлгүлөрү, берилген система боюнча тандалган көнүгүүлөр берилиши керек. Өздөштүрүлгөн материалдын негизинде окуучулардын өз алдынча тигил же бул тыянакты чыгаруу жөндөмдүүлүгүн өркүндөтүүгө багытталган материалдар берилиши абзел. Окулган теориялык материалдардын өздөштүрүлгөн деңгээлин текшерүүгө жана алардын практикалык иште колдонулушуна багытталган тийиштүү көнүгүүлөр камтылган болушу зарыл.

Окуу китебинде проблемалык жагдайларды колдонууга түрткү берген тийиштүү материалдардын системасы берилиши керек. Окуучудан жаңы субьективдүү “ачылыштарды” табууга багытталган тийиштүү мамилелердин талапка ылайыктуу системасынын берилиши абзел. Андай көнүгүүлөр окуучулардын билиминин өздөштүрүлүшүнө чыгармачылык менен көз карашын өнүктүрүп, өстүрө тургандыгы арийне.

Окуучулар үчүн түрдүү теориялык, практикалык деңгээлдеги жазылган, алардын тигил же бул табитин эске алган бир нече окуу китептердин болушунун камсыздалышы жана окуу китептерди түзүүгө коюлган негизги талаптардын негизгилеринин бири болуп саналат.

Адабияттар

1. Абакиров Б., Абдылдаева Н. ж.б. Математикалык энциклопедия, Бишкек – 1991, 536 б.
2. Абдылгазиев Б., Андашев Д. Математика. Терминдердин түшүндүрмө сөздүгү, Фрунзе, 1988.
3. Бекбоев И.Б., Тимофеев А.И. Математика боюнча класстан тышкаркы иштер, Фрунзе, 1967.

УДК 517.956

Аширбаева А.Ж., ОшТУ

Исследование решений квазилинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка гиперболического типа

Доказано существование единственного решения квазилинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка гиперболического типа.

Proved existence of the single decision integro -differential equation in quotient of the derived fourth order of the hyperbolic type.

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u_{tttt} - 2u_{ttxx} + u_{xxxx} = b(t,x,u)u_t + c(t,x,u)u_x + F(t,x,u), \quad (x,t) \in Q(T) = \{0 \le t \le T, \quad x \in R\}, \tag{1}$$

где $F(t,x,u) = \psi(t,x,u) + \int_0^t K(t,s)u(s,x)ds,$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1,2, \quad x \in R. \tag{2}$$

Будем обозначать через $C_b^{(k)}$ - класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими (частными) производными до *k*–го порядка.

Теорема. Пусть $u_k(x) \in C_b^{(2-k)}(R), \quad k = 0,1,2, \quad b, c, \psi \in C_b^{(2)}(Q(T) \times R)$ и удовлетворяют условию Липшица по переменной u,

$$K(t,s) \in C(G), \quad G = 0 \le s \le t \le T, \quad \int_0^T |K(t,s)|ds \le \gamma = const.$$

Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение в пространстве $G_b^{(4)}(Q(T^*))$, где T^* – определяется из исходных данных.

При доказательстве теоремы будем пользоваться обозначениями:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \ \overline{D}[\ ] = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}; D[\ ] = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}, \ \omega(t,x) = D[u], \vartheta(t,x) = \overline{D}[u],$$

$$W(t,x) = D[\Delta u], \ p(s,t,x) = x + t - s, \quad q(s,t,x) = x - t + s, \ 0 \le s \le t \le T,$$

$$g(s,\tau,t,x)=q(s,\tau,p(\tau,t,x))=x+t-2\tau+s,\ 0\le s\le\tau\le t\le T,$$
$$\alpha_1(t,x,u)=c(t,x,u)-b(t,x,u),\quad \alpha_2(t,x,u)=c(t,x,u)+b(t,x,u),$$
$$\alpha_3(t,x,u)=\partial\alpha_1(t,x,u)/\partial u,\quad \alpha_4(t,x,u)=\overline{D}[\alpha_1(t,x,u)],$$

Представим основные этапы доказательства в виде лемм.

Лемма 1. Задача (1)-(2) эквивалентна интегральному уравнению

$$W(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(p(0,t,x))-+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_2(s,p,u)\omega(s,p)ds-$$
$$-+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_3(s,p,u)\vartheta(s,p)u(s,p)ds+F_1(t,x,u),\qquad(3)$$

где

$$u(t,x)=\frac{1}{2}[u_0(q(0,t,x))+u_0(q(0,t,x))]+\frac{1}{2}\int_0^t[\omega(v,q(v,t,x))+\vartheta(s,p(s,t,x))ds,$$

$$(4)\ \omega(t.x)=\varphi_3(p(0,t,x))+\int_0^t\varphi_2(g(0,s,t,x))ds+\int_0^t\int_0^s W(\tau,g(\tau,s,t,x))d\tau ds,\qquad(5)$$

$$\vartheta(t.x)=\varphi_4(q(0,t,x))+\varphi_2(q(0,t,x))t+\int_0^t(t-\tau)W(\tau,q(\tau,t,x))d\tau,\qquad(6)$$

$$F_1(t,x,u)=\frac{1}{2}\alpha_1(t,x,u)u+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_4(s,p,u)u(s,p)ds+\int_0^t F(s,p,u(s,p))ds,\qquad(7)$$

$$\left[2[D[\Delta u]]+\alpha_1(t,x,u)u\right]_{t=0}=\varphi_1(x)$$

$$\Delta u\big|_{t=0}=\varphi_2(x),\ \omega(0,t)=\varphi_3(x),\quad \vartheta(0,x)=\varphi_4(x),$$

Доказательство. Пусть $W(t,x)-$ решение интегрального уравнения (3). Покажем, что (4) удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2). Непосредственным дифференцированием из (4) имеем:

$$u_{tttt}-2u_{ttxx}+u_{xxxx}=\frac{1}{2}[\omega_{ttt}-\omega_{ttx}-\omega_{xxt}+\omega_{xxx}]+\frac{1}{2}[\vartheta_{ttt}+\vartheta_{ttx}-\vartheta_{xxt}-\vartheta_{xxx}]=$$
$$=\overline{D}[W]$$

Дифференцируя (3) по t и по x, получаем.

$$\overline{D}[W]=b(t,x,u)u_t+c(t,x,u)u_x+F(t,x,u).$$

Таким образом, мы доказали, (4) удовлетворяет уравнению (1). Уравнение (4) удовлетворяет и начальному условию (2). Действительно из (4) имеем

$$u(0,t)=u_0(x),$$

$$u_t(0,x)=\frac{1}{2}\left[\omega(0,x)+\vartheta(0,x)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi_3(x)+\psi_4(x)\right]=u_1(x),$$

$$u_{tt}(0,x)=u_0''(x)+\frac{1}{2}\left[\omega_t(0,x)+\vartheta_t(0,x)-\omega_x(0,x)+\vartheta_x(0,x)\right]=u_0''(x)+$$

$$+\varphi_2(x)=u_2(x)$$

$$u_{ttt}(0,x)=\frac{1}{2}\left[\omega_{tt}(0,x)+\vartheta_{tt}(0,x)-\omega_{tx}(0,x)+\vartheta_{tx}(0,x)+\omega_{xx}(0,x)+\vartheta_{xx}(0,x)\right]=u_3(x)$$

Теперь покажем, что решение задачи (1)-(2) является решением интегрального уравнения (3), т.е. решение задачи (1)-(2) сводим к решению интегрального уравнения (3), как это делалась в работах [1-2]. Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$\overline{D}\left[2\left[D[\Delta u]\right]+\alpha_1(t,x,u)u\right]=\alpha_2(t,x,u)\omega+\alpha_4(t,x,u)u+$$
$$+\alpha_3(t,x,u)\vartheta(t,x)u+2F(t,x,u) \qquad (8)$$

Действительно, непосредственным дифференцированием из (8) получаем уравнение (1).
Из (8) методом дополнительного аргумента имеем

$$W(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(p(0,t,x))-\frac{1}{2}\alpha_1(t,x,u)u+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_2(s,p,u)\omega(s,p)ds-$$
$$-+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_4(s,p,u)u(s,p)ds+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_3(s,p,u)\vartheta(s,p)u(s,p)ds+\int_0^t F(s,p,u(s,p))ds \qquad (9)$$

Из обозначений $W(t,x)=D\left[\Delta u\right]$, $\omega(t,x)=D[u]$, $\vartheta(t,x)=\overline{D}[u]$, следуют справедливость (4), (5), (6) и

$$\Delta u=\varphi_2(q(0,t,x)+\int_0^t W(\tau,q)d\tau\,.$$

Тогда для (9), введя обозначение (7), получаем интегральное уравнение (3).

Лемма 2. Существует такое, $T^*>0$, что интегральное уравнение (3) имеет единственное решение.

Запишем интегральное уравнение (3) в виде оператора

$$W=AW\,, \qquad (10)$$

где $AW=\frac{1}{2}\varphi_1(p(0,t,x))+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_2(s,p,u)\omega(s,p)ds-$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_3(s,p,u)\vartheta(s,p)u(s,p)ds+F_1(t,x,u),$$

Очевидно, что оператор A переводит функции $C(Q(T))$ в функции, также принадлежащие пространству $C(Q(T))$. Покажем теперь, что при $T<T_*$, где T_*- определяется из исходных данных, оператор A осуществляет сжатое отображение. Тем самым мы покажем, что уравнение (10) имеет в области $Q(T)$ при $T<T_*$, единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\left\| W - \frac{1}{2}\varphi_1 \right\| \le M.$$

Норму естественно здесь определить равенством

$$\|W\| = \max_{(t,x)\in Q(T)} |W|.$$

Покажем при $T < T_*$ оператор A является оператором сжатия

$$\left| AW - \frac{1}{2}\varphi_1 \right| \le M_0|\omega| + M_2|\omega|\frac{T}{2} + M_3|\vartheta\|u|\frac{T}{2} + |F_1| \le \Omega_0(T)$$

где

$$|\omega| \le |\varphi_3| + |\varphi_2|T + K\frac{T^2}{2} = G_0(T), \quad |\vartheta| \le G_0(T), \quad |u| \le |u_0| + G_0(T)T = G_1(T),$$

$$|F_1| \le \frac{1}{2}M_1|u| + \frac{T}{2}M_4|u| + (H_0 + \gamma|u|)T$$

$$\|W\| \le \|W_0\| + M = K,$$

$$|a(t,x,u)| \le M_0 = const, \quad |\psi(t,x,u| \le H_0$$

$$|\alpha_i(t,x,u)| \le M_i = const, \quad i = 1,...,4, \quad M_1 = M_2.$$

Обозначим через $T_0 -$ положительный корень уравнения

$$\Omega_0(T) = M.$$

Нам остается показать, что оператор А сжимает расстояние между элементами. При оценке воспользуемся вспомогательными оценками:

$$|\theta_i^1\theta_k^1 - \theta_i^2\theta_k^2| \le |\theta_i^1\|\theta_k^1 - \theta_k^2| + |\theta_k^2\|\theta_i^1 - \theta_i^2| \le 2K|\theta^1 - \theta^2|$$

$$|\theta_i^1\theta_k^1\theta_j^1 - \theta_i^2\theta_k^2\theta_j^2| \le |\theta_i^1\|\theta_k^1\theta_j^1 - \theta_k^2\theta_j^2| + |\theta_k^2\|\theta_j^2\|\theta_i^1 - \theta_i^2| \le$$

$$\le |\theta_i^1\|\theta_k^1\|\theta_j^1 - \theta_j^2| + |\theta_i^1\|\theta_j^2\|\theta_k^1 - \theta_k^2| + |\theta_k^2\|\theta_j^2\|\theta_i^1 - \theta_i^2| \le 3K^2|\theta^1 - \theta^2|$$

Справедлива следующая оценка

$$|A_1W^1 - A_1W^2| \le \Omega_1(T)\|W^1 - W^2\|,$$

где

$$\Omega_1(T) = \frac{1}{2}L_1G_1(T) + [M_0 + M_1]\frac{T^2}{2} + \left[L_0 + L_2 + \frac{1}{2}M_1 + M_3\right]G_0(T)\frac{T^2}{2} +$$

$$+ [G_0(T)[L_5G_1(T)] + L_4G_1(T) + M_4 + H_1 + \gamma]\frac{T^4}{12},$$

$$a(t,x,u_1) - a(t,x,u_2) \le L_0|u_1 - u_2, \quad L_0 \ge 0, \quad L_0 - const,|$$

$$|\alpha_i(t,x,u_1) - \alpha_i(t,x,u)| \le L_i|u_1 - u_2|, \quad L_i \ge 0, \quad L_i - const, \quad i = 1,...,4,$$

$$|\psi(t,x,u_1 - \psi(t,x,u_2)| \le H_1|u_1 - u_2|, \quad H_1 \ge 0, \quad H_1 - const.$$

Обозначим через T_1 - корень уравнения $\Omega_1(T) = 1.$

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0, T_1\}$ осуществляет сжатое отображение. Тогда, согласно теореме С. Банаха, уравнение определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Это решение может быть получено методом последовательных приближений.

Литература

1. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. АН, 1992. –Т.323, №3. –С. 410-414.
2. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. АН, 1992. – Т.325, №6. –С. 1111-1115.

УДК 517.956.6

Бабаев С., Бекмаматов З.М., БАТГУ

Задачи сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка

Төртүнчү тартиптеги составдык жана гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн жабыштыруу маселесинин чечилиши изилденген.

Исследована разрешимость задачи сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка.

The problems were researched solvability of problem for the composite and hyperbolic equation of the fourth order.

1. Постановка задачи. Пусть D означает прямоугольник, ограниченной линиями $A_0A_1 : x = 0$, $A_1B_1 : y = -h_1$, $B_1B_0 : x = \ell$, $A_0B_0 : y = h$ $(h, h_1, \ell > 0)$, а $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r = 0,1,..., n;\ s = 0,1,..., m)$.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^3(D) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup \cup C^{4+0}(D_1) \cup C^{1+3}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению*

$$u_{xxxx} + u_{xxyy} = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(\ell,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,y) = \varphi_3(y),\ u_{xx}(\ell,y) = \varphi_4(y),\ 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$u(x,h) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{4}$$

а также удовлетворяющую в области D_2 *уравнению*

$$u_{xyyy} + cu = 0, \tag{5}$$

и граничным условиям:

$$u(0,y) = \varphi(y), -h_1 \le y \le 0, \tag{6}$$

$$u(x,-h_1) = \psi_1(x),\ u_y(\ell,-h_1) = \psi_2(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{7}$$

где $\varphi(y),\ \varphi_i(y), \psi(x), \psi_j(x),\ (i=1,4,\ j=1,2)$ *- заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования*

$$\varphi(y)\in C^3[-h_1,0],\ \varphi_i(y)\in C^3[0,h](i=1,2),\ \varphi_j(y)\in C^2[0,h](j=3,4)$$
$$\psi(x),\ \psi_1(x)\in C^3[0,\ell],\ \psi_2(x)\in C^2[0,\ell], \tag{8}$$

$$\varphi(0)=\varphi_1(0),\ \varphi'(0)=\varphi_1'(0),\ \psi(0)=\varphi_1(h),\ \psi'(0)=\varphi_2(h),$$
$$\varphi(-h_1)=\psi_1(0),\ \varphi'(-h_1)=\psi_2(0). \tag{9}$$

Из постановки задачи 1, как следствие, вытекают следующие условия сопряжения:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell,$$
$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{10}$$

где $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x)$ - пока неизвестные функции.

На важность изучения уравнений гиперболического и составного типов высокого порядка указано в работах [1 - 4]. По классификации авторов работы [5] уравнения (1) и (5) являются соответственно уравнениями составного и гиперболического типов.

При решении задачи 1 используем методы теории уравнений смешанного типа [1]. Если нам удастся найти функции $\tau(x), \nu(x), \mu(x)$, то задача 1 расщепляется на две следующие самостоятельные вспомогательные задачи.

Задача 2. *Найти функцию* $u(x,y)\in C^2(\overline{D}_1)\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{4+0}(D_1)]$,

удовлетворяющую в области D_1 *уравнению* (1), *граничным условиям (2)-(4) и условию*

$$u(x,+0)=\tau(x),\quad 0\le x\le\ell. \tag{11}$$

Задача 3. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+3}(D_2)$, *удовлетворяющую в области* D_2 *уравнению* (5), *граничным условиям (6), (7) и условию*

$$u(x,-0)=\tau(x),\quad 0\le x\le\ell. \tag{12}$$

2. Соотношение, принесенное из области D_1**.** Введем обозначение

$$u_{xx}+u_{yy}=z(x,y),\ (x,y)\in D_1, \tag{13}$$

где $z(x,y)$ - новая неизвестная функция. Тогда, из уравнения (1) для функции $z(x,y)$ получаем уравнение

$$z_{xx}(x,y)=0,\ (x,y)\in D_1,$$

общее решение, которого имеет вид:

$$z(x,y)=\omega_1(y)x+\omega_2(y), \tag{14}$$

где $\omega_1(y),\ \omega_2(y)$ - произвольные непрерывные функции.

Из граничных данных (3) и (4), в силу обозначения (13), нетрудно получить следующие условия

$$z(0,y)=\varphi_3(y)+\varphi_1''(y),\ z(\ell,y)=\varphi_2(y)+\varphi_2''(y),\ 0\le y\le h.$$

Используя эти условия из (13) найдем неизвестные функции

$$\omega_2(y)=\varphi_3(y)+\varphi_1''(y),\ 0\le y\le h,$$
$$\omega_1(y)=\frac{1}{\ell}[\varphi_2(y)+\varphi_2''(y)-\varphi_3(y)-\varphi_1''(y)],\ 0\le y\le h. \tag{15}$$

Подставляя эти значения в (14) найдем $z(x,y)=\omega_1(y)x+\omega_2(y)\equiv z_0(x,y)$,

где $z_0(x,y)$ − уже известная функция, и представляет собой правую часть уравнения (12).

Следовательно, уравнение (12) перепишем в виде

$$u_{xx} + u_{yy} = z_0(x,y),\ (x,y) \in D_1. \tag{16}$$

Отсюда, переходя к пределу при $y \to +0$ имеем соотношение, принесенное из области D_1:

$$\tau''(x) + \mu(x) = z_0(x,0),\ 0 \le x \le \ell. \tag{17}$$

Решая уравнение (17) относительно $\tau(x)$, при краевых условиях $\tau(0) = \varphi_1(0),\ \tau(\ell) = \varphi_2(0)$, будем иметь $\tau(x) = \alpha(x) + \int_0^\ell G(x,t)\mu(t)dt$

, (18)

где $\alpha(x) = \varphi_1(0) + \frac{x}{\ell}[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)] + \int_0^\ell G(x,t)z_0(t,0)dt,$

$G(x,t) = \begin{cases} \frac{x(t-\ell)}{\ell},\ 0 \le x \le t, \\ \frac{t(x-\ell)}{\ell},\ t \le x \le \ell \end{cases}$ - функция Грина.

3. Представление решения задачи Гурса. Рассмотрим задачу Гурса как задачу 4, заключающая в определении решения уравнения (5), удовлетворяющее условиям (2) и условиям:

$$u(x,-0) = \tau(x),\ u_y(x,-0) = \nu(x),\ u_{yy}(x,-0) = \mu(x),\ 0 \le x \le \ell. \tag{19}$$

Интегрируя уравнение (5) по x один раз в пределах от 0 до x, затем три раза по y в пределах от y до 0, будем иметь

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \frac{\lambda}{2}\int_0^x d\xi \int_0^y (y-\eta)^2 u(\xi,\eta)d\eta, \tag{20}$$

где $u_0(x,y) = \tau(x) + y\nu(x) + \frac{1}{2}y^2\mu(x) + \varphi_0(y),\ \lambda = -c,$

$$\varphi_0(y) = \varphi(y) - \varphi(0) - \varphi'(0)y - \frac{1}{2}y^2\varphi''(0).$$

Уравнение (20) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и методом последовательных приближений найдем его явное решение, представленное в виде ряда

$$u(x,y) = u_0(x,y) - c\int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta(x,y;\xi,\eta)u_0(\xi,\eta)d\eta, \tag{21}$$

где $\vartheta(x,y;\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n c^n}{n!(3n+2)!}(x-\xi)^n (y-\eta)^{3n+2}$ - резольвента ядра $\frac{1}{2}(y-\eta)^2$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{gathered} \vartheta(x,y;\xi,y) = 0,\ \vartheta_y(x,y;\xi,y) = 0,\ \vartheta_{yy}(x,y;\xi,y) = 1, \\ \vartheta(x,y;x,\eta) = \frac{1}{2}(y-\eta)^2,\ \vartheta_y(x,y;x,\eta) = y-\eta, \vartheta_{yy}(x,y;x,\eta) = 1. \end{gathered} \tag{22}$$

Подставляя значения $u_0(x,y)$ в (21) и, выделяя неизвестные функции, будем иметь

$$u(x,y)=\Phi(x,y)+\tau(x)+y\nu(x)+\frac{1}{2}y^2\mu(x)+$$
$$+\int_0^x H_1(x,y,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x H_2(x,y,\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_0^x H_3(x,y,\xi)\mu(\xi)d\xi, \quad (23)$$

где $\Phi(x,y)=\varphi_0(y)-c\int_0^x d\xi\int_0^y \vartheta(x,y;\xi,\eta)\varphi_0(\eta)d\eta,$

$H_1(x,y,\xi)=-c\int_0^x \vartheta(x,y;\xi,\eta)d\eta,\ H_2(x,y,\xi)=-c\int_0^x \vartheta(x,y;\xi,\eta)\eta\, d\eta,$

$H_2(x,y,\xi)=-\frac{c}{2}\int_0^x \vartheta(x,y;\xi,\eta)\eta^2 d\eta.$

4. Соотношение, принесенное из области D_2**.** Чтобы найти соотношения между функциями $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x)$ сначала из (23) найдем

$$u_y(x,y)=\Phi_y(x,y)+\nu(x)+y\mu(x)+$$
$$+\int_0^x H_{1y}(x,y,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x H_{2y}(x,y,\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_0^x H_{3y}(x,y,\xi)\mu(\xi)d\xi. \quad (24)$$

Реализуя краевые условия (7) из (23) и (24), соответственно получим соотношения, принесенные из области D_2:

$$\tau(x)-h_1\nu(x)+\frac{1}{2}h_1^2\mu(x)=\tilde{\psi}_1(x)-\int_0^x[H_1(x,-h_1,\xi)\tau(\xi)+$$
$$+H_2(x,-h_1,\xi)\nu(\xi)+H_3(x,-h_1,\xi)\mu(\xi)d\xi],\ 0\le x\le \ell, \quad (25)$$

$$\nu(x)-h_1\mu(x)=\tilde{\psi}_2(x)-\int_0^x[H_{1y}(x,-h_1,\xi)\tau(\xi)+$$
$$+H_{2y}(x,-h_1,\xi)\nu(\xi)+H_{3y}(x,-h_1,\xi)\mu(\xi)d\xi],\ 0\le x\le \ell, \quad (26)$$

где $\tilde{\psi}_1(x)=\psi_1(x)-\Phi(x,-h_1),\ \tilde{\psi}_2(x)=\psi_2(x)-\Phi_y(x,-h_1).$

Обращая Вольтерровскую часть уравнения (26) относительно $\nu(x)$, получим соотношение

$$\nu(x)=h_1\mu(x)+\int_0^x[\tilde{H}_1(x,\xi)\tau(\xi)+\tilde{H}_3(x,\xi)\mu(\xi)]d\xi+\Psi(x),\ 0\le x\le \ell, \quad (27)$$

где $\tilde{H}_1(x,\xi)=-H_{1y}(x,-h_1,\xi)-\int_\xi^x R_1(x,t)H_{1y}(t,-h_1,\xi)dt,$

$\tilde{H}_2(x,\xi)=-H_{3y}(x,-h_1,\xi)-\int_\xi^x R_1(x,t)H_{3y}(t,-h_1,\xi)dt,$

$\Psi(x)=\Psi_2(x)+\int_0^x R_1(x,t)\Psi_2(t)dt,$

Исключив $\nu(x)$ из (25) и (27), будем иметь

$$\mu(x)=\frac{2}{h_1^2}\tau(x)+\int_0^x[N_1(x,\xi)\tau(\xi)+N_2(x,\xi)\mu(\xi)]d\xi+\mu_0(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (28)$$

где

$$N_1(x,\xi)=\frac{1}{h_1^2}[-h_1\widetilde{H}_1(x,\xi)+H_1(x,-h_1,\xi)+\int_\xi^x H_2(x,-h_1,t)\widetilde{H}_1(t,\xi)dt,$$

$$N_2(x,\xi)=\frac{1}{h_1^2}[-h_1\widetilde{H}_3(x,\xi)+H_3(x,-h_1,\xi)+\int_\xi^x H_2(x,-h_1,t)\widetilde{H}_3(t,\xi)dt,$$

$$\widetilde{\mu}_0(x)=\frac{1}{h_1^2}[\Phi(x,-h_1)-\psi_1(x)-h_1\Psi(x)+\int_0^x H_2(x,-h_1,t)\Psi(\xi)d\xi.$$

Далее, исключая $\tau(x)$ из (18) и (28), получим уравнение

$$\mu(x)=\int_0^x N_2(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\int_0^\ell N_3(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\alpha_1(x), \qquad (29)$$

Обращая Вольтерровскую часть уравнения (29) относительно $\mu(x)$, будем иметь интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x)=\mu_0(x)+\int_0^\ell N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi, \qquad (30)$$

где $N(x,\xi)=N_3(x,\xi)+\int_0^x R_1(x,\xi)N_3(\xi,t)d\xi,\ \mu_0(x)=\alpha_1(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)\alpha_1(\xi)d\xi,$

$R_1(x,t)$ - резольвента ядра $N_2(x,\xi)$.

Если выполняется условие

$$\ell\cdot\max_{0\le x,\xi\le\ell}|N(x,\xi)|<1, \qquad (31)$$

тогда уравнение (30) имеет единственное решение. Определив $\mu(x)$ из (30) и подставляя ее значение в (18) будем знать $\tau(x)$. После этого из (27) найдем $\nu(x)$, и тем самым решение задачи 3.

5. Решение задачи 1 в области D_1**.** После определения $\tau(x)$ решение задачи 1 в области D_1 определяется как решение задачи 2. В пункте 2 показано, что из уравнения (1) после двукратного интегрирования с учетом условий (3) получим уравнение (16). Следовательно, решение задачи 2 эквивалентно сводится к решению задачи Дирихле для уравнения (16) с краевыми условиями (2), (4) и $u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell$, решение которой представимо в виде [6]

$$u(x,y)=\int_0^\ell G_\eta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\int_0^\ell G_\eta(x,y;\xi,h)\psi(\xi)d\xi+\int_0^h G_\xi(x,y;0,\eta)\times$$
$$\times\varphi_1(\eta)d\eta-\int_0^h G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int_0^\ell d\xi\int_0^h G(x,y;\xi,\eta)z_0(\xi,\eta)d\eta, \qquad (32)$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4\ell h}{\pi_2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h^2n^2+\ell^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{h}y\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi m}{h}\eta\right)$$ -

функция Грина.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если выполняются условия (8), (9), (31), то решение задачи 1 существует, оно единственно и определяется в областях* D_1 *и* D_2 *по формулам (23) и (32) соответственно.*

Литература

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.

2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

3. Смирнов М.М. Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка. – Ленинград: ЛГУ, 1972. – 123 с.

4. Джураев А. Системы уравнений составного типа. – М.: Наука, 1972. – 228 с.

5. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

УДК:371.3:51

К. Байгазиев, Т. Акматова, ОшМУ

Терс эмес бүтүн сандарды кошуу жана кемитүү амалдарын көптүктөр теориясы менен негиздөө

Макалада математиканын башталгыч курсунда терс эмес бүтүн сандарды кошуу жана кемитүү амалдарын көптүктө теориясы менен негизделиши баяндал-ган.

В статье описывается теоретико-множественный подход к обоснованию действий сложение и вычитание над неотрицательными числами в начальном курсе математики.

In this paper was described the set-theoretic approach to the justification of addition and subtraction of non-negative numbers in the initial course of mathematics.

Башталгыч мектептин математика боюнча жаңы программага жана окуу колдонмолоруна өтүшү, окутуунун методикасын тандоо жана түзүү мүмкүнчүлүгү, предметтин каражаттары аркылуу кенже мектеп окуучуларын ар тараптуу өнүктүрүү милдеттери болочок мугалимдин мыкты математика-лык даярдыгын талап кылат.

Учурдагы математикада сан түшүнүгү жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар эки түрдүү ыкмада негизделет: көптүктөр теориясы жана аксиоматикалык теория менен [10]. Математиканын башталгыч курсунда кенже мектеп окуучуларынын терс эмес бүтүн сандар жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар түшүнүктөрүн калыптандыруу боюнча иштер аткарылат. Эки теория тең башталгыч мектепте арифметикалык амалдарды үйрөнүүнүн теориялык негизи катары кызмат аткарып келет. Арифметикалык амалдар математиканын башталгыч курсунда борбордук орунда турат. Ошондуктан бул маселе арифметикалык амалдардын, алардын касиеттеринин, компоненттеринин арасындагы өз ара байланыштардын, көзкарандылыктардын жана амалдардын жыйынтыкта-рынын конкреттүү маанисин ачып берүүнү, ошондой эле, окуучулардын эсептөө көндүмдөрүн, арифметикалык маселелерди чыгаруу билгичтиктерин калыптандырууну өзүнө камтыйт. Таблицалык кошуу, кемитүү, көбөйтүү жана бөлүү амалдарын окуучуларга ар түрдүү ыкмалар менен үйрөтүүгө болот. Бирок аларды көптүктөр теориясы менен үйрөтүү кенже окуучулар үчүн бир кыйла жеңил жана ыңгайлуу. Арифметикалык амалдарды көптүктөр теориясынын негизинде үйрөтүү кенже мектеп окуучуларынын психологиялык, физиологиялык жана акыл-эсинин өзгөчөлүктөрүн эске алууга мүмкүндүк түзөт.

Көптүктөр теориясы математиканын башталгыч курсунун илимий негиздерин: натуралдык сандар түшүнүгүн жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдарды аныктоонун ар түрдүү

ыкмаларын, чоңдуктарды жана аларды ченөөнү, алгебранын жана геометриянын элементтерин үйрөнүүнүн пайдубалы катары кызмат кылат [3].

Макалада көптүктөр теориясынын жардамында терс эмес бүтүн сандардын үстүнөн жүргүзүлүүчү кошуу жана кемитүү амалдарын аныктоонун ыкмалары каралган. Көптүктөр теориясы башталгыч мектепте айкын да, айкын эмес да пайдаланылат. Бирок, ошого карабастан, бул тармак боюнча билимдер башталгыч мектептин мугалимине:

1. математиканын башталгыч курсунун мазмунун түшүнүү үчүн;
2. өз ара бир маанилүү тиешелештик, катыш, сан, арифметикалык амалдар, геометриялык фигуралар сыяктуу маанилүү түшүнүктөрдү өздөштүрүү үчүн керек [1].

Кошуу жана кемитүү амалдарынын жана алардын негизги касиеттери-нин теориялык негиздерин карайлы.

Көптүктөр теориясы боюнча ***кошуунун мааниси.***

Терс эмес бүтүн сандарды кошуу амалы кесилишпеген чектүү көптүктөрдүн биригүүсү амалы менен байланышкан.

Эгерде A жана B чектүү көптүктөр жана $A \cap B = \emptyset$ болсо, анда алардын биригүүсүндөгү элементтердин саны $n(A \cup B) = (A) + n(B)$ формуласы менен эсептелет. Бул барабардык терс эмес бүтүн сандардын суммасын аныктоо үчүн негиз катары алынат [5].

Жалпы элементке ээ болбогон ($A \cap B = \emptyset$) A жана B көптүктөрү берилсин. $n(A) = a, n(B) = b$ жана $a, b \in Z_+$ болсун.

1-аныктама. Жалпы элементке ээ болбогон A жана B көптүктөрүнүн биригүүсүндөгү элементтердин саны эки a жана b терс эмес бүтүнсандарынын ***суммасы*** деп аталат.

$$a + b = n(A \cup B) = n(A) + n(B) = c.$$

Сандардын суммасын табуу амалы ***кошуу***, ал эми a жана bсандары ***кошулуучулары*** деп аталат.

1-мисал. Терс эмес бүтүн бүтүн сандардын суммасынын аныктамасын пайдаланып 4 + 3 = 7 экендигин көрсөткүлө.

Чыгаруу. $A = \{a, b, c, d\}$ жана $B = \{x, y, z\}$ көптүктөрүн алалы. $A \cap B =$ $= \emptyset$ экендиги көрүнүп турат. Бул көптүктөрдүн биригүүсүн табалы:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, x, y, z\}.$$

Мында $n(A) = 4$, ал эми $n(B) = 3$. Мындан сумма эрежеси боюнча $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 3 = 7$ ге ээ болобуз. Демек, 4 + 3 = 7.

$a + 0 = 0$барабардыгынын маанисин көптүктөр теориясы боюнча түшүндүрөлү. Эгерде $a = n(A)$, $0 = n(\emptyset)$болсо, анда $a + 0 = n(A) + n(\emptyset) = = n(A \cup \emptyset) = n(A) = a$. Демек, $a + 0 = 0$.

Кошуу коммутативдик жана ассоциативдик касиеттерге ээ.

1°. $\forall a, b \in Z_+: a + b = b + a$– кошуунун коммутативдик закону (баш-талгыч мектепте – кошуунун орун алмаштыруу касиети).

Далилдөө. $n(A) = a$, $n(B) = b$жана $A \cap B = \emptyset$ болсун. Көптүктөр теориясы боюнча $A \cup B = B \cup A$ экендиги белгилүү. Мындан сумма эрежесинин негизинде $n(A \cup B) = n(B \cup A)$ (*) барабардыгына ээ болобуз. Кошуунун аныктамасынан

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b \quad (1)$$

$$n(B \cup A) = n(B) + n(A) = b + a \quad (2)$$

келип чыгат. (1), (2) жана (*) дан $a + b = b + a$ барабардыгын алабыз. Кошуунун коммутативдик закону далилденди.

2°. $\forall a, b, c \in Z_+: (a + b) + c = a + (b + c)$– кошуунун ассоциативдик закону (башталгыч мектепте – кошуунун топтоштуруу касиети).

Далилдөө. Бул касиетти далилдөө үчүн көптүктөрдүн биригүүсүнүн ассоциативдик законун жана сумма эрежесин пайдаланабыз:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \Rightarrow n[(A \cup B) \cup C] = n[A \cup (B \cup C)]$.

Андан ары:

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) = (a + b) + c \quad (3)$$

$$n[A \cup (B \cup C)] = n(A) + n(B \cup C) = a + (b + c) \quad (4)$$

(3) жана (4)дөн $(a + b) + c = a + (b + c)$ барабардыгын алабыз. Кошуу-нун ассоциативдик закону далилденди.

Кошуунун коммутативдик жана ассоциативдик закондору каалаган сандагы кошулуучулар үчүн туура болот. Каалаган кошулуучулардын ордун алмаштыруудан жана аларды топтоштуруудан сумма өзгөрбөйт.

Бир нече кошулуучулардын суммасын табууну көптүктөр теориясы менен түшүндүрөлү. $2 + 4 + 7 + 9$ суммасын табалы.

Эки кошулуучунун жана k кошулуучулардын суммасы аныкталган болсун. Анда $k + 1$ сандагы кошулуучулардын $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1}$ суммасы $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k) + a_{k+1}$суммасына барабар болот.

Демек, $2 + 4 + 7 + 9$ суммасын табуу үчүн бул касиетке ылайык, төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү аткарабыз:

$$2 + 4 + 7 + 9 = (2 + 4 + 7) + 9 = ((2 + 4) + 7) + 9 = (6 + 7) + 9 =$$

$$= 13 + 9 = 22.$$

2-мисал. $(14 + 13) + 26 + 17$ туюнтмасынын маанисин тапкыла.

Чыгаруу. Кошуунун ассоциативдик закону туюнтманы кашаасыз жазууга мүмкүндүк берет: $14 + 13 + 26 + 17$. Кошуунун коммутативдик законун пайдаланып $14 + 26 + 13 + 17$туюнтмасын алабыз. Кайрадан кошуунун ассоциативдик законун пайдаланып, кашааларды керектүү жерге коебуз: $(14 + 26) + (13 + 17)$. Кашаанын ичиндеги туюнтмалардын маанилерин табабыз: $40 + 30 = 70$. Демек, $(14 + 13) + 26 + 17$ туюнтмасынын маа-ниси 70ке барабар.

3°. $\forall a, b, c \in Z_+$:

а) $a = b \Rightarrow a + c = b + c$;

б) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ – кошуунун монотондуулугу.

Далилдөө. а) $n(A) = a$, $n(B) = b$ жана $n(C) = c$ болсун. $a = b$ шартынан A жана B көптүктөрүнүн тең кубаттуу экендиги келип чыгат. Ошондуктан $A \cup C$ жана $B \cup C$ көптүктөрү да тең кубаттуу болушат. Мындан

$n(A \cup C) = n(B \cup C)$,

$n(A) + n(C) = n(B) + n(C)$,

$a + c = b + c$ экендиги келип чыгат.

б) $a > b$ болгондуктан $a = b + s$ барабардыгы орун ала тургандай s натуралдык саны табылат. Андан ары төмөнкүлөрдү алабыз:

$a + c = (b + s) + c$,

$a + c = b + (s + c)$,

$a + c = b + (c + s)$,

$a + c = (b + c) + s$.

«Кичине» («чоң») катышынын аныктамасынын негизинде $a + c > b + +c$ барабарсыздыгына ээ болдук. Ошентип, кошуунун монотондуулугу далилденди.

Математиканын башталгыч курсунда терс эмес бүтүн сандарды кошуу эки көптүктүн биригүүсү менен байланышкан (терминдер жана символдор колдонулбайт) практикалык көнүгүүлөрдүн негизинде киргизилет. Бул учурда берилген көптүктөрдүн жана алардын биригүүсүндөгү элементтердин саны эсептөө жолу менен табылат. Жөнөкөй маселелерди чыгаруу кошуунун көптүктөр теориясындагы маанисин ачып берүүнүн негизги каражаты болуп эсептелет. Маселен, «Биринчи табакта 4 кызыл алма, ал экинчи табакта 5 көк алма бар. Эки табакта канча алма бар?».

Башталгыч мектепте кошуунун коммутативдик законуна бир кыйла көп көңүл бурулат. Математиканын башталгыч курсунда кошуунун ассоциативдик закону айкын үйрөтүлбөйт. Бирок ал санды суммага жана сумманы санга кошуу учурунда коммутативдик закон менен биргеликте колдонулат.

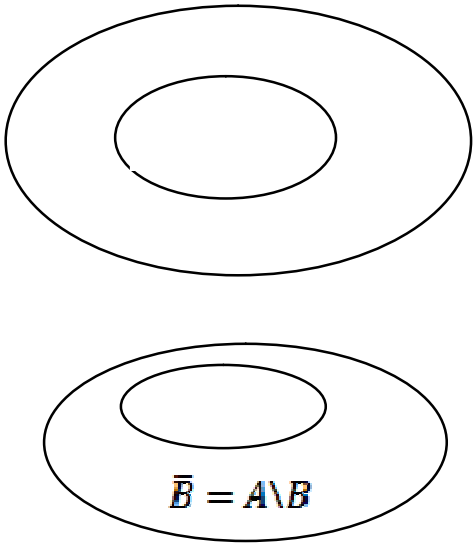
Көптүктөр теориясы боюнча ***кемитүүнүн мааниси.***

Терс эмес бүтүн сандардын айырмасынын аксиоматикалык аныктама-сын эске салалы.

$b + c = a$ шартын канааттандырган $c = a - b$ терс эмес бүтүн саны *a* жана *b* сандарынын айырмасы деп аталат.

Терс эмес бүтүн сандардын айырма-сынын көптүктөр теориясындагы маани-син тактайлы.

3-мисал. Ал максатта $A = \{a, b, c, d, e, f, m, n\}$ жана $B = \{a, d, f\}$ көптүктөрүн карайлы. Эгерде A дан B ны кемитсек, анда $A \backslash B = \{b, c, e, m, n\}$ көптүгү калат. Бул *B* көптүгүн *A* көптүгүнө чейин толуктоочу көптүк болот. Алынган көптүк 5 элементтен турат (1-сүрөт).



Бул мисалдан $n(A) = 8$, $n(B) = 3$ жана $B \subset A$ экендиги көрүнүп турат. Мында $5 = n(A \backslash B) = n(\bar{B})$, б.а. 8 жана 3 үч сандарынын айырмасы В көптүгүн А көптүгүнө чейин толуктоочу көптүгүнүн элементтеринин саны болот.

A чектүү көптүгү жана анын B камтылуучу көптүгү $(A \supset B)$ берилсин. (2-сүрөт).

A жана *B* көптүктөрү берилсин жана $(A) = a$, $(B) = b, B \subseteq A$ болсун.

2-аныктама.*B* көптүгүн *A* көптүгүнө чейин толуктоочу көптүгүндөгү элементтеринин саны *a* жана *b* сандарынын ***айырмасы*** деп аталат.

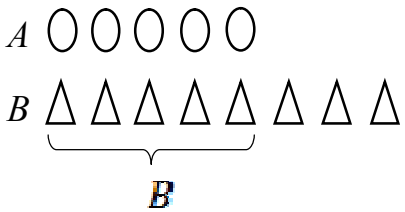
$$a - b = n(A \backslash B) = \bar{B}, \text{ мында } (A) = a,\ (B) = b, B \subseteq A.$$

a жана *b* сандарынын айырмасын табуу амалы *кемитүү* деп аталат жана $a - b = c$ деп жазылат. *a – кемүүчү*, *b – кемитүүчү*, *c – айырма* деп аталат.

$a - b$айырмасы $b \leq a$ болгон учурда гана жашайт.

4мисал. Талаада 5 уй жана 8 кой оттоп жүрөт. Талаада уйларга караганда канчага көп кой оттоп жүрөт?

Чыгаруу. Маселеде эки көптүк жөнүндө сөз болууда. Ошондуктан *A* – уйлардын, ал эми *B* – койлордун көптүгү болсун дейли. Маселенин шарты боюнча *n(A)* = 5, *n(B)* = 8. *B* көптүгүнөн *A* көптүгүнө тең кубаттуу, б.а. $n(B_1) = n(A)$ болгон B_1 көптүгүн бөлүп алалы (3-сүрөт).



Анда койлордун калган бөлүгү B_1 көптүгүн B көптүгүнө чейин толуктоочу көптүктү түзөт.

Демек, маселе $B \backslash B_1$ толуктооч көптүгүнүн элементтеринин санын табууга келет жана кемитүү амалы менен чыгарылат.

Ошентип

$n(B \backslash B_1) = n(B) - - n(B_1) = (B) - n(A) = 8 - 5 = 3$

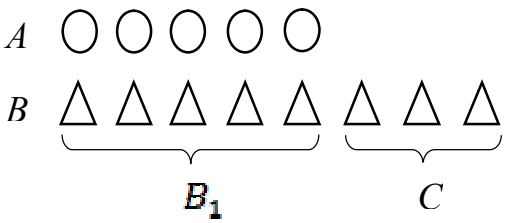
экендигине ээ болобуз.

5-мисал. Талаада 5 уй жана андан 3кө көп кой оттоп жүрөт. Талаада канча кой оттоп жүрөт?

Чыгаруу. Маселеде эки көптүк жөнүндө сөз болууда. Ошондуктан *A* – уйлардын, ал эми *B* – койлордун көптүгү болсун дейли. Маселенин шарты боюнча *n(A)* = 5. Ал эми *B* көптүгүнүн элементтеринин санын табуу талап кылынат. Андан тышкары, маселенин шартына ылайык *B*

көптүгүнөн элементтеринин саны 3кө барабар, б.а. $n(C) = 3$ болгон C көптүгүн бөлүп алуу керек (4-сүрөт). Анда $B \setminus C = B_1$ айырмасы A көптүгүнө тең кубаттуу, б.а. $n(B_1) = n(A)$ болот.

Мына ошентип, B көптүгү B_1 жана C көптүктөрүнүн биригүүсү болуп эсептелет, мында $B_1 \cap C = \emptyset$. Маселе өз ара кесилишпөөчү эки көптүктүн биригүүсүнүн элементтер-дин санын табууга келет жана кошуу амалы менен чыгарылат:

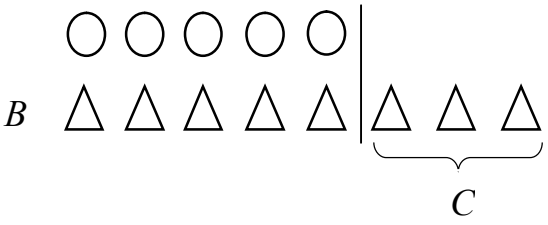


$$n(B) = n(B_1) + n(C) = (A) + n(C) = 5 + 3 = 8.$$

6-мисал. Талаада 8 кой жана андан 3кө аз уй оттоп жүрөт. Талаада канча уй оттоп жүрөт?

Чыгаруу. Маселеде эки көптүк жөнүндө сөз болууда. Ошондуктан A – уйлардын, ал эми B – койлордун көптүгү болсун дейли. Маселенин шарты боюнча $n(B) = 8$. Ал эми A көптүгүнүн элементтеринин санын табуу талап кылынат. Маселенин шарты боюнча уйлардын саны 3кө аз болгондуктан, койлордун саны уйлардын санынан 3кө көп болот.

Андан ары B көптүгүнөн элементи 3кө барабар, б.а. $n(C) = 3$ болгон C көптүгүн кемитип коебуз. Анда $B \setminus C$ толуктооч көптүгү A көптүгүнө тең кубаттуу болот (5-сүрөт). Мына ошентип, маселе толуктооч көптүктүн элементтери-нин санын табууга келет жана кемитүү амалы менен чыгарылат:



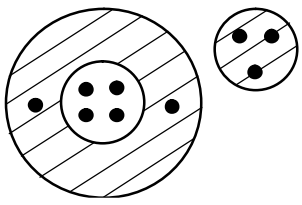
$$n(A) = n(B \setminus C) = (B)$$

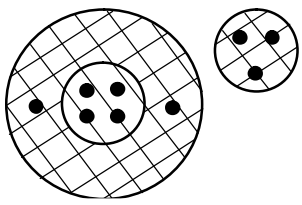
7-мисал. (6 – 4) + 3 = (6 + 3) – 4 барабардыгынын тууралыгын көптүк-төр теориясы боюнча негиздегиле.

Чыгаруу. $n(A) = 6$, $n(B) = 4$, $n(C) = 3$, $B \subset A$, $A \cap C = \emptyset$шарттарын канааттандырган каалагандай A, B жана C түзөлү. Мындай шарттарды канааттандырган көптүктөрдү ар дайым түзүүгө болот.

Андан ары 6 – 4 айырмасын $n(A \setminus B)$ саны катары, ал эми бул барабардыктын сол жагы (6 – 4) + 3ту $n((A \setminus B) \cup C)$ санына барабар деп эсептөөгө болот. Оң жагындагы (6 + 3) – 4 туюнтмасы $n((A \cup C) \setminus B)$ санына барабар.

Эйлердин тегерекчелерин пайдаланып $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$ (**) барабардыгынын тууралыгын текшеребиз.





$(A \setminus B) \cup C$ көптүгүнө 6-сүрөттүн штрихтелген бөлүгү, ал эми $(A \cup C) \setminus B$ көптүгүнө 7-сүрөттүн эки жолу штрихтелген бөлүгү туура келет. 6-7-сүрөттөрдөгү тегерекчелерди салыштырып, (**) барабардыгынын туура экендигин көрөбүз. Барабар көптүктөр барабар элементтерге ээ болгондуктан, $n((A \setminus B) \cup C) = n((A \cup C) \setminus B)$ барабардыгы орун алат. Бул

$$(6 – 4) + 3 = (6 + 3) – 4$$

барабардыгынын тууралыгын билдирет.

Кошуу жана кемитүү амалдардарын байланыштырган *эрежелер* [12].

1. ***Суммадан санды кемитүүнүн эрежеси:***

а. $a \geq c \Rightarrow (a + b) - c = (a - c) + b;$

б. $b \geq c \Rightarrow (a + b) - c = a + (b - c).$

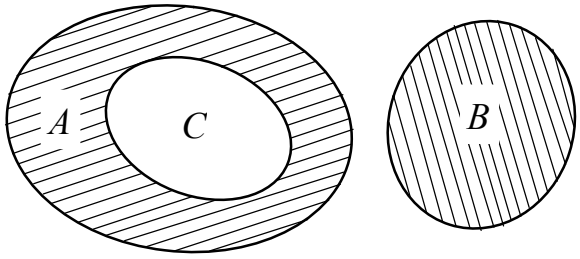
Суммадан санды кемитүү үчүн анын кошулуучуларынын биринен бул санды кемитип жана алынган жыйынтыкка экинчи кошулуучуну кошуп коюу жетиштүү.

1а-эрежесинин маанисин түшүндүрөлү. $n(A) = a$, $n(B) = b$, $A \cap B = \emptyset$ жана $C \subset A$ болсун (8-сүрөт).

Эйлердин тегерекчелеринин жардамында $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup B$ барабардыгынын туура экендигин далилдөөгө болот. Барабардыктын сол жагы

$n[(A \cup B) \backslash C] = n(A \cup B) - n(C) = (a + b) - c$

көрүнүшүндө болот.



8-сүрөт

Ал эми барабардыктын оң жагы

$n[(A \backslash C) \cup B] = n(A \backslash C) + n(B) = (a - c) + b$

көрүнүшүндө болот.

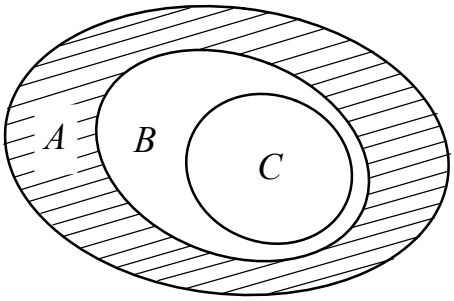
Мына ошентип, $a \geq c$болгон учурда $(a + b) - c = (a - c) + b$ барабардыгына ээ болобуз.

2. ***Сандан сумманы кемитүүнүн эрежеси:***

$a - (b + c) = (a - b) - c.$

Сандан сумманы кемитүү үчүн бул сандан сумманын ар бир кошулуучуларын удаалаш кемитип коюу жетиштүү.

Эми 2-эрежесинин маанисин түшүндүрөлү. $n(A) = a$, $n(B) = b, n(B) = c, B \subset A$, $C \subset A$ жана $C \subset B$ болсун (9-сүрөт).



9-сүрөт

Бул көптүктөр үчүн төмөнкү барабардык орун алат:

$(A \backslash (B \cup C) = (A \backslash C) \backslash B.$

Барабардыктын сол жагы

$n[A \backslash (B \cup C)] = n(A) - [n(B) + + n(C)] = a - (b + c)$

көрүнүшүндө болот.

Ал эми барабардыктын оң жагы

$n[(A \backslash B) \backslash C)] = n(A \backslash B) - n(C) =$

$= (a - b) - c$көрүнүшүндө болот.

Мына ошентип, $a \geq b + c$ болгон учурда $a - (b + c) = (a - b) - c$ барабардыгы орун алат.

Математиканын башталгыч курсунда кемитүү амалы алгач берилген көптүктүн камтылуучу көптүгүн бөлүп алуу жана жаңы көптүктү, бөлүнүп алынган көптүктүн толуктооч көптүгүн, түзүү менен байланышкан практикалык көнүгүүлөрдүн негизинде киргизилет. Бул учурда терминдер

жана символдор колдонулбайт. Камтылуучу көптүктүн жана анын толуктооч көптүгүнүн элементтеринин саны эсептөө жолу менен табылат. Жөнөкөй маселелерди чыгаруу кемитүүнүн көптүктөр теориясындагы маанисин ачып берүүнүн негизги каражаты болуп эсептелет.

8-мисал. Айырманы табуунун ыкмаларын көрсөткүлө: а) $16-(6+7)$; б) $(14+5)-4$.

Чыгаруу. а) Сандан сумманы кемитүүнүн эрежесин пайдаланабыз: $16-(6+7)=(16-6)-7=10-7=3$ же $16-(7+6)=(16-7)-6==9-6=3$ же $16-(6+7)=16-13=3$.

а) Суммадан санды кемитүүнүн эрежесин пайдаланабыз: $(14+5)-4==(14-4)+5=10+5=15$ же $14+(5-4)=14+1=15$ же $(14+5)--4=19-4=15$.

Бул эрежелер эсептөөлөрдү жеңилдетет жана математиканын башталгыч курсунда кеңири пайдаланылат.

Санактык натуралдык сандар чектүү көптүктөр менен байланышкандык-тан, терс эмес бүтүн сандардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар да көптүктөрдүн үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар менен байланышат. Макалада кошуу жана кемитүү амалдарынын тиешелүү түрдө жалпы элементке ээ болбогон көптүктөрдүн биригүүсү жана камтылуучу көптүктүн толуктоочу көптүгү амалдары менен болгон байланышы көрсөтүлдү.

Мына ошентип, терс эмес бүтүн сандарды, касиеттерин жана алардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдарды көптүктөр теориясы менен негиздөөнүн ыкмасы кенже мектеп окуучуларынын компотенттүүлүгүн калыптандыруу-нун ажырагыс түзүүчүсү болуп эсептелет.

Адабияттар

1. Аматова Г. М., Аматов М.А. Математика. Книга 1. М.: Издательский центр «Академия», 2008. –240 бет.
2. Аматова Г.М., Аматов М.А. Математика. Упражнения и задачи. М.: Издательский центр «Академия», 2008. –332 бет.
3. Байгазиев К.Б. Арифметикалык амалдарды көптүктөр теориясы менен негиздөө. Ош: «Кагаз ресурстары» басмаканасы, 2012. –93 бет.
4. Бекбоев И.Б. Жогорку математиканын жалпы курсу. Физика, математика адистигинен башкалар үчүн (ЖОЖдун студенттери үчүн окуу колдонмосу). Бишкек: Педагогика, 2000. – 14 б.т.
5. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М. и др. Математика. М.: Просвещение, 1977. –352 бет.
6. Виленкин Н.Я. Задачник практикум по математике. М.: Просвещение, 1977. –208 бет.
7. Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л. Пособие по математике для студентов фак. нач. классов. М.: Изд-во «Институт практической психологии», 1998. –448 бет.
8. Пышкало А. М., Стойлова Л. П., Лаврова Н. Н., Ирошников Н. П. Сборник задач по математике. М., 1979. –207 бет.
9. Серпинский В. О. О теории множеств. М., 1966. – 61с.
10. Стойлова Л.П. Математика. М.: Издательский центр «Академия», 1999. –424 бет.
11. Стойлова Л.П., Виленкин Н.Я., Лаврова Н.Н. Математика. Часть I. М.: Просвещение, 1990. –175 бет.
12. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. М.: Просвещение, 1988. –320 бет.

УДК:510:371.3

Золотарева Т.А., ОшГУ

Вычисление коэффициентов парной, множественной и частной корреляции на примере

В статье обоснована необходимость и важность изучения коэффициента корреляции студентами по направлению «экономика». На примере показан алгоритм вычисления коэффициента корреляции и сделан анализ полученных результатов.

In article is proved the necessity and importance of study of correlation coefficient by the students on a direction "economy". On an example the algorithm of calculation of correlation coefficient is shown and the analysis is made of the received results.

Понятие коэффициента корреляции изучается студентами по направлению «экономика» в рамках дисциплины «Эконометрика» на 3 курсе, когда студенты уже закончили изучение курса «Высшая математика».

Основная задача ***корреляционного анализа*** заключается в выявлении взаимосвязи между случайными переменными путем точечной и интервальной оценки парных (частных) коэффициентов корреляции, вычисления и проверки значимости множественных коэффициентов корреляции и детерминации. При наличии корреляционной зависимости устанавливается тенденция изменения результативного признака при изменении величины факторного признака [2].

Кроме того, с помощью корреляционного анализа решаются следующие задачи: отбор факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на результативный признак, на основании измерения степени связи между ними; обнаружение ранее неизвестных причинных связей. Корреляция непосредственно не выявляет причинных связей между параметрами, но устанавливает численное значение этих связей и достоверность суждений об их наличии [1].

Парный коэффициент корреляции является показателем тесноты связи лишь в случае линейной зависимости между переменными и обладает следующими основными свойствами:

В практических расчетах по результатам выборки может быть найдена точечная оценка теоретического коэффициента корреляции – выборочный коэффициент корреляции *r,* так как выборочная совокупность переменных X и Y случайна, то r – случайная величина. Оценкой коэффициента корреляции ρ является ***<u>выборочный парный коэффициент корреляции:</u>***

$$r_{x,y} = \frac{Cov(X,Y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}, \qquad (1)$$

где $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$ $S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum(y_i-\bar{y})^2$ - оценки дисперсий величин X и Y. [1]

Рассмотрим задачу с вычислением коэффициента корреляции.

В таблице 1 представлена информация об объёмах продаж и затратах на рекламу одной фирмы, а также индекс потребительских расходов за ряд текущих лет.

Требуется:

1. Построить диаграмму рассеяния (корреляционное поле) для переменных «объёмы продаж» и «индекс потребительских расходов».
2. Определить степень влияния индекса потребительских расходов на объёмы продаж (вычислить коэффициент парной корреляции).
3. Оценить значимость вычисленного коэффициента парной корреляции.
4. Построить матрицу коэффициентов парной корреляции по трем переменным.

5. Найти оценку множественного коэффициента корреляции.
6. Найти оценки коэффициентов частной корреляции [2].

Таблица 1.

№	Y - Объем продаж, тыс. сом.	X1 - Затраты на рекламу	X2 – Индекс потребительских расходов, %
1	126	4	100
2	137	4,8	98,4
3	148	3,8	101,2
4	191	8,7	103,5
5	274	8,2	104,1
6	370	9,7	107
7	432	14,7	107,4
8	445	18,7	108,5
9	367	19,8	108,3
10	367	10,6	109,2
11	321	8,6	110,1
12	307	6,5	110,7
13	331	12,6	110,3
14	345	6,5	111,8
15	364	5,8	112,3
16	384	5,7	112,9

1) Вытянутость облака точек на диаграмме рассеяния вдоль наклонной прямой позволяет сделать предположение о том, что существует некоторая объективная тенденция прямой линейной связи между значениями переменных *X*- индекс потребительских расходов и *Y*- объёмы продаж.

В нашем примере диаграмма рассеяния имеет вид, приведенный на рис 1.

2) Промежуточные расчеты при вычислении коэффициента корреляции между переменными *X*- индекс потребительских расходов и *Y*- объёмы продаж приведены в таблице 2.

Средние значения случайных величин *X* и *Y,* которые являются наиболее простыми показателями, характеризующими последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{16}$, рассчитаем по формулам, соответственно:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 107,2 \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 306,8.$$

Дисперсия характеризуют степень разброса значений $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ ($y_1, y_2, \ldots, y_{16}$) вокруг своего среднего $\overline{x}$ ($\overline{y}$, соответственно)

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2 = \frac{305,474}{15} = 20,36$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum (y_i - \overline{y})^2 = \frac{158718,438}{15} = 10581,23.$$

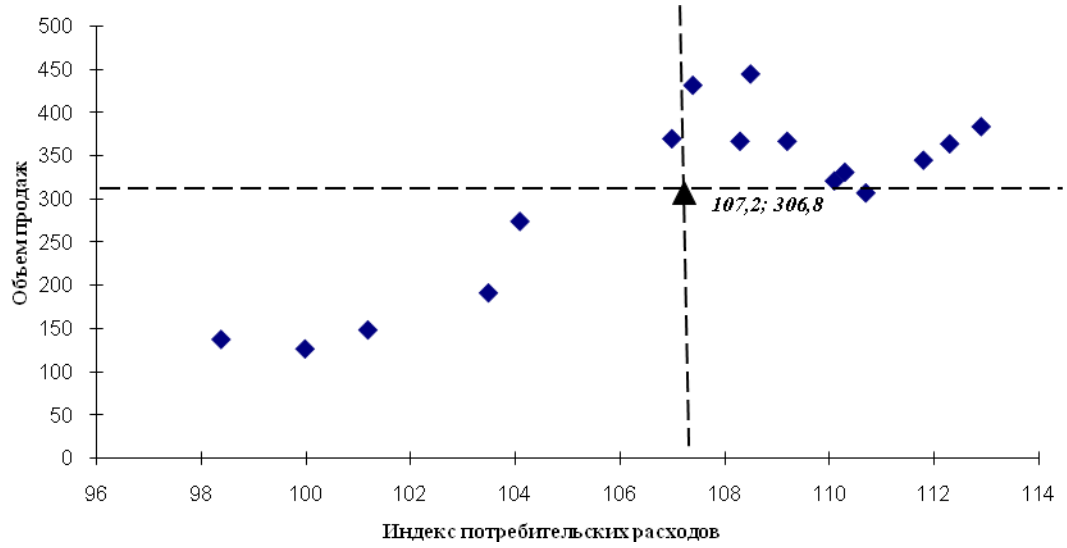


Рис. 1. Диаграмма рассеяния (корреляционное поле).

Стандартные ошибки случайных величин X и Y рассчитаем по формулам, соответственно:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 4,51;\ S_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} = 102,87$$

Коэффициент корреляции рассчитаем по формуле (1):

$$r_{x.y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{15}\cdot 5681,99}{4,51\cdot 102,87} = 0,816$$

3) Оценим значимость коэффициента корреляции. Для этого рассчитаем значение t – статистики по формуле

$$t_{расч} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,816\sqrt{14}}{\sqrt{1-0,666}} = 5,282. \qquad (2)$$

Табличное значение критерия Стьюдента равно: $t_{табл}(\alpha = 0,1;\ k = n-2 = 14) = 1,76$. Сравнивая числовые значения критериев, видно, что $t_{расч} > t_{табл}$, т.е. полученное значение коэффициента корреляции значимо.

Таким образом, индекс потребительских расходов оказывает весьма высокое влияние на объёмы продаж [2].

3) Матрица R коэффициентов парной корреляции, вычисленных по формуле (1) для трех факторов будет иметь вид:

		Объем реализации	**Затраты на рекламу**	**Индекс потребительских расходов**
		1	***2***	***3***
Объем реализации	***1***	1	0,646	0,816
Затраты на рекламу	***2***	0,646	1	0,273
Индекс потребительских расходов	***3***	0,816	0,273	1

5) Вычисление множественного коэффициента корреляции y с x1 и x2.

$$R_{j,1,2,\dots j-1,j+1,\dots m} = \sqrt{1-\frac{|R|}{R_{jj}}} = \sqrt{1-\frac{0,1304}{0,9253}} = 0,9269 \qquad (3)$$

$|R|$ - определитель корреляционной матрицы ***R*** равен 0,1304.

R_{11} - алгебраическое дополнение 1-го диагонального элемента r_{11} той же матрицы ***R***

$$R_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0,273 \\ 0,273 & 1 \end{vmatrix} = 0,9253 \cdot$$

6) Вычисление коэффициентов частной корреляции.

$$r_{jk.1,2,\dots,m} = -\frac{R_{jk}}{\sqrt{R_{jj}R_{kk}}} \qquad (4)$$

$$r_{12(3)} = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}\cdot R_{22}}} = -\frac{0,423}{\sqrt{0,925\cdot 0,334}} = -0,706 \text{ (формула 4)}$$

где R_{12} алгебраическое дополнение элемента r_{12} матрицы ***R,*** а R_{22} алгебраическое дополнение 2-го диагонального элемента r_{22} :

$$R_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0,646 & 0,273 \\ 0,816 & 1 \end{vmatrix} = -0,423, \qquad R_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0,816 \\ 0,816 & 1 \end{vmatrix} = 0,334.$$

Коэффициенты частной корреляции можно вычислить, используя коэффициенты парной корреляции:

$$r_{12(3)} = \frac{r_{12}-r_{13}\cdot r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)\cdot(1-r_{23}^2)}} = \frac{0,646-0,816\cdot 0,273}{\sqrt{(1-0,816^2)\cdot(1-0.273^2)}} = 0,706$$

$$r_{13(2)} = \frac{r_{13}-r_{12}\cdot r_{23}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)\cdot(1-r_{23}^2)}} = \frac{0,816-0,646\cdot 0,273}{\sqrt{(1-0,646^2)\cdot(1-0.273^2)}} = 0,871.$$

Проведя вычисления коэффициента корреляции можно сделать вывод, о том что объём реализации зависит от затрат на рекламу на 65%, а от индекса потребительских расходов на 81,6%. Сравнивая полученные результаты частной корреляции видно, что более сильное прямое воздействие на объём реализации оказывает индекс потребительских расходов (87%) [3].

Литература

1. Эконометрика: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой – М.: Финансы и статистика, 2003. - 344 с.
2. Магнус Я. Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учебник 6-е изд. – М.: Дело, 2004. –576 с.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: ИНФРА-М, 1997.- 402 с.

УДК 517.927

Зулпукаров Ж. А., ОшТУ

Единственность решения краевой задачи для вырождающегося уравнения в частных производных второго порядка

В данной статье рассматриваются методы и механизмы решения основной научной проблемы единственность решения одной вырожденной краевой задачи с тремя переменными в функциональном пространстве $L_2(G)$. Решение такой научной задачи до этого времени рассматривается только для двух переменных.

In given clause the methods and mechanisms of the decision of the basic scientific problem uniqueness of the decision by one вырожденной of a regional task with three variable in functional space L_2 (G) are Considered (examined). The decision of such scientific task before this time is Onside red (examined) only for two variables.

Ключевые слова: Вырожденные краевые задачи с двумя переменными широко исследованы в работе многих авторов, например [1], [3]. Однако, при решении прикладных задач в пространстве, часто сталкиваемся с решением уравнений с тремя переменными. В данной работе рассматриваются единственность решения в функциональном пространстве $L_2(G)$.

$$a_1(t,x,y)u_{tx} + a_2(t,x,y)u_{ty} + a_3(t,x,y)u_{xy} + b_1(t,x,y)u_t + b_2(t,x,y)u_x + \\ + b_3(t,x,y)u_y + c(t,x,y)u = f(t,x,y), \qquad (1)$$

$$u(0,x,y)=0, \quad (x,y)\in[0;X]\times[0;Y] \\ u(t,0,y)=0, \quad (t,y)\in[0;T]\times[0;Y] \qquad (2) \\ u(t,x,0)=0, \quad (t,x)\in[0;T]\times[0;X],$$

где $a_i(t,x,y)$, $b_i(t,x,y)$, $c(t,x,y)$ и $f(t,x,y)$- заданные функции, а $u(t,x,y)$- искомая функция в области $G=\{(t,x,y): 0\le t\le T, 0\le x\le X, 0\le y\le Y\}$ ($i=1,2,3$).

Обозначим через $Z_2(G)$- пространство функций $u(t,x,y)$, таких что

$$u(t,x,y), u_t(t,x,y), u_x(t,x,y), u_y(t,x,y), u_{tx}(t,x,y), u_{xy}(t,x,y), u_{ty}(t,x,y)\in L_2(G).$$

Сделаем следующую подстановку

$$u(t,x,y)=\int_0^t\int_0^x\int_0^y \vartheta(s,z,w)dwdzds. \qquad (t,x,y)\in G \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1) имеем

$$a_1(t,x,y)\int_0^y \vartheta(t,x,w)dw + a_2(t,x,y)\int_0^x \vartheta(t,z,y)dz + a_3(t,x,y)\int_0^t \vartheta(s,x,y)ds + \\ + b_1(t,x,y)\int_0^x\int_0^y \vartheta(t,z,w)dwdz + b_2(t,x,y)\int_0^t\int_0^y \vartheta(s,x,w)dwds + \\ + b_3(t,x,y)\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,z,y)dzds + c(t,x,y)\int_0^t\int_0^x\int_0^y \vartheta(s,z,w)dwdzds = f(t,x,y). \qquad (4)$$

Обе части уравнения (4) умножив на $\vartheta(t,x,y)$, дважды интегрируя по области $G_{txy}=\{(s,z,w): 0\le s\le t,\ 0\le z\le x,\ 0\le w\le y\}$ и применяя формулы Дирихле получим

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]\left(\int_0^w \vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)^2 + (t-s)(y-w)\times \\ \times[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]\left(\int_0^z \vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)^2 + (x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)- \\ -(t-s)a'_{3s}(s,z,w)]\left(\int_0^s \vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)^2 - 2(t-s)(x-z)(y-w)[b_1(s,z,w)\left(\int_0^w \vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)+ \\ \times\left(\int_0^z \vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)+b_2(s,z,w)\left(\int_0^w \vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)\left(\int_0^s \vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)+b_3(s,z,w)\left(\int_0^z \vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)\times \\ \times\left(\int_0^s \vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)]\}dwdzds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{(t-s)[b_1(s,z,w)-(x-z)b'_{1z}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)b'_{1w}(s,z,w)+(x-z)(y-w)b''_{1zw}(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \vartheta(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)^2 +$$

$$+(x-z)[b_2(s,z,w)-(t-s)b'_{2s}(s,z,w)-(y-w)b'_{2w}(s,z,w)+(t-s)(y-w)b''_{2sw}(s,z,w)]\times$$

$$\times\left(\int_0^s\int_0^w \vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)^2+(y-w)[b_3(s,z,w)-(t-s)b'_{3s}(s,z,w)-(x-z)b'_{3z}(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(x-z)b''_{3sz}(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)^2-(t-s)(x-z)[c(s,z,w)-$$

$$-(y-w)c'_w(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \vartheta(s,\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\left(\int_0^s\int_0^w \vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)-(t-s)(y-w)\times$$

$$\times[c(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \vartheta(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)\left(\int_0^s\int_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)-(x-z)\times$$

$$\times(y-w)[c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^w \vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)\left(\int_0^s\int_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)\}dwdzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{[c(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(y-w)c''_{sw}(s,z,w)+(x-z)(y-w)c''_{zw}(s,z,w)+(t-s)(x-z)c''_{sz}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)(x-z)(t-s)c'''_{szw}(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w \vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2\}dwdzds=$$

$$=\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left\{\int_0^s\int_0^z\int_0^w f(\tau,\xi,\eta)\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right\}dwdzds. \qquad (6)$$

Предполагаем выполнение условий:

*а)*Функции $a_i(t,x,y), a'_{it}(t,x,y), a'_{ix}(t,x,y), a'_{iy}(t,x,y), b_i(t,x,y), b''_{itx}(t,x,y),$ $b''_{itx}(t,x,y), b''_{ixy}(t,x,y), c(t,x,y), c'''_{txy}(t,x,y)$ – непрерывные функции в области G, ($i=1,2,3$)

б) Главные миноры матричной функции $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

неотрицательны при всех

$(t,x,y,s,z,w)\in G_1=\{(t,x,y,s,z,w): 0\le s\le t\le T, 0\le z\le x\le X, 0\le w\le y\le Y\}$,

где $a_{11}=(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]$,

$a_{22}=(t-s)(y-w)[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]$,

$a_{33}=(x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-(t-s)a'_{3s}(s,z,w)]$,

$a_{12}=a_{21}=-2(t-s)(x-z)(y-w)b_1(s,z,w)$,

$a_{13}=a_{31}=-2(t-s)(x-z)(y-w)b_2(s,z,w)$,

$a_{32}=a_{23}=-2(t-s)(x-z)(y-w)b_3(s,z,w)$;

в) Главные миноры матричной функции $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$

неотрицательны при всех $(t,x,y,s,z,w)\in G_1$,

где

$$b_{11}=(t-s)[b_1(s,z,w)-(x-z)b'_{1s}(s,z,w)-(y-w)b'_{1w}(s,z,w)+(x-z)(y-w)b''_{1zw}(s,z,w)]$$

$$b_{22}=(x-z)[b_2(s,z,w)-(t-s)b'_{2s}(s,z,w)-(y-w)b'_{2w}(s,z,w)+(y-w)(t-s)b''_{2sw}(s,z,w)]$$

$$b_{33}=(y-w)[b_3(s,z,w)-(t-s)b'_{3s}(s,z,w)-(x-z)b'_{3z}(s,z,w)+(x-z)(t-s)b''_{3sz}(s,z,w)]$$

$$b_{12}=b_{21}=-\frac{1}{2}(t-s)(x-z)[c(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)],$$

$$b_{32}=b_{23}=-\frac{1}{2}(t-s)(y-w)[c(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)],$$

$$b_{13}=b_{31}=-\frac{1}{2}(x-z)(y-w)[c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)];$$

г) $c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)+$

$+(t-s)(y-w)c''_{sw}(s,z,w)+(t-s)(x-z)c''_{sz}(s,z,w)+(x-z)(y-w)c''_{zw}(s,z,w)-$

$-(t-s)(x-z)(y-w)c'''_{szw}(s,z,w)\geq K>0,$

где $0<K$ – некоторая постоянная.

В таком случае квадратичные формы в выражении (6) неотрицательны и отсюда имеем место

$$\frac{K}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2 dwdzds\leq\left|\int_0^t\int_0^x\int_0^y\int_0^s\int_0^z\int_0^w f(\tau,\xi,\eta)\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau dwdzds\right|$$ П

усть $f(t,x,y)=0$, $(t,x,y)\in G$, и в силу условия *а)-г)* и теорема Сильвестера [4], получим

$\int_0^s\int_0^z\int_0^w\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau=0$ т.е. $\vartheta(t,x,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняется условия *а)-г)*. Тогда решение $\vartheta(t,x,y)$ уравнения (4) единственно в классе $L_2(G)$. Следовательно, решение $u(t,x,y)$ задачи (1)-(2) единственно в пространстве $Z_2(G)$.

Литература

1. Иманалив М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. -Фрунзе: Илим.-1981.С.44.
2. Зулпукаров Ж. А. Система вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям,-Бишкек: Илим, 2002.-Вып.31.-С.151-156.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. –М: Наука 1980.
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. –М: Наука, 1984. С.153-154.

УДК 517.956(5772)(04)

Карасаев И.К., БГУ им. К. Карасаева

О парных уравнениях

В работе демонстрируется применение нового метода - метода поляризации в действии. С другой стороны, разбор решенных ниже задач показывает, насколько эффективен данный метод.

Определение. Уравнения [1]

$$\ddot{x}+\sin^n t\cdot x=0,\qquad \ddot{x}+\cos^n t=0 \tag{1}$$

будем называть парными уравнениями.

Теорема 1. Парные уравнения при каждом n имеют одни и те же показатели Ляпунова.

Заметим, что в случае уравнения

$$\ddot{x}+\sin t\cdot x=0 \tag{2}$$

А.Ф.Филиппову удалось дать оценку старшему показателю $|\Lambda|<$ 0.477.Он предполагает, что «точное значение около 0.442». Отметим, что существующие методы вычисления показателей и построения фундаментальных систем неэффективны.

В работе [2] вычислены точные значения показателей для уравнения (2), а именно, старший показатель $\Lambda=0.4571859883$, а младший показатель $\lambda=$-0.4571859883.Для уравнения $\ddot{x}+\cos t\cdot x=0$,там же, получены те же значения показателей [2].То же самое можно сказать относительно уравнений

$$\ddot{x}+\sin^3 t\cdot x=0,\qquad \ddot{x}+\cos^3 t\cdot x=0 \tag{3}$$

а именно, их показатели совпадают.

На этот раз доказательство этих же фактов будет проведено с других позиций

Разберем более подробно для уравнения

$$\ddot{x}+\sin^3 t\cdot x=0 \tag{4}$$

Теорема 2. Показатели уравнения (4) суть

$$\Lambda=0.1872611656836,\lambda=-0{,}1872611656836 \tag{5}$$

Доказательство. Допуская выполннеыми условия [2], в том числе условия поляризации характеристических условия ($\mu+ip)^2-\alpha\neq 0$ ($p=0,\pm1,2,3,...$), где α произвольное комплексное число, имеем

$$\left[(\mu+ip)^2 y_p+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}y_q\right]e^{ip}=0. \tag{6}$$

$$(p=\cdot\cdot,-2,-1,0,1,2,\cdot\cdot\cdot)$$

Т.к.

$$sin^3 t=\frac{1}{8i}\left(-e^{3it}+3e^{-it}-3e^{it}+e^{-3it}\right),,$$

то пользуясь двойными индексами, положим

$$a_{p-q}=\begin{cases}=-\dfrac{1}{8i},\, åñëè \quad p-q=3,\\ =\dfrac{3}{8i},\, åñëè \quad p-q=-1,\\ =-\dfrac{3}{8i},\, åñëè \quad p-q=1,\\ =\dfrac{1}{8i},\, åñëè \quad ,\, p-q=-3.\end{cases}$$

(7)

Развертывая (6), имеем

$$\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots+(\mu-2i)^2y_{-2}+a_{-2+1}y_{-1}+a_{-2+0}y_0+a_{-2-1}y_1+a_{-2-2}y_2+\ldots=0\\ \ldots+a_{-1+2}y_{-2}+(\mu-i)^2y_{-1}+a_{-1-0}y_0+a_{-1-1}y_1+a_{-1-2}y_2+\ldots=0,\\ \ldots+a_{0+2}y_{-2}+a_{0+1}y_{-1}+(\mu+0i)^2y_0+a_{0-1}y_1+a_{0-2}y_2+\ldots=0,\\ \ldots+a_{1+2}y_{-2}+a_{1+1}y_{-1}+a_{1-0}y_0+(\mu+i)^2y_{-1}+a_{1-2}y_2+\ldots=0,\\ \ldots+a_{2+2}y_{-2}+a_{2+1}y_{-1}+a_{2-0}y_0+a_{2-1}y_1+(\mu+2i)^2y_2+\ldots=0,\end{cases} \qquad (8)$$

…………………………………………………….

где двойные индексы определяются (7).Т.к.

$$sin^3 t=\frac{1}{8i}\left(-e^{3it}+3e^{-it}-3e^{it}+e^{-3it}\right),$$

положим

$$a_{p-q}=\begin{cases}=-\dfrac{1}{8i}, åñëè \quad p-q=3,\\ =\dfrac{3}{8i}, åñëè \quad p-q=-1,\\ =-\dfrac{3}{8i}, åñëè \quad p-q=1,\\ =\dfrac{1}{8i}, åñëè \quad , p-q=-3.\end{cases} \qquad (9)$$

В векторной форме (8) имеет вид

$$A_0\ \mu)\cdot\bar{y}=0,$$

Для поляризации и нормализации системы (8) на это уравнение слева подействуем поляризующей матрицей (множителем) =

$$\lambda(\mu)=\begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu-2i)^2-\alpha} & & & & & \\ & \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & & & & \\ & & \frac{1}{(\mu-0i)^2-\alpha} & & & \\ & & & \frac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & & \\ & & & & \frac{1}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \end{pmatrix}.$$

Получим уравнение

$$A_1(\mu)\cdot\bar{y}=0, \qquad (10)$$

который называется разрешающим уравнением

$$A_1(\mu)=\begin{pmatrix} \cdots\frac{(\mu-2i)^2}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2-\alpha}\cdots \\ \cdots\frac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{(\mu-i)^2}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1+0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2-\alpha}\cdots \\ \cdots\frac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{(\mu+0i)^2}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2-\alpha}\cdots \\ \cdots\frac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{(\mu+i)^2}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2-\alpha}\cdots \\ \cdots\frac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{(\mu+2i)^2}{(\mu+2i)^2-\alpha}\cdots \end{pmatrix}$$

……

Матрица $A_1(\mu)$ есть нормальная матрица $[3,c.332]$.

Доказательство вести по Коху (Helge von Koch) $[4,c.8]$ невозможно, т.к. на диагонали присутствует 0.По определению $[3,.c.332]$, очевидно, что произведение диагональных элементов и двойной ряд, составленный из недиагональных элементов сходится абсолютно.

После **устранения носителя поляризации** $[2]$, мы получаем

$$detA_1(0)=\begin{vmatrix} \cdots 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2}\cdots \\ \cdots\frac{a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{a_{-1-0}}{1^2} & \frac{a_{-1-1}}{1^2} & \frac{a_{-1-2}}{1^2}\cdots \\ \cdots a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2}\cdots \\ \cdots\frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{a_{1+1}}{1^2} & \frac{a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{a_{1-2}}{1^2}\cdots \\ \cdots\frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1\cdots \end{vmatrix}=2a_{-1}a_1$$

В работе $[2]$ доказывается, что определитель матрицы $A_1(\mu)$ при нуле

$$detA_1(0)=2a_{-1}a_1.$$

а уравнение, определяющее характеристические показатели

$$z^2+2i\sqrt{2\pi^2 a_{-1}a_1}\,z-1=0,\ z=e^{\pi i\mu}$$

Решая это уравнение, имеем

$$\mu_1=0.1872611656836-\frac{i}{2},\ \mu_2=-0,1872611656836-\frac{i}{2},$$

где $\Lambda=0,1872611656836-$ старший показатель, $\lambda=-0,1872611656836-$ младший показатель.

Фундаментальная система

$$x=e^{\mu_1 t}\sum_{q=-\infty}^{\infty}B_k^q(\mu_1)e^{iqt},\ \mu_1=0.1872611656836-\frac{i}{2},$$

$$x=e^{\mu_2 t}\sum_{q=-\infty}^{\infty}B_k^q(\mu_2)e^{iqt},\ \mu_2=-0,1872611656836-\frac{i}{2},$$

где показатели Ляпунова $\Lambda=-0,1872611656836,\ \lambda=-0,1872611656836$,

$B_k^q(\mu_1),\ B_k^q(\mu_2)$-значения миноров при μ_1,μ_2 элементов *k-ой* строки, где хотя бы один минор отличен от нуля. Если таких строк много, то в качестве *k* берем любую из них. Отметим, что поскольку речь идет об абсолютной сходимости, будем говорить о минорах, вместо алгебраических дополнений.

Положим $z_1=\sum_{q=-\infty}^{\infty}B_k^q(\mu_1)e^{iqt}$, $z_2=\sum_{q=-\infty}^{\infty}B_k^q(\mu_2)$-периодические функции.

Тогда $x_1=e^{\mu_1 t}z_1,\ x_2=e^{\mu_2 t}z_2$ - фундаментальная система для (4). Таким образом, для каждой пары уравнений можно доказать, что они имеют одни и те же значения показателей Ляпунова и заодно построить фундаментальную систему.

Литература

1. Филиппов А.Ф. О свойствах решений линейной системы с квазипериодическими коэффициентами // Математ. заметки. 1990.- т. 47, вып 2. – С.124 – 129.
2. Карасаев И.К.К построению фундаментальной системы уравнения Хилла //Сборник трудов Международной миниконференции «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения» (3.5 мая 2009г.). М.:Издательство МЭСИ,2010.(ISBN 978-5-7764-0607-2) С.104-108.
3. Каган В.Ф. Основания теории определителей. – Одесса: 1922. –393 с.
4. Бондаренко Г.В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. // Москва: АН. СССР, 1936.– 48 с.

УДК517.956 575.2(04)

Карасаев И.К., БГУ им. К.Карасаева

Устранение носителей поляризации

В работе приводится способ удаления произвольного носителя поляризации с тем, чтобы исключить зависимость показателей Ляпунова от произвольного комплексного числа.

Нетрадиционным методом, который называется методом поляризации исследуется нестационарная динамическая система, описываемая уравнением [1]

$$\frac{d^2y}{dt^2}+q_1(t)\frac{dy}{dt}+q_0(t)y=0, \qquad (1)$$

где $q_k(t)$ (k=0,1) –непрерывны и $q_k(t+2\pi)=q_k(t)\ (k=0,1)$ с точки зрения точного вычисления показателей Ляпунова и построения фундаментальных систем, для чего мы должны освободиться от произвольного комплексного числа α, которое называется носителем поляризации, т.е.исключим α. из уравнения

$$sin(\pi i\mu)=\Delta(0)\sin^2(\pi i\alpha_1), \qquad (2)$$

которое есть характеристическое уравнение, из которого μ,где $\Delta(0)$ есть бесконечный определитель при нуле

$$\Delta(0)=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{2^2}{2^2+\alpha} & \frac{-a_{-2+1}}{2^2+\alpha} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2+\alpha} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2+\alpha} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2+\alpha} & \cdots \\ \cdots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2+\alpha} & \frac{1^2}{1^2+\alpha} & \frac{-a_{-1-0}}{1^2+\alpha} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2+\alpha} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2+\alpha} & \cdots \\ \cdots & \frac{a_{0+2}}{0^2+\alpha} & \frac{a_{0+1}}{0^2+\alpha} & \frac{0^2}{0^2+\alpha} & \frac{a_{0-1}}{0^2+\alpha} & \frac{a_{0-2}}{0^2+\alpha} & \cdots \\ \cdots & \frac{-a_{1+2}}{1^2+\alpha} & \frac{-a_{1+1}}{1^2+\alpha} & \frac{-a_{1-0}}{1^2+\alpha} & \frac{1^2}{1^2+\alpha} & \frac{-a_{1-2}}{1^2+\alpha} & \cdots \\ \cdots & \frac{-a_{2+2}}{2^2+\alpha} & \frac{-a_{2+1}}{2^2+\alpha} & \frac{-a_{2-0}}{2^2+\alpha} & \frac{-a_{2-1}}{2^2+\alpha} & \frac{2^2}{2^2+\alpha} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Для этого используем формулу $[2]$

$$sin\,\pi x=\pi x\prod_{p-1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right) \qquad (4)$$

Теорема Характеристическое уравнение (2) можно привести к виду

$$sin^2\pi i\mu=\pi^2 d(0)$$

Доказательство. Используя (3) и применяя формулу(4) правую часть соотношения (2), имеем

$$\sin^2(\pi i\alpha_1)=\pi^2\prod_{p=1}^{\infty}\frac{(p^2+\alpha)}{p^4}\prod_{\substack{p=-\infty\\ p\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{(p^2+\alpha)^2}\Delta_0,$$

где Δ_0 есть определитель

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 2^2 & -a_{-2+1} & -a_{-2-0} & -a_{-2-1} & -a_{-2-2} & \cdots \\ \cdots & -a_{-1+2} & 1^2 & -a_{-1-0} & -a_{-1-1} & -a_{-1-2} & \cdots \\ \cdots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0^2 & a_{0-1} & a_{0-2} & \cdots \\ \cdots & -a_{1+2} & -a_{1+1} & -a_{1-0} & 1^2 & -a_{1-2} & \cdots \\ \cdots & -a_{2+2} & -a_{2+0} & -a_{2-0} & -a_{2-1} & 2^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Далее имеем

$$\sin^2(\pi i\alpha_1)=\pi^2\prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^4}\Delta_0=\pi^2\prod_{\substack{p=-\infty\\p\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{p^2}\Delta_0=\pi^2\begin{vmatrix}
\ddots & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & \frac{1}{2^2} & & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{1^2} & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & \frac{1}{1^2} & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{2^2} & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & \ddots
\end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 2^2 & -a_{-2+1} & -a_{-2-0} & -a_{-2-1} & -a_{-2-2} & \cdots \\
\cdots & -a_{-1+2} & 1^2 & -a_{-1-0} & -a_{-1-1} & -a_{-1-2} & \cdots \\
\cdots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0^2 & a_{0-1} & a_{0-2} & \cdots \\
\cdots & -a_{1+2} & -a_{1+1} & -a_{1-0} & 1^2 & -a_{1-2} & \cdots \\
\cdots & -a_{2+2} & -a_{2+0} & -a_{2-0} & -a_{2-1} & 2^2 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}
1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} \\
\frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-2-2}}{1^2} \\
a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} \\
\frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} \\
\frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1
\end{vmatrix}=\pi^2 d(0).$$

После упрощения имеем

$$\Delta(0)\ \sin^2\pi i\alpha_1=\pi^2\prod_{p=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{p^4}\Delta_0=\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\pi^2}{p^2}\Delta_0=\pi^2 d\,(0),$$

где $d\,(0)$ есть нормальный определитель. Заметим, что нулевая строка данного определителя можно рассматривать как результат перемножения диагонального определителя, у которого нулевая строка состоит из нулей кроме 1 на соответствующий определитель. Тогда уравнение (2)можно представить в виде

$$sin\,\pi i\mu=\pi^2 d(0) \qquad (5)$$

которое будем называть каноническим уравнением

Следствие. Бесконечный определитель

$$d(0)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} \\ \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-2-2}}{1^2} \\ a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} \\ \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} \\ \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 \end{vmatrix} = 2a_{-1}a_1$$

является нормальным определителем $[3, c.332]$.

Доказательство. Теорема Коха здесь неприменима $[4, \tilde{n}.8]$.

Составим двойной ряд [3,с.332]

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & + & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} + & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} + & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} + & \ldots \\ \ldots + & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} + & \frac{a_{-1+1}}{} + & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} + & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} + & \ldots \\ \ldots + & a_{0+2} & a_{0+1} + & & a_{0-1} & a_{0-2} + & \ldots \\ \ldots + & \frac{-a_{1+2}}{1^2} + & \frac{-a_{1+1}}{1^2} + & \frac{-a_{1-0}}{1^2} + & + & \frac{-a_{1-2}}{1^2} + & \ldots \\ \ldots + & \frac{-a_{2+2}}{2^2} + & \frac{-a_{2+1}}{2^2} + & \frac{-a_{2-0}}{2^2} + & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & + & \ldots \end{array}$$

Складывая по строкам, а затем по столбцам, имеем сумму двойного ряда

$$S + \frac{S\pi^2}{3},$$

где

$$\cdots + a_{0+2} + a_{0+1} + a_{0-1} + a_{0-2} + \cdots + \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_{p-q} = S \text{, при любом } p \ [2],$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} + \cdots.$$

Равенство (5) можно представить в виде

$$z^2 + 2i\sqrt{2\pi^2 a_{-1}a_1}\, z - 1 = 0, \qquad (5)$$

$$z = e^{\pi i\mu}, \ a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_k(t)e^{ikt}dt \ (\mathrm{k} = \pm 1).$$

$\lambda_k = Re\,\mu_k$ *(k=1,2)*-суть показатели Ляпунова. Уравнение (5) будем называть каноническим характеристическим уравнением. Как видим, показатели не зависят от произвола.

Литература

1. Карасаев И.К.К построению фундаментальной системы уравнения Хилла//Сборник трудов Международной миниконференции «Качественная тео-рия дифференциальных уравнений и приложения» (3.5 мая 2009г.). М.:Издательство МЭСИ,2010.(ISBN 978-5-7764-0607-2) С.104-108.

2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва.: Физматгиз., 1962.–1100 с.
3. Каган В.Ф. Основания теории определителей. – Одесса: 1922. –393 с.
4. Бондаренко Г.В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний.// Москва: АН. СССР, 1936.– 48 с.

УДК 517.928

Каримов С., ОшГУ

Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае (1)

Бул жумушта сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечиминин бир калыпта жакындашуусу каалаган тактыкта өзгөчө учурда тургузулган.

В данной работе построены равномерные приближения решения сингулярно – возмущенной системы дифференциальных уравнений с любой степенью точности в особо критическом случае.

In this paper uniform approximations are constructed for solving singularly – perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case.

Рассмотрим задачу, изученную в работе $[1]$

$$\varepsilon\dot{x}(x,t) = \mathrm{D(t)}x(\mathrm{t},\varepsilon) + \varepsilon f(\mathrm{t}) + \gamma x_1(t,\varepsilon)x_2(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$x(-1,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \left\|x^0(\varepsilon)\right\| = \mathrm{O}(\varepsilon), \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр;
$\mathrm{D(t)} = \mathrm{diag}(\mathrm{t}+\mathrm{i}, \mathrm{t}-\mathrm{i}); \gamma$ - const; $f(\mathrm{t}) \equiv \mathrm{colon}(-1,1); \mathrm{t} \in [-1,1] = [t_0, T_0]$.

Сначала задачу (1), (2) заменим на следующую эквивалентную задачу:

$$x(\mathrm{t},\varepsilon) = \mathrm{E}(\mathrm{t}, \mathrm{t}_0, \varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau + \frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)x_1(\tau,\varepsilon)x_2(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{3}$$

где $t_0 = -1, T_0 = 1, E(t,\tau,\varepsilon) = exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} \mathrm{D(s)ds})$.

В работе [1] для $x(\mathrm{t},\varepsilon)$ получена оценка:

$\left\|x(\mathrm{t},\varepsilon)\right\| = \mathrm{O}(\varepsilon)$ при $-1 \le t \le 1-\varepsilon^{\frac{2}{5}}$; $\left\|x(\mathrm{t},\varepsilon)\right\| = \mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon})$ при $1-\varepsilon^{\frac{2}{5}} \le t \le 1$.

В работе [2] для $x(\mathrm{t},\varepsilon)$ получена равномерные приближения с любой степенью точности на $\mathrm{t} \in [-1,1]$ при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 - const.$

Как в работе [2] рекуррентно определим следующие функции:

$$x^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv 0,\ x^{(1)}(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau;$$

$$x^{(k+1)}(t,\varepsilon) \equiv \frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)F^{(k)}(\tau,\varepsilon)d\tau \quad (k = 1,2,...);$$

где $F^{(k)}(t,\varepsilon) = X_1^{(k)}(t,\varepsilon)X_2^{(k)}(t,\varepsilon)X^{(k)}(t,\varepsilon) -$

$$- X_1^{(k-1)}(t,\varepsilon)X_2^{(k-1)}(t,\varepsilon)X^{(k-1)}(t,\varepsilon);\ \mathrm{X^{(k)}(t,\varepsilon)} = \sum_{m=0}^{k} \mathrm{x^{(m)}(t,\varepsilon)}.$$

Пусть $x(t,\varepsilon) = X^{(k)}(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon).$

В работе $[2]$ доказаны оценки:

$$\left\| x^{(k)}(t,\varepsilon) \right\| \le \left[C\omega(t,\varepsilon) \right]^k \quad (k = 1,2,...); \tag{4}$$

$$\left\| y(t,\varepsilon) \right\| \le \left[C\omega(t,\varepsilon) \right]^{k+1}, \tag{5}$$

где постоянная C не зависит ни от k, ни от ε;

$\omega(t,\varepsilon) = \varepsilon$ при $-1 \le t \le 1-a;\ \omega(t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ при $1-a \le t \le 1;\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 - \mathrm{const}, 0 < a$ - постоянное, причем $a << 1.$ При $k = 0$ остаточный член оценивается величиной порядке $\mathrm{O}(\omega_1(\mathrm{t},\varepsilon))$, где $\omega_1(\mathrm{t},\varepsilon) = \varepsilon$ при $-1 \le \mathrm{t} \le 1-\varepsilon^{\lambda};\ \omega_1(\mathrm{t},\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ при $1-\varepsilon^{\lambda} \le \mathrm{t} \le 1;$

λ - постоянная, не зависящая от ε, такая, что $\frac{1}{2} \le \lambda < 1.$ В данной работе доказаны более сильные оценки, чем оценки (4), (5).

Пусть $t = t_1 + it_2, \tau = \tau_1 + i\tau_2; \mathrm{t} + i = \tilde{r}e^{i\tilde{\varphi}}, \tau + i = re^{i\varphi}, t - i = \tilde{r}'e^{i\tilde{\varphi}'},$

$\tau - i = r'e^{i\varphi'}$; где $t_1, t_2, \tau_1, \tau_2, \tilde{r}, \tilde{r}', \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}', r, r', \varphi, \varphi' -$ действительные переменные;

$$\mathrm{u}_1(t_1,t_2) = \mathrm{u}_1(\tilde{r},\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} Re(t+i)^2 = \frac{1}{2}\tilde{r}^2 \cos 2\tilde{\varphi};$$

$$\mathrm{u}_2(t_1,t_2) = u_2(\tilde{r}',\tilde{\varphi}') = \frac{1}{2} Re(t-i)^2 = \frac{1}{2}(\tilde{r}')^2 \cos 2\tilde{\varphi}';$$

$\delta(\varepsilon) = \varepsilon\ln\varepsilon$ при $0 < \varepsilon \le \mathrm{e}^{-1}$ и $\delta(0) = 0;\ \delta_0$ - постоянное, причем $0 < \delta_0 << 1;$

$\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}'_{01}$ два последовательных решения уравнения $\cos(\mathrm{n}+1)\tilde{\varphi} = 0,$ причем $\cos(\mathrm{n}+1)\tilde{\varphi} < 0$ при $\tilde{\varphi} \in (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}'_{01}).$ Здесь и в дальнейшем $\mathrm{n} = 1$ $(\mathrm{n}+1 = 2).$ Тогда имеется единственное решение $\tilde{\varphi}_0 \in (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}'_{01})$ уравнения $\cos(\mathrm{n}+1)\tilde{\varphi}_0 = -1.$ Далее возьмем два решения φ_1, φ'_1 уравнения $\cos(\mathrm{n}+1)\varphi = \delta_0$ ` так, чтобы $\varphi_1 \to \tilde{\varphi}_{01}, \varphi'_1 \to \tilde{\varphi}'_{01}$ при $\delta_0 \to 0.$

Теперь возьмем Φ_0, Φ'_0 такие, что $\cos(\mathrm{n}+1)\Phi_0 = \cos(\mathrm{n}+1)\Phi'_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$ ` причем $\Phi_0 \in (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}_0),\ \Phi'_0 \in (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}'_{01}).\ H_0 = \{(t_1,t_2) : u_k(t_1,t_2) \le 0,\ k = 1,2\} = [\mathrm{ABCD}]$` - замкнутый квадрат с вершинами в точках A(-1,0), B(0,1), C(1,0), D(0,-1);

$H_1 = \{ (\tilde{r},\tilde{\varphi}) : u_k(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le -\delta_0;$ или $\mathrm{u_k}(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le 0$ и $\tilde{\mathrm{r}} \ge \delta_0,\ \tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01}, \Phi_0];$ или

$\mathrm{u_k}(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le \frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$ и $\tilde{\mathrm{r}} \ge \delta_0,\ \tilde{\varphi} \in [\Phi'_0, \varphi'_{01}],\ \mathrm{k} = 1.2\}.$

Пусть $[t_0, T_0] \subset S_r$ - открытый круг радиуса $r \ge 1 + d\ (d > 0)$ с центром в точке $(0,0);\ \mathrm{t} \in \mathrm{S_r};\ \Phi(\mathrm{S_r})$ - пространства аналитических функций в $\mathrm{S_r};$ Решение $x(\mathrm{t},\varepsilon) = \mathrm{colon}(x_1(\mathrm{t},\varepsilon), x_2(\mathrm{t},\varepsilon))$ будем искать в классе $x_k(\mathrm{t},\varepsilon) \in \Phi(\mathrm{S_r})$ $(\mathrm{k} = 1,2)$ по t.

Справедливы оценки:

$$\left| x_1^{(1)}(t,\varepsilon) \right| = \mathrm{O}(\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi})),\ \left| x_2^{(1)}(t,\varepsilon) \right| = \mathrm{O}(\tilde{\omega}(\tilde{r},\tilde{\varphi})), \tag{6}$$

где $\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi}) = \varepsilon$ при $(\tilde{\mathrm{r}},\tilde{\varphi}) = H_1;\ \omega(\tilde{r},\tilde{\varphi}) = \sqrt{\varepsilon}$ при $(\tilde{\mathrm{r}},\tilde{\varphi}) \in (\mathrm{H_0} \setminus \mathrm{H_1});\ \tilde{\omega}(\tilde{\mathrm{r}},\tilde{\varphi})$ - сим--метричная функция к $\omega(\tilde{\mathrm{r}},\tilde{\varphi})$ относительно действительной оси. Доказательства оценки (6) совершенно аналогичны, как оценки решения простейшей задачи работы $[3].$

Если t - действительное, то из (6) получим, что $\omega(t,\varepsilon)=\varepsilon$ при $-1\le t\le 1-\tilde{\gamma}(\varepsilon)$, $\omega(t,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$ при $1-\tilde{\gamma}(\varepsilon)\le t\le 1$, где $|\delta(\varepsilon)|\le\tilde{\gamma}(\varepsilon)\le 4|\delta(\varepsilon)|$ $(|\delta(\varepsilon)|\le\frac{1}{4}$ при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0)$, т. е. здесь для $x_j^{(1)}(t,\varepsilon)(j=1,2)$ получена более сильная оценка, чем в работах [1,2].

Пусть $\{C_1\}$ $(u_1(t_1,t_2)=C_1)$ соединяет точки $(t_{01},0)$, $(T_1,0)$, а $\{C_2\}$ $(u_1(t_1,t_2)=C_2)$ точки $(t_{02},0)$, $(T_2,0)$ $(t_0<t_{01}<t_{02}<a_0$, $a_0<T_2<T_1<T_0)$, где $a_0=0$.

Рассмотрим полосу P, ограниченную линиями уровней $\{C_1\}$ и $\{C_2\}$ отрезками действительной оси $[t_{01},t_{02}]$, $[T_2,T_1]$.

На полосе P рассмотрим уравнения

$$u_1(t_1,t_2)=at_1+b,\ \text{где}\ a=\frac{C_2-C_1}{T_2-t_{01}},\ b=\frac{C_1T_2-C_2t_{01}}{T_2-t_{01}}. \tag{7}$$

Основная лемма: Если линии уровня $u_1(t_1,t_2)=C$ $(C_2\le C\le C_1)$ полностью покрывают полосу P и произвольная точка (t_1,t_2) полосы P принадлежит единственной линии уровня $\{C\}, Jm\lambda_1(t)\ne 0$, то уравнения (7) в полосе P определяют однозначную непрерывно - дифференцируемую функцию $t_2=\varphi(t_1)$ с областью существования $(t_{01}\le t_1\le T_2)$ и кривая (K_0), определяемая этой функцией, соединяет точки $(t_{01},0)$, $(T_2,0)$, причем $u_1(t_1,\varphi(t_1))$ убывает на $[t_{01},T_2]$.

Основная лемма своеобразным методом доказана в работе [4]. Другое доказательство имеется в наших работах.

Пусть $\alpha(\varepsilon)$ определена, непрерывна и монотонно убывает на отрезке $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, причем $\alpha(0)=0$.

Тогда из равенства

$$u_1(t_1^*,0)=\alpha(\varepsilon) \tag{8}$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^*=t_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=t_0+\gamma(\varepsilon)$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0$, где $\gamma(\varepsilon)\ge 0$ непрерывная функция от ε при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$. Аналогично из (8) в некоторой окрестности точки $(t_1^*=T_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}(\varepsilon)$, где $\tilde{\gamma}(\varepsilon)\ge 0$ непрерывная функция от ε при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}(\varepsilon)=0$$

Возьмем ε_0 такое, что при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$ имело место $|\alpha(\varepsilon)|\le\frac{1}{4}$, тогда справедлива оценка

$$|\alpha(\varepsilon)|\le\gamma(\varepsilon)\le 4|\alpha(\varepsilon)|\ (|\alpha(\varepsilon)|\le\tilde{\gamma}(\varepsilon)\le 4|\alpha(\varepsilon)|).$$

Если $\alpha(\varepsilon)=\alpha_k(\varepsilon)$, то значения $\gamma(\varepsilon)$, $\tilde{\gamma}(\varepsilon)$, соответственно, обозначим $\gamma_k(\varepsilon)$, $\tilde{\gamma}_k(\varepsilon)$.

Таким образом, если $\alpha_1(\varepsilon)=-\varepsilon$ и $0\le\varepsilon\le\frac{1}{4}$, то $\varepsilon\le\gamma_1(\varepsilon)\le 4\varepsilon$ $(\varepsilon\le\tilde{\gamma}_1(\varepsilon)\le 4\varepsilon)$;

Если $\alpha_2(\varepsilon)=\delta(\varepsilon)$ и возьмем ε_0 такое, что при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$ имело место $|\delta(\varepsilon)|\le\frac{1}{4}$, то $|\delta(\varepsilon)|\le\gamma_2(\varepsilon)\le 4|\delta(\varepsilon)|$ $(|\delta(\varepsilon)|\le\tilde{\gamma}_2(\varepsilon)\le 4|\delta(\varepsilon)|)$;

Если $\alpha_3(\varepsilon) = -\sqrt{\varepsilon}$ и $0 \le \sqrt{\varepsilon} \le \frac{1}{4}$, то $\sqrt{\varepsilon} \le \gamma_3(\varepsilon) \le 4\sqrt{\varepsilon}$ $(\sqrt{\varepsilon} \le \widetilde{\gamma}_3(\varepsilon) \le 4\sqrt{\varepsilon})$;

Если $\gamma_4(\varepsilon) = -\varepsilon^p$ и $0 \le \varepsilon^p \le \frac{1}{4}$, где постоянное $0 < p < 1$, то $\varepsilon^p \le \gamma_4(\varepsilon) \le 4\varepsilon^p$ $(\varepsilon^p \le \widetilde{\gamma}_4(\varepsilon) \le 4\varepsilon^p)$. Для оценки функций $\left\{x_k^{(x)}(t,\varepsilon)\right\}(n = 2,..., k = 1,2)$ будем использовать основную лемму.

Пусть линия уровня (C_1) соединяет точки $(t_{01},0),(T_2,0)$, линия уровня (C_2) соединяет точки $(t_{02},0),(T_2,0)$. Возьмем кривую (K_0^*) симметричную к (K_0). Область ограниченную (K_0) и (K_0^*) обозначим через $H \subset H_0$. $\widetilde{H} = \Delta \cup H$, где $\Delta = \{(t_1,t_2) : t_0 \le t_1 \le t_{01}, t_2 = 0\}$. Теперь будем оценивать $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)(n = 2,3,...)$ для $\forall t \in \widetilde{H}$. Для всех функций $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)(n = 2,3,...)$ путь интегрирования l будет неизменным. Здесь также путь интегрирования l определяется в зависимости от того, какому множеству принадлежит точка (t_1,t_2). Если $(t_1,t_2) \in \Delta(t = t_1, t_2 = 0)$, то l состоит из одного отрезка прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_1,0)(t_0 \le t_1 \le t_{01})$. В этом случае $Re\lambda_k(t) \le -\alpha, \alpha > 0 - const.$

Пусть $(t_1,t_2) \in H$. Тогда $l = \bigcup_{k=1}^{3} l_k$, где l_1 - отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_{01},0)$; l_2 - отрезок кривой (K_0), соединяющий точки $(t_{01},0)$ с точкой $(t_1,t_2^* = \widetilde{\varphi}(t_1))$; l_3 - отрезок прямой, соединяющий точки (t_1,t_2^*)с точкой (t_1,t_2). Заметим, что если $(t_1,t_2) \in H$, то на кривой (K_0) при любом допустимом t_1 имеется единственная точка $(t_1,t_2^* = \varphi(t_1))$.

Для $x_2^{(n)}(t,\varepsilon)$ $(n \ge 2)$ путь интегрирования $\widetilde{l}$ симметричен для l относительно действительной оси.

Если $C_1 = -\varepsilon, C_2 = \delta(\varepsilon)$, то справедливы оценки:

$$\left|\int_{l_1} \exp\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2) - u_1(\tau_1,\tau_2)\right]|d\tau|\right| = O(\varepsilon);$$

$$\left|\int_{l_2} \exp\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2) - u_1(\tau_1,\tau_2)\right]|d\tau|\right| = O(\delta_0(\varepsilon)),$$

где $\delta_0(\varepsilon) = \frac{1}{|ln\,\varepsilon|}(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$; $\left|\int_{l_3} \exp\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2) - u_1(\tau_1,\tau_2)\right]|d\tau|\right| = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$.

Следовательно, имеет места оценка

$$\left|\int_{l} \exp\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2) - u_1(\tau_1,\tau_2)\right]|d\tau|\right| = O(\delta_0(\varepsilon)),(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0) \qquad (9)$$

Если $C_1 = -\varepsilon, C_2 = -\sqrt{\varepsilon}$, то $\left|\int_{l_2} \exp\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2) - u_1(\tau_1,\tau_2)\right]|d\tau|\right| = O(\sqrt{\varepsilon})$. Следовательно, в этом случае справедлива оценка:

$$\left|\int_l \exp\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]\right|d\tau\Big| = \mathrm{O}(\sqrt{\varepsilon}). \tag{10}$$

Если $C_1=-\varepsilon,\ C_2=-\varepsilon^p\ (0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$, где постоянное $0<p<1$, то

$$\left|\int_l \exp\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]\right|d\tau\Big| = \mathrm{O}(\varepsilon^{\gamma}). \tag{11}$$

Здесь γ - постоянное, причем $0<\gamma<1$.

Если $C_1=-\delta_0, C_2=-2\delta_0$, то $t_1^2-(1+t_2)^2\le-\tilde{\delta}_0$ при $(t_1,t_2)\in H$, где

$\delta_0\le\tilde{\delta}_0\le 2\delta_0, (0\le\varepsilon\le\varepsilon_0<\delta_0)$.

Следовательно, $1+t_2\ge\sqrt{\delta_0}$, поэтому в этом случае справедлива оценка:

$$\left|\int_l \exp\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]\right|d\tau\Big| = \mathrm{O}(\varepsilon). \tag{12}$$

Если $C_1=-\delta_0, C_2=-2\delta_0$, то кривая (K_0) соединяет точки $(t_0+\beta,0),(T_0-\tilde{\beta},0)$

где $\delta_0\le\beta\le 4\delta_0$ $(\delta_0\le\tilde{\beta}\le 4\delta_0)$ при $\delta_0\le\frac{1}{4}$. В этом случае область ограниченную

(K_0) и (K_0^*) обозначим через H_c и $\tilde{H}_c=\tilde{\Delta}\cup H_c$, где

$\tilde{\Delta}=\{(t_1,t_2): -1\le t_1\le -1+\beta, t_2=0\}$.

Тогда если $(t_1,t_2)=(\tilde{r},\tilde{\varphi})\in\tilde{H}_c$, то $\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi})=\tilde{\omega}(\tilde{r},\tilde{\varphi})=\varepsilon$.

Поэтому в этом случае справедливы оценки:

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le(c\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi}))^{2k-1}\ (j=1,2; k=1,2,...), \tag{13}$$

где постоянная с не зависит ни от k, ни от ε;

$\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi})=\varepsilon$ при $(\tilde{r},\tilde{\varphi})\in\tilde{H}_c$.

Если $C_1=-\varepsilon, C_2=-\sqrt{\varepsilon}$, то кривая (K_0) соединяет точки $(t_0+\gamma_1(\varepsilon),0)$,

$(T_0-\tilde{\gamma}_3(\varepsilon),0)$. В этом случае область ограниченную (K_0) и (K_0^*) обозначим через H_ε и

$\tilde{H}_\varepsilon=\Delta\cup H_\varepsilon$, где $\Delta=\{(t_1,t_2): t_0\le t_1\le t_0+\gamma_1(\varepsilon); t_2=0\}$.

Тогда, если $(t_1,t_2)=(\tilde{r},\tilde{\varphi})\in\tilde{H}_\varepsilon$, то справедливы оценки:

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le(c\sqrt{\varepsilon})^k\ (j=1,2; k=1,2,...), \tag{14}$$

где постоянная с не зависит ни от k, ни от ε;

Таким образом справедливы следующие оценки:

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le(c\varepsilon)^{2k-1} \text{ при } (t_1,t_2)\in\tilde{H}_c,$$

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le(c\sqrt{\varepsilon})^k\ (j=1,2; k=1,2,...), \text{ при } (t_1,t_2)\in(H_0\setminus\tilde{H}_c), \tag{15}$$

где постоянная с не зависит ни от k, ни от ε;

Без особых трудностей можно доказать справедливость оценок (13), (14). Оценка (15) не вытекает из оценки (14).

Для доказательства оценки (15) поступаем следующим образом.

Как в работе [3] отрезок прямой, соединяющий точки (a,b)с точкой (c,d) обозначим через $p=((a,b),(c,d))$; отрезок дуги с центром в точке $(0,-1)$, соединяющий точки (R,φ') с точкой (R,φ'') через $d=d((R,\varphi'),(R,\varphi''))$.

Пусть $p_1 = p((\sqrt{2},\tilde{\varphi}_{01}),(\tilde{r},\tilde{\varphi}_{01}));$ $p_2 = p((\sqrt{2},\tilde{\varphi}_{01}),(0,\tilde{\varphi}_{01}));$

$p_3 = p((0,\tilde{\varphi}),(\tilde{r},\tilde{\varphi}));$ $p_2' = p((0,\tilde{\varphi}_{01}'),(\tilde{r},\tilde{\varphi}_{01}'));$

$d_1 = d((\tilde{r},\tilde{\varphi}_{01}),(\tilde{r},\tilde{\varphi}))(\tilde{r} \geq \sqrt{\varepsilon},\tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01},\Phi_0]);$

$d_2 = d((\tilde{r},\tilde{\varphi}_{01}'),(\tilde{r},\tilde{\varphi}))(\tilde{r} \geq \sqrt{\varepsilon},\tilde{\varphi} \in [\Phi_0',\tilde{\varphi}_{01}']).$

Теперь путь интегрирования l будем выбирать следующим образом:

1) если $\tilde{r} \geq \sqrt{\varepsilon},\tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01},\Phi_0]$, то $l = p_1 \cup d_1;$
2) если $0 \leq \tilde{r} \leq \sqrt{\varepsilon},\tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01},\tilde{\varphi}_{01}']$; или $-\tilde{r}\cos 2\tilde{\varphi} \geq \sqrt{\varepsilon}(\tilde{r} \geq \sqrt{\varepsilon},\tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01},\tilde{\varphi}_{01}'^{'}]$, то $l = p_2 \cup p_3;$
3) если $\tilde{r} \geq \sqrt{\varepsilon},\tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01}',\Phi_0']$, то $l = p_2 \cup p_2' \cup d_2.$

Тогда справедливость оценок (15) проверяется без особых трудностей для $(t_1,t_2) = (\tilde{r},\tilde{\varphi}) \in (H_0 \setminus \tilde{H}_c).$

Пусть **I**. $f(t) = colon(f_1(t),f_2(t));$

$f(t,x) = x_1,x_2 g(t,x), g(t,x) = colon(g_1(t,x),g_2(t,x));$

$g(t,0) \equiv 0;$

$\tilde{\Delta}(t,x) = \{(t,x): t \in S_r; |x_j| < \delta_0 (j=1,2)\}$ $f_j(t) \in \Phi(S_r); g_j(t,x) \in \Phi(\tilde{\Delta}(t,x))(j=1,2);$ в области $\tilde{\Delta}(t,x)$ имеет место $\|g(t,x) - g(t,\tilde{x})\| \leq M\|x - \tilde{x}\|$, где $M > 0 - const.$

Тогда для решения задачи:

$$\varepsilon\dot{x}(t,\varepsilon) = D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t) + f(t,x), \quad \textbf{(а)}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \|x^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \textbf{(в)}$$

где $\varepsilon > 0$ - параметр; $D(t) = diag(t+i, t-i); t \in [-1,1] = [t_0,T_0]$, справедливы оценки (13)-(15).

Здесь $x^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv 0; x^{(1)}(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau;$

$$x^{(k+1)}(t,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)F^{(k)}(\tau,\varepsilon)d\tau (k=1,2,...); \text{ где}$$

$$F^{(k)}(t,\varepsilon) = X_1^{(k)}(t,\varepsilon)X_2^{(k)}(t,\varepsilon)g(t,X^{(k)}(t,\varepsilon)) -$$

$$- X_1^{(k-1)}(t,\varepsilon)X_2^{(k-1)}(t,\varepsilon)g(t,X^{(k-1)}(t,\varepsilon));$$

$$X^{(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{k} x^{(m)}(t,\varepsilon).$$

Литература

1. Шишкова М.А. «Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных» ДАН СССР, 1973, т. 209, №3,С. 576-579.
2. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.-Ош, 1980, 1-260.
3. Каримов С.К., Азимбаев М.А., Арипов О.Б., Асимптотическое разложение решения одной конкретной системы сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в особом критическом случае. Сборник материалов Международной научно-методической конференции «Прикладные вопросы естественных наук». Алматы 2012г. стр. 51-54.

4. Алыбаев К.С., Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.-Жалал-Абад, 2001, 1-376.

УДК 517.928

Каримов С., ОшГУ

Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае (2)

Бул жумушта сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечиминин бир калыпта жакындашуусу каалаган тактыкта өзгочө учурда тургузулган.

В данной работе построены равномерные приближения решения сингулярно – возмущенной системы дифференциальных уравнений с любой степенью точностью в особо критическом случае.

In this paper uniform approximations are constructed for solving singularly – perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case.

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon\dot{x}(x,\varepsilon) = \mathrm{D(t)}x(\mathrm{t},\varepsilon) + \varepsilon\left[f(\mathrm{t}) + \mathrm{B}(t)x(t,\varepsilon)\right] + g(t,x(t,\varepsilon)),, \quad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \left\|x^0(\varepsilon)\right\| = \mathrm{O}(\varepsilon), \quad (2)$$

где $\mathrm{D(t)} = \mathrm{diag}(\lambda_1(\mathrm{t}) = (\mathrm{t}+i)^{\mathrm{n}}, \lambda_2(\mathrm{t}) = (\mathrm{t}-i)^{\mathrm{n}})$, n - натуральное число; $\varepsilon > 0$ – малый параметр;

$f(t) = colon(f_1(t), f_2(t));\ \mathrm{B}(t) = (b_{kj}(t))_1^2;$

$g(t,x) = colon(g_1(t,x), g_2(t,x)), g\ (t,0) \equiv 0;$

$[t_0, T_0]$ – отрезок действительной оси, $t_0 < T_0;$ $[t_0, T_0] \subset S_r$ – открытый круг радиуса $r \geq \dfrac{|T_0 - t_0|}{2} + d\ (d > 0)$ с центром в точке $\left(\dfrac{T_0 + t_0}{2}, 0\right)$; $\mathrm{t} \in \mathrm{S_r}$;

$\Delta(t,x) = \left\{(t,x) = (t,x_1,x_2) : t \in S_r, \left|x_j\right| < \delta_0 (j = 1,2), 0 < \delta_0 - const\right\};$

$\Phi(\mathrm{S_r})$ – пространство аналитических функций в $\mathrm{S_r}$.

Решение $x(t,\varepsilon) = colon(x_1,(t,\varepsilon), x_2,(t,\varepsilon))$ будем искать в классе $x_k(t,\varepsilon) \in \Phi(S_r)\ (k = 1,2)$ по t.

Будем требовать выполнения следующих условий:

I. Пусть $f_k(t) \in \Phi(S_r);\ b_{kj}(t) \in \Phi(S_r);\ g_k(t,x) \in \Phi(\Delta(t,x))\ \ (k,j = 1,2);$ в области $\Delta(\mathrm{t},\mathrm{x})$ имеет место неравенство $\left\|g(t,x) - g(t,\tilde{x})\right\| \leq M \left\|x - \tilde{x}\right\| \left(max\left\{\left\|x\right\|, \left\|\tilde{x}\right\|\right\}\right)^{\beta}$, где $0 < \mathrm{M},\ 0 < \beta.$

I*. Пусть $\mathrm{B}(t) \equiv 0;\ g(t,x) = x_1 x_2 \tilde{g}(t,x),\ \tilde{g}(t,x) = colon(\tilde{g}_1(t,x), \tilde{g}_2(t,x));$

$f_k(t) \in \Phi(S_r);\ \tilde{g}_k(t,x) \in \Phi(\Delta(t,x))\ \ (k = 1,2);$ в области $\Delta(t,x)$ имеет место $\left\|\tilde{g}(t,x) - \tilde{g}(t,\tilde{x})\right\| \leq M \left\|x - \tilde{x}\right\| (max\left\{\left\|x\right\|, \left\|\tilde{x}\right\|\right\})^{n-1},\ M > 0.$

II. Будем считать, что если (t_1,t_2) – внутренняя точка области H_0, то гармоническая функция, $Jm\,\lambda_1(t_1,t_2) > 0$, где $H_0 = [ABCD]$ – ромб с вершинами в точках: $A(t_0,0)$, B(1,0), $\mathrm{C}(\mathrm{T_0},0)$, $\mathrm{D}(-1,0)$ или замкнутый треугольник (для него действительная ось-ось симметрии).

В данной работе построены равномерные приближения решения задачи (1), (2) с любой степенью точности в отрезке $[t_0, T_0]$.

Пусть $t = t_1 + it_2$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $t + i = \tilde{r}e^{i\tilde{\varphi}}$, $\tau + i = re^{i\varphi}$, $t - i = \tilde{r}'e^{i\tilde{\varphi}'}$, $\tau - i = \tilde{r}'e^{i\tilde{\varphi}'}$; где $t_1, t_2, \tau_1, \tau_2, \tilde{r}, \tilde{r}', \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}', r, r', \varphi, \varphi' -$ действительные переменные;

Из [1] следует, что уравнения $Re(t \pm i)^{n+1} = 0$ имеют простые действительные $(n+1)$ корня. Пусть t_0, T_0 $(t_0 < T_0)$ два корня уравнения $Re(t \pm i)^{n+1} = 0$:

$Re(t_0 \pm i)^{n+1} = Re(T_0 \pm i)^{n+1} = 0,$ причем при $t \in (t_0, T_0)$ имеет место неравенство $Re(t \pm i)^{n+1} < 0.$

При этом существует только одно значения $t_1 = a_0$ такое, что

$Re(t_1, 0) < 0$ при $t_0 \le t_1 < a_0$;

$Re(t_1, 0) > 0$ при $a_0 < t_1 \le T_0$;

и $Re\,\lambda_1(a_0, 0) = 0,$ причем $Im\,\lambda_1(a_0, 0) \neq 0.$

Пусть $u_j(t_1, t_2) = Re\int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau)d\tau = \frac{1}{n+1} Re(t \pm i)^{n+1}$, тогда

$u'_{jt_1}(t_1, t_2) = Re\,\lambda_j(t) = Re(t \pm i)^n$; $u_j(t_0, 0) = u_j(T_0, 0) = 0,$ $(j = 1,2).$

$H_0 = [ABCD]$ – замкнутый четырехугольник с вершинами, соответственно в точках: $A(t_0, 0)$, $B\left(\frac{2t_0T_0}{t_0+T_0}, \frac{T_0 - t_0}{t_0 + T_0}\right)$, $C(T_0, 0)$, $D\left(\frac{2t_0T_0}{t_0+T_0}, \frac{-T_0 + t_0}{t_0 + T_0}\right)$.

Действительная ось является осью симметрии для четырехугольника H_0.

В четырехугольнике H_0 не всегда существует линия уровня $u_k(t_1, t_2) = Re\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds = const$ $(k = 1,2)$ соединяющая точки $(t_0', 0)$, $(t_0'', 0)$, где $t_0 \le t_0' < a_0$; $a_0 < t_0'' \le T_0$.

Задачу (1), (2) заменим на следующую эквивалентную задачу:

$$x(t,\varepsilon) = E(t, t_0, \varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)[B(\tau)x(\tau,\varepsilon) + f(\tau)]d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\,g(\tau, x(\tau,\varepsilon))\,d\tau, \quad (3)$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds\right)$.

Пусть $x^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv 0;$ $x^{(1)}(t,\varepsilon) = E(t, t_0, \varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau,$ т.е. $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ определяется из (3) как первое приближение искомого решения.

Как в работе [2] функции $x^{(k)}(t,\varepsilon)$ $(k = 2,3,...)$ рекуррентно определим следующим образом:

$$x^{(k+1)}(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\;B(\tau)\,x^{(k)}(\tau,\varepsilon)d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\left[g(\tau, X^{(k)}(\tau,\varepsilon)) - g(\tau, X^{(k-1)}(\tau,\varepsilon))\right]d\tau,$$

где $X^{(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{k} x^{(m)}(t,\varepsilon)$ $(k = 1,2,...)$.

Очевидно, что $x^{(k)}(t,\varepsilon)$ $(k = 2,3,...)$ не является обычным последовательным приближением искомого решения. Тогда решения $x(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2), ((3)) представимо в виде $x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t,\varepsilon)$. Из [1] следует, что если $(t_1,t_2) \in H_0$, то $u_j(t_1,t_2) \le 0$ $(j = 1,2)$.

Имеют места оценки:

$$\left|x_1^{(1)}(t,\varepsilon)\right| = O(\omega(t,\varepsilon)); \tag{4}$$

$$\left|x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right| = O(\tilde{\omega}(t,\varepsilon)), \tag{5}$$

где $\omega(t,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, \ при \ (t_1,t_2) \in H_1; \\ \varepsilon^{\frac{1}{n+1}} \ при \ (t_1,t_2) \in (H_0 \setminus H_1), \end{cases}$

H_1 - подмножество множества H_0, которое определяется в дальнейшем; $\tilde{\omega}(t,\varepsilon)$ - симметрическая функция к $\omega(t,\varepsilon)$ относительно действительной оси.

Следует отметить, что оценка

$$\left|x_j^{(1)}(t_1,t_2)\right| = O(\varepsilon^{\frac{1}{n+1}}) \tag{6}$$

в окрестности точки $(T_0,0)$ не улучшаемая.

Идея доказательства оценки (4), (5) есть при любом H_0. Она имеется например, в работе [3].

Что касается оценки функций $x^{(k)}(t,\varepsilon)$ $(k = 2,3,...)$ при любом H_0 задача не простая. Для оценки этих функций будем рассматривать наиболее простой случай, когда существует линия уровня $u_k(t_1,t_2) = Re\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds = const$ $(k = 1,2)$ соединяющая точки $(t_0',0), (t_0'',0)$, где $t_0 \le t_0' < a_0; \ a_0 < t_0'' \le T_0$.

Из [1] следует, что если $n = 4k+3$ $(k = 0,1,2,...)$, то при любом H_0 не всегда существует линия уровня $u_j(t_1,t_2) = Re\int_{t_0}^{t} \lambda_j(s)ds = const$ соединяющая точки $(t_0',0), (t_0'',0)$, где $t_0 \le t_0' < a_0; \ a_0 < t_0'' \le T_0$ (фиксируем t_0' и будем искать t_0'' или наоборот).

Если $n \ne 4k+3$ $(k = 0,1,2,...)$, то в каждом случае имеется такой H_0, где всегда существует линия уровня $u_j(t_1,t_2) = Re\int_{t_0}^{t} \lambda_j(s)ds = const$ соединяющая точки $(t_0',0)$ $(t_0 \le t_0' < a_0)$ с некоторой точкой $(t_0'',0)$ $(a_0 < t_0'' \le T_0)$.

Пусть $n = 4k+1$ $(k = 0,1,2,...)$.

Возьмем $T_0 = tg\dfrac{\pi}{4(2k+1)}$; $t_0 = -T_0$; $a_0 = 0$. $H_0 = [ABCD]$ – ромб с вершинами в точках: $A(-T_0,0)$, $B(1,0)$, $C(T_0,0)$, $D(-1,0)$.

Тогда $Re(t \pm i)^{4k+1}$ $(k = 0,1,2,...)$ меняет знак на отрезке $[-T_0,T_0]$:

$Re(t \pm i)^{4k+1} < 0$ *при*, $-T_0 \le t < 0$;

$Re(t \pm i)^{4k+1} > 0$ *при*, $0 < t \le T_0$.

Приведем принцип обоснования оценки (4), (5) при $n = 4k + 1$ $(k = 0,1,2,...)$ на примере H_0 - ромб. Идея доказательства остается в силах при любом натуральном n для любого H_0.

Пусть $\delta(\varepsilon) = \varepsilon ln\,\varepsilon$ при $0 < \varepsilon \le e^{-1}$ и $\delta(0) = 0$; δ_0 – постоянное, причем $0 < \delta_0 << 1$; $\tilde{\varphi}_{01}$, $\tilde{\varphi}'_{01}$ два последовательных решения уравнения $\cos(n+1)\tilde{\varphi} = 0$ причем $\cos(n+1)\tilde{\varphi} < 0$, при $\tilde{\varphi} \in (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}'_{01})$. Тогда имеется единственное решение $\tilde{\varphi}_0 \in (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}'_{01})$ уравнения $\cos(n+1)\tilde{\varphi}_0 = -1$. Далее возьмем два решения φ_1, φ'_1 уравнения $cos(n+1)\varphi = \delta_0$ так, чтобы $\varphi_1 \to \tilde{\varphi}_{01}$, $\varphi'_1 \to \tilde{\varphi}'_{01}$ при $\delta_0 \to 0$. Теперь возьмем Φ_0, Φ'_0 такие, что

$$\cos(n+1)\Phi_0 = \cos(n+1)\Phi'_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

причем $\Phi_0 \in (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}_0)$, $\Phi'_0 \in (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}'_{01})$. $H_0 = \{(t_1,t_2) : u_k(t_1,t_2) \le 0,\ k = 1,2\} =$ $[ABCD]$ – замкнутый ромб с вершинами в точках $A(-T_0,0)$, $B(0,1)$, $C(T_0,0)$, $D(0,-1)$; $H_1 = \{(\tilde{r},\tilde{\varphi}) : u_k(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le -\delta_0$, или $u_k(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le 0$ и $\tilde{r} \ge \delta_0$, $\tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01}, \Phi_0]$; или $u_k(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le \frac{n}{n+1}\delta(\varepsilon)$ и $\tilde{r} \ge \delta_0, \tilde{\varphi} \in [\Phi'_0, \varphi'_{01}]$, $k = 1,2\}$.

Отрезок прямой соединяющий точки (a,b) с точкой (c,d) обозначим через $p = ((a,b),(c,d))$; отрезок дуги с центром в точке $(0,-1)$, соединяющий точки (R,φ') с точкой (R,φ'') через $d = d((R,\varphi'),(R,\varphi''))$.

Пусть $r_0 = \sqrt{1+T_0^2}$; $m = \frac{1}{n+1}$;

$d_1 = d((r_0,\tilde{\varphi}_{01}),(r_0,\varphi_1))$; $d_2 = d((\tilde{r},\varphi_1),(\tilde{r},\tilde{\varphi}))$;

$d_3 = d((\tilde{r},\varphi'_1),(\tilde{r},\tilde{\varphi}))$; $p_1 = p((r_0,\varphi_1),(\tilde{r},\varphi_1))$;

$p_2 = p((r_0,\varphi_1),(0,\varphi_1))$; $p'_2 = p((0,\varphi'_1),(\tilde{r},\varphi'_1))$;

$p_3 = p((0,\tilde{\varphi}),(\tilde{r},\tilde{\varphi}))$.

Путь интегрирование l_1 для $x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ будем выбирать следующим образом:

Если $0 \le \tilde{r} \le \varepsilon^m$; или $\tilde{r} \ge \varepsilon^m$ и $u_l(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le -\varepsilon^{1-m}$, то $l_1 = d_1 \cup p_2 \cup p_3$;

Если $\varepsilon^m \le \tilde{r}$, $\tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01}, \Phi_0]$, то $l_1 = d_1 \cup p_1 \cup d_2$;

Если $\varepsilon^m \le \tilde{r}$, $\tilde{\varphi} \in [\Phi'_0, \tilde{\varphi}'_{01}]$, то $l_1 = d_1 \cup p_2 \cup p'_2 \cup d_3$.

Для $x_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ путь интегрирования l_1^* симметричен для l_1 относительно действительной оси.

Теперь справедливость оценок (4), (5) проверяется без особых трудностей для $(t_1,t_2) = (\tilde{r},\tilde{\varphi}) \in H_0$. Еще раз отметим, что принцип обоснования оценки (4), (5) остается в силах для любого n при любом H_0 независимо от того существует ли линия уровня или нет соединяющая точки отрезки $[t_0,a_0)$ с точкой отрезка $(a_0,T_0]$.

Пусть $\{C_1\}$ $(u_1(t_1,t_2) = C_1)$ соединяется точки $(t_{01},0)$, $(T_1,0)$, а $\{C_2\}$ $(u_1(t_1,t_2) = C_2)$ точки $(t_{02},0)$, $(T_2,0)$ $(t_0 < t_{01} < t_{02} < a_0$, $a_0 < T_2 < T_1 < T_0)$, где $a_0 = 0$, $t_0 = -T_0$.

Рассмотрим полосу P, ограниченную линиями уровней $\{C_1\}$ и $\{C_2\}$ отрезками действительной оси $[t_{01},t_{02}]$, $[T_2,T_1]$.

На полосе P рассмотрим уравнения

$$u_1(t_1,t_2)=at_1+b,\text{ где } a=\frac{C_2-C_1}{T_2-t_{01}},\ \mathrm{b}=\frac{C_1T_2-C_2t_{01}}{T_2-t_{01}}. \qquad (7)$$

Основная лемма: Если линии уровня $u_1(t_1,t_2)=C\ (C_2\le C\le C_1)$ полностью покрывают полосу P и произвольная точка (t_1,t_2) полосы P принадлежит единственной линии уровня $\{C\}, Jm\lambda_1(t)\neq 0,$ то уравнения (7) в полосе P определяет однозначную непрерывно дифференцируемую функцию $t_2=\varphi(t_1)$ с областью существования $(t_{01}\le t_1\le T_2)$ и кривая $(K_0),$ определяемая этой функцией, соединяет точки $(t_{01},0),(T_2,0),$ причем $\mathrm{u}_1(t_1,\varphi(t_1)$ убывает на $[t_{01},T_2]$.

Основная лемма своеобразным методом доказана в работе [4]. Другое доказательство имеется в наших работах.

Пусть $\alpha(\varepsilon)$ определена, непрерывна и монотонно убывающая на отрезке $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, причем $\alpha(0)=0$.

Тогда из равенства

$$u_1(t_1^*,0)=\alpha(\varepsilon) \qquad (8)$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^*=t_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=t_0+\gamma(\varepsilon)$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0,$ где $\gamma(\varepsilon)\ge 0$ непрерывная функция от ε при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$. Аналогично из (8) в некоторой окрестности точки $(t_1^*=T_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}(\varepsilon),$ где $\tilde{\gamma}(\varepsilon)\ge 0$ непрерывная функция от ε при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}(\varepsilon)=0$$

Для оценки функций $\{x_k^{(x)}(t,\varepsilon)\}(n=2,...,k=1,2)$ будем использовать основную лемму. Пусть линия уровня (C_1) соединяет точки $(t_{01},0),(T_2,0)$, линия уровня (C_2) соединяет точки $(\mathrm{t}_{02},0),(\mathrm{T}_2,0)$. Возьмем кривую (K_0^*) симметричную к (K_0). Область ограниченную (K_0) и (K_0^*) обозначим через $H\subset H_0$. $\tilde{H}=\Delta\cup H$, где $\Delta=\{(t_1,t_2): t_0\le t_1\le t_{01}, t_2=0\}$. Теперь будем оценивать $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)(n=2,3,...)$ для $\forall\mathrm{t}\in\tilde{\mathrm{H}}$. Для всех функций $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)(n=2,3,...)$ путь интегрирования l будет неизменным. Здесь также путь интегрирования l определяется в зависимости от того, какому множеству принадлежит точка (t_1,t_2). Если $(t_1,t_2)\in\Delta(t=t_1,t_2=0),$ то l состоит из одного отрезка прямой, соединяющего точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_1,0)$ $(t_0\le t_1\le t_{01})$. В этом случае $\mathrm{Re}\,\lambda_k(\mathrm{t})\le-\alpha,\alpha>0-\mathrm{const}.$

Пусть $(\tilde{r},\tilde{\varphi})\in H$. Тогда $l=\bigcup\limits_{k=1}^{3}l_k,$ где l_1- отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_{01},0)$; l_2- отрезок кривой (K_0), соединяющий точки $(t_{01},0)$ с точкой $(\tilde{\mathrm{r}}^*,\tilde{\varphi}),;$ l_3- отрезок прямой, соединяющий точки $(\tilde{r}^*,\tilde{\varphi}),$ с точкой $(\tilde{r},\tilde{\varphi}),$. Заметим, что если $(\tilde{r},\tilde{\varphi})\in H$, то отрезок p_3 пересекается с кривой (K_0) в единственной точке $(\tilde{r}^*,\tilde{\varphi})$. В дальнейшем путь интегрирования l определяется также как здесь. Для $x_2^{(n)}(t,\varepsilon)$ $(n\ge 2)$ путь интегрирования l^* симметричен для l относительно действительной оси.

Если $C_1=-\delta_0, C_2=-2\delta_0,$ то

$$\left|\int_l \exp\frac{1}{(n+1)\varepsilon}\left[u_1(t_1,t_2)-u_1(\tau_1,\tau_2)\right]|d\tau|\right| = O(\varepsilon). \qquad (9)$$

Кривая (K_0) соединяет точки $(t_0+\beta,0),(T_0-\tilde{\beta},0)$ где $\beta>0\ (\tilde{\beta}>0)-const.$

В этом случае область ограниченный (K_0) и (K_0^*) обозначим через H_c и $\tilde{H}_c=\tilde{\Delta}\cup H_c$, где $\tilde{\Delta}=\{(t_1,t_2): t_0\le t_1\le t_0+\beta, t_2=0\}$. Тогда если $(t_1,t_2)=(\tilde{r},\tilde{\varphi})\in\tilde{H}_c$, то $\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi})=\tilde{\omega}(\tilde{r},\tilde{\varphi})=\varepsilon$.

Поэтому в этом случае справедлива оценки:

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le(c\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi}))^k\quad(j=1,2;k=1,2,...),\text{при}\,\beta\ge1, \qquad (10)$$

где постоянная с не зависит ни от k, ни от $\varepsilon;\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi})=\varepsilon$ при $(\tilde{r},\tilde{\varphi})\in\tilde{H}_c$.

Если $C_1=-\sqrt{\varepsilon}, C_2=-2\sqrt{\varepsilon}$, то кривая (K_0) соединяет точки $(t_0+\gamma_1(\varepsilon),0)$, $(T_0-\tilde{\gamma}_1(\varepsilon),0)$. В этом случае область ограниченная (K_0) и (K_0^*) обозначим через H_ε и $\tilde{H}_\varepsilon=\Delta_\varepsilon\cup H_\varepsilon$, где $\Delta_\varepsilon=\{(t_1,t_2): t_0\le t_1\le t_0+\gamma_1(\varepsilon); t_2=0\}$.

Тогда, если $(t_1,t_2)=(\tilde{r},\tilde{\varphi})\in\tilde{H}_\varepsilon$, то справедливы оценки:

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon^m(c\sqrt{\varepsilon})^{k-1}(j=1,2;k=1,2,...),\text{при}\,\beta\ge n+1, \qquad \textbf{(11)}$$

где постоянная с не зависит ни от k, ни от ε;

Если $C_1=\delta(\varepsilon), C_2=2\delta(\varepsilon)$, то кривая (K_0) соединяет точки $(t_0+\gamma_2(\varepsilon),0)$, $(T_0-\tilde{\gamma}_2(\varepsilon),0)$. В этом случае область ограниченную (K_0) и (K_0^*) обозначим через K_ε и $\tilde{K}_\varepsilon=\tilde{\Delta}_\varepsilon\cup K_\varepsilon$, где $\tilde{\Delta}_\varepsilon=\{(t_1,t_2): t_0\le t_1\le t_0+\gamma_2(\varepsilon), t_2=0\}$. Тогда, если $(t_1,t_2)\in\tilde{K}_\varepsilon$, то справедливы оценки:

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon^m\left(\frac{c}{|\ln\varepsilon|}\right)^{k-1}\quad(0<\varepsilon\le\varepsilon_0, j=1,2;\ k=1,2,...),\text{при}\,\beta\ge n+1, \qquad (12)$$

где постоянная с не зависит ни от k, ни от ε.

Здесь $\gamma_k(\varepsilon), \tilde{\gamma}_k(\varepsilon)\ (k=1,2)$ обладают такими же свойствами как $\gamma(\varepsilon), \tilde{\gamma}(\varepsilon)$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $n\ne4k+3\ (k=0,1,2,...)$; выполнены условия I, II, причем $g(t,x)\equiv0$. Тогда решение задачи (1), (2) на $\tilde{K}_\varepsilon$ существует, единственно и справедлива оценка:

(10) на $\tilde{H}_c$;

(11) на $\tilde{H}_\varepsilon$;

(12) на $\tilde{K}_\varepsilon$.

Теорема 2. Пусть $n\ne4k+3\ (k=0,1,2,...)$; выполнены условия I, II, причем $B(t)\equiv0$. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и справедлива оценка:

(10) при $\beta\ge1$ на $\tilde{H}_c$;

(11) при $\beta\ge n+1$ на $\tilde{H}_\varepsilon$;

(12) при $\beta\ge n+1$ на $\tilde{K}_\varepsilon$.

Теорема 3. Пусть $n \neq 4k+3$ $(k = 0,1,2,...)$; выполнены условия I, II. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и справедлива оценка:

(10) при $\beta \geq 1$ на $\widetilde{H}_c$;

(11) при $\beta \geq n+1$ на $\widetilde{H}_\varepsilon$;

(12) при $\beta \geq n+1$ на $\widetilde{K}_\varepsilon$.

Теорема 4. Пусть $n \neq 4k+3$ $(k = 0,1,2,...)$; выполнены условия I*, II. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно на H_0 и справедлива оценка:

$$\left|x_j^{(k)}(t,\varepsilon)\right| \leq (c\varepsilon^m)^k \quad (j = 1,2;\ k = 1,2,...) \qquad (13)$$

Литература

1. Каримов С., Анарбаева Г.М., Абдилазизова А., «Исследования поведения решений сингулярно – возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае» Исслед. по интегро – дифференц. уравнениям.-Бишкек: 2009.-Вып. 40.-с. 169-181.
2. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.-Ош, 1980, 1-260.
3. Каримов С.К., Азимбаев М.А., Арипов О.Б., Асимптотическое разложение решения одной конкретной системы сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в особом критическом случае. Сборник материалов Международной научно-методической конференции «Прикладные вопросы естественных наук». Алматы 2012г. стр. 51-54.
4. Алыбаев К.С., Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.-Жалал-Абад, 2001, 1-376.

УДК 517.928

Каримов С., ОшГУ
Бектеналиев И., ЖаГУ

Равномерные приближения решения сингулярно – возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае (3)

Бул жумушта сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечиминин бир калыпта жакындашуусу каалаган тактыкта өзгөчө учурда тургузулган.

В данной работе построены равномерные приближения решения сингулярно – возмущенной системы дифференциальных уравнений с любой степенью точностью в особо критическом случае.

In this paper uniform approximations are constructed for solving singularly – perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case.

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon[f(t) + B(t)x(t,\varepsilon)] + g(t,x(t,\varepsilon)), \qquad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon),\ \left\|x^0(\varepsilon)\right\| = O(\varepsilon), \qquad (2)$$

где $D(t)$-жорданова форма некоторой первоначально заданной матрицы $A(t)$, которая имеет собственные значения $\lambda_k(t)$, $k = 1,2$; $f(t) = colon(f_1(t), f_2(t))$; $B(t) = (b_{kj}(t))_1^2$; $\varepsilon > 0 -$

малый параметр; $[t_0, T_0]$ -отрезок действительной оси, $t_0 < T_0$;

$g(t, x(t,\varepsilon)) = colon(g_1(t,x), g_2(t,x))$, $g(t,0) \equiv 0$;

$[t_0, T_0] \subset S_r$ – открытый круг радиуса $r \geq \frac{|T_0 - t_0|}{2} + d$ с центром в точке $((T_0 + t_0)/2, 0)$; $t \in S_r$;

$\Delta(t,x) = \{(t,x) = (t, x_1, x_2) : t \in S_r, |x_j| < \delta\ (j = 1,2), 0 < \delta - const\}$;

$\Phi(S_r)$ – пространство аналитических функций в S_r;

Решение $x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon))$ будем искать в классе $x_k(t,\varepsilon) \in \hat{O}(S_r)$ $(k = 1,2)$ по $\boldsymbol{t}$.

Будем требовать выполнения следующих условий:

I. $\lambda_k(t) \in \Phi(S_r)$; $f_k(t) \in \Phi(S_r)$; $b_{kj}(t) \in \Phi(S_r)$; $g_k(t,x) \in \Phi(\Delta(t,x))$ $(k, j = 1,2)$;

в области $\Delta(t,x)$ имеет место $\|g(t,x) - g(t,\tilde{x})\| \leq M\|x - \tilde{x}\|\left(max\{\|x\|, \|\tilde{x}\|\}\right)^{\beta}$, где

$0 < M$, $\beta \geq 1$..

II. $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$; $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$, где $\alpha(t), \beta(t)$ – действительные функции, причем $\alpha(t) < 0$ при $t_0 \leq t < a_0$; $\alpha(t) > 0$ при $a_0 < t \leq T_0$; $\alpha(a_0) = 0$, но $\beta(a_0) \neq 0$.

Случай, когда собственные значения имеют нули на границе рассматриваемой области $\boldsymbol{H_0}$, где

$H_0 = \left\{(t_1, t_2) : u_k(t_1, t_2) = \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds \leq 0, k = 1,2\right\}$, $t = t_1 + it_2; t_1, t_2 -$ действительные переменные.

Пусть $\lambda_1(t)$ имеет m кратный нуль в точке $t = a + ib : \lambda_1^{(k)}(a + ib) = 0$ $(k = 0,1,2,..., m-1)$, $\lambda_1^{(m)}(a + ib) \neq 0$.

Не нарушая общности, можно считать, что $a = 0$, $b = 1$.

Тогда

$\lambda_1(t) = (t + i)^m [a_0 + a_1(t + i) + ...]$, где $a_0 \neq 0$, $m \geq 1$.

Пусть

$$W_1(t) = (t + i)^{m+1}\left[\frac{a_0}{m+1} + \frac{a_1}{m+2}(t + i) + \frac{a_2}{m+3}(t + i)^2 + ...\right].$$

$a_n = \rho_n e^{i\psi n}$, $n = 0,1,2,...$, $t + i = \tilde{r}e^{i\tilde{\varphi}}$, $r + i = re^{i\varphi}$.

Тогда

$$\int_{t_0}^{t} \lambda_1(s)ds = W_1(t) - W_1(t_0),$$

$W_1(t) = u_1(t_1, t_2) + iv_1(t_1, t_2) = u_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) + iv_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$;

$$u_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = \tilde{r}^{m+1}\left\{\frac{\rho_0}{m+1}cos[(m+1)\tilde{\varphi} + \psi_0] + \frac{\rho_1\tilde{r}}{m+2}cos[(m+2)\tilde{\varphi} + \psi_1] + ...\right\}$$

Так как функция $cos[(m+1)\tilde{\varphi} + \psi_0]$ при изменения $\tilde{\varphi}$ от 0 до 2π меняет знак $2(m+1)$ раз, то из $u_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = 0$ следует, что окрестности точки (0, -1) разбивается на $2(m+1)$ криволинейных секторов, внутри которых функция $u_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ сохраняет знак. Границы этих секторов определяются из решения уравнения $u_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = 0$. Секторы, в которых $u_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) < 0$, будем называть отрицательными, а секторы в которых $u_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) > 0$ – положительными.

Пусть имеется отрицательной сектор содержащий отрезок $[t_0,T_0],(t_0<T_0)$ действительной оси, причем справедливо равенство:
$u_1(t_0,0)=u_1(T_0,0)=0.$

В окрестности точки (0,-1) отрицательный сектор для $Re\lambda_1(t)$ имеет уголь $\frac{2\pi}{2m}=\frac{\pi}{m},a$ для $u_1(\tilde{r},\tilde{\varphi})$ имеет угол $\frac{2\pi}{2(m+1)}=\frac{\pi}{m+1}<\frac{\pi}{m}$. Поэтому, если правый образующий некоторого отрицательного сектора для $Re\lambda_1(t)$ проходит через точки $(a_0,0),(t_0<a_0<T_0),$ то левый образующий этого отрицательного сектора проходит через точки $(\tilde{t}_0,0)$, где $(\tilde{t}_0<t_0)$. Далее правый образующий следующего положительного сектора для $Re\lambda_1(t)$ проходит через точки $(\tilde{T}_0,0),$ где $\tilde{T}_0>T_0$, т. е., $\alpha(t)<0$ при $t_0\le 0<a_0;\ \alpha(t)>0$ при $a_0<t\le T_0;\ \alpha(a_0)=0,$ но $\beta(a_0)\neq 0$ (по предположению $\lambda_1(t)$ имеет m кратный нуль в точке (0,-1)).

В этой работе рассмотрим случай, когда $(0,1)\in H_0$ (следовательно, $(0,-1)\in H_0$).

Если линии уровня $u_1(t_1,t_2)=C\le 0$ полностью покрывают рассматриваемого отрицательного сектора, то естественно можно ожидать, что остальные секторы тоже полностью покрывают соответствующими линиями уровней $u_1(t_1,t_2)=C-const.$ Не всегда существует линия уровня, соединяющая точки отрезков $[t_0,a_0),(a_0,T_0]$.

Некоторые достаточные условия существования линия уровня приведены в работе [1].

III. Мы предполагаем, существование линии уровня соединяющей любой точки отрезка $[t_0,a_0)$ с некоторой точкой отрезка $(a_0,T_0]$**.** Кроме этого, если путь интегрирования проходит через положительный сектор, то будем считать, что путь интегрирования проходит частично по линиям уровней этого положительного сектора.

Сначала задачу (1), (2) заменим на следующую эквивалентную задачу:

$$x(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)[B(\tau)x(\tau,\varepsilon)+f(\tau)]d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)g(\tau,x(\tau,\varepsilon))d\tau, \quad (3)$$

где $E(t,\tau,\varepsilon)=exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s))ds$.

Как в работе [2] рекуррентно определим следующие функции:

$$x^{(0)}(t,\varepsilon)\equiv 0,\ x^{(1)}(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau;$$

$$x^{(k+1)}(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)x^{(k)}(\tau,\varepsilon)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)[g(\tau,X^{(k)}(\tau,\varepsilon))-g(\tau,X^{(k-1)}(\tau,\varepsilon))]d\tau, \quad (4)$$

$$X^{(k)}(\tau,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{k}x^{(m)}(t,\varepsilon)\ (k=1,2,...)$$

Очевидно, что $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ определяется из (3) как обычное первое приближение; $x^{(k)}(t,\varepsilon)$ $(k=2,3,...)$ не является обычным последовательным приближением. Тогда решение задачи (1), (2) представимо в виде:

$$x(t,\varepsilon)=x^{(1)}(t,\varepsilon)+x^{(2)}(t,\varepsilon)+...+x^{(k)}(t,\varepsilon)+... \qquad (5)$$

Теперь задача заключается в том, как построить мажорантный сходящийся ряд для функционального ряда (5) при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0-const;\ t_0\in H_0$.

Заметим, что $x^{(n)}(t,\varepsilon)\in\Phi(H_0)$, где $H_0=\{(t_1,t_2):u_k(t_1,t_2)\le 0;\ k=1,2\}$.

Пусть $\delta(\varepsilon)=\varepsilon\ ln\varepsilon$, при $0<\varepsilon\le e^{-1}$ и $\delta(0)=0;\ (\delta(\varepsilon)=-\varepsilon^{\frac{1}{m+1}});$

δ_0-постоянное, причем $0<\delta_0<<1;\ r_0=\sqrt{1+t_0^2};\ R_0=\sqrt{1+T_0^2}$

Отрезок прямой соединяющей точки (a,b) с точкой (c,d) обозначим через $p=p((a,b),(c,d))$, отрезок линия уровня соединяющий точки $(R_1,\dot\varphi)$ с точкой $(R_2,\ddot\varphi)$ через $k=k(R_1,\dot\varphi),(R_2,\ddot\varphi)$, отрезок дуги с центром в точке (0,-1) соединяющий точки $(R,\dot\varphi)$ с точкой $(R,\ddot\varphi)$ через $d=d((R,\dot\varphi),(R,\ddot\varphi))$.

Пусть

$u_1(r_0,\varphi_{01})=0,\ u_1(R_0,\dot\varphi_{01})=0,$ причем $u_1(\tilde r,\tilde\varphi)<0$ при $\tilde\varphi\in(\varphi_{01},\dot\varphi_{01})$.

На линии уровня $u_1(\tilde r,\tilde\varphi)=\delta(\varepsilon)$ возьмем точки $(\tilde r,\tilde\varphi_1),(\tilde r,\dot{\tilde\varphi}_1)$ лежашие, соответственно, в левой и правой ветвях; аналогично, на линии уровня

$u_1(\tilde r,\tilde\varphi)=0$ точки $(\tilde r,\tilde\varphi_{01}),(\tilde r,\dot{\tilde\varphi}_{01})$, на линии уровня

$u_1(\tilde r,\tilde\varphi)=-\delta_0$ точки $(\tilde r,\tilde\varphi_2),(\tilde r,\dot{\tilde\varphi}_2)$, на линии уровня

$u_1(\tilde r,\tilde\varphi)=-\delta(\varepsilon)$ точки $(r_0,\varphi_1),(\tilde r,\varphi_2),(\delta_0,\varphi_3),(\tilde r,\dot\varphi_2),(\delta_0,\dot\varphi_3)$

$k_1=k((r_0,\varphi_1),(\tilde r,\varphi_2)),\ k_2=k((r_0,\varphi_1),(\delta_0,\varphi_3)),\ \dot k_2=k((\tilde r,\dot\varphi_2),(\delta_0,\dot\varphi_3)),$

$d_1=d((r_0,\varphi_{01}),(r_0,\varphi_1)),\ d_2=d((\tilde r,\varphi_2),(\tilde r,\tilde\varphi)),\ d_3=d((\tilde r,\dot\varphi_2),(\tilde r,\tilde\varphi)),$

$p_1=p((\delta_0,\varphi_3),(0,0)),\ \dot p_1=p((\delta_0,\dot\varphi_3),(0,0)),\ p_2=p((0,0),(\tilde r,\tilde\varphi)),$

Для $x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ путь интегрирования l_1 будем выбирать следующим образом:

если $u_1(\tilde r,\tilde\varphi)\le\delta(\varepsilon);$ или $u_1(\tilde r,\tilde\varphi)\le 0$ и $\tilde r\le|\delta(\varepsilon)|$, то $l_1=d_1\cup k_2\cup p_1\cup p_2$;

если $u_1(\tilde r,\tilde\varphi)\le 0$ и $|\delta(\varepsilon)|\le\tilde r\le\delta_0,\ \tilde\varphi\in[\tilde\varphi_{01},\tilde\varphi_1]$;

или $u_1(\tilde r,\tilde\varphi)\le 0$ и $\tilde r\ge\delta_0,\tilde\varphi\in[\tilde\varphi_{01},\tilde\varphi_2]$, то $l_1=d_1\cup k_1\cup d_2$;

если $u_1(\tilde r,\tilde\varphi)\le 0$ и $|\delta(\varepsilon)|\le\tilde r\le\delta_0,\ \tilde\varphi\in[\dot{\tilde\varphi}_{01},\dot{\tilde\varphi}_1]$;

или $u_1(\tilde r,\tilde\varphi)\le 0$ и $\tilde r\ge\delta_0,\tilde\varphi\in[\dot{\tilde\varphi}_{01},\dot{\tilde\varphi}_2]$, то $l_1=d_1\cup k_2\cup p_1\cup\dot p_1\cup\dot k_2\cup d_3$.

Для $x_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ путь интегрирования $\tilde l_1$ симметрично для l_1 относительно действительной оси.

Справедлива следующие оценки:

$$\left|x_1^{(1)}(t,\varepsilon)\right|=\left|x_1^{(1)}(\tilde r,\tilde\varphi,\varepsilon)\right|=O(\omega(\tilde r,\tilde\varphi));$$

$$\left|x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right|=\left|x_2^{(1)}(\tilde r,\tilde\varphi,\varepsilon)\right|=O(\tilde\omega(\tilde r,\tilde\varphi)),$$

где

$$\omega(\tilde r,\tilde\varphi)=\begin{cases}\varepsilon\ \ при\ \ (\tilde r,\tilde\varphi)\in H_1,\\ \varepsilon^{\frac{1}{m+1}}\ \ при\ \ (\tilde r,\tilde\varphi)\in(H_0\setminus H_1),\end{cases}$$

$H_1 = \{(\tilde{r},\tilde{\varphi}) : u_k(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le -\delta_0;$ или $u_k(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le \delta(\varepsilon)$ и $\tilde{r} \ge \delta_0, \tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}_2]$ или $u_k(\tilde{r},\tilde{\varphi}) \le 0$ и $\tilde{r} \ge \delta_0, \tilde{\varphi} \in [\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}_2], k = 1,2\}$;

$\tilde{\omega}(\tilde{r},\tilde{\varphi})$ – симметричная функция к $\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi})$ относительно действительной оси т.е., если $(\tilde{r},\tilde{\varphi}),(\tilde{r}^*,\tilde{\varphi}^*)$ симметричные точки относительно действительной оси, то $\omega(\tilde{r},\tilde{\varphi}) = \tilde{\omega}(\tilde{r}^*,\tilde{\varphi}^*)$.

Пусть $\{C_1\}$ $(u_1(t_1,t_2) = C_1)$ соединяет точки $(t_{01},0)$, $(T_1,0)$, $a\{C_2\}$ $(u_1(t_1,t_2) = C_2)$ точки $(t_{02},0)$, $(T_2,0)$, $(t_0 < t_{01} < t_{02} < a_0,\ a_0 < T_2 < T_1 < T_0)$.

Рассмотрим полосу P ограниченную линиями уровней $\{C_1\}$ и $\{C_2\}$ отрезками действительной оси $[t_{01},t_{02}],[T_2,T_1]$.

На полосе P рассмотрим уравнение

$$u_1(t_1,t_2) = at_1 + b, \qquad (4)$$

где $a = \dfrac{C_2 - C_1}{T_2 - t_{01}}$, $b = \dfrac{C_1T_2 - C_2t_{01}}{T_2 - t_{01}}$.

Лемма4. Если линии уровня $u_1(t_1,t_2) = C$ $(C_2 \le C \le C_1)$ полностью покрывают полосу P и произвольная точка (t_1,t_2) полосы P принадлежит единственной линии уровня $\{C\}$, $\mathrm{Im}\,\lambda_1(t) \ne 0$, то уравнение **(4)** в полосе P определяет однозначную непрерывно дифференцируемую функцию $t_2 = \varphi(t_1)$ с областью существования $(t_{01} \le t_1 \le T_2)$ кривая (K_0), определяемая этой функцией, соединяет точки $(t_{01},0),(T_2,0)$, причем $u_1(t_1,\varphi(t_1))$ убывает на $[t_{01},T_2]$.

Доказательство. Пусть $\psi(t_1) = at_1 + b$.

Так как $\psi(t_1)$ монотонно убывает любом отрезке и $\psi(t_{01}) = C_1$, $\psi(T_2) = C_2 < C_1$, то при $(t_{01} \le t_1 \le T_2)$ справедливо $C_1 \ge \psi(t_1) \ge C_2$.

Рассмотрим линии уровня $u_1(t_1,t_2) = C$ $(C_2 \le C \le C_1)$. Линии уровня $\{C\} \subset \mathrm{P}$. По заданному значению **C** однозначно определяется значение $t_1 = t_1^*$ из равенства

$$\psi(t_1^*) = C\left(t_1^* = \frac{C - b}{a}\right), \text{ причем } t_1^* \in [t_{01},T_2].$$

Теперь через точку $(t_1^*,0)$ проведем прямую параллельную на оси ординат. Эта прямая с линией уровня $\{C\}$ пересекается в единственной точке (t_1^*,t_2^*). Таким образом, каждому значению $t_1 = t_1^* \in [t_{01},T_2]$ соответствует единственная точка $(t_1^*,t_2^*) \in \{C\}$ такой, что

$u_1(t_1^*,t_2^*) = C = \psi(t_1^*) = at_1^* + b$,

причем $u_1(t_{01},0) = C_1 = \psi(t_{01}) = C_1$; $u_1(T_2,0) = C_2 = \psi(T_2) = C_2$.

Существование кривой (K_0), соединяющей точки $(t_{02},0),(T_2,0)$, целиком принадлежащей на полосе P и имеющей уравнение (4) доказано. Так как $u_{1t_2}(t_1,t_2) = -Jm\lambda_1(t_1,t_2) \ne 0$, то из (4) определяется однозначная непрерывно-дифференцируемая функция $t_2 = \varphi(t_1), \left(\varphi(t_1) = \dfrac{\mathrm{Re}\,\lambda_1(t_1,t_2) - a}{Jm\lambda_1(t_1,t_2)}\right)$:

$u_1(t_1,\varphi(t_1)) \equiv at_1 + b$, т.е. $u_1(t_1,\varphi(t_1))$ – убывает на $[t_{01},T_2]$. Лемма полностью доказана.

Лемма 4 своеобразным методом доказана в работе [1]. Здесь мы привели другое доказательство.

Заметим что из равенства

$$u_1(t_1^*,0)=2\delta(\varepsilon)\ (u_1(t_1^*,0)=\delta(\varepsilon)) \tag{5}$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^*=t_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=t_0+\gamma(\varepsilon)\ (t_1^*=t_0+\gamma_1(\varepsilon))$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0\ (\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_1(\varepsilon)=0)$, где $\gamma(\varepsilon)\ge 0\ (\gamma_1(\varepsilon)\ge 0)-$ непрерывная функция от ε при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$. Аналогично из равенства (5) в некоторой окрестности точки $(t_1^*=T_0,\ \varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}(\varepsilon)\ (t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}_1(\varepsilon))$, где $\tilde{\gamma}(\varepsilon)\ge 0\ (\tilde{\gamma}_1(\varepsilon)\ge 0)-$непрерывная функция от ε при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0\ (\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_1(\varepsilon)=0)$.

Для оценки функций $\left\{x_k^{(n)}(t,\varepsilon)\right\}(n=2,...;k=1,2)$ будем использовать основную лемму.

Пусть линия уровня (C_1) соединяет точки $(t_0+\gamma_1(\varepsilon),0),(T_0-\tilde{\gamma}_1(\varepsilon),0)$ линия уровня (C_2) соединяет точки $(t_0+\gamma(\varepsilon),0),(T_0-\tilde{\gamma}(\varepsilon),0)$

Возьмем кривую (K_0^*) симметричную к (K_0). Область ограниченная (K_0) и (K_0^*) обозначим через $K_\varepsilon\subset H_0$. $\tilde{K}_\varepsilon=\Delta\cup K_\varepsilon$, где $\Delta=\left\{(t_1,t_2):t_0\le t_1\le t_0+\gamma_1(\varepsilon);\ t_2=0\right\}$.

Будем оценить $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)$ $(n=2,3,...)$ для $\forall t\in\Delta\cup K_\varepsilon$. Для всех функций $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)$ $(n=2,3,...)$ путь интегрирования l, будет неизменным. Здесь также путь интегрирования l определяется в зависимости от того, какому множеству принадлежит точка (t_1,t_2).

Если $(t_1,t_2)\in\Delta\ (t=t_1,t_2=0)$, то $l=p_s=p((t_0,0),(t_1,0)$ где $t_0\le t_1\le t_0+\gamma_1(\varepsilon))$.

Пусть $(t_1,t_2)\in K_\varepsilon$. Тогда $l=p_s\cup d_4\cup p_6$, где $d_4=d((t_0+\gamma_1(\varepsilon),0),(t_1^*,t_2^*))$ отрезок кривой (K_0), $p_6=p((t_1^*,t_2^*),(t_1,t_2)),(t_1^*,t_2^*)=(\tilde{r}^*,\tilde{\varphi}^*)-$точка пересечения радиус-вектора, проходящего через точку $(t_1,t_2)=(\tilde{r},\tilde{\varphi})$, с кривой (K_0). Для $x_2^{(n)}(t,\varepsilon)\ (n\ge 2)$ путь интегрирования $\tilde{l}$ симметричен для l относительно действительной оси.

Для $(t_1,t_2)\in\Delta\cup K_\varepsilon$ справедлива оценка

$$\left|x_k^{(n)}(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}\left(\frac{c}{|\ln\varepsilon|}\right)^{n-1},\text{при }\beta\ge m+1, \tag{6}$$

где $k=1,2.,\ n=2,3,...,;\ 0<C-const,$ не зависит ни от n, ни от ε.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{(n)}(t,\varepsilon)$ на $\Delta\cup K_\varepsilon$ равномерно сходится к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи (1),(2).

Справедлива следующая

Теорема: Пусть выполнены условия I, II, III. Тогда решение задачи (1), (2) на $\tilde{K}_\varepsilon$ существует, единственно и справедлива оценка:

(10) при $\beta\ge 1$ на $\tilde{H}_c$ (смотри статью № 2);

(11) при $\beta\ge m+1$ на $\tilde{H}_\varepsilon$ (смотри статью № 2);

(12) при $\beta\ge m+1$ на $\tilde{K}_\varepsilon$ (смотри статью № 2).

Литература

1. Алыбаев К.С. Метод линии уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дис. …докт. физ.-мат.наук: 01.01.02.- Жалал-Абад, 2001, 33-376.
2. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.-Ош, 1980, 1-260.

УДК 625.7

Кудуев А.Ж., Абдыкалык кызы Ж, ОшГУ
Шумилов Б.Ш., ТомГУ, г. Томск

Кубические мультивейвлеты, ортогональные многочленам, и трассирование автомобильных дорог

Макалада суперкомпакттык таянычка ээ болгон жаңы типтеги мультивейвлеттерди колдонгон эрмиттик кубдук сплайндарды жайгаштыруунун белгисиз методу изилденген. Автомобилдик жолдор үчүн вариациондук моделдер маселелерин колдонуу негизделген. Сандык эксперименттердин жыйынтыктары чагылдырылган.

В статье исследован неявный метод разложения эрмитовых кубических сплайнов, использующий новый тип мультивейвлетов с суперкомпактными носителями. Обосновано их применение к задаче вариационного моделирования автомобильных дорог. Представлены результаты численных экспериментов.

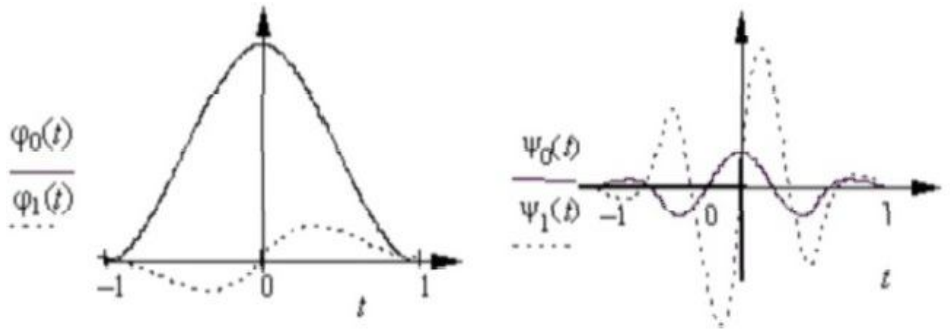
In this paper the implicit method of expanding the Hermitian cubic splines, using a new type of multiwavelets with super compact supports, is investigated. Justified their application to the problem of roads variational modeling. Results of numerical experiments are presented.

1. Введение. Мультивейвлетами называются короткие или быстро затухающие волновые функции (всплески), множество сжатий и смещений которых в совокупности порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1–3]. В частности, в [3] были найдены мультивейвлеты третьей степени, полуортогональные относительно скалярного произведения с производными. В [4] рассматривалось их применение к задаче вариационного моделирования автомобильных дорог. Данные мультивейвлеты имеют суперкомпактный носитель [0, 2], который меньше носителя [0, 3] обычных полуортогональных мультивейвлетов. Недостаток состоит в том, что у них равны нулю только два первых момента. Это ухудшает сжатие числовых данных по сравнению с обычными вейвлетами и мультивейвлетами. В данной работе, используя подход [5], мы построим базисные мультивейвлеты третьей степени с суперкомпактными носителями, у которых равны нулю четыре первых момента, что эквивалентно ортогональности любым многочленам третьей степени. Кроме того, мы рассмотрим их применение для вейвлет-трассирования автомобильных дорог.

2. Построение системы базисных сплайн-мультивейлетов. Исходным для построения вейвлет-преобразования является наличие набора вложенных пространств $...V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1}....$ В данном случае пространство V_L является пространством эрмитовых кубических сплайнов на отрезке $[a,b]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^L : x_i = a + (b-a)i/2^L, i = 0,1,\ldots,2^L, L \geq 0$, и базисными функциями $N_{i,k}^L(x) = \varphi_k(\upsilon - i), k = 0,1 \forall i,$ где $\upsilon = 2^L(x-a)/(b-a),$ с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами двух масштабирующих функций вида [6] (рис. 1.а.):

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} (1+t)^2(1-2t), & -1 \leq t \leq 0, \\ (1-t)^2(1+2t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \notin [-1,1]; \end{cases}$$

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}(1+t)^2 2\mathrm{t}, & -1\le t\le 0,\\ (1-t)^2 2\mathrm{t}, & 0\le t\le 1,\\ 0, & t\notin[-1,1].\end{cases}$$



а) б)

Рис. 1. а) Графики масштабирующих функций $\varphi_0(t),\varphi_1(t)$; б) вид симметричного и несимметричного «материнских» вейвлетов $\psi_0(t),\psi_1(t)$.

Поскольку сетка $\Delta^{L-1}, L\ge 1,$ получается из сетки Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то базисными функциями для V_{L-1} будут функции $N_{i,k}^{L-1}(x),$ с носителями в два раза большими по ширине и центрами в четных целых числах. В соответствии с масштабными соотношениями [2]

$$\begin{aligned}\varphi_0(t)&=\varphi_0(2t+1)+\frac{1}{2}\big(\varphi_0(2t+2)+\varphi_0(2t)\big)+\frac{3}{4}\big(\varphi_1(2t+2)-\varphi_1(2t)\big),\\ \varphi_1(t)&=\frac{1}{2}\varphi_1(2t+1)-\frac{1}{8}\big(\varphi_1(2t+2)+\varphi_1(2t)+\varphi_0(2t+2)-\varphi_0(2t)\big),\end{aligned}\qquad(1)$$

каждую широкую базисную внутри отрезка аппроксимации можно построить из трех, а по краям отрезка из двух, пар узких базисных функций. Обратное, очевидно, возможно только приближенно. Остается некоторое пространство W_{L-1}, содержащее уточняющие подробности, которые позволяют восстановить V_L из $V_{L-1}: V_L=V_{L-1}+W_{L-1}.$ Следующим этапом является определение вейвлетов как базиса $W_{L-1}.$ В классической теории полуортогональных вейвлетов базисные функции W_{L-1} ортогональны всем базисным сплайнам на прореженной сетке Δ^{L-1} по отношению к некоторому скалярному произведению. Это означает, что пространство V_L представляет прямую сумму V_{L-1} и $W_{L-1}: V_L=V_{L-1}\oplus W_{L-1}.$

В отличие от этого мы, при условии обнуления сплайна в конечных точках отрезка, будем искать базисные функции полученного пространства W_L^0 как линейные комбинации базисных эрмитовых сплайнов на сетке Δ^{L+1}, удовлетворяющие условиям ортогональности всем многочленам четвертого порядка, то есть

$$\int_a^b M_{i,k}^L(x)x^m dx=0,\quad k=0,1\quad \forall i\,(m=0,1,2,3).\qquad(2)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$\grave{I}_{i,k}^{L}(x)=\psi_k(\upsilon-i), i=1,2,\dots 2^L-1(k=0,1),\ \grave{I}_{0,1}^{L}(x)=w_1(\upsilon),\ \grave{I}_{2^L,1}^{L}(x)=-w_1(2^L-\upsilon),$

где $\upsilon=2^L(x-a)/(b-a),$

$$\psi_0(t) = -2\varphi_0(2t+2) + 4\varphi_0(2t+1) - 2\varphi_0(2t) - 15\varphi_1(2t+2) + 15\varphi_1(2t),$$
$$\psi_1(t) = 7\varphi_0(2t+2) - 7\varphi_0(2t) + 39\varphi_1(2t+2) + 132\varphi_1(2t+1) + 39\varphi_1(2t), \quad (3)$$
$$w_1(t) = \varphi_0(2t+1) - 4\varphi_0(2t) + 36\varphi_1(2t+2) + 63\varphi_1(2t+1) + 24\varphi_1(2t).$$

Тогда система функций $\{M_{0,1}^L(x), M_{i,k}^L(x), i = 1, 2, ..., 2^L - 1\,(k = 0, 1), M_{2^L,1}^L(x)\}$, удовлетворяет условиям (2) и образует базис с суперкомпактными носителями в пространстве W_L^0, $L \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия ортогональности (2) определяют однородную систему четырех уравнений относительно коэффициентов вейвлета $W_{i,k}^L(x)$. Если предположить, что носитель вейвлета равен трем шагам сетки Δ^{L+1}, то однородная система становится квадратной и, будучи невырожденной, может иметь только тривиальное решение. Поэтому будем далее считать, что носитель вейвлета равен четырем шагам сетки Δ^{L+1}, то есть вейвлет построен из шести базисных сплайнов. Разложение $M_{i,k}^L(x)$ подставим в (2) и вычислим все необходимые интегралы, учитывая при этом, что по краям отрезка $[a,b]$ остается по половинке от выступающих за края отрезка функций φ_1. Полученные однородные системы решаем нетривиальным образом, выбирая наиболее подходящие симметричные и антисимметричные решения.

Разберем более подробно случай вейвлетов, полностью лежащих внутри отрезка. После пересчета двух соседних шагов сетки Δ^L к сетке с единичным шагом $[-1, 1]$ имеем: $M(t) = \sum_{k=-1}^{1} \left(\alpha_k \varphi_0(2t-k) + \beta_k \varphi_1(2t-k)\right)$.

Вычисление дают

$$\int_{-1}^{1} \varphi_0(2t-k)dt = \frac{1}{2}, \int_{-1}^{1} \varphi_1(2t-k)dt = 0, \int_{-1}^{1} t\varphi_0(2t-k)dt = \frac{k}{4}, \int_{-1}^{1} t\varphi_1(2t-k)dt = \frac{1}{60},$$
$$\int_{-1}^{1} t^2\varphi_1(2t-k)dt = \frac{k}{60}, \int_{-1}^{1} t^3\varphi_0(2t-k)dt = \frac{7k}{80}, k = -1, 0, 1; \int_{-1}^{1} t^2\varphi_0(2t-k)dt = \frac{17}{120},$$
$$\int_{-1}^{1} t^3\varphi_1(2t-k)dt = \frac{23}{1680}, k = -1, 1; \int_{-1}^{1} t^2\varphi_0(2t)dt = \frac{1}{60}, \int_{-1}^{1} t^3\varphi_1(2t)dt = \frac{1}{840}.$$

Ранг полученной в результате матрицы равен 4. Поэтому однородная система четырех уравнений с шестью неизвестными имеет два линейно независимых частных решения, одно из которых (симметричное) имеет равную нулю производную в точке $t = 0$, тогда как другое (антисимметричное) обращается там в нуль. Аналогично разбираются случаи граничных вейвлетов с нулевыми значениями в точках $t = \pm 1$, причем они антисимметричны относительно начало координат. Результаты представлены в условиях теоремы и, частично, на графиках (рис. 1, б).

Данные вейвлеты линейно независимы, так как представляют собой множество сдвигов ненулевых функций с компактными носителями. Вдобавок, их количество составляет как раз разность между размерностями пространств V_{L+1}^0 и $V_L^0 : 2 \cdot 2^{L+1} - 2 \cdot 2^L = 2^{L+1}$. Носители равны носителям базисных сплайнов на сетке Δ^L. Теорема 1 доказана.

На нулевом уровне разрешения вейвлетов, ортогональных кубическим многочленам и обращающихся в нуль в точках 0, 1, не существует.

3. Построение и обращение блока фильтров. На любой сетке $\Delta^L, L \geq 1$, кубический эрмитов сплайн с нулевыми значениями при $x = a, b$ может быть представлен как

$$S^L(x) = \sum_{i=1}^{2^L-1} C_i^{L,0} N_{i,0}^L(x) + \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,1} N_{i,1}^L(x), \; a \leq x \leq b, \quad (4)$$

где коэффициенты $C_i^{L,k}, k = 0, 1,$ являются значениями и, соответственно, производными аппроксимируемой функции в узлах.

Если записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки, $\varphi^L = [N_{0,1}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, \dots, N_{2^L,1}^L],$ и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора, $C^L = [C_0^{L,1}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, \dots, C_{2^L}^{L,1}],$ то уравнение (4) переписывается как $S^L(x) = \varphi^L(x) C^L.$ Аналогично, запишем базисные вейвлет-функции на уровне разрешения L в виде матрицы-строки, $\psi^L = [M_{0,1}^L, M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, \dots, M_{2^L,1}^L].$ Соответствующие вейвлет-коэффициенты будем собирать в вектор, $D^L = [D_0^{L,1}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \dots, D_{2^L}^{L,1}]$. Тогда с использованием обозначений для блочных матриц процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [7]:

$$C^L = [P^L \mid Q^L] \left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}} \right]. \qquad (5)$$

Ниже представлен пример матрицы $[P^L \mid Q^L],$ соответствующий $L = 3:$ $[P^3 \mid Q^3] =$

$$= \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{1}{2} & & & & & & & & 36 & & & & & & & \\
\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & & & & & & 1 & -2 & 7 & & & & & \\
-\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & & & & & & 63 & -15 & 39 & & & & & \\
 & 1 & 0 & & & & & & -4 & 4 & 0 & & & & & \\
 & 0 & \frac{1}{2} & & & & & & 24 & 0 & 132 & & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & & & & & -2 & -7 & -2 & 7 & & & \\
 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & & & & & 15 & 39 & -15 & 39 & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & & & & & 4 & 0 & & & \\
 & & & 0 & \frac{1}{2} & & & & & & & 0 & 132 & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & & & & & -2 & -7 & -2 & 7 & \\
 & & & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & & & & & 15 & 39 & -15 & 39 & \\
 & & & & & 1 & 0 & & & & & & & 4 & 0 & 4 \\
 & & & & & 0 & \frac{1}{2} & & & & & & & 0 & 132 & 24 \\
 & & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & & & & & & -2 & -7 & -1 \\
 & & & & & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & & & & & & 15 & 39 & 63 \\
 & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & 36
\end{array} \right)$$

Здесь и далее пустые позиции представляют собой нулевые элементы. Блоки матрицы P^3 составлены из коэффициентов масштабных соотношений для эрмитовых сплайнов 3-ей степени (1), тогда как блоки матрицы Q^3 – из коэффициентов соотношений (3). Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (5).

4. Сглаживание с оптимизацией пространственных кривых. Вейвлет-преобразование позволяет разложить данную функцию на различные частотные составляющие, которые могут быть использованы для обнаружения и удаления высокочастотного шума. Сначала мы должны определить критерий оптимальности. Например, в [4] обсуждался вариационный критерий улучшения плоских и пространственных сплайн-кривых и был предложен новый критерий оптимальности.

*Критерий***.** Кривая является оптимальной, если

1) ее графики кривизны и кручения являются непрерывными, и

2) они имеют как можно меньше локальных экстремумов.

В соответствии с данным критерием требуется определить и удалить узлы с относительно низкой оптимальностью. Предлагаемый алгоритм [4] включает в себя два различных разложения исходной кривой, используя сначала подмножество всех нечетных внутренних узлов, чтобы

построить подпространство V_1^{L-1} с целью удалить шум, связанный со всеми четными внутренними узлами. Затем все четные внутренние узлы выбираются так, чтобы построить подпространство V_2^{L-1} с целью удалить шум, связанный с нечетными внутренними узлами. Наконец, мы берем среднее полученных двух кривых в качестве конечного результата. Алгоритм обобщается в виде следующих шагов.

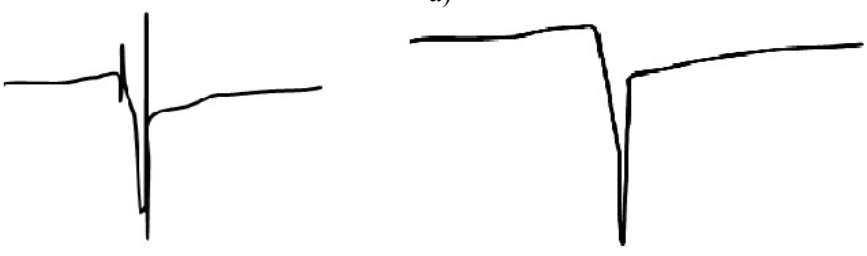
1) Удаление всех четных внутренних узлов, чтобы получить подпространство V_1^{L-1}. 2) Вейвлет-разложение кривой в V_1^{L-1}. 3) Удаление все нечетных внутренних узлов, чтобы получить подпространство V_2^{L-1}. 4) Снова разложение исходной кривой, теперь в V_2^{L-1}. 5) Если требуется сохранить геометрические детали более подробно, полученные детализирующие функции могут быть разложены далее. При этом проекция в пространстве W_1^{L-1} разлагается с использованием подпространства V_2^{L-1}. Тогда как проекция в пространстве W_2^{L-1} разлагается с помощью V_1^{L-1}. 6) Восстановление кривых $g_i^L(u)$, синтезируя масштабирующую часть $g_i^{L-1}(u)$. 7) Окончательно, результатом оптимизации является среднее арифметическое двух кривых, построенных на шаге 6, $g_i^L(u) = \frac{g_1^L(u) + g_2^L(u)}{2}$.

Рис. 2 показывает плоскую незамкнутую кривую – участок плана трассы автомобильной дороги со значениями координат пикетов, представленными в таблице. Для оптимизации использовались построенные нами мультивейвлеты, ортогональные всем многочленам третьей степени. По сравнению с исходной кривой график кривизны кривой содержит гораздо меньше монотонных участков. Другими словами, оптимизированная кривая становится лучше.

Значения координат пакетов участка плана трассы автомобильной дороги

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	240	186	8	117	77	15	2	48	22	82	4	29	201	95
2	225	170	9	97	67	16	4	34	23	96	8	30	218	119
3	209	152	10	76	60	17	7	28	24	118	16	31	233	146
4	190	134	11	54	57	18	21	15	25	136	29	32	250	177
5	173	118	12	36	57	19	36	6	26	155	42			
6	155	102	13	17	57	20	50	3	27	170	58			
7	135	89	14	8	54	21	64	2	28	186	75			

а)



б) в)

Рис. 2. Результат оптимизации плана трассы автомобильной дороги: а) исходная кривая (сплошная линия) с 32 контрольными точками; б), в) графики кривизны исходной кривой и кривой после оптимизации.

Заключение: Представленная схема построения эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов, ортогональных многочленам, может быть распространена и на сплайны более высокой степени. Это предоставляет широкие возможности для применения получения результатов для оптимизации трасс автомобильных дорог.

Литература

1. Strela V. Multiwavelets: Theory and Applications. - Massachusetts Institute of Technology, 1996. - 99 p. / Submitted to the Department of Mathematics in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics.
2. Heil C., Strang G., Strela V. Approximation by translate of refinable functions // Numer. Math., 1996, v. 73, p. 75-94.
3. Jia R. -Q., Liu S.-T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics, 2006. v. 25. p. 23-39.
4. Кудуев А.Ж., Лаходынова Н.В., Шумилов Б.М., Эшаров Э.А. Вариационное трассирование автомобильных дорог с помощью нового типа эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета, №3(32), 2011, с. 176-183.
5. Koro K., Ade K. Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v. 25, p. 149-164.
6. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.
7. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д., Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с.

УДК 514.75

Матиева Г., Артыкова Ж.А., ОшГУ

Свойства отображения трехмерной поверхности в трехмерную плоскость в евклидовом пространстве

E_7 евклиддик мейкиндигинде графиктин жардамында үч ченемдүү бетти үч ченемдүү тегиздикке чагылтуу каралган. Чагылтуунун графигинин минималдуулугунун зарыл жана жетиштүүлүк шарты далилденген.

Рассмотрено отображение трехмерной поверхности в трехмерную плоскость в евклидовом пространстве E_7 с помощью графика. Доказано необходимое и достаточное условие минимальности графика отображения.

It is considered a differentially mapping f 3-dimensional surface on 3-dinensional plane in Euclidean space/ The necessary and sufficient condition of minimality of graph of the mapping f.

В евклидовом пространстве E_7 рассмотрим две вполне ортогональные евклидовы пространства $E_4, \overline{E}_3 : E_4 \cap \overline{E}_3 = \{O\}$. Пусть V_3 - трехмерная гладкая поверхность в E_4, $\Omega \subset V_3$, $\overline{\Omega}$ - область в $\overline{E}_3$. Рассмотрим отображения $f : \Omega \to \overline{\Omega}$ определяемое следующим образом: когда точка $X_1 \in \Omega$ смещается в области Ω точка X, определяемая радиус-вектором

$\vec{X} = \vec{OX}_1 + \vec{OX}_2$ (где $X_2 \in \overline{\Omega}$) описывает некоторую поверхность V_3^* в E_7. Её называют графиком отображения $f : \Omega \to \overline{\Omega}$. Индексы в дальнейшем принимают значения:

$$i, j, k, l, s, t = 1,2,3; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 4,5,6,7.$$

Отнесем области Ω, $\overline{\Omega}$ и график V_3^* отображения f соответственно к реперам:

$$\Re_{X_1} = \{X_1, \vec{e}_i, \vec{n}\},\ \Re_{X_2} = \{X_2, \vec{e}_{4+i}\},\ \Re_X = \{X, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_\alpha\},$$

где $\vec{e}_i \in T_3(X_1)$ - касательная плоскость к поверхности V_3 в точке X_1, $\vec{e}_4 = \vec{n}$ - орт нормали к поверхности V_3 в точке X_1, $\vec{e}_{4+i} = f(\vec{e}_i)$,

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{4+i} \in T_3(X), \tag{1}$$

$T_3^*(X)$ - касательная плоскость графика V_3^* в точке X, $\vec{\varepsilon}_{4+i} = \vec{e}_i - \gamma_{is}\overline{\gamma}^{sk}\vec{e}_{4+k} \in N_4^*(X)$, $N_4^*(X)$ - ортогональное дополнение к $T_3^*(X)$ в E_7. Деривационные формулы этих реперов имеют вид:

$\Re_{X_1}$: $d\vec{X}_1 = \omega^i \vec{e}_i$,
$d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^4 \vec{e}_4$,
$d\vec{e}_4 = d\vec{n} = \omega_4^j \vec{e}_j$.

$\Re_{X_2}$: $d\vec{X}_2 = \overline{\omega}^i \vec{e}_{4+i}$, $(\overline{\omega_i} = \omega_i)$
$d\vec{e}_{4+i} = \overline{\omega}_{4+i}^{4+j} \vec{e}_{4+j}$.

$\Re_X$: $d\vec{X} = \theta^i \vec{\varepsilon}_i$, $(\theta^i = \omega^i)$,
$d\vec{n} = d\vec{e}_4 = \theta_4^j \vec{e}_j + \theta_4^{4+j} \vec{e}_{4+j}$,
$d\vec{\varepsilon}_i = \theta_i^j \vec{e}_j + \theta_i^4 \vec{e}_4 + \theta_i^{4+j} \vec{e}_{4+j}$,
$d\vec{\varepsilon}_{4+i} = \theta_{4+i}^j \vec{e}_j + \theta_{4+i}^4 \vec{e}_4 + \theta_{4+i}^{4+j} \vec{e}_{4+j}$.

Метрических тензоров обозначим соответственно в следующем виде:

$$\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j;\ \overline{\gamma}_{\bar{i}\bar{j}} = \vec{e}_{4+\bar{i}} \vec{e}_{4+\bar{j}};\ g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \vec{\varepsilon}_j = \gamma_{ij} + \gamma_{ij};$$
$$\overline{g}_{ij} = \vec{\varepsilon}_{4+i} \vec{\varepsilon}_{4+j} = \gamma_{ij} + \gamma_{is}\gamma_{jt}\overline{\gamma}^{st}.$$

Дифференцируя тождество (1), имеем:

$$\omega_i^k = \theta_i^k + \theta_i^{4+k},\ \omega_i^4 = \theta_i^4;\ \overline{\omega}_i^k = \theta_i^k - \gamma_{tl}\gamma^{lk}\theta_i^{4+t} \tag{2}$$

Поверхности V_3 и V_3^* в соответствующих реперах задаются следующими уравнениями Пфаффа: $\omega^4 = 0$, $\omega^\alpha = 0$.

Дифференцируя этих равенств внешним образом и применяя лемму Картана, получим [1]:

$$\omega_i^4 = \boldsymbol{b}_{ij}^4\omega^j,\ \theta_i^4 = \boldsymbol{t}_{ij}^4\theta^j = \boldsymbol{b}_{ij}^4\theta^j,\ \theta_i^{4+k} = t_{ij}^{4+k}\theta^j. \tag{3}$$

Пусть задана сеть $\Sigma_3 \subset \Omega$, $\boldsymbol{f}(\Sigma_3) = \overline{\Sigma}_3 \subset \overline{\Omega}$. На графике V_3^* получаем сеть Σ_3^*. Направим векторы $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ репера $\Re_{X_1}$ по касательным к линиям сети Σ_3 в точке $\boldsymbol{X}_1$. Тогда векторы $\vec{e}_{4+i}$ и $\vec{\varepsilon}_i$ реперов $\Re_{X_2}$ и $\Re_X$ будут касательными к линиям соответствующих сетей $\overline{\Sigma}_3$ и Σ_3^*. В таком случае формы ω_i^k, $\overline{\omega}_i^k$, θ_i^k $(\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{k})$ главные [2]:

$$\omega_i^k = \boldsymbol{a}_{ij}^k\omega^j,\ \ \overline{\omega}_i^k = \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}^k\omega^j,\ \theta_i^k = \boldsymbol{t}_{ij}^k\omega^j,\ (i \neq k). \tag{4}$$

Для точки $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{N}_4^*(\boldsymbol{X})$ нормальной плоскости графика $\boldsymbol{V}_3^*$, которая определяется радиус-вектором $\vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{y}^\alpha\vec{\varepsilon}_\alpha$, получим:

$$d\vec{y} = \left(\omega^i + \boldsymbol{y}^\alpha\theta_\alpha^i\right)\vec{\boldsymbol{e}}_i + \left(\omega^\beta + \boldsymbol{dy}^\beta + \boldsymbol{y}^\alpha\theta_\alpha^\beta\right)\vec{\varepsilon}_\beta.$$

Для того, чтобы имело место условие: $d\vec{y} \in N_4^*(X)$ смещение точки $\boldsymbol{X}$ в области Ω должно удовлетворить равенства:

$$\omega^i + \boldsymbol{y}^\alpha\theta_\alpha^i = 0$$

или

$$\left(\boldsymbol{t}_{\alpha j}^i\boldsymbol{y}^\alpha + \delta_j^i\right)\omega^j = 0.$$

Так как все формы ω^i не могут быть равны нулю одновременно координаты $\boldsymbol{y}^\alpha$ точки $\boldsymbol{Y}$ удовлетворяют условию:

$$\det\left\|\boldsymbol{t}_{\alpha j}^i\boldsymbol{y}^\alpha + \delta_j^i\right\| = 0.$$

Последнее уравнение определяет (в нормальной плоскости $\boldsymbol{N}_4^3(\boldsymbol{X})$) поверхность третьего порядка. Её называют фокусной поверхностью [2]. Найдем вторую поляру точки $\boldsymbol{X}$ относительно фокусной поверхности третьего порядка. Если напишем её уравнение в однородных координатах $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^7, \boldsymbol{y}^6, \boldsymbol{y}^5, \boldsymbol{y}^4, \boldsymbol{y}^0) = 0$, то уравнение искомой поляры имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{y}^{\overline{\alpha}}\partial\boldsymbol{y}^{\overline{\beta}}}\right)_\circ \boldsymbol{y}^{\overline{\alpha}}\boldsymbol{y}^{\overline{\beta}} = 0,\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta} = 7,6,5,4,0) \tag{5}$$

Символ ∘ (нолик) снизу скобки означает, что частные производные вычислены в точке $(0, 0, 0, 0, 1)$. Уравнение фокусной поверхности напишем в виде:

$$\det\left\|\boldsymbol{t}_{\alpha j}^i\boldsymbol{y}^\alpha + \delta_j^i\boldsymbol{y}^0\right\| = 0.$$

Найдем:

$$\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{y}^\alpha\partial\boldsymbol{y}^\circ}\right)_\circ = 2\sum_i \boldsymbol{t}_{\alpha i}^i,\ \alpha = 4,5,6,7$$

$$\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{y}^\alpha\partial\boldsymbol{y}^\beta}\right)_\circ = \sum_{i,j}\left(\boldsymbol{t}_{\alpha i}^i\boldsymbol{t}_{\beta j}^j - \boldsymbol{t}_{\alpha i}^j\boldsymbol{t}_{\beta j}^i\right).$$

Подставляя последние соотношения в уравнение искомой поляры (5) имеем:

$$\boldsymbol{Q}_{\alpha\beta}\boldsymbol{y}^{\alpha}\boldsymbol{y}^{\beta}+2\boldsymbol{Q}_{\alpha 0}\boldsymbol{y}^{\alpha}+6=0\,, \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{Q}_{\alpha\beta}=\sum_{i,j}\left(\boldsymbol{t}^{i}_{\alpha i}\boldsymbol{t}^{j}_{\beta j}-\boldsymbol{t}^{j}_{\alpha i}\boldsymbol{t}^{i}_{\beta j}\right),\ \left(\boldsymbol{Q}_{\alpha\beta}=\boldsymbol{Q}_{\beta\alpha}\right) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\alpha 0}=\sum_{i}\boldsymbol{t}^{i}_{\alpha i}\,. \tag{8}$$

вектор средней кривизны графика имеет вид:

$$\vec{\boldsymbol{M}}^{*}=\frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ij}\boldsymbol{t}^{\alpha}_{ij}\vec{\varepsilon}_{\alpha}\,.$$

Среди троек соответствующих сетей можно выделить тройку ортогональных сетей $\sigma_3\subset\Omega$, $\overline{\sigma}_3\subset\overline{\Omega}$, называемых основанием отображения $\boldsymbol{f}$, и соответствующую им сеть σ^{*}_{3} на графике $\boldsymbol{V}^{*}_{3}$ отображения $\boldsymbol{f}$.

Отнесем поверхность $\boldsymbol{V}_3$ к ортонормированному реперу $\Re_{X_1}$, построенному на касательных к линиям основания отображения. Тогда имеем:

$$\gamma_{ij}=\overline{\gamma}_{ij}=\boldsymbol{g}_{ij}=\overline{\boldsymbol{g}}_{ij}=0\,,\ \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}\,. \tag{9}$$

Учитывая (9) вектор средней кривизны графика $\boldsymbol{V}^{*}_{3}$ напишем в виде:

$$\vec{\boldsymbol{M}}^{*}=\frac{1}{3}\sum_{i}\boldsymbol{t}^{\alpha}_{ii}\vec{\varepsilon}_{\alpha}\,.$$

Пусть график $\boldsymbol{V}^{*}_{3}$ является минимальной поверхностью, т.е. $\vec{\boldsymbol{M}}^{*}=\vec{0}$. Отсюда имеем: $\sum_{i}t^{\alpha}_{ii}=0$ (для каждого значения α). Так как сеть σ^{*}_{3} является основанием отображения $\boldsymbol{f}$ (т.е. она ортогональная) из равенства (8) получим:

$$\boldsymbol{Q}_{\alpha 0}=\sum_{i}\boldsymbol{t}^{i}_{\alpha i}=-\sum_{i}\boldsymbol{t}^{\alpha}_{ii}=0\,.$$

Обратно, если имеет место последнее равенство, то $\vec{\boldsymbol{M}}^{*}=\vec{0}$, т.е. график отображения $\boldsymbol{f}$ является минимальной поверхностью.

Когда $\boldsymbol{Q}_{\alpha 0}=0$, то уравнение (6) определяет поверхность третьего порядка, которая имеет центр в точке $\boldsymbol{X}$.

Таким образом доказана

<u>Теорема</u>. Вторая поляра точки $\boldsymbol{X}$ относительно фокусной поверхности графика $\boldsymbol{V}^{*}_{3}$ отображения $\boldsymbol{f}$ имеет центр в этой точке $\boldsymbol{X}$ тогда и только тогда, когда график $\boldsymbol{V}^{*}_{3}$ отображения $\boldsymbol{f}$ является минимальной поверхностью.

Выясним геометрический смысл равенства $\sum_{i}\boldsymbol{t}^{i}_{\alpha i}=0$ (т.е. $\boldsymbol{Q}_{\alpha 0}=0$).

Псевдофокус [3] $\boldsymbol{F}^{i}_{\alpha}$ прямой $\left(\boldsymbol{X},\vec{\varepsilon}_{\alpha}\right)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{i}_{\alpha}=\vec{\boldsymbol{X}}-\frac{1}{\boldsymbol{t}^{i}_{\alpha i}}\vec{\varepsilon}_{\alpha}\,.$$

На каждой прямой $(\boldsymbol{X}, \vec{\varepsilon}_\alpha)$ имеем по три псевдофокуса: $\boldsymbol{F}_\alpha^1, \boldsymbol{F}_\alpha^2, \boldsymbol{F}_\alpha^3$. Гармоничемкий полюс [4] трех точек $\boldsymbol{F}_\alpha^i$ $(\boldsymbol{i} = 1,2,3)$ обозначим через $\boldsymbol{F}_\alpha$ и он определяется следующим радиус вектором:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_\alpha = \vec{\boldsymbol{X}} + \frac{1}{\sum_i \boldsymbol{t}_{\alpha i}^i} \vec{\varepsilon}_\alpha .$$

Следовательно, если $\boldsymbol{Q}_{\alpha 0} = 0$, то гармонический полюс $\boldsymbol{F}_\alpha \in (\boldsymbol{X}, \vec{\varepsilon}_\alpha)$ является бесконечно удалённой точкой расширенного евклидова пространства $\overline{\boldsymbol{E}}_7$. Верно и обратное, т.е. если точка $\boldsymbol{F}_\alpha$ является бесконечно удаленной точкой, то $\boldsymbol{Q}_{\alpha 0} = 0$, т.е. вторая поляра точки $\boldsymbol{X}$ относительно фокусной поверхности графика $\boldsymbol{V}_3^*$ имеет центр в точке $\boldsymbol{X}$.

Литература

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. – М., 1948. - 365с.
2. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем. сб. – 1966. – Т.6, №4, - С. 475-491.
3. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств. // Вопросы дифференциальной геометрии. Т.1. №374. уч. записки МГПИ им. В.И.Ленина, 1970, С. 65-70.
4. Казанова Н.В. О гармоническом полюсе. РЖ мат., 1956, №6, С.104.

УДК 517.956.6

Саадалов Т.Ы., ОшТУ

Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике

Төртүнчү тартиптеги аралаш псевдопараболо-гиперболалык теңдеме үчүн ийри сызыктуу үч бурчтукта локалдуу эмес жабыштыруу шарты бар четтик маселенин жалгыз чечиминин жашашы далилденген.

Доказана однозначная разрешимость краевой задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике.

Unequivocal resolvability of boundary value problem for the mixed psevdoparabolo-hyperbolic equation of the fourth order with not local condition of interface in a curvilinear triangle is proved.

1. Постановка задачи. Пусть D означает криволинейный треугольник, ограниченной линиями $A_0A_1 : x = 0, -h_1 \le y \le 0,$, $A_1B : x = \sigma(y), -h_1 \le y \le 0$, $BA_0 : y = \mu(x), 0 \le x \le \ell$, а $D_1 = D \cap (y > 0), D_2 = D \cap (y < 0)$ (Рис. 1). Здесь $\sigma(y)$ - монотонно неубывающая, а $\mu(x)$ - монотонно невозрастающая функции. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r = 0,1,...,n; s = 0,1,...,m)$.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению*

$$L_1(u) \equiv u_{xxyy} + a_1(x,y)u_{xxy} + a_2(x,y)u_{xyy} + b_1(x,y)u_{xx} + b_2(x,y)u_{xy} +$$
$$+ b_3(x,y)u_{yy} + c_1(x,y)u_x + c_2(x,y)u_y + d(x,y)u = f_1(x,y),$$

(1)

граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$

(2)

$$u(x,\mu(x))=\psi(x),\ 0\le x\le \ell,$$

(3)

удовлетворяющую в области D_2 *уравнению*

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+\alpha_1(x,y)u_{xxx}+\alpha_2(x,y)u_{xxy}+\beta_1(x,y)u_{xx}+$$
$$+\beta_2(x,y)u_{xy}+\gamma_1(x,y)u_x+\gamma_2(x,y)u_y+\delta(x,y)u=f_2(x,y),$$

(4)

граничным условиям

$$u_x(0,y)=\chi_1(y),\ u_{xx}(0,y)=\chi_2(y),\ -h_1\le y\le 0$$

(5)

$$u(\sigma(y),y)=\chi_3(y),\ -h_1\le y\le 0$$

(6)

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ 0\le x\le \ell,$$

$$u_y(x,+0)=\rho(x)u_y(x,-0)+\int_0^x\theta(x,\xi)u_y(\xi,-0)d\xi+r(x),\ 0\le x\le \ell,$$

(7)

где $a_i,\ c_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,f_i,\varphi_i(i=1,2),\ b_j,\ \chi_j(j=\overline{1,3}),\ d,\ \delta,\ \psi,\mu,\sigma,\rho,\theta,r$ *- заданные функции, причем для них выполняются следующие условия*

$$a_1\in C(\overline{D}_1)\cap C^{2+1}(D_1),\ a_2\in C(\overline{D}_1)\cap C^{1+2}(D_1),b_1\in C(\overline{D}_1)\cap C^{2+0}(D_1),$$
$$b_2\in C(\overline{D}_1)\cap C^{1+1}(D_1),b_3\in C(\overline{D}_1)\cap C^{0+2}(D_1),c_1\in C(\overline{D}_1)\cap C^{1+0}(D_1),$$
$$c_2\in C(\overline{D}_1)\cap C^{0+1}(D_1),d\in C(\overline{D}_1),\ \alpha_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{3+0}(D_2),\delta\in C(\overline{D}_2),$$
$$\alpha_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+1}(D_2),\beta_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+2}(D_2),\beta_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),$$
$$\gamma_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+0}(D_2),\gamma_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+1}(D_2),$$

(8)

$$\varphi_1,\varphi_2\in C^2[0,h],\ \psi,\mu,\rho,r\in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\sigma\in C^1[-h_1,0],$$
$$\theta\in C(\overline{Q})\cap C^{2+1}(Q),\ Q=\{(x,t):0<x<\ell,\ 0<t<\ell\},$$
$$\forall x\in[0,\ell]:\rho(x)\ne 0,\ \forall x\in[0,\ell]:0\le\mu(x)\le h,\ \mu(0)=h,\ \mu(\ell)=0,$$
$$\forall x\in[-h_1,0]:0\le\sigma(y)\le\ell,\ \sigma(-h_1)=0,\ \sigma(0)=\ell,\ h,h_1,\ell>0,$$
$$\varphi_2(0)=\chi_1(0),\psi(\ell)=\chi_3(0),\ \varphi_1(h)=\psi(0).$$

(9)

Задача 1 в прямоугольной области при $\rho(x)\equiv 1,\ \theta(x,t)\equiv r(x)\equiv 0$ рассмотрена в [1]. Особенностью данной задачи заключается в том, что краевые условия задаются по всей границе области, поэтому ее можно называть задачей типа задачи Дирихле.

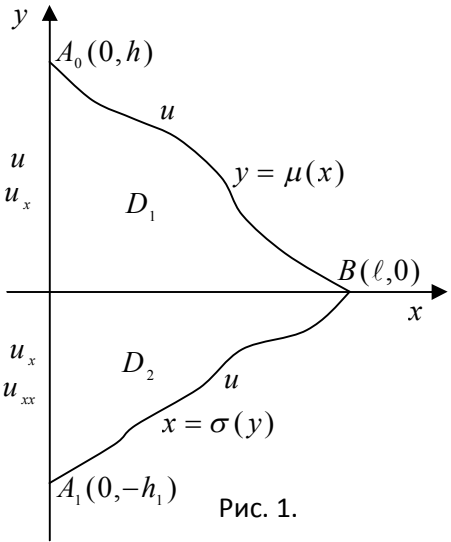


Рис. 1.

Такие задачи с нелокальными условиями сопряжения могут быть математической моделью процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [2, 3].

Уравнения (1) и (4) в области D в силу условия сопряжения (7) является уравнением смешанного типа [4].

Для решения задачи 1 введем следующие обозначения

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,$$
$$u_y(x,+0)=\nu_1(x),\ \ u_y(x,-0)=\nu_2(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{10}$$

где $\tau(x),\ \nu_1(x),\ \nu_2(x)$ - пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из второго условия (7) получим

$$\nu_1(x)=\rho(x)\nu_2(x)+\int_0^x \theta(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi+r(x), \tag{11}$$

Если удастся определить функции $\tau(x),\ \nu_1(x),\ \nu_2(x)$, то решение задачи 1 сводятся к определению решения уравнений (1) и (4) в областях D_1 и D_2 соответственно.

2. Соотношение, принесенное из области D_1**.** Рассмотрим задачу Гурса (задача 2) для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x,0)=\tau(x), u_y(x,+0)=\nu_1(x), 0\le x\le \ell. \tag{12}$$

Решение этой задачи с помощью функции Римана имеет следующее представление [1]:

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=A_1(x,y)\varphi_1(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_2(y)+\int_0^y[B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta)-\\
&-C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta+\int_0^x[\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1''(\xi)-D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi)+\\
&+a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1'(\xi)-E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi)+b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)\nu_1(\xi)-\\
&-F_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\xi,
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$A_1(x,y)=\vartheta_{1\eta\xi}(x,y;0,y)-a_2(0,y)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,y),$$
$$B_1(x,y;\eta)=\vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$
$$\begin{aligned}
C_1(x,y;\eta)&=\vartheta_{1\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi\eta}(x,y;0,\eta)-\\
&-a_2(0,\eta)\vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta)+\\
&+[b_2(0,\eta)-a_{1\xi}(0,\eta)-2a_{2\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta)+\\
&+[b_{1\xi}(0,\eta)-a_{1\xi\eta}(0,\eta)-a_{2\eta\eta}(0,\eta)+b_{2\eta}(0,\eta)-c_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),
\end{aligned}$$
$$D_1(x,y;\xi)=\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)-a_1(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
$$E_1(x,y;\xi)=a_2(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)+[a_{2\eta}(\xi,0)-b_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$
$$F_1(x,y;\xi)=b_3(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)+[b_{3\eta}(\xi,0)-c_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$

а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (1).

Используя условие (3) из (13) получаем интегро-дифференциальное соотношение для функции $\tau(x)$ и $v_1(x)$:

$$\int_0^x [\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)v_1''(\xi) - D_1(x,\mu(x);\xi)\tau''(\xi) + a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);$$
$$\xi,0)v_1'(\xi) - E_1(x,\mu(x);\xi)\tau'(\xi) + b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)v_1(\xi) -$$
$$- F_1(x,\mu(x);\xi)\tau(\xi)]d\xi = \Phi_1(x), \tag{14}$$

где

$$\Phi_1(x) = \psi(x) - A_1(x,\mu(x))\varphi_1(\mu(x)) + \vartheta_\eta(x,\mu(x);0,\mu(x))\varphi_2(\mu(x)) -$$
$$- \int_0^h [B_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_2(\eta) - C_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta -$$
$$- \int_0^x d\xi \int_0^{\mu(x)} \vartheta_1(x,\mu(x);\xi,\eta) f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям в (14), учитывая свойства функции $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ и условия согласования

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau'(0) = \varphi_2(0),\ v_1(0) = \varphi_1'(0),\ v_1'(0) = \varphi_2'(0),$$

получим соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $v_1(x)$, принесенное из области D_1:

$$D_{1\xi}(x,\mu(x);x)\tau(x) - \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)v_1(x) = \int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi +$$
$$+ \int_0^x H_2(x,\xi)v_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x), \tag{15}$$

где

$$H_1(x,\xi) = D_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi) - E_{1\xi}(x,\mu(x);\xi) + F_1(x,\mu(x);\xi),$$
$$H_2(x,\xi) = -\vartheta_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi,0) + a_2(\xi,0)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);\xi,0) +$$
$$+ [a_{2\xi}(\xi,0) - b_3(\xi,0)]\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0),$$
$$\Phi_2(x) = \Phi_1(x) - [\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);0,0) - a_2(0,0)\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)]\varphi_1'(0) +$$
$$+ \vartheta_1(x,\mu(x);0,0)\varphi_2'(0) + [D_{1\xi}(x,\mu(x);0) - E_1(x,\mu(x);0)]\varphi_1(0) -$$
$$- D_1(x,\mu(x);0)\varphi_2(0).$$

3. Соотношение, принесенное из области D_2**.** С учетом постановки задачи 1 и устремляя *y* к нулю, из уравнения (4) получаем

$$v_2'''(x) + \alpha_1(x,0)\tau'''(x) + \alpha_2(x,0)v_2''(x) + \beta_1(x,0)\tau''(x) +$$
$$+ \beta_2(x,0)v_2'(x) + \gamma_1(x,0)\tau'(x) + \gamma_2(x,0)v_2(x) + \delta(x,0)\tau(x) = f_2(x,0).$$

Интегрируя это уравнение по x в пределах от 0 до x, и учитывая условия согласования

$$\tau(0) = \varphi_1(0),\ \tau'(0) = \chi_1(0),\ \tau''(0) = \chi_2(0),$$

$$v_2(0)=\frac{\varphi_1'(0)-r(0)}{\rho(0)},\ v_2'(0)=\chi_1'(0),\ v_2''(0)=\chi_2'(0),$$

имеем

$$v_2(x)=g_1(x)-\alpha_1(x,0)\tau(x)+\int_0^x H_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x H_4(x,\xi)v_2(\xi)d\xi, \tag{16}$$

где

$$H_3(x,\xi)=\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{1\xi\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{1\xi\xi}(\xi,0)+\gamma_{1\xi}(\xi,0)-\delta(\xi,0)]-$$
$$-(x-\xi)[3\alpha_{1\xi\xi}(\xi,0)-2\beta_{1\xi}(\xi,0)+\gamma_1(\xi,0)]+3\alpha_{1\xi}(\xi,0)-\beta_1(\xi,0),$$
$$H_4(x,\xi)=-\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{2\xi}(\xi,0)+\gamma_2(\xi,0)]+$$
$$+(x-\xi)[2\alpha_{2\xi}(\xi,0)-\beta_2(\xi,0)]-\alpha_2(\xi,0),$$
$$g_1(x)=\{\frac{1}{2}[\alpha_{1xx}(0,0)-\beta_{1x}(0,0)]x^2-[2\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)]x+\alpha_1(0,0)\}\varphi_1(0)-$$
$$-\{\frac{1}{2}[\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)]x^2-\alpha_1(0,0)x\}\chi_1(0)+\frac{1}{2}\alpha_1(0,0)\chi_2(0)x^2-$$
$$-\{\frac{1}{2}[\alpha_{2x}(0,0)+\beta_2(0,0)]x^2-\alpha_2(0,0)x-1\}\frac{\varphi_1'(0)-r(0)}{\rho(0)}+$$
$$+[\frac{1}{2}\alpha_2(0,0)x^2+x]\chi_1'(0)+\frac{1}{2}\chi_2'(0)x^2+\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2 f_2(\xi,0)d\xi.$$

Обращая интегральное уравнение (16) относительно $v_2(x)$, приходим к следующему соотношению

$$v_2(x)=g_2(x)-\alpha_1(x,0)\tau(x)+\int_0^x H_3^*(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{17}$$

где $H_3^*(x,\xi)=H_3(x,\xi)-\alpha_1(\xi,0)R_1(x,\xi)+\int_\xi^x R_1(x,t)H_3(t,\xi)dt,$

$g_2(x)=g_1(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)g_1(\xi)d\xi,$ а $R_1(x,\xi)$ - резольвента ядра $H_4(x,\xi)$.

4. Сведение к интегральному уравнению. С учетом (17) из условия сопряжения (11) имеем

$$v_1(x)=g_3(x)-\alpha_1(x,0)\rho(x)\tau(x)+\int_0^x K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{18}$$

где $K_1(x,\xi)=\rho(x)H_3^*(x,\xi)-\theta(x,\xi)\alpha_1(\xi,0)+\int_\xi^x\theta(x,t)H_3^*(t,\xi)dt,$

$$g_3(x)=\rho(x)g_2(x)+r(x)+\int_0^x\theta(x,\xi)g_2(\xi)d\xi.$$

Исключив $v_1(x)$ из соотношений (15) и (18), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau(x) = g(x) + \int_0^x K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{19}$$

где

$$\rho_1(x) = 1 + [\rho(x)\alpha_1(x,0) - 2a_1(x,0)]\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0) - \int_0^{\mu(x)} b_1(x,t)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,t)dt,$$

$$K(x,\xi) = H_1(x,\xi) - \rho(\xi)\alpha_1(\xi,0)H_2(x,\xi) + \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)K_1(x,\xi) + \int_\xi^x H_2(x,t)K_1(t,\xi)dt,$$

$$g(x) = \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)g_3(x) + \int_0^x H_2(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Нетрудно заметить, что если

$$\forall x \in [0,\ell]:\ \rho_1(x) \neq 0, \tag{20}$$

то уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

В частности, если $\rho(x)\alpha_1(x,0) - 2a_1(x,0) \equiv 0,\ b_1(x,y) \equiv 0$, то $\rho(x) = 1$, и, следовательно, условие (20) выполняется.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) - a_{1y}(x,y) \leq 0, \tag{21}$$

то

$$\forall x \in [0,\ell],\ \eta \in [0,\mu(x)]:\ \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,\eta) \leq 0. \tag{22}$$

Пример 1. Пусть $a_1 = a^2 + x^2\ (a = const \neq 0),\quad a_2 \equiv b_j \equiv c_i \equiv d \equiv 0\quad (i = 1,2,.\ j = \overline{1,3})$. Тогда для функции Римана получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида [1]

$$\vartheta_1(x,y;\xi,\eta) = (\xi - x)(\eta - y) - (a^2 + \xi^2)\int_y^\eta \vartheta_1(x,y;\xi,t)dt,$$

явное решение, которого имеет вид [5]

$$\vartheta_1(x,y;\xi,\eta) = \frac{x-\xi}{a^2+\xi^2}\left\{\exp\left[(a^2+\xi^2)(y-\eta)\right] - 1\right\},\ 0 \leq \xi \leq x,\ 0 \leq \eta \leq y.$$

Отсюда заметим, что

$$\forall x \in [0,\ell],\ \eta \in [0,\mu(x)]:\ \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,\eta) =$$
$$= -(a^2+x^2)\left\{\exp\left[(a^2+x^2)(\mu(x)-\eta)\right] - 1\right\} \leq 0.$$

Это означает, что множество коэффициентов уравнения (1), для которых выполняется неравенство (22) составляет не пустое множество.

Нетрудно заметить, что если

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) \geq 0, \forall x \in [0,\ell] : \rho(x)\alpha_1(x,0) - 2a_1(x,0) \leq 0, \tag{23}$$

то

$$\forall x \in [0,\ell] : \rho_1(x) \geq 1.$$

Следовательно, при выполнении условий (21) и (23) интегральное уравнение (19) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив

$\tau(x)$ из уравнения (19), будем знать и $v_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 имеет вид (13).

5. Решение задачи 1 в области D_2**.** В области D_2 рассмотрим задачу Гурса (задача 3): найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5) и

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,\ u(0,y)=\chi(y),\ -h_1\le x\le 0, \tag{24}$$

где $\chi(y)$ - пока неизвестная функция.

Решение задачи 3 через функции Римана представим в виде [1]

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\vartheta_{2\xi\xi\xi}(x,y;x,0)\tau(x)+\int_0^x A_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\\ &+\int_0^y[\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+\alpha_1(0,\eta)\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi_2(\eta)-B_2(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)+\\ &+C_2(x,y;\eta)\chi_1(\eta)+D_2(x,y;\eta)\chi'(\eta)+E_2(x,y;\eta)\chi(\eta)]d\eta+\\ &+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\xi, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} &A_2(x,y;\xi)=\vartheta_{2\xi\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0)-\alpha_2(\xi,0)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\xi,0)+[\beta_2(\xi,0)-\\ &-2\alpha_{2\xi}(\xi,0)]\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,0)+[\beta_{2\xi}(\xi,0)-\gamma_2(\xi,0)-\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)]\vartheta_2(x,y;\xi,0),\\ &B_2(x,y;\eta)=\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)-\alpha_2(0,\eta)\vartheta_2(x,y;0,\eta),\\ &C_2(x,y;\eta)=\alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)+[a_{1\xi}(0,\eta)-\beta_1(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),\\ &D_2(x,y;\eta)=\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;0,\eta)-\alpha_2(0,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)-[\alpha_{2\xi}(0,\eta)-\beta_2(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta),\\ &E_2(x,y;\eta)=\alpha_1(0,\eta)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;0,\eta)+[2\alpha_{1\xi}(0,\eta)-\beta_1(0,\eta)]\times\\ &\times\vartheta_{2\xi}(x,y;0,\eta)+[\alpha_{1\xi\xi}(0,\eta)-\beta_{1\xi}(0,\eta)+\gamma_1(0,\eta)]\vartheta_2(x,y;0,\eta), \end{aligned}$$

а $\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (4).

Теперь, воспользовавшись условием (6) из (25) имеем

$$\rho_2(y)\,\chi(y)=T(y)+\int_0^y E(y,\eta)\,\chi(\eta)d\eta, \tag{26}$$

где

$$\rho_2(y)=D_2(\sigma(y),y;y),\ \ E(y,\eta)=E_2(\sigma(y),y,\eta)-E_{2\eta}(\sigma(y),y,\eta)$$

$$\begin{aligned} T(y)&=\chi_3(y)-\vartheta_2(\sigma(y),y;\sigma(y),0)\tau(\sigma(y))-\int_0^{\sigma(y)}A_2(\sigma(y),y;\xi)\tau(\xi)d\xi-\\ &-\int_0^y[\vartheta_2(\sigma(y),y;0,\eta)\chi_2'(y)+\alpha_1(0,\eta)\vartheta_2(\sigma(y),y;0,\eta)\chi_2(\eta)-B_2(\sigma(y),y;\eta)\chi_1'(\eta)+\\ &+C_2(\sigma(y),y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta-\int_0^{\sigma(y)}d\xi\int_0^y\vartheta_2(\sigma(y),y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Если

$$\forall y\in[-h_1,0]:\ \rho_2(y)\neq 0, \tag{27}$$

то уравнение (26) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

Пример 2. Пусть $\alpha_2 = \alpha \neq 0,\ \alpha_2 \equiv \beta_i \equiv \gamma_i \equiv \delta \equiv 0\ (i = 1, 2)$. Тогда для функции Римана получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида [1]

$$\vartheta_2(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi - x)^2 + \alpha \int_x^{\xi} \vartheta_2(x, y; s, \eta) ds,$$

явное решение, которого имеет вид [5]

$$\vartheta_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{x - \xi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\{\exp[\alpha(\xi - x)] - 1\},\ 0 \le \xi \le x,\ y \le \eta \le 0.$$

Отсюда заметим, что

$$\forall y \in [-h_1, 0]:\ D_2(\sigma(y), y; y) = 1.$$

Это означает, что множество коэффициентов уравнения (4), для которых выполняется неравенство (27) составляет не пустое множество.

Пусть выполняется условие (27). Тогда интегральное уравнение (26) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и, определив, отсюда $\chi(y)$, и подставляя ее в (25), получим представление решение задачи 3, и тем самым решение задачи 1 в области D_2.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если выполняются условия (8), (9), (21), (23), (27), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях* D_1 *и* D_2 *по формулам (11) и (25) соответственно.*

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

2. Нахушев В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11-34.

3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

4. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

5. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 608 с.

УДК 517.956.6

Сопуев А., ОшГУ, Саадалов Т.Ы., ОшТУ

Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области

Төртүнчү тартиптеги аралаш псевдопарабола-гиперболалык теңдеме үчүн ийри сызыктуу областта локалдуу эмес жабыштыруу шарты бар четтик маселени чечүү шарттары изилденген.

Исследованы вопросы разрешимости краевых задач для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области.

The problems were researched solvability of boundary value problem for the mixed psevdoparabolo - hyperbolic equation of the fourth order with the nonlocal condition in the curvilinear domain.

1. Постановка задачи. Пусть D означает криволинейную область, ограниченную линиями $A_0A: x = 0$, $AA_1: x = \sigma(y),\ -h_1 \le y \le 0$, $A_1B_1: y = -h_1$, $B_1B_0: x = \ell$,

$A_0B_0: y=\mu(x),\ 0\le x\le \ell$, а $D_1=D\cap(y>0),\ D_2=D\cap(y<0)$. Здесь $\sigma(y)$ - монотонно неубывающая, а $\mu(x)$ - монотонно невозрастающая гладкие функции (Рис. 1).

Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s$ $(r=0,1,...,\ n;\ s=0,1,...,\ m)$.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению*

$$L_1(u)\equiv u_{xxyy}+a_1(x,y)u_{xxy}+a_2(x,y)u_{xyy}+b_1(x,y)u_{xx}+b_2(x,y)u_{xy}+ \\ +b_3(x,y)u_{yy}+c_1(x,y)u_x+c_2(x,y)u_y+d(x,y)u=f_1(x,y), \tag{1}$$

граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{2}$$

$$u(x,\mu(x))=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{3}$$

удовлетворяющую в области D_2 *уравнению*

$$L_2(u)\equiv u_{xxxy}+\alpha(x,y)u_{xxy}+\beta_1(x,y)u_{xx}+ \\ +\beta_2(x,y)u_{xy}+\gamma_1(x,y)u_x+\gamma_2(x,y)u_y+\delta(x,y)u=f_2(x,y), \tag{4}$$

граничным условиям

$$u(\sigma(y),y)=\chi_1(y),\ -h_1\le y\le 0, \tag{5}$$

$$u(\ell,y)=\chi_2(y),\ u_x(\ell,y)=\chi_3(y),\ -h_1\le y\le 0 \tag{6}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ 0\le x\le \ell, \tag{7}$$

$$u_y(x,+0)=\rho(x)u_y(x,-0)+\int_0^x\theta(x,\xi)u_y(\xi,-0)d\xi+r(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{8}$$

где $a_i, c_i, \beta_i, \gamma_i, f_i, \varphi_i\ (i=1,2),\ b_j, \chi_j\ (j=\overline{1,3}), \alpha,\ d, \delta, \psi, \rho, \theta, r, \mu, \sigma$ - *заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования*

$$a_1\in C(\overline{D}_1)\cap C^{2+1}(D_1),\ a_2\in C(\overline{D}_1)\cap C^{1+2}(D_1), b_1\in C(\overline{D}_1)\cap C^{2+0}(D_1), \\ b_2\in C(\overline{D}_1)\cap C^{1+1}(D_1), b_3\in C(\overline{D}_1)\cap C^{0+2}(D_1), c_1\in C(\overline{D}_1)\cap C^{1+0}(D_1), \\ c_2\in C(\overline{D}_1)\cap C^{0+1}(D_1), d\in C(\overline{D}_1),\ \alpha_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{3+0}(D_2), \delta\in C(\overline{D}_2), \\ \alpha_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+1}(D_2), \beta_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+2}(D_2), \beta_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2), \\ \gamma_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+0}(D_2), \gamma_1\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+1}(D_2), \\ \varphi_1,\varphi_2\in C^2[0,h],\ \psi,\mu,\rho,r\in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\sigma\in C^1[-h_1,0], \\ \theta\in C(\overline{Q})\cap C^{2+1}(Q),\ Q=\{(x,t): 0<x<\ell,\ 0<t<\ell\},\ h,h_1,\ell>0, \\ \forall x\in[0,\ell]:\rho(x)\ne 0,\ \forall x\in[0,\ell]: h_2\le\mu(x)\le h,\ \mu(0)=h,\ \mu(\ell)=h_2, \\ \forall x\in[-h_1,0]: 0\le\sigma(y)\le\ell_1,\ \sigma(0)=0,\ \sigma(-h_1)=\ell_1, 0\le\ell_1<\ell, 0<h_2\le h, \\ \varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \varphi_1(h)=\psi(0). \tag{9}$$

(10)

Краевая задача с нелокальным условием сопряжения рассмотрена в работе [1].

Введем следующие обозначения

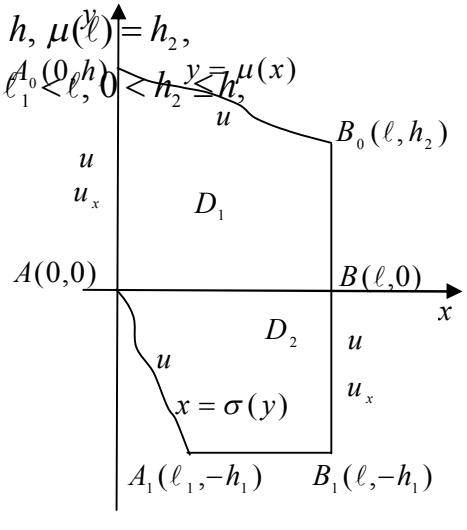


Рис. 1.

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,$$
$$u_y(x,+0)=v_1(x),\ \ u_y(x,-0)=v_2(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (11)$$

где $\tau(x),\ v_1(x),\ v_2(x)$ - пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из условия (8) получим

$$v_1(x)=\rho(x)v_2(x)+\int_0^x \theta(x,\xi)v_2(\xi)d\xi+r(x). \qquad (12)$$

2. Соотношение, принесенное из области D_1**.** Рассмотрим задачу Гурса (задача 2) для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x,0)=\tau(x),u_y(x,+0)=v_1(x),0\le x\le \ell, \qquad (13)$$

решение которой представим через функции Римана в виде [2]:

$$u(x,y)=A_1(x,y)\varphi_1(y)-\vartheta_{1\eta}(x,y;0,y)\varphi_2(y)+\int_0^y[B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta)-$$
$$-C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta+\int_0^x[\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1''(\xi)-D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi)+$$
$$+a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1'(\xi)-E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi)+b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)v_1(\xi)- \qquad (14)$$
$$-F_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta,$$

где $A_1(x,y)=\vartheta_{1\eta\xi}(x,y;0,y)-a_2(0,y)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,y),$

$B_1(x,y;\eta)=\vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$

$C_1(x,y;\eta)=\vartheta_{1\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi\eta}(x,y;0,\eta)-$

$-a_2(0,\eta)\vartheta_{1\eta\eta}(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta)+$

$+[b_2(0,\eta)-a_{1\xi}(0,\eta)-2a_{2\eta}(0,\eta)]\vartheta_{1\eta}(x,y;0,\eta)+$

$+[b_{1\xi}(0,\eta)-a_{1\xi\eta}(0,\eta)-a_{2\eta\eta}(0,\eta)+b_{2\eta}(0,\eta)-c_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$

$D_1(x,y;\xi)=\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)-a_1(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0),$

$E_1(x,y;\xi)=a_2(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)+[a_{2\eta}(\xi,0)-b_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$

$F_1(x,y;\xi)=b_3(\xi,0)\vartheta_{1\eta}(x,y;\xi,0)+[b_{3\eta}(\xi,0)-c_2(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$

а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (1).

С учетом условия (3) из (14) будем иметь соотношение для функции $\tau(x)$ и $v_1(x)$, принесенное из области D_1:

$$\int_0^x[\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)v_1''(\xi)-D_1(x,\mu(x);\xi)\tau''(\xi)+$$
$$+a_2(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)v_1'(\xi)-E_1(x,\mu(x);\xi)\tau'(\xi)+ \qquad (15)$$
$$+b_3(\xi,0)\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0)v_1(\xi)-F_1(x,\mu(x);\xi)\tau(\xi)]d\xi=\Phi(x),$$

где $\Phi(x)=\psi(x)-A_1(x,\mu(x))\varphi_1(\mu(x))+\vartheta_{1\eta}(x,\mu(x);0,\mu(x))\varphi_2(\mu(x))-$

$$-\int_0^{\mu(x)}[B_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_2(\eta)-C_1(x,\mu(x);\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta-$$

$$-\int_0^x d\xi\int_0^{\mu(x)}\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям в (15), учитывая свойства функции $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ и условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\tau'(0)=\varphi_2(0),\ \nu_1(0)=\varphi_1'(0),\ \nu_1'(0)=\varphi_2'(0),$$

имеем

$$D_{1\xi}(x,\mu(x);x)\tau(x)-\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)\nu_1(x)=\int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^x H_2(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi+\Phi_1(x), \tag{16}$$

где $H_1(x,\xi)=D_{1\xi\xi}(x,\mu(x);\xi)-E_{1\xi}(x,\mu(x);\xi)+F_1(x,\mu(x);\xi),$

$H_2(x,\xi)=-\vartheta_{\xi\xi}(x,\mu(x);\xi,0)+a_2(\xi,0)\vartheta_\xi(x,\mu(x);\xi,0)+$

$+[a_{2\xi}(\xi,0)-b_3(\xi,0)]\vartheta_1(x,\mu(x);\xi,0),$

$\Phi_1(x)=\Phi(x)-[\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);0,0)-a_2(0,0)\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)]\varphi_1'(0)+$

$+\vartheta_1(x,\mu(x);0,0)\varphi_2'(0)+[D_{1\xi}(x,\mu(x);0)-E_1(x,\mu(x);0)]\varphi_1(0)-$

$-D_1(x,\mu(x);0)\varphi_2(0).$

3. Соотношение, принесенное из области D_2. С другой стороны с учетом постановки задачи 1 и устремляя *y* к нулю, из уравнения (4) получаем

$$\nu_2'''(x)+\alpha(x,0)\nu_2''(x)+\beta_1(x,0)\tau''(x)+\beta_2(x,0)\nu_2'(x)+$$
$$+\gamma_1(x,0)\tau'(x)+\gamma_2(x,0)\nu_2(x)+\delta(x,0)\tau(x)=f_2(x,0). \tag{17}$$

Перепишем уравнение (17) в виде

$$\nu_2'''(x)=F(x), \tag{18}$$

где $F(x)=-\alpha(x,0)\nu_2''(x)-\beta_1(x,0)\tau''(x)-\beta_2(x,0)\nu_2'(x)-$

$-\gamma_1(x,0)\tau'(x)-\gamma_2(x,0)\nu_2'(x)-\delta(x,0)\tau(x)+f_2(x,0)..$

Уравнение (18) будем решать при краевых условиях

$$\nu_2(0)=\sigma_0,\ \nu_2(\ell)=\chi_2'(0),\ \nu_2'(\ell)=\chi_3'(0), \tag{19}$$

где $\sigma_0=\chi_1'(0)-\varphi_2(0)\sigma'(0)$.

Введем новую функцию $z(x)$:

$$\nu_2(x)=z(x)+z_0(x) \tag{20}$$

где $z_0(x)=\dfrac{\chi_3'(0)}{\ell}(x^2-\ell x)-\dfrac{\chi_2'(0)-\sigma_0}{\ell^2}(x^2-2\ell x)+\sigma_0.$

Тогда, относительно $z(x)$ приходим к задаче

$$\begin{cases}z'''(x)=F(x),\\ z(0)=0,\ z(\ell)=0,\ z'(\ell)=0.\end{cases} \tag{21}$$

Решение задачи (21) представим в виде [3]

$$z(x) = -\int_0^{\ell} G(x,\xi)F(\xi)d\xi, \qquad (22)$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина, определяемая как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} G'''_{\xi\xi\xi}(x,\xi) = 0, \\ G(x,0) = 0,\ G(x,\ell) = 0,\ G'_{\xi}(x,\ell) = 0, \\ G(x,x+0) - G(x,x-0) = 0, \\ G_{\xi}(x,x+0) - G_{\xi}(x,x-0) = 0, \\ G_{\xi\xi}(x,x+0) - G_{\xi\xi}(x,x-0) = 1. \end{cases} \qquad (23)$$

Нетрудно заметить, что решение задачи (23) имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{(x-\ell)^2\xi}{2\ell^2}, & 0 \le \xi < x, \\ \dfrac{x(\xi-\ell)(2\ell\xi - x\xi - \ell\xi}{2\ell^2}, & x < \xi \le \ell. \end{cases}$$

Тогда с учетом (20) из (22) получим

$$v_2(x) = z_0(x) + \int_0^{\ell} G(x,\xi)[\alpha(\xi,0)v_2''(\xi) + \beta_1(\xi,0)\tau''(\xi) + \beta_2(\xi,0)v_2'(\xi) + \\ + \gamma_1(\xi,0)\tau'(\xi) + \gamma_2(\xi,0)v_2'(\xi) + \delta(\xi,0)\tau(\xi)]d\xi + \int_0^{\ell} f_2(\xi,0)d\xi. \qquad (24)$$

Осуществляя интегрирование по частям, и учитывая условия согласования (19), из (24) имеем

$$v_2(x) = \int_0^{\ell} H_3(x,\xi)v_2(\xi)d\xi + \int_0^{\ell} H_4(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + g_1(x), \qquad (25)$$

где $H_3(x,\xi) = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}[\alpha(\xi,0)G(x,\xi)] - \dfrac{\partial}{\partial\xi}[\beta_2(\xi,0)G(x,\xi)] + \gamma_2(\xi,0)G(x,\xi),$

$$H_4(x,\xi) = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[\beta_1(\xi,0)G(x,\xi)] - \frac{\partial}{\partial\xi}[\gamma_1(\xi,0)G(x,\xi)] + \delta(\xi,0)G(x,\xi),$$

$$g_1(x) = z_0(x) - \alpha(\ell,0)G_{\xi}(x,\ell)\chi_2'(0) - \beta_1(\ell,0)G_{\xi}(x,\ell)\chi_2'(0) + \int_0^{\ell} G(x,\xi)f_2(\xi,0)d\xi.$$

Пусть выполняется условие [4]

$$\ell \cdot \max_{0\le x,\xi\le\ell}|H_3(x,\xi)| < 1. \qquad (26)$$

Тогда, обращая интегральное уравнение (25) относительно $v_2(x)$, с учетом (26), приходим к следующему соотношению

$$v_2(x) = g_2(x) + \int_0^{\ell} H_5(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (27)$$

где $H_5(x,\xi) = H_4(x,\xi) + \int_0^{\ell} R_1(x,s)H_4(s,\xi)ds$, $g_2(x) = g_1(x) + \int_0^{x} R_1(x,s)g_1(s)ds$, а $R_1(x,s)$ - резольвента ядра $H_3(x,\xi)$.

4. Сведение к интегральному уравнению. В силу (27) из (12) имеем

$$v_1(x) = g_3(x) + \int_0^{\ell} H_6(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (28)$$

где $H_6(x,\xi) = \rho(x)H_5(x,\xi) + \int_0^x \theta(x,t)H_5(t,\xi)dt,$

$$g_3(x) = \rho(x)g_2(x) + \int_0^x \theta(x,t)g_2(t)dt + r(x).$$

Исключив $v_1(x)$ из соотношений (16) и (28), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau(x) = g_4(x) + \int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^{\ell} K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (29)$$

где $\rho_1(x) = 1 - 2a_1(x,0)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0) - \int_0^{\mu(x)} b_1(x,t)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,t)dt,$

$$K_1(x,\xi) = \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)H_6(x,\xi) + \int_0^x H_2(x,s)H_6(s,\xi)ds,$$

$$g_4(x) = \Phi_1(x) + \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0)g_3(x) + \int_0^x H_2(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Если

$$\forall x \in [0,\ell]:\ \rho_1(x) \neq 0, \qquad (30)$$

то уравнение (29) является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) - a_{1y}(x,y) \le 0, \qquad (31)$$

то

$$\forall\ x \in [0,\ell],\ \forall \eta \in [0,\mu(x)] : \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,\eta) \le 0. \qquad (32)$$

Если

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) \ge 0, \forall x \in [0,\ell] : \alpha_1(x,0) \ge 0, \qquad (33)$$

то в силу (32) имеем

$$\forall x \in [0,\ell] : \rho_1(x) \ge 1. \qquad (34)$$

В частности, если $\alpha_1(x,0) \equiv 0,\ b_1(x,y) \equiv 0$, то $\rho(x) = 1$, и, следовательно, условие (30) или (34) выполняется.

При выполнении условия (34), разделив обе части уравнения (29) на $\rho_1(x)$, и обращая Вольтерровскую часть полученного уравнения, будем иметь

$$\tau(x) = g(x) + \int_0^{\ell} K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (35)$$

где $K(x,\xi) = \frac{K_1(x,\xi)}{\rho_1(x)} + \int_0^x \frac{K_1(t,\xi)}{\rho_1(t)} R_2(x,t)dt,\ \ g(x) = \frac{g_4(x)}{\rho_1(x)} + \int_0^x \frac{g_4(t)}{\rho_1(t)} R_2(x,t)dt,$ а $R_2(x,t)$ - резольвента ядра $\frac{H_1(x,\xi)}{\rho_1(x)}$.

Если

$$\ell \cdot \max_{0 \le x,\xi \le \ell} |K(x,\xi)| < 1, \qquad (36)$$

то уравнение (35) допускает единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений [4].

Определив $\tau(x)$, из соотношения (28) будем знать $v_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 представим в виде (14).

5. Решение задачи 1 в области D_2. Решение задачи 1 в области D_2 определяется как решение следующей задачи (задача 3): найти решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $u(x,0)=\tau(x)$, (5) и (6).

Для решения этой задачи воспользуемся задачей Гурса для уравнения (4), удовлетворяющего условиям (6) и

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,\ u_{xx}(\ell,y)=\chi(y),\ -h_1\le x\le 0, \tag{37}$$

где $\chi(y)$ - пока неизвестная функция.

Решение указанной задачи Гурса в области D_2, через функции Римана, определяется по формуле [2]

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;x,0)\tau(x)+\int_x^{\ell}A_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\\ &+\int_0^y[\vartheta_2(x,y;0,\eta)\chi'(\eta)-B_2(x,y;\eta)\chi_3'(\eta)+\beta_1(\ell,\eta)\vartheta_2(x,y;\ell,\eta)\chi_3(\eta)+\\ &+D_2(x,y;\eta)\chi_2'(\eta)+E_2(x,y;\eta)\chi_2(\eta)]d\eta+\int_{\ell}^{x}d\xi\int_0^y\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)d\eta, \end{aligned} \tag{38}$$

где $A_2(x,y;\xi)=\vartheta_{2\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0)-\alpha(\xi,0)\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\xi,0)+[\beta_2(\xi,0)-$

$-2\alpha_{\xi}(\xi,0)]\vartheta_{2\xi}(\tilde{o},\acute{o};\xi,0)+[\beta_{2\xi}(\xi,0)-\gamma_2(\xi,0)-\alpha_{\xi\xi}(\xi,0)]\vartheta_2(\tilde{o},\acute{o};\xi,0),$

$B_2(x,y;\eta)=\vartheta_{2\xi}(x,y;\ell,\eta)-\alpha(\ell,\eta)\vartheta_2(x,y;\ell,\eta),$

$D_2(x,y;\eta)=\vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\ell,\eta)-\alpha(\ell,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;\ell,\eta)-[\alpha_{\xi}(\ell,\eta)-\beta_2(\ell,\eta)]\vartheta_2(x,y;\ell,\eta),$

$E_2(x,y;\eta)=-\beta_1(\ell,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;\ell,\eta)+[\beta_{1\xi}(\ell,\eta)-\gamma_1(\ell,\eta)]\vartheta_2(x,y;\ell,\eta).$

а $\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (4).

Учитывая краевое условие (5), из (38) придем к уравнению

$$\rho_2(y)\chi(y)=T(y)+\int_0^y E(y,\eta)\chi(\eta)d\eta \tag{39}$$

где $\rho_2(y)=\vartheta_2(\sigma(y),y;\ell,y)$, $E(y,\eta)=\vartheta_{2\eta}(\sigma(y),y;\ell,\eta)$,

$$\begin{aligned} T(y)&=\chi_1(y)+\vartheta_2(\sigma(y),y;\ell,0)\tau'(\ell)-\vartheta_{2\xi\xi}(\sigma(y),y;\sigma(y),0)\tau(\sigma(y))-\\ &-\int_{\sigma(y)}^{\ell}A_2(\sigma(y),y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^y[B_2(x,y;\eta)\chi_3'(\eta)-\beta_1(\ell,\eta)\vartheta_2(x,y;\ell,\eta)\chi_3(\eta)-\\ &-D_2(x,y;\eta)\chi_2'(\eta)-E_2(x,y;\eta)\chi_2(\eta)]d\eta-\int_{\ell}^{x}d\xi\int_0^y\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)d\eta. \end{aligned}$$

При выполнении условия

$$\forall y\in[-h_1,0]:\ \rho_2(y)\ne 0, \tag{40}$$

уравнение (39) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив, отсюда $\chi(y)$, и подставляя ее в (38) найдем решение задачи 3, и тем самым решение задачи 1.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если выполняются условия (9), (10), (26), (31), (33), (36) и (40), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях* D_1 *и* D_2 *по формулам (14) и (38) соответственно.*

Литература

1. Нахушев В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11-34.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

4. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 232 с.

УДК 517.956.6

Сопуев А., Сатаров А.Э., ОшГУ

Задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертогопорядка

Төртүнчү тартиптеги сызыктуу эмес жекече туундулуу теңдемелер үчүн жабыштыруу маселесинин бир гана чечиминин жашашы далилденген.

Доказано существование единственного решения задачи сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка.

Existence of the unique solution of a problem of coupling for the nonlinear equations in private derivatives of the fourth order.

1. Постановка задачи. Математические модели многих процессов, происходящих в двухслойных средах с резко отличающимися физическими свойствами, часто сводятся к задачам сопряжений для уравнений в частных производных второго, третьего и более высокого порядков с различными характеристиками в рассматриваемой области.

В области D, ограниченной отрезками прямых $AC: x+y=0,$, $CB: x-y=\ell,$ $BB_0: x=\ell,$ $B_0A_0: y=h,$ $A_0A: x=0$, рассмотрим задачу сопряжения для уравнений

$$L_1(u) \equiv u_{xyyy} + c(x,y)u = f_1(x,y,u,u_y),\ (x,y) \in D_1, \tag{1}$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxxx} - u_{xxyy} = f_2(x,y,u,u_y),\ (x,y) \in D_2, \tag{2}$$

где $D_1 = D \cap (y>0),\ D_2 = D \cap (y<0).$

Уравнения (1) и (2) представляют собой канонические виды уравнений в частных производных четвертого порядка относительно старших производных по классификации авторов работы [1].

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих непрерывные производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s\ (r=0,1,...,n;\ s=0,1,...,m)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)[C^{1+3}(D_1) \cup \cup C^{2+2}(D_2) \cup C^{4+0}(D_2)]$, удовлетворяющую в областях D_1 и D_2 уравнениям (1) и (2) соответственно, и краевым условиям

$$u|_{AC} = \psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{AC} = \psi_2(x),\ 0 \le x \le \frac{\ell}{2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{BC} = \psi_3(x),\ \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \tag{4}$$

$$u|_{BB_0} = \varphi(y),\ 0 \le y \le h, \tag{5}$$

$$u|_{A_0B_0} = \psi_4(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{6}$$

где $\psi_i(x)(i=\overline{1,4}),\ \varphi(y),\ f_i(i=1,2)$ - заданные функции.

Из постановки задачи 1 следует, что на линии $AB: y=0$ выполняются условия сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0),\ u_y(x,-0) = u_y(x,+0), u_{yy}(x,-0) = u_{yy}(x,+0),\ 0 \le x \le \ell. \tag{7}$$

Будем предполагать, что заданные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\psi_1(x) \in C^4[0,\frac{\ell}{2}],\ \psi_2(x) \in C^1[0,\frac{\ell}{2}],\ \psi_3(x) \in C^1[\frac{\ell}{2},\ell], \tag{8}$$
$$\psi_4(x) \in C^4[0,\ell],\ \varphi(y) \in C^3[0,h];$$

$$\varphi(h) = \psi_4(\ell),\ \psi_2'(x) + \psi_3'(\ell - x) = o(x - \ell/2)\ при\ x \to \ell/2; \tag{9}$$

$$\forall (x,y,u,w) \in \overline{D}_i \cap R^2 : f_i(x,y,u,w) \in C(\overline{D}_i \cap R^2);$$

$$\forall (x,y,u,w) \in \overline{D}_i \cap R^2 : max\,|f_i(x,y,u,w)| \le N; \tag{10}$$

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_i\ \ \forall (u,w),(\overline{u},\overline{w}) \in R^2 :$$
$$|f_i(x,y,u,w) - f_i(x,y,\overline{u},\overline{w})| \le L(|u-\overline{u}| + |w-\overline{w}|)\,(i=1,2), \tag{11}$$

где R^2 - трехмерное евклидовое пространство.

Отметим, что линия $y=0$ одновременно является характеристиками уравнений (1) и (2). Уравнения (1) и (2), в совокупности с условиями сопряжения (7), является уравнением смешанного типа в области D [2]. Обзор работ посвященных краевым задачам для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго и третьего порядков можно найти в работе [3]. В работе [4], методом функции Римана, изучены краевые задачи для линейных уравнений типа (1). Краевые задачи типа задачи 1 для линейных уравнений изучены в работе [5].

2. Функциональные соотношения, принесенные из области D_2. Учитывая условие (7) введем следующие обозначения:

$$u(x,0) = \tau(x),\ u_y(x,0) = \nu(x),\ u_{yy}(x,0) = \mu(x),\ 0 \le x \le \ell. \tag{12}$$

где $\tau(x), \nu(x), \mu(x)$ - пока неизвестные функции. Интегрируя дважды по x уравнение (2) в пределах от $-y$ до x имеем

$$u_{xx} - u_{yy} = (x+y)\omega_1(y) + \omega_2(y) + \int_{-y}^{x}(x-\xi)f_2(\xi,y,u(\xi,y),w(\xi,y))d\xi, \tag{13}$$

где $w(x,y) = u_y(x,y),\ (x,y) \in D_2$ а $\omega_1(y),\omega_2(y) \in C[-\ell/2,0]$ - произвольные функции.

Нетрудно проверить, что второе условие (3) и условие (4) равносильны соответственно следующим условиям

$$u_x(x,-x) + u_y(x,-x) = \sqrt{2}\psi_2(x),\ 0 \le x \le \ell/2,$$

$$u_x(x,x-\ell) - u_y(x,x-\ell) = -\sqrt{2}\psi_3(x),\ \ell/2 \le x \le \ell.$$

Дифференцируя полученные соотношения по x, будем иметь

$$u_{xx}(x,-x)-u_{yy}(x,-x)=\sqrt{2}\psi_2'(x),\ 0\le x\le \ell/2,$$
$$u_{xx}(x,x-\ell)-u_{yy}(x,x-\ell)=-\sqrt{2}\psi_3'(x),\ \ell/2\le x\le \ell. \qquad (14)$$

Воспользовавшись условием (14) из (13) определим

$$\omega_2(y)=\sqrt{2}\psi_2'(-y),\ -\ell/2\le y\le 0,$$
$$\omega_1(y)=-\frac{\sqrt{2}}{2y+\ell}[\psi_2'(-y)+\psi_3'(y+\ell)]-(2y+\ell)\int_0^1(1-\xi)\times \qquad (15)$$
$$\times f_2(\theta(y,\xi),y,u(\theta(y,\xi),y),w(\theta(y,\xi),y))d\xi$$

где $\theta(y,\xi)=-y+(2y+\ell)\xi$.

Нетрудно заметить, что

$$\forall\xi\in[0,1]\ \forall y\in[-\ell/2,0]:\theta(y,\xi)\in[-y,y+\ell]\subset[0,\ell].$$

Тогда с учетом (14) и (15) уравнение (12) примет вид

$$u_{xx}-u_{yy}=z_0(x,y), \qquad (16)$$

где $z_0(x,y)=\Psi_1(x,y)+\int_{-y}^{x}(x-\xi)f_2(\xi,y,u(\xi,y),w(\xi,y))d\xi-(x+y)\times$

$$\times(2y+\ell)\int_0^1(1-\xi)f_2(\theta(y,\xi),y,u(\theta(y,\xi),y),w(\theta(y,\xi),y))d\xi,$$

$$\Psi_1(x,y)=\sqrt{2}\psi_2'(-y)-\frac{\sqrt{2}(x+y)}{2y+\ell}[\psi_2'(-y)+\psi_3'(y+\ell)].$$

Решение уравнения (16) представим в виде

$$u(x,y)=F_1(x+y)+F_2(x-y)+\frac{1}{4}\int_0^{x+y}d\xi\int_\ell^{x-y}z_0\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta. \qquad (17)$$

Из (17) с помощью первого условия (3) найдем $F_2(x)=\psi_1(x/2)-F_1(0)$. Тогда (17) представимо в виде

$$u(x,y)=F_1(x+y)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)-F_1(0)+\frac{1}{4}\int_0^{x+y}d\xi\int_\ell^{x-y}z_0\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta. \qquad (18)$$

Исключив F_1 методом дифференцирования, из (18) имеем

$$u_x(x,y)-u_y(x,y)=\psi_1'\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_0^{x+y}z_0\left(\frac{\xi+x-y}{2},\frac{\xi-x+y}{2}\right)d\xi.$$

Далее, устремляя y к нулю, получим

$$\tau'(x)-\nu(x)=\alpha(x)+\int_0^x d\xi\int_{\frac{x-\xi}{2}}^{\frac{x+\xi}{2}}H_1(x,\xi,s)f_2\left(s,\frac{\xi-x}{2},u\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right),\right.$$
$$\left.w\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right)\right)ds+\int_0^x d\xi\int_0^1 H_2(x,\xi,s)f_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2},\right. \qquad (19)$$
$$\left.u\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right),\ w\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right)\right)ds,$$

где $\alpha(x)=\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_0^x\Psi_1\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2}\right)d\xi$, $H_1(x,\xi,s)=\frac{1}{4}(x+\xi-2s)$,

$H_2(x,\xi,s)=-\frac{1}{2}\xi(\xi-x+\ell)(1-s)$.

Переходя к пределу при $y\to 0$ в (16), и учитывая условия (7) будем иметь

$$\tau''(x)=\mu(x)+\int_0^x(x-\xi)f_2(\xi,0,\tau(\xi),\nu(\xi))d\xi-$$

$$-\ell x\int_0^1(1-\xi)f_2(\ell\xi,0,\tau(\ell\xi),\nu(\ell\xi))d\xi+\Psi_1(x,0). \qquad (20)$$

В дальнейшем для сокращения записи используем следующие обозначения $u_1(x,y)\equiv u(x,y)$, $w_1(x,y)=u_{1y}(x,y)$, $(x,y)\in D_1$, $u_2(x,y)\equiv u(x,y)$, $w_2(x,y)=u_{2y}(x,y)$, $(x,y)\in D_2$.

Решая уравнение (20) относительно $\tau(x)$ при краевых условиях $\tau(0)=\psi_1(0)$, $\tau(\ell)=\varphi(0)$, получим

$$\tau(x)=A_1(\tau,\nu,\mu,u_1,w_1,u_2,w_2)\equiv A_1(\tau,\nu,\mu)\equiv\tau_0(x)+\int_0^\ell G(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^\ell H_3(x,\xi)f_2(\xi,0,\tau(\xi),\nu(\xi))d\xi+\int_0^1 H_4(x,\xi)f_2(\ell\xi,0,\tau(\ell\xi),\nu(\ell\xi))d\xi, \qquad (21)$$

где $\tau_0(x)=\psi_1(0)+\frac{x}{\ell}[\varphi(0)-\psi_1(0)]+\int_0^\ell G(x,\xi)\Psi_1(\xi,0)d\xi$,

$H_3(x,\xi)=\int_\xi^\ell(t-\xi)G(x,t)dt$, $H_4(x,\xi)=\ell(1-\xi)\int_0^\ell tG(x,t)dt$,

$$G(x,t)=\begin{cases}\frac{x(t-\ell)}{\ell}, & 0\le x\le t,\\ \frac{(x-\ell)t}{\ell}, & t\le x\le\ell.\end{cases}$$

С учетом (21), из (19) имеем

$$\nu(x)=A_2(\tau,\nu,\mu,u_1,w_1,u_2,w_2)\equiv A_2(\tau,\nu,\mu,u_2,w_2)\equiv\nu_0(x)+\int_0^\ell G_x(x,\xi)\mu(\xi)+$$

$$+\int_0^\ell H_{3x}(x,\xi)f_2(\xi,0,\tau(\xi),\nu(\xi))d\xi+\int_0^1 H_{4x}(x,\xi)f_2(\ell\xi,0,\tau(\ell\xi),\nu(\ell\xi))d\xi-$$

$$-\int_0^x d\xi\int_{\frac{x-\xi}{2}}^{\frac{x+\xi}{2}}H_1(x,\xi,s)f_2\left(s,\frac{\xi-x}{2},u_2\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right),w_2\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right)\right)ds-\int_0^x d\xi\int_0^1 H_2(x,\xi,s)\times \qquad (22)$$

$$\times f_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2},u_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right),w_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right)\right)ds,$$

где $\nu_0(x)=\tau_0'(x)-\alpha(x)$, $H_3(\xi,x,s)=\frac{1}{4}(\xi+x-2s)$,

$H_4(\xi,x,s)=\frac{1}{2}\xi(\xi-x+\ell)(1-s).$

Используя условие $u(x,0)=\tau(x)$ из (18) будем иметь

$$u(x,y)=\tau(x+y)-\psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{4}\int_0^{x+y}d\xi\int_{x-y}^{x+y}z_0\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta.$$

Отсюда, с учетом (21) и значения z_0, имеем

$$u_2(x,y)=A_4(\tau,\nu,\mu,u_1,w_1,u_2,w_2)\equiv A_4(\tau,\nu,\mu,u_2,w_2)\equiv u_2^{(0)}(x,y)+$$

$$+\int_0^{\ell}G(x+y,\xi)\mu(\xi)d\xi+\int_0^{\ell}H_3(x+y,\xi)f_2(\xi,0,\tau(\xi),\nu(\xi))d\xi+\int_0^{1}H_4(x+y,\xi)\times$$

$$\times f_2(\ell\xi,0,\tau(\ell\xi),\nu(\ell\xi))d\xi+\frac{1}{2}\int_0^{x+y}d\xi\int_{x-y}^{x+y}d\eta\int_{\frac{\eta-\xi}{2}}^{\frac{\eta+\xi}{2}}H_3(\eta,\xi,s)f_2\left(s,\frac{\xi-\eta}{2},u_2\left(s,\frac{\xi-\eta}{2}\right),\right.$$

$$\left.w_2\left(s,\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right)ds+\frac{1}{2}\int_0^{x+y}d\xi\int_{x-y}^{x+y}d\eta\int_0^{1}H_2(\eta,\xi,s)f_2\left(\theta\left(\frac{\xi-\eta}{2},s\right),\frac{\xi-\eta}{2},\right. \qquad (23)$$

$$\left.u_2\left(\theta\left(\frac{\xi-\eta}{2},s\right),\frac{\xi-\eta}{2}\right),w_2\left(\theta\left(\frac{\xi-\eta}{2},s\right),\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right)ds,$$

где $u_2^{(0)}(x,y)=\tau_0(x+y)-\psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{4}\int_0^{x+y}d\xi\int_{x-y}^{x+y}\Psi_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta.$

Дифференцируя (23) по y, получим

$$w_2(x,y)=A_5(\tau,\nu,\mu,u_1,w_1,u_2,w_2)\equiv A_5(\tau,\nu,\mu,u_2,w_2)\equiv w_2^{(0)}(x,y)+\int_0^{\ell}G_x(x+y,\xi)\times$$

$$\mu(\xi)d\xi+\int_0^{\ell}H_{3x}(x+y,\xi)f_2(\xi,0,\tau(\xi),\nu(\xi))d\xi+\int_0^{1}H_{4x}(x+y,\xi)f_2(\ell\xi,0,\tau(\ell\xi),$$

$$\nu(\ell\xi))d\xi+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}d\eta\int_{\frac{\eta-x-y}{2}}^{\frac{\eta+x+y}{2}}H_1(\eta,x+y,s)f_2\left(s,\frac{x+y-\eta}{2},u_2\left(s,\frac{x+y-\eta}{2}\right),\right.$$

$$\left.w_2\left(s,\frac{x+y-\eta}{2}\right)\right)ds+\frac{1}{2}\int_0^{x+y}d\xi\int_{\frac{x+y-\xi}{2}}^{\frac{x+y+\xi}{2}}H_1(x+y,\xi,s)f_2\left(s,\frac{\xi-x-y}{2},u_2\left(s,\frac{\xi-x-y}{2}\right),\right.$$

$$\left.w_2\left(s,\frac{\xi-x-y}{2}\right)\right)ds+\frac{1}{2}\int_0^{x+y}d\xi\int_{\frac{x-y-\xi}{2}}^{\frac{x-y+\xi}{2}}H_1(x-y,\xi,s)f_2\left(s,\frac{\xi-x+y}{2},u_2\left(s,\frac{\xi-x+y}{2}\right),\right.$$

$$\left.w_2\left(s,\frac{\xi-x+y}{2}\right)\right)ds+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}d\eta\int_0^{1}H_2(\eta,x+y,s)f_2\left(\theta\left(\frac{x+y-\eta}{2},s\right),\frac{x+y-\eta}{2},\right.$$

$$u_2\left(\theta\left(\frac{x+y-\eta}{2},s\right),\frac{x+y-\eta}{2}\right),\ w_2\left(\theta\left(\frac{x+y-\eta}{2},s\right),\frac{x+y-\eta}{2}\right)\Bigg)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{x+y}d\xi\int_0^{1}H_2(x+y,\xi,s)f_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x-y}{2},s\right),\frac{\xi-x-y}{2},u_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x-y}{2},s\right),\frac{\xi-x-y}{2}\right),\right.$$

$$\left.w_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x-y}{2},s\right),\frac{\xi-x-y}{2}\right)\right)ds++\frac{1}{2}\int_0^{x+y}d\xi\int_0^{1}H_2(x-y,\xi,s)f_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x+y}{2},s\right),\right.$$

$$\left.\frac{\xi-x+y}{2},u_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x+y}{2},s\right),\frac{\xi-x+y}{2}\right)w_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x+y}{2},s\right),\frac{\xi-x+y}{2}\right)\right)ds, \qquad (24)$$

где $w_2^{(0)}(x,y)=u_{2y}^{(0)}(x,y).$

3. Функциональные соотношения, принесенные из области D_1. Пусть $\forall\,\vartheta(x,y)\in C(\overline{D}_1)\cap C^{1+3}(D_1)$. Составим тождество Лагранжа в виде

$$\vartheta L_1(u)-uL_1(\vartheta)=(-\vartheta_{\eta\eta\eta}u)_\xi-(-\vartheta u_{\xi\eta\eta}+\vartheta_\eta u_{\xi\eta}-\vartheta_{\eta\eta}u_\xi)_\eta \qquad (25)$$

где $L_1(u)\equiv u_{\xi\eta\eta\eta}+c(\xi,\eta)u,\ L_1(\vartheta)\equiv\vartheta_{\xi\eta\eta\eta}+c(\xi,\eta)\vartheta$.

Интегрируя тождество (25) по области $D_1^*=\{(x,y):x<\xi<\ell,\ 0<\eta<h\}$, получим

$$\iint\limits_{D_1^*}[\vartheta L(u)-uL(\vartheta)]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_1^*}(-\vartheta u_{\xi\eta\eta}+\vartheta_\eta u_{\xi\eta}-\vartheta_{\eta\eta}u_\xi)d\xi+(-\vartheta_{\eta\eta\eta}u)d\eta. \qquad (26)$$

Осуществляя интегрирование по границам области D_1^*, получаем представление решения задачи 1 в области D_1 [1]:

$$\begin{aligned}u_1(x,y)&=\varphi(y)-\int_0^y\vartheta_{\eta\eta\eta}(x,y;\ell,\eta)\varphi(\eta)d\eta-\\&-\int_x^\ell[\vartheta_{\eta\eta}(x,y;\xi,0)\tau'(\xi)-\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)\nu'(\xi)+\vartheta(x,y;\xi,0)\mu'(\xi)]d\xi-\\&-\int_x^\ell d\xi\int_0^y\vartheta(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta),w_1(\xi,\eta))d\eta,\end{aligned} \qquad (27)$$

где $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана, определяемая как решение следующей задачи Гурса

$$\begin{aligned}&L_1(\vartheta)\equiv\vartheta_{\xi\eta\eta\eta}+c(\xi,\eta)\vartheta=0,\ x<\xi<\ell,\ 0<\eta<y,\\&\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_{\eta\eta}(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=1,x\le\xi\le\ell,\\&\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=\omega(x,y,\eta),\ 0\le\eta\le y,\end{aligned} \qquad (28)$$

где $\omega(x,y,\eta)$ является решением вспомогательной задачи Коши:

$$\begin{aligned}&\vartheta_{\eta\eta\eta}(x,y;x,\eta)=0,\ 0<\eta<y,\\&\vartheta(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_\eta(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_{\eta\eta}(x,y;x,\eta)|_{\eta=y}=1.\end{aligned} \qquad (29)$$

Нетрудно заметить, что решение задачи (29) имеет вид

$$\omega(x,y,\eta)=\frac{1}{2}(y-\eta)^2,0\le\eta\le y.$$

Методом интегрирования решение задачи Гурса (28) сведем к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2}(\eta-y)^2-\frac{1}{2}\int_x^{\xi}d\xi_1\int_y^{\eta}(\eta-\eta_1)^2c(\xi_1,\eta_1)\vartheta(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1, \quad (30)$$

допускающего единственное решение [6]. Решение уравнения (30), то есть функцию $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, назовем функцией Римана.

Учитывая свойства функции Римана и осуществляя интегрирование по частям, из (27) получим представление решения задачи 1 в области D_1:

$$u_1(x,y)=\tau(x)+y\nu(x)+\frac{1}{2}y^2\mu(x)+$$

$$+\int_x^{\ell}[\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,y;\xi,0)\tau(\xi)-\vartheta_{\eta\xi}(x,y;\xi,0)\nu(\xi)+\vartheta_{\xi}(x,y;\xi,0)\mu(\xi)]d\xi- \quad (31)$$

$$-\int_x^{\ell}d\xi\int_0^{y}\vartheta(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta),w_1(\xi,\eta))d\eta+\Phi_1(x,y),$$

где $\Phi_1(x,y)=\varphi(y)-\int_0^{y}\vartheta_{\eta\eta\eta}(x,y;\ell,\eta)\varphi(\eta)d\eta-\vartheta_{\eta\eta}(x,y;\ell,0)\varphi(0)+$

$$+\vartheta_{\eta}(x,y;\ell,0)\varphi'(0)-\vartheta(x,y;\ell,0)\varphi''(0).$$

Используя условие (6), из (31) будем иметь соотношение между функциями $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x),\ u_1(x,y),\ w_1(x,y)$, принесенное из области D_1:

$$\mu(x)=-\frac{2}{h^2}\tau(x)-\frac{2}{h}\nu(x)+r(x)-$$

$$-\frac{2}{h^2}\int_x^{\ell}[\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,h;\xi,0)\tau(\xi)-\vartheta_{\eta\xi}(x,h;\xi,0)\nu(\xi)+\vartheta_{\xi}(x,h;\xi,0)\mu(\xi)]d\xi+ \quad (32)$$

$$+\frac{2}{h^2}\int_x^{\ell}d\xi\int_0^{h}\vartheta(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta),w_1(\xi,\eta))d\eta,$$

где $r(x)=\frac{2}{h^2}[\psi_4(x)-\Phi_1(x,h)]$.

Отсюда, с учетом (21) и (22), из (32) имеем

$$\mu(x)=A_3(\tau,\nu,\mu,u_1,w_1,u_2,w_2)\equiv\mu_0(x)+\int_x^{\ell}[\Gamma_{11}(x,\xi)\tau(\xi)+\Gamma_{12}(x,\xi)\nu(\xi)]d\xi+$$

$$+\int_0^{\ell}\Gamma_{13}(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\int_0^{\ell}\Gamma_{14}(x,\xi)f_2(\xi,0,\tau(\xi),\nu(\xi))d\xi+\int_0^{1}\Gamma_{15}(x,\xi)f_2(\ell\xi,0,\tau(\ell\xi),$$

$$\nu(\ell\xi))d\xi+\frac{2}{h}\int_0^{x}d\xi\int_{\frac{x-\xi}{2}}^{\frac{x+\xi}{2}}H_1(x,\xi,s)f_2\left(s,\frac{\xi-x}{2},u_2\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right),w_2\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right)\right)ds+ \quad (33)$$

$$+\frac{2}{h}\int_0^{x}d\xi\int_0^{1}H_2(x,\xi,s)f_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2},u_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right),\right.$$

$$\left.w_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right)\right)ds+\frac{2}{h^2}\int_x^{\ell}d\xi\int_0^{h}\vartheta(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta),\ w_1(\xi,\eta))d\eta,$$

$$\Gamma_{11}(x,\xi)=-\frac{2}{h^2}\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,h;\xi,0),\qquad \Gamma_{12}(x,\xi)=\frac{2}{h^2}\vartheta_{\eta\xi}(x,h;\xi,0),$$

$$\Gamma_{13}(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{2}{h^2}G(x,\xi)-\frac{2}{h}G_x(x,\xi),\ 0\le\xi<x,\\ -\frac{2}{h^2}\vartheta_\xi(x,h;\xi,0),\ x<\xi\le\ell,\end{cases}\qquad \mu_0(x)=r(x)-\frac{2}{h^2}\tau_0(x)-\frac{2}{h}\nu_0(x),$$

$$\Gamma_{14}(x,\xi)=-\frac{2}{h^2}H_3(x,\xi)-\frac{2}{h}H_{3x}(x,\xi),\ \ \Gamma_{15}(x,\xi)=-\frac{2}{h^2}H_4(x,\xi)-\frac{2}{h}H_{4x}(x,\xi).$$

С учетом (21), (22) и (32) формулу (31) представим в виде

$$u_1(x,y)=A_6(\tau,\nu,\mu,u_1,w_1,u_2,w_2)\equiv u_1^{(0)}(x,y)+\int_x^\ell[\Gamma_{21}(x,y,\xi)\tau(\xi)+$$

$$+\Gamma_{22}(x,y,\xi)\nu(\xi)]\,d\xi+\int_0^\ell\Gamma_{23}(x,y,\xi)\mu(\xi)d\xi+\int_0^\ell\Gamma_{24}(x,y,\xi)f_2(\xi,0,\tau(\xi),$$

$$\nu(\xi))d\xi+\int_0^l\Gamma_{25}(x,,y\xi)f_2(\ell\xi,0,\tau(\ell\xi),\nu(\ell\xi))d\xi+\int_0^x d\xi\int_{\frac{x-\xi}{2}}^{\frac{x+\xi}{2}}\Gamma_{26}(x,y,\xi,s)\times \tag{34}$$

$$\times f_2\left(s,\frac{\xi-x}{2},u_2\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right),w_2\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right)\right)ds+\int_0^x d\xi\int_0^l\Gamma_{27}(x,y,\xi,s)\times$$

$$\times f_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2},u_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right),w_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right)ds+$$

$$+\int_x^\ell d\xi\int_0^h\Gamma_{28}(x,y,\xi,s)f_1(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta),\ w_1(\xi,\eta))d\eta,$$

где $\Gamma_{21}(x,y,\xi)=\frac{1}{2}y^2\Gamma_{11}(x,\xi)+\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,y;\xi,0),$

$$\Gamma_{22}(x,y,\xi)=\frac{1}{2}y^2\Gamma_{12}(x,\xi)-\vartheta_{\eta\xi}(x,y;\xi,0),$$

$$\Gamma_{23}(x,y,\xi)=\begin{cases}G(x,\xi)+yG_x(x,\xi)+\frac{1}{2}y^2\Gamma_{13}(x,\xi),\ 0\le\xi<x,\\ G(x,\xi)+yG_x(x,\xi)+\frac{1}{2}y^2\Gamma_{13}(x,\xi)+\vartheta_\xi(x,y;\xi,0),\ x<\xi\le\ell,\end{cases}$$

$$\Gamma_{24}(x,y,\xi)=H_3(x,\xi)+yH_{3x}(x,\xi)+\frac{1}{2}y^2\Gamma_{14}(x,\xi),$$

$$\Gamma_{25}(x,y,\xi)=H_4(x,\xi)+yH_{4x}(x,\xi)+\frac{1}{2}y^2\Gamma_{15}(x,\xi),$$

$$\Gamma_{26}(x,y,\xi,s)=-yH_1(x,\xi,s)+\frac{1}{h}y^2H_1(x,\xi,s),$$

$$\Gamma_{27}(x,y,\xi,s)=-yH_2(x,\xi,s)+\frac{1}{h}y^2H_2(x,\xi,s),$$

$$\Gamma_{28}(x,y,\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{h^2-y^2}{h^2}\vartheta(x,y;\xi,\eta),\ 0\le\eta<y,\\ \dfrac{y^2}{h^2}\vartheta(x,y;\xi,\eta),\ y<\eta\le\ell,\end{cases}$$

Дифференцируя по y, из (33) имеем

$$w_1(x,y)=A_7(\tau,\nu,\mu,u_1,w_1,u_2,w_2)\equiv w_1^{(0)}(x,y)+\int_x^{\ell}[\Gamma_{21y}(x,y,\xi)\tau(\xi)+$$

$$+\Gamma_{22y}(x,y,\xi)\nu(\xi)]d\xi+\int_0^{\ell}\Gamma_{23y}(x,y,\xi)\mu(\xi)d\xi+\int_0^{\ell}\Gamma_{24y}(x,y,\xi)f_2(\xi,0,\tau(\xi),$$

$$\nu(\xi))d\xi+\int_0^{l}\Gamma_{25y}(x,,y\xi)f_2(\ell\xi,0,\tau(\ell\xi),\nu(\ell\xi))d\xi+\int_0^{x}d\xi\int_{\frac{x-\xi}{2}}^{\frac{x+\xi}{2}}\Gamma_{26y}(x,y,\xi,s)\times \tag{35}$$

$$\times f_2\left(s,\frac{\xi-x}{2},u_2\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right),w_2\left(s,\frac{\xi-x}{2}\right)\right)ds+\int_0^{x}d\xi\int_0^{l}\Gamma_{27y}(x,y,\xi,s)\times$$

$$\times f_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2},u_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right),w_2\left(\theta\left(\frac{\xi-x}{2},s\right),\frac{\xi-x}{2}\right)ds+$$

$$+\int_x^{\ell}d\xi\int_0^{h}\Gamma_{28y}(x,y,\xi,s)f_1(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta),w_1(\xi,\eta))d\eta.$$

Таким образом, разрешимость задачи 1 эквивалентно сведена к решению системы уравнений (21), (22), (23), (24), (33), (34), (35), которая является замкнутой системой нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма и для его решения применим принцип сжимающих отображений. С этой целью систему уравнений записываем в виде операторного уравнения

$$g=Ag, \tag{36}$$

в котором $g=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7)$ - вектор-функция с компонентами $g_1=\tau(x)$, $g_2=\nu(x)$, $g_3=\mu(x)$, $g_4=u_1(x,y),(x,y)\in D_1$, $g_5=w_1(x,y),(x,y)\in D_1$, $g_6=u_2(x,y),(x,y)\in D_2$, $g_7=w_2(x,y),(x,y)\in D_2$, а оператор $A=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7)$ определен на множестве функций $g\in C(\overline{D})$ и его компоненты определены соответственно равенствами (21), (22), (23), (24), (33), (34), (35). Пусть $g_0=(g_1^{(0)},g_2^{(0)},g_3^{(0)},g_4^{(0)},g_5^{(0)},g_6^{(0)},g_7^{(0)})$, $g_1^{(0)}=\tau_0(x)$, $g_2^{(0)}=\nu_0(x)$, $g_3^{(0)}=\mu_0(x)$, $g_4^{(0)}=u_1^{(0)}(x,y),(x,y)\in D_1$, $g_5^{(0)}=w_1^{(0)}(x,y)$, $(x,y)\in D_1$, $g_6^{(0)}=u_2^{(0)}(x,y)$, $(x,y)\in D_2$, $g_7^{(0)}=w_2^{(0)}(x,y),(x,y)\in D_2$.

Покажем, что оператор A осуществляет сжимающее отображение шара $S(g_0,M)=\{g:\|g-g_0\|\le M\}$ в себя, где M - некоторое заданное число. Норму g определим равенством $\|g\|=\max\limits_{1\le i\le 7}\max|g_i|$. Для элементов g, принадлежащих шару $S(g_0,M)$ имеет место оценка $\|g\|\le\|g_0\|+M=Q$. В силу свойств заданных функций (8) – (10) заключаем, что

$$\forall(x,y)\in\overline{D}:\ \max\{\max|G|,\max|G_x|,\ \max|\Gamma_{ij}|,\ \max|\Gamma_{2jy}|,$$

$$\max|H_k|,\max|H_{kx}|\}\le T,\ i=\overline{1,2},j=\overline{1,8},k=\overline{3,4}.$$

Пусть $g \in S(g_0, M)$. Тогда $Ag \in C(\overline{D})$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\forall g \in S(g_0, M): \left|A_i g - g_0^{(i)}\right| \le 3TQ\ell + TN(1 + h_1\ell + h_1\ell^2 + \ell^3 + \ell h),\ i = \overline{1,7}.$$

Отсюда заключаем, что если

$$3TQ\ell + TN(1 + h_1\ell + h_1\ell^2 + \ell^3 + \ell h) \le M,$$

то оператор A отображает шар $S(g_0, M)$ в себя. Если учесть, что $Q = \|g_0\| + M$, то из предыдущего неравенства имеем $3T\|g_0\|\ell + 3TM\ell + TN(1 + h_1\ell + h_1\ell^2 + \ell^3 + \ell h) \le M$. Очевидно, что оно имеет место, если

$$3T\ell < 1,\ M \ge \frac{T}{1 - 3T\ell}\left[3\|g_0\|\ell + N(1 + h_1\ell + h_1\ell^2 + \ell^3 + \ell h)\right]. \quad (37)$$

При таком подборе M имеем, что $\forall g \in S(g_0, M): \|Ag - g_0\| \le M$, то есть $Ag \in S(g_0, M)$.

Пусть $g^{(1)} = (g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}, g_5^{(1)}, g_6^{(1)}, g_7^{(1)})$, $g^{(2)} = (g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, g_3^{(2)}, g_4^{(2)}, g_5^{(2)} g_6^{(2)} g_7^{(2)})$ произвольные два элемента, принадлежащие шару $S(g_0, M)$. Тогда с учетом условия (9)-(11) будем иметь

$$\forall g^{(1)}, g^{(2)} \in S(g_0, M): \left\|Ag^{(1)} - Ag^{(2)}\right\| \le T(h_2\ell + 2Lh_3\ell^2 + L\ell^3 + 2L)\left\|g^{(1)} - g^{(2)}\right\|,$$

где $h_2 = 3 + 5L + \frac{4}{h}L,\ h_3 = 1 + \frac{1}{h}$.

Отсюда следует, что если

$$T(h_2\ell + 2Lh_3\ell^2 + L\ell^3 + 2L) < 1, \quad (38)$$

то оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0, M)$ в себя. В силу теоремы С. Банаха, в шаре $S(g_0, M)$ существует и притом только одна неподвижная точка отображения, т.е. существует только одно решение уравнения (36). Решая это уравнение, например, методом последовательных приближений, мы однозначно определим все компоненты вектора g, и тем самым определяем решение задачи 1.

Таким образом, доказана

Теорема. Если выполняются условия (8) – (11), (37) и (38), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

3. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

4. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для уравнений четвертого порядка / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: - Бишкек, 2003. – 119 с.

5. Сопуев А., Сатаров А.Э. Задача сопряжения для уравнений в частных производных четвертого порядка // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. - 2007.-№2(53). - С. 39-48.

6. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т. 1. – Л.-М.: ГТТИ, 1934. – 330 с.

УДК 517.96

Тойгонбаева А.К., ОшГУ

Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода

Бул макалада Фредгольм-Стилтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси каралган. Теңдеменин чечими үчүн туруктуулук баалоолору жана регуляризациялоочу оператор тургузулган.

В данной статье рассматривается линейное интегральное уравнение Фредгольма- Стилтьеса первого рода. Найдены оценки устойчивости и построен регуляризирующий оператор для его решения.

In this article the linear integral equation of Fredgolm- Stilties of the first kind is given. The author gives the results of research of regulization and of solutions of this equation.

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku = \int_a^b K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t), \qquad t \in [a,b], \tag{1}$$

где, $\varphi(t)$-возрастающая непрерывная функция на [a,b],

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t \le b, \\ B(t,s), & a \le t \le s \le b. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что *A(t,s)* и *B (t,s)* и *f(t*) заданные функции, *u(t)*-искомая функция.
Различные вопросы для интегральных уравнений исследовались во многих работах [1-4]. В частности, в работе [1] предложен метод регуляризации для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. В работе [4] исследовались вопросы единственности решения интегрального Фредгольма первого рода. В данной работе используя метод, предложенный в [4] получены оценки устойчивости и построен регуляризирующий оператор по М.М.Лаврентьеву для решения интегральных уравнений первого рода (1).

В силу(2) уравнение (1) запишем в виде:

$$\int_a^b A(t,s)u(s)d\varphi(s) + \int_a^b B(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t). \tag{3}$$

Умножая обе части (3) на *u(t)* и интегрируя по *t* в пределах от *а* до *в*, получим

$$\int_a^b\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) + \int_a^b\int_t^b B(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t). \tag{4}$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_a^b\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) + \int_a^b\int_a^s B(t,s)u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t),$$

т.е. $$\int_a^b\int_a^t [A(t,s) + B(s,t)]u(s)u(t)d\varphi(s)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t).$$

Обозначим $H(t,s) = \frac{1}{2}[A(t,s) + B(s,t)]$.

Тогда последнее уравнение примет вид

$$2\int_a^b\int_a^t H(t,s)u(s)d\varphi(s)u(t)d\varphi(t) = \int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t). \tag{5}$$

Предполагаем, что ядро $H(t,s) \in \mathrm{C(G)}$, где $\mathrm{G} = \{(t,s): \quad a \le s \le t \le b\}$.

Введем новую функцию *M(t,s)* следующим образом

$$M(t,s)=\begin{cases}H(t,s), & a\le s\le t\le b,\\ H(s,t), & a\le t\le s\le b.\end{cases} \tag{6}$$

Ясно, что *M(t,s)=M(s,t)*.

Поскольку $\mathrm{H}(\mathrm{t},\mathrm{s})\in L_2[a,b]\times[a,b]$, тогда известно, что

$$M(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}, \tag{7}$$

где λ_1, λ_2,…-характеристические числа ядра *M(t,s)*, расположенные в порядке возрастания их модулей $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\dots$ и $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots$-соответствующие ортонормированные собственные функции т.е.

$$\varphi_i(t)=\lambda_i\int_a^b M(t,s)\varphi_i(t)ds,\ i=1,2,\dots$$

Пусть *M(t,s)* –полное ядро, где $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\dots$. Семейство множеств корректностей M_α зависящее от параметра α,

$$M_\alpha=\left\{u(t)\in C[a,b]:\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^\alpha|u_i|^2\le c\right\},$$

где $c>0, 0<\alpha<\infty, u_i=\int_a^b u(t)\varphi_i(t)d\varphi(t),\ (i=1,2,\dots).$

Если $u(t)\in M_\alpha$, то

$$\|u(t)\|_{L_2}{}^2=\sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^\alpha|u_i|^2\le\frac{c}{\lambda_1^\alpha}.$$

Будем предполагать, что $f(t)\in K(M_\alpha)$. Тогда уравнение (1) имеет решение $u(t)\in M_\alpha$ и справедливо следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left|\int_a^b u(t)\varphi_i(t)d\varphi(t)\right|^2=\int_a^b f(t)u(t)d\varphi(t)\le\int_a^b|f(t)|\cdot|u(t)|d\varphi(t)\le$$

$$\le\left(\int_a^b|f(t)|^2d\varphi(t)\right)^{1/2}\left(\int_a^b|u(t)|^2d\varphi(t)\right)^{1/2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}|u_i|^2\le\|f(t)\|_{L_2}\|u(t)\|_{L_2}. \tag{8}$$

С другой стороны применив неравенство Гёльдера при $p=\frac{1+\alpha}{\alpha}$, $q=1+\alpha$, получим

$$\|u(t)\|_{L_2}{}^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|u_i|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}|u_i|^{\frac{2}{1+\alpha}}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|u_i|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^\alpha|u_i|^2\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Учитывая, что $u(t) \in M_\alpha$ и неравенство (8), из последнего неравенства имеем

$$\|u(t)\|_{L_2}^{\,2} \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[\|f(t)\|_{L_2} \cdot \|u(t)\|_{L_2} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $\|u(t)\|_{L_2}^{\,-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, получим

$$\|u(t)\|_{L_2}^{\,2-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t)\|_{L_2}^{\,\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

т.е. $$\|u(t)\|_{L_2}^{\,\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t)\|_{L_2}^{\,\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда $$\|u(t)\|_{L_2} \le \left[c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t)\|_{L_2}^{\,\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}.$$

Следовательно мы получим следующую оценку устойчивости:

$$\|u(t)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t)\|_{L_2}^{\,\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{9}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть ядро *M(t,s)* положительно определено, $K(M_\alpha) \subset C_{[a,b]}$-образ M_α при отображении *K*. Тогда на множестве $K(M_\alpha)$ оператор K^{-1}, обратный к *K*, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (9).

Покажем, что решение уравнения

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) + \int_a^b K(t,s) u(s,\varepsilon) d\varphi(s) = f(t), \; t \in (a,b), \varepsilon > 0 \tag{10}$$

будет регуляризирующим для уравнения (1) на множестве M_α.

В самом деле, сделав следующую подстановку в уравнение (10)

$$u(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t) \in M_\alpha$ - решение уравнения (1), получим

$$\varepsilon \xi(t,\varepsilon) + \int_a^b K(t,s) \xi(s,\varepsilon) d\varphi(s) = -\varepsilon u(t). \tag{11}$$

Отсюда учитывая, что $M(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$, и умножая уравнение (11) на $\xi(t,\varepsilon)$ и интегрируя, имеем

$$\varepsilon \|\xi(t,\varepsilon)\|_{L_2}^{\,2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\xi_i(\varepsilon)|^2}{\lambda_i} \le \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| \|\xi_i(\varepsilon)|, \tag{12}$$

где $\xi_i(\varepsilon)$ - коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\{\varphi_i(t)\}_1^\infty$. Применяя неравенство Гёльдера при $p = q = \frac{1}{2}$, из (12) получим

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_{L_2} \le \|u(t)\|_{L_2}, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^2}{\lambda_i}\le\varepsilon\left\|u(t)\right\|_{L_2}{}^2\le\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^{\alpha}},\varepsilon>0, \tag{14}$$

с другой стороны

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right\|\xi_i(\varepsilon)\left|=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\lambda_i^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u_i\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u_i\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.\right.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha},\ q=2(1+\alpha),m=2(1+\alpha),n=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right\|\xi_i(\varepsilon)\left|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{\alpha}\left|u_i\right|^2\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{L_2}{}^{\frac{1}{q}}\left\|u(t)\right\|_{L_2}{}^{\frac{1}{p}}.\right.$$

Далее в силу $u(t)\in M_{\alpha}$, (13) и (14)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right\|\xi_i(\varepsilon)\left|\le\left(\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left\|u(t)\right\|_{L_2}{}^{\frac{1}{q}}\left\|u(t)\right\|_{L_2}{}^{\frac{1}{p}},\right.$$

Подставляя $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha},\ q=2(1+\alpha)$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right\|\xi_i(\varepsilon)\left|\le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}\left(\frac{c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\varepsilon c}{\lambda_1^{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}.\right. \tag{15}$$

т.е.
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right\|\xi_i(\varepsilon)\left|\le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}c^{\frac{1}{4}}c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\lambda_1^{-\frac{\alpha}{4}}\lambda_1^{-\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}},\right.$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right\|\xi_i(\varepsilon)\left|\le c^{\frac{3}{4}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+3\alpha)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}.\right. \tag{16}$$

Учитывая (16), из (12) имеем

$$\left\|u(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_{L_2}\le c^{\frac{3}{8}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+3\alpha)}{8(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\ 0<\alpha<\infty. \tag{17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть $f(t)\in K(M_{\alpha})$, *u(t)*-решение уравнения (1), *u(t,ε)*-решение уравнения (10). Тогда справедлива оценка (17).

Замечание. Если $f(t)\in K(M_1)$, то в силу неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|u_i\right\|\xi_i(\varepsilon)\left|\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|u_i\right|}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\lambda_i}\left|\xi_i(\varepsilon)\right|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_i(\varepsilon)\right|^2}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\left|u_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

можно улучшить оценку (17), при $\alpha=1$, а именно:

$$\left\|u(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{4}}\left(\frac{c}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}.$$

Литература

1. М.М. Лаврентьев Об интегральных уравнениях первого рода// ДАН СССР.- 1959.- Т.127, №1, С.31-38.
2. М.И. Иманалиев, А. Асанов О решениях системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода// ДАН СССР.-1989.-Т.309.-№5.- С.1052-1058.
3. A.Asanov Regulization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. Utrecht, VSP, 1998, 272 p.
4. А. Асанов, З.А. Каденова О единственности решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода// Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи».-Самара:СамГТУ,2004.-Ч.3-С.122-126.

УДК 517.946

Токторбаев А.М., ОшГУ

Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений реагирующей смеси газов

Макалада газдардын реакция берүүчү аралашмасынын бир өлчөмдүү теңдемелер үчүн Коши маселеси изилденет. Мында изилденүүчү функциялар чексиздикте ар түрдү пределге ээ болушат. Убакыт баюнча "кичинедеги" жалпыланган чечимдин жашашы далилденет. Ар бир фиксирленген N үчүн $Qn = \{x\} \quad n < x < n$ *областында чек аралык маселенин чечими болгон жакындаштырылган чечимдер тургузулат. Бир калптагы локалдык априордук баалоолордун келтирип чыгарылышы* $N \to \infty$ *учурдагы пределдик өтүүнү ишке ашырууга мүмкүнчүлүк берет. Пределдик функциялар Коши маселесинин локалдык жолдонгон чечимин берет.*

В работе исследуется задача Коши для одномерных уравнений реагирующей смеси газов. Причем искомые функции имеют разные пределы не бесконечности. Доказывается существование обобщенного решения "в малом" по времени. Строятся приближенные решения, являющиеся решениями краевой задачи в области $Qn = \{x\} \quad n < x < n$ *при каждом фиксированном N. Вывод равномерных локальных априорных оценок позволяет осуществить предельный переход при* $N \to \infty$ *. Предельные функции дают локальное обобщенное решение задачи Коши.*

In this paper we study the Cauchy problem for one-dimensional equations of the reacting gas mixture. Moreover, the required functions have different limits at infinity. The existence of a generalized solution "in the small" in time was proved. Under construction of approximate solutions, $Qn = \{x\} \quad n < x < n$ *which are solutions of the boundary value problem for each fixed N. Conclusion Uniform Local priori allows to estimate the limit transition as* $N \to \infty$ *. Limited functions give a local weak solution of the Cauchy problem.*

Рассмотрим систему уравнений, описывающую одномерное движение реагирующей смеси газов в массовых логранжевых координатах [1,2]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad v=\frac{1}{\rho},\\
&\frac{\partial c}{\partial t}=\chi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial c}{\partial x}\right)-c\,g,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}=\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad P=R\frac{\theta}{V},
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\,\theta}{\partial\,t}=\lambda_1\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,x}\right)+\lambda_2\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{\theta}{\mathrm{v}}\frac{\partial\,c}{\partial\,x}\right)-P\frac{\partial\,u}{\partial\,x}+\frac{\mu}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial\,u}{\partial\,x}\right)^2+\delta\;c\;g.$$

Здесь $\vartheta(\tilde{o},t)$, $c(\tilde{o},t),\theta(\tilde{o},t),u(\tilde{o},t)$ – искомые функции $g(\rho,c,\theta)$ являются и в любой $\tilde{o},\mu,\kappa,\lambda_1,\lambda_2$ положительные постоянные.

Функции $u_0(\tilde{o})$, $\vartheta_0(\tilde{o})$, $c_0(\tilde{o})$, $\theta_0(\tilde{o})$, задающие начальные данные.

$$u\big|_{t=0}=u_0(\tilde{o}),\;\tilde{n}\big|_{t=0}=\tilde{n}_0(\tilde{o}),\;\vartheta\big|_{t=0}=\vartheta_0(\tilde{o}),\;\theta\big|_{t=0}=\theta_0(\tilde{o}),\;\big|\tilde{O}\big|<\infty \qquad (2)$$

предлагаются известными, непрерывными

$$o<m\le\vartheta_0(\tilde{o})\le\mu<\infty,\;o<m\le\theta_0(\tilde{o})\le\mu<\infty,\;o<m\le c_0(\tilde{o})\le\mu<\infty \qquad (3)$$

и имеющими конечные пределы не бесконечности:

$$\begin{gathered}\lim_{x\to-\infty}u_0(x)=u_0^1,\quad\lim_{x\to\infty}u_0(x)=u_0^2,\qquad u_0^1<u_0^2,\\ \lim_{x\to-\infty}\mathrm{v}_0(x)=\mathrm{v}_0^1,\quad\lim_{x\to\infty}\mathrm{v}_0(x)=\mathrm{v}_0^2,\qquad \mathrm{v}_0^1\ne\mathrm{v}_0^2,\\ \lim_{x\to-\infty}\theta_0(x)=\theta_0^1,\quad\lim_{x\to\infty}\theta_0(x)=\theta_0^2,\qquad \theta_0^1\ne\theta_0^2,\\ \lim_{x\to-\infty}\tilde{n}_0(x)=\tilde{n}_0^1,\quad\lim_{x\to\infty}\tilde{n}_0(x)=\tilde{n}_0^2,\qquad \tilde{n}_0^1\ne\tilde{n}_0^2.\end{gathered} \qquad (4)$$

Введем вспомогательные функции $f(x)$, $\gamma(x)$, $\varphi(x)$ обладающие свойствами:

$$\begin{gathered}0<C_1^{-1}<\varphi(x)<C_1,\quad\lim_{|x|\to\infty}\theta_0(x)\varphi(x)=1,\quad\varphi'(x)\in W_2^1(R),\\ |f(x)|<C_2<\infty,\;\lim_{x\to-\infty}f(x)=u_0^1,\;\lim_{x\to+\infty}f(x)=u_0^2,\\ 0<f'(x)\le C_3,\;f'(x)\in W_2^1(R),\;f'(x)\in L_1(R),\\ 1\le\gamma(x)<C_4<\infty,\quad\lim_{|x|\to\infty}c_0(x)\gamma(x)=1,\quad\gamma'(x)\in W_2^1(R).\end{gathered} \qquad (5)$$

$$(\varphi'(x))^2<\delta\,f'(x),\quad 0<\delta<1.$$

ТЕОРЕМА. Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3), (4) и

$(u_0-f,\;\varphi\theta_0-1,\psi\nu_0-1,\gamma c_0-1)\in W_2^1(R)$

Тогда в полосе $\Pi=R\times[o,t_0]$ с конечной высотой t_0, $O<t_0<T$ существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), которое удовлетворяет уравнениям и начальным данным почти всюду, причем

$$(u-f,\varphi\,\theta-1,\;\gamma c-1)\in L_\infty\left(0,\mathrm{t}_0;W_2^1(R)\right)\cap L_2\left(0,\mathrm{t}_0;W_2^2(R)\right),$$

$$(\mathrm{v}\psi-1)\in L_\infty\left(0,\mathrm{t}_0;W_2^1(R)\right),\left(\frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial\,t},\frac{\partial\,u}{\partial\,t},\frac{\partial\,\theta}{\partial\,t},\frac{\partial\,c}{\partial\,t},\right)\in L_2(\Pi),$$

$0<c(x,t)\le 1$, $\mathrm{v}(x,t),\theta(x,t)$ строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство. Локальное обобщенное решение находим как предел при $\mathrm{N}\to\infty$ приближенных решений $(\gamma^N,u^N,\theta^N,C^N)$, где $\gamma^N,u^N,\theta^N,C^N$ являются решениями задачи:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\,\mathrm{v}^{\mathrm{N}}}{\partial\,t}-\frac{\partial\,u^N}{\partial\,x}=0,\quad\frac{\partial\,c^N}{\partial\,t}=\chi\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{1}{\mathrm{v}^{\mathrm{N}}}\frac{\partial\,c^N}{\partial\,x}\right)-c^N\,g^N,\\ \frac{\partial\;\mathrm{u}^N}{\partial\,t}=\mu\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{1}{\mathrm{v}^{\mathrm{N}}}\frac{\partial\,\mathrm{u}^N}{\partial\,x}\right)-\frac{\partial P^N}{\partial\,\tilde{o}},\;p^N=\mathrm{R}\frac{\theta^{\mathrm{N}}}{\mathrm{v}^{\mathrm{N}}},\end{gathered} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \theta^N}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathrm{v}^N}\frac{\partial \theta^N}{\partial x}\right) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta^N}{\mathrm{v}^N}\frac{\partial \mathrm{c}^N}{\partial x}\right) - P^N \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu^N}{v^N}\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2 + \delta\, c^N\, g^N.$$

В области $\Omega_N = \{\tilde{O} \mid -N < X < N\}$ начальные данные предполагаются известными.

$$u^N\big|_{t=0} = u_0(x),\ \theta^N\big|_{t=0} = \theta_0(x),\ c^N\big|_{t=0} = c_0(x),\ \mathrm{v}^N\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x), \qquad (7)$$

удовлетворяющими условиям теоремы.

Краевые условия выражаются соотношениями:

$$\begin{aligned} &u^N\big|_{\chi=-N} = u_0(-N), \quad u^N\big|_{\chi=N} = u_0(N), \quad u_0(-N) \neq u_0(N) \\ &\theta^N\big|_{\chi=-N} = \theta_0(-N), \quad u^N\big|_{\chi=N} = \theta_0(N), \quad \theta_0(-N) \neq \theta_0(N) \\ &c^N\big|_{\chi=-N} = c_0(-N), \quad c^N\big|_{\chi=N} = c_0(N), \quad c_0(-N) \neq c_0(N) \end{aligned} \qquad (8)$$

Локальная разрешимость краевой задачи (6) – (8) при каждом фиксированном $N < \infty,\ t \in [0, t_0]$ доказывается способом, предложенным в [3]. Тем не менее, полное доказательство данного утверждения будет представлено в следующей статье. Далее покажем, что найдется такой промежуток времени $[0, t_0],\ 0 < t_0 < T$, в котором существуют решения задач (6) – (8) для всех N. Для этого достаточно получить равномерные по N оценки для $U^N(t), \theta^N(t), C^N(t)$ на некотором малом интервале $[0, t_0]$.

Еще одно условие, из которого выбирается в дальнейшем величина промежутка t_0 связано с требованием ограниченности $V^N(x,t)$. С учетом (3) потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{1}{2}m \le V^N(x,t) \le 2m \qquad (9)$$

для всех N при $x \in [-N, N],\ t \in [0, t_0]$. Из первого уравнения системы (6) определим $V^N(x,t)$ по формуле

$$V^N(x,t) = V_0(x) + \int_0^t U_x{}^N(x,\tau)d\tau \qquad (10)$$

Отсюда имеем

$$\| V_x{}^N(t) \| \le c\left[1 + \left(\int_0^t \left\| U_{xx}{}^N(\tau)\right\|^2 d\tau\right)^{1/2}\right] \qquad (11)$$

Притупим к выводу локальных априорных оценок. Все положительные постоянные в системе уравнений (6), не нарушая общности, примем равными единице. Введем вспомогательные функции $f(x), \varphi(x), \gamma(x)$, обладающие свойствами (5) на отрезке [-N,N].

Из уравнений системы (1) и ограничений не данные Задачи видно, что функции $V(x,t), \theta(x,t)$ не отрицательное, а для $c(x,t)$ справедливо неравенство $0 < c(x,t) \le 1$.

Умножим соответственно второе уравнение системы (6) на $\gamma(c^N\gamma - 1)$ и C_{xx}^N, третье на $(u^N - f)$ и U_{xx}^N, четвертое на $\varphi(\theta^N\varphi - 1)$ и θ_{xx}^N, проинтегрируем по Ω_N и сложим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|U^N - f\right\|^2 + \left\|\varphi\theta^N - 1\right\|^2 + \left\|\gamma c^N - 1\right\|^2 + \left\|U_x\right\|^2 + \left\|\theta_x\right\|^2 + \left\|c_x\right\|^2\right) +$$

$$+\int_{\Omega_N}\frac{1}{V^N}\left[(U_x^N)^2+(\theta_x^N)^2\varphi^2+(C_x^N)^2\gamma^2+(U_{xx}^N)^2+(\theta_{xx}^N)^2+(C_{xx}^N)^2\right]dx+$$

$$+\int_{\Omega_N}g(c^N\gamma-1)^2dx=\int_{\Omega_N}\frac{1}{V^N}\left[U_x^Nf'+\theta^N(U_x^N-f')-2C^NC_x^N\gamma\gamma'+C_x^N\gamma'-g^NV^N(\gamma c^N-1)\right]dx+$$

$$+\int_{\Omega_N}\frac{\theta_x^N}{V^N}\left[\varphi'-2\theta^N\varphi\cdot\varphi'\right]dx-\int_{\Omega_N}\frac{\theta_x^N}{V^N}C_x^N\left[\theta_x^N\varphi'-2\theta^N\varphi\cdot\varphi'-\varphi'\right]dx-$$

$$-\int_{\Omega_N}\frac{(\theta^N\varphi-1)}{V^N}\left[\theta^NU_x^N\varphi-(U_x^N)^2\varphi-C^Ng^N\varphi\cdot V^N\right]dx+$$

$$+\int_{\Omega_N}\frac{C_{xx}^N}{V^N}\left[\frac{V_x^N}{V^N}C_x^N+C^Ng^N\cdot V^N\right]dx+\int_{\Omega_N}\frac{U_{xx}^N}{V^N}\left[\frac{V_x^N}{V^N}U_x^N+\frac{V_x^N}{V^N}\theta_x^N+\theta_x^N\right]dx+ \qquad (12)$$

$$+\int_{\Omega_N}\frac{\theta_{xx}^N}{V^N}\left[\frac{V_x^N}{V^N}\theta_x+\frac{V_x^N}{V^N}\theta^NC_x^N-\theta_x^NC_x^N-\theta^NC_{xx}^N+\theta^NC_x^N-(U_x^N)^2-C^NV^Ng^N\right]dx$$

В левой части оценим $\frac{1}{V^N}$ снизу: $\frac{1}{V^N}\ge\frac{1}{2M}$, в соответствии с предложением (9). Для каждого N неравенства (9) будут выполняться на некотором достаточно малом промежутке времени $[0,t_N]$, так как все t_N оцениваются снизу, $t_N\ge t_0>0$. Для этого оценим правую часть (12), используя неравенство Коши, Юнга, теоремы вложения и условия на начальные данные. В результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|U^N-f\right\|^2+\left\|\varphi\theta^N-1\right\|^2+\left\|\gamma c^N-1\right\|^2+\left\|U_x\right\|^2+\left\|\theta_x\right\|^2+\left\|c_x\right\|^2\right)+$$

$$+\left\|U_x^N\right\|^2+\left\|\theta_x^N\right\|^2+\left\|C_x^N\right\|^2+\left\|U_{xx}^N\right\|^2+\left\|\theta_{xx}^N\right\|^2+\left\|C_{xx}^N\right\|^2\le$$

$$\le C_5\left[1+\left\|U^N-f\right\|^8+\left\|\varphi\theta^N-1\right\|^8+\left\|\gamma c^N-1\right\|^8+\left\|U_x\right\|^8+\left\|\theta_x\right\|^8+\left\|c_x\right\|^8+\left(\int_0^t\left\|U_{xx}^N\right\|d\tau\right)^4\right].$$

Запишем эти соотношения в виде дифференциального неравенства:

$$\frac{dy_N(t)}{dt}\le C_6(1+y_N^4(t)) \qquad (13)$$

для неотрицательной функции

$$y_N(t)=\left\|U^N-f\right\|^2+\left\|\varphi\theta^N-1\right\|^2+\left\|\gamma c^N-1\right\|+\left\|U_x^N\right\|^2+\left\|\theta_x^N\right\|^2+\left\|C_x^N\right\|^2+\int_0^t\left\|U_{xx}^N\right\|^2dt$$

Поскольку постоянная C_6 в (13) не зависит от N и начальные данные $y_N(0)$ равномерно по N ограничены, $y_N(0)\le C_7$, на достаточно малом промежутке времени $[0,t_0]$ справедлива равномерная по N оценка

$$y_N(t)\le y(t),\quad t\in[0,t_0] \qquad (14)$$

Здесь $y(t)$ - решение задачи Коши

$$\frac{dy(t)}{dt}=C_6(1+y'(t)),\qquad y(0)=C_7,$$

$t_0>0-$ время существования $y(t)$. Из (14), очевидно, следуют оценки:

$$\max_{a\le t\le t_0}\left(\left\|U^N-f\right\|^2+\left\|\varphi\theta^N-1\right\|^2+\left\|\gamma c^N-1\right\|+\left\|U_x^N\right\|^2+\left\|\theta_x^N\right\|^2+\left\|C_x^N\right\|^2\right)+$$

$$+\int_0^{t_0}\left(\left\|U_t^N\right\|^2+\left\|\theta_t^N\right\|^2+\left\|C_t^N\right\|^2+\left\|U_{xx}^N\right\|^2+\left\|\theta_{xx}^N\right\|^2+\left\|C_{xx}^N\right\|^2\right)dt\le K, \qquad (15)$$

где K не зависит от N. Тем самым для всех N обеспечена продолжимость решений (6)-(8) на $[0,t_0)$. Кроме того на величину t_0 есть еще условие малости. Из (9)и (15) получаем

$$\frac{1}{V^N}\le\frac{1}{m-\int_0^{\tau_0}\left\|U_x^N\right\|^{1/2}\left\|U_{xx}^N\right\|^{1/2}d\tau}\le\frac{1}{m-K^{1/2}t_0^{3/4}}$$

Здесь K - постоянная из (15). Значит, если выбрать

$$t_0\le\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}, \qquad (16)$$

то можно обеспечить неравенство

$$V^N(x,t)\ge\frac{m}{2},\qquad x\in[-N,N],\ t\in[0,t_0]$$

Аналогично

$$V^N(x,t)\le M+\int_0^{t_0}\left\|U_x^N\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|U_{xx}^N\right\|^{\frac{1}{2}}d\tau\le M+K^{\frac{1}{2}}\cdot t_0^{\frac{3}{4}}$$

Отсюда видно, что при

$$t_0\le M^{\frac{4}{3}}K^{-\frac{2}{3}},$$

значит при t_0, удовлетворяющем (16) справедливо и второе соотношение (9).

Оценки (15) позволяют выделить из последовательностей $\{U^N(x,t)\}$, $\{\theta^N(x,t)\}\{C^N(x,t)\}$ сходящиеся под последовательности. Предельным переходом при $N\to\infty$ в уравнениях системы (6) можно показать, что предельные функции $V(x,t)$, $U(x,t)$, $\theta(x,t)$, $C(x,t)$ дают обобщенное решение на промежутке $[0,t_0)$ задачи Коши для уравнений реагирующей смеси газов. Существование локального обобщенного решения доказано. Единственность доказывается составлениям однородного уравнения относительно разности двух возможных решений.

Теорема полностью доказана.

Полученные в [5] глобальные априорные оценки позволяют продолжить локальное решение на весь промежуток времени $[0,\tau]$, $0<T<\infty$. Тем самым доказано существование обобщенного решения задачи (1)-(4) «в целом » по времени.

Литература

1. Бай Ши - и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, 1964. – 301 с.
2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
3. Петров А.Н. Краевые задачи для уравнений одномерного нестационарного течения реагирующей смеси газов // – 1993. – Вып.107. – С.112–123.
4. Искендерова Д.А. Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Бишкек. – 2001. – № 3(26) – С. 62–67.
5. Искендерова Д.А., Токторбаев А.М. Разрешимость уравнений реагирующей смеси газов в неограниченной области // Труды шестого совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. – Алматы, 2009. – С. 183 – 190.

УДК 519.6

Турсунов Д.А., ОшГУ, Б.М. Шумилов, ТомГУ,
А.Ж. Кудуев, Э.А.Турсунов, ОшГУ

Мультивейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка

Макалада эрмиттин жетинчи даражадагы сплайнынын жардамында мультивейвлеттер тургузулду. Бул мультивейвлеттердин өзгөчөлүгү алар экинчи тартиптеги туундулары менен өз ара ортогоналдуу, C^3 классына таандык жана алардын суперкомпактуу таянычка ээ [-1,1]. Төрт мультивейвлейттин экөөсү симметриялуу, ал эми калган экөөсү антисимметриялуу. Тургузулган жаңы типтеги мультивейвлеттерди сандык анализде, сигналдарды анализдөөдө ж.б. колдонууго болот.

В статье с помощью эрмитовых сплайнов седьмой степени построены новые мультивейвлеты. Особенностью этих мультивейвлетов являются то, что они ортогональны с производными второго порядка, принадлежат классу C^3 и имеют суперкомпактный носитель [–1,1]. Из четырех построенных мультивейвлетов два симметричны, а остальные антисимметричны. Построенные мультивейвлеты нового типа могут быть применены в численном анализе, в обработке сигналов и др.

In this article with use of Hermitian spines of seventh degree new multiwavelets are built. A feature of these multiwavelets is that they are orthogonal according to the second order derivative, are of class C3 and have super compact support [–1,1]. From the four built multiwavelets, the two are symmetrical, and the others antisymmetric. Built new type multiwavelets can be used in numerical analysis, signal processing, etc.

Введение. В конце прошлого века возникло и успешно развивается новое и важное направление в теории и технике обработки сигналов, изображений и временных рядов, получившее название вейвлет-преобразование (ВП), которое хорошо приспособлено для изучения структуры неоднородных процессов.

Термин вейвлет (wavelet), введенный впервые Морле (J. Morlet), образован из двух частей – корня wave (волна) и уменьшительного суффикса – let. Их работа послужила началом интенсивного исследования вейвлетов в последующее десятилетие рядом ученых таких, как Добеши (Dobechies), Мейер (Meyer), Малл (Mallat), Фарж (Farge), Чуи (Chui) и др. Таким образом, непосредственный перевод звучит как маленькая, или короткая волна. Малость относится к условию, что эта функция имеет конечную длину (компактный носитель). Волна относится к условию, что функция колебательная (осциллирующая). К вейвлету можно применить две операции: сдвиг, т.е. перемещение области его локализации во времени; масштабирование (растяжение или сжатие), т.е. перемещение области его локализации по частоте. Использование этих операций, с учетом свойства локальности вейвлета в частотно-временной области, позволяет анализировать данные на различных масштабах и точно определять положение их характерных особенностей во времени.

Вейвлеты обладают существенными преимуществами по сравнению с преобразованием Фурье, потому что с их помощью можно анализировать кратковременные локальные особенности сигналов, например, короткие всплески или провалы, разрывы и ступеньки и т.д. Уникальные свойства вейвлетов позволяют сконструировать базис, в котором представление данных может выражаться небольшим количеством ненулевых коэффициентов. Это свойство делает вейвлеты привлекательными для сжатия данных, в том числе видео- и аудиоинформации. Вейвлет-преобразование можно представить как один из методов первичной обработки сигнала для повышения эффективности его сжатия. Непосредственно сжатие выполняется после этой предобработки классическими методами. При этом сжатие выполняется для коэффициентов вейвлет-разложения сигнала, а его реконструкция по этим коэффициентам производится на этапе восстановления (декомпрессии). Сжатие вейвлет-разложения сигнала более эффективно, чем сжатие исходного сигнала.

Ингрид Добеши впервые построила ортонормальные вейвлеты неполиномиального типа с компактным носителем [1]. Чуи и др. построили полуортогональные сплайн-вейвлеты. Коэн и др. построили биортогональные вейвлеты [2]. Недостатками данных вейвлетов является то, что они не имеют аналитического представления и графически похожи на фрактальные кривые, либо

определены на достаточно большом носителе. И то, и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения задач численного анализа. В ряде работ уменьшение носителя достигалось построением эрмитовых сплайн-мультивейвлетов, у которых с каждым узлом связано более одной базисной функции. В частности, в [3] было доказано, что полуортогональные кубические мультивейвлеты на суперкомпактном носителе, равном носителю базисного сплайна, можно построить относительно скалярного произведения $\langle u', v' \rangle$. В работе [4] нами были представлены мультивейвлеты пятой степени, ортогональные с производными второго порядка. В работе [5] нами построен новый тип мультивейвлетов седьмой степени, ортогональных с производными третьего порядка. Эти свойство можно использовать для приближенного решения дифференциальных уравнений третьего и шестого порядка. В данной работе мы построим эрмитовы мультивейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка. Например, наши мультивейвлеты удачно подходят для численного решения задачи Дирихле (Неймана) для дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков.

Все обозначения те же, что и в работах [3–5]. Пусть ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 и ϕ_4 базисные эрмитовы сплайны седьмой степени:

$$\phi_1(t)=\begin{cases}(t+1)^4\left(1-4t+10t^2-20t^3\right) & \text{при } -1\le t\le 0\\ (1-t)^4\left(1+4t+10t^2+20t^3\right) & \text{при } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases};$$

$$\phi_2(t)=\begin{cases}(t+1)^4\left(t-4t^2+10t^3\right) & \text{при } -1\le t\le 0\\ (1-t)^4\left(t+4t^2+10t^3\right) & \text{при } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases};$$

$$\phi_3(t)=\begin{cases}(t+1)^4\left(t^2/2-2t^3\right) & \text{при } -1\le t\le 0\\ (1-t)^4\left(t^2/2+2t^3\right) & \text{при } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases};\quad \phi_4(t)=\begin{cases}(t+1)^4t^3/6 & \text{при } -1\le t\le 0\\ (1-t)^4t^3/6 & \text{при } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}.$$

Заметим, что ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 и $\phi_4\in C^3$,
$\phi_1(0)=1$ $\phi'_1(0)=\phi''_1(0)=\phi'''_1(0)=0$; $\phi_2(0)=\phi''_2(0)=\phi'''_2(0)=0$, $\phi'_2(0)=1$;
$\phi_3(0)=\phi'_3(0)=\phi'''_1(0)=0$, $\phi''_3(0)=1$; $\phi_4(0)=\phi'_4(0)=\phi''_4(0)=0$, $\phi'''_4(0)=1$.
Следовательно, эрмитова интерполяция для функции $h\in C^3(\mathbf{R})$, имеет следующий вид:

$$u=\sum_{j\in Z}h(j)\phi_1(-j)+h'(j)\phi_2(-j)+h''(j)\phi_3(-j)+h'''(j)\phi_4(-j),$$

$\forall j\in Z$: $u(j)=h(j)$, $u'(j)=h'(j)$, $u''(j)=h''(j)$, $u'''(j)=h'''(j)$, Z– множество целых чисел.
Из [6] имеем:

$$\Phi(t)=\sum_{j=-1}^{1}C(j)\Phi(2t-j),\qquad t\in R,$$

где

$$C(-1)=\frac{1}{384}\begin{pmatrix}252 & 360 & -360 & -1440\\ -96 & -84 & 360 & 720\\ 15 & 6 & -78 & -72\\ -1 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix},\ C(0)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C(1)=\frac{1}{384}\begin{pmatrix}252 & -360 & -360 & 1440\\ 96 & -84 & -360 & 720\\ 15 & -6 & -78 & 72\\ 1 & 0 & -6 & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть S представляет собой инвариантное пространство сдвигов, порожденное ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 и ϕ_4. Функция g принадлежит пространству S тогда и только тогда, когда существуют последовательности b_1, b_2, b_3, b_4 на $\mathbf{Z}$, для которых выполняется равенство:

$$g=\sum_{j\in Z}\left(b_1(j)\phi_1(-j)+b_2(j)\phi_2(-j)+b_3(j)\phi_3(-j)+b_4(j)\phi_4(-j)\right).$$

Пусть $S_1=\{g(2\cdot): g\in S\}$, тогда $S\subset S_1$. Мы ищем пространство вейвлетов W, для которого $S_1=S\oplus W$. При этом мы хотим найти четыре вейвлета ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 так что их сдвиги порождают W. Для этого мы потребуем выполнение равенств

$$\langle \psi''_k, \phi''_m(-j)\rangle=0,\ k,m=1,2,3,4.\ \forall j\in\mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Для начала вычислим скалярные произведения $\langle \psi''_k, \phi''_m(-j)\rangle$, $k,m=1,2,3,4.\ \forall j\in\mathbf{Z}$.
Заметим, что

$$\phi''_1(t)=\begin{cases}-840t^5-2100t^4-1680t^3-420t^2 & \text{при } -1\le t\le 0\\ 840t^5-2100t^4+1680t^3-420t^2 & \text{при } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases};\quad \phi''_2(t)=\begin{cases}420t^5+1080t^4+900t^3+240t^2 & \text{при } -1\le t\le 0\\ 420t^5-1080t^4+900t^3-240t^2 & \text{при } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases};$$

$$\phi''_3(t)=\begin{cases}-84t^5-225t^4-200t^3-60t^2+1 & \text{при } -1\le t\le 0\\ 84t^5-225t^4+200t^3-60t^2+1 & \text{при } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases};\quad \phi''_4(t)=\begin{cases}7t^5+20t^4+20t^3+8t^2+t & \text{при } -1\le t\le 0\\ 7t^5-20t^4+20t^3-8t^2+t & \text{при } 0\le t\le 1\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}.$$

Предположим, что

$$\psi(t)=\sum_{j\in Z}\left[\sum_{k=1}^{4}b_k(j)\varphi_k(2t-j)\right],\ t\in R.$$

Тогда для $\forall j\in Z$ имеем:

$$\left\langle \psi'', \varphi''_1(\cdot-j)\right\rangle=\frac{315}{176}b_1(2j-2)-\frac{315}{88}b_1(2j)+\frac{315}{176}b_1(2j+2)-\frac{365}{176}b_2(2j-2)+\frac{85}{11}b_2(2j-1)-$$
$$-\frac{85}{11}b_2(2j+1)+\frac{365}{176}b_2(2j+2)-\frac{175}{528}b_3(2j-2)+\frac{175}{264}b_3(2j)-\frac{175}{528}b_1(2j+2)-$$
$$-\frac{5}{264}b_4(2j-2)+\frac{1}{22}b_4(2j-1)-\frac{1}{22}b_4(2j+1)+\frac{5}{264}b_4(2j+2);$$

$$\left\langle \psi'', \varphi''_2(\cdot-j)\right\rangle=\frac{125}{352}b_1(2j-2)-\frac{5}{2}b_1(2j-1)+\frac{5}{2}b_1(2j+1)-\frac{125}{352}b_1(2j+2)+\frac{1415}{1232}b_2(2j-2)-\frac{85}{22}b_2(2j-1)+$$
$$+\frac{285}{154}b_2(2j)-\frac{85}{22}b_2(2j+1)+\frac{1415}{1232}b_2(2j+2)+\frac{629}{3696}b_3(2j-2)-\frac{1}{28}b_3(2j-1)+\frac{1}{28}b_3(2j+1)-$$
$$-\frac{629}{3696}b_3(2j+2)+\frac{5}{528}b_4(2j-2)-\frac{1}{44}b_4(2j-1)+\frac{5}{264}b_4(2j)-\frac{1}{44}b_4(2j+1)+\frac{5}{528}b_4(2j+2);$$

$$\left\langle \psi'', \varphi''_3(\cdot-j)\right\rangle=-\frac{185}{1056}b_1(2j-2)+\frac{5}{4}b_1(2j-1)-\frac{1135}{528}b_1(2j)+\frac{5}{4}b_1(2j+1)-\frac{185}{1056}b_1(2j+2)-\frac{449}{2112}b_2(2j-2)+$$
$$+\frac{659}{924}b_2(2j-1)-\frac{659}{924}b_2(2j+1)+\frac{449}{2112}b_2(2j+2)-\frac{223}{7392}b_3(2j-2)+\frac{1}{56}b_3(2j-1)+\frac{95}{1848}b_3(2j)+\frac{1}{56}b_3(2j+1)-$$
$$-\frac{223}{7392}b_3(2j+2)-\frac{73}{44352}b_4(2j-2)+\frac{23}{5544}b_4(2j-1)-\frac{23}{5544}b_4(2j+1)+\frac{73}{44352}b_4(2j+2);$$

$$\left\langle \psi'', \varphi''_4(\cdot-j)\right\rangle=\frac{23}{1408}b_1(2j-2)-\frac{1}{12}b_1(2j-1)+\frac{1}{12}b_1(2j+1)-\frac{23}{1408}b_1(2j+2)+\frac{31}{2112}b_2(2j-2)-$$
$$-\frac{8}{231}b_2(2j-1)-\frac{227}{3696}b_2(2j)-\frac{8}{231}b_2(2j+1)+\frac{31}{2112}b_2(2j+2)+\frac{179}{88704}b_3(2j-2)-$$
$$-\frac{179}{88704}b_3(2j+2)+\frac{1}{9240}b_4(2j-2)-\frac{1}{5544}b_4(2j-1)-\frac{1}{12320}b_4(2j)-\frac{1}{5544}b_4(2j+1)+\frac{1}{9240}b_4(2j+2).$$

Эти неопределенные коэффициенты будем искать с помощью преобразования Лапласа, воспользовавшись тем, что сетка бесконечная.

Введем преобразование Лапласа последовательностей b_1, b_2, b_3 и b_4 на Z, так что положительная или отрицательная степень z означает сдвиг на один шаг по шаблону узлов эрмитового сплайна вправо или влево, соответственно. Пусть

$$q_{11}(z)=\sum_{j\in Z} b_1(2j+1)z^{2j+1},\ q_{12}(z)=\sum_{j\in Z} b_1(2j)z^{2j},\ q_{21}(z)=\sum_{j\in Z} b_2(2j+1)z^{2j+1},\ q_{22}(z)=\sum_{j\in Z} b_2(2j)z^{2j},$$

$$q_{31}(z)=\sum_{j\in Z} b_3(2j+1)z^{2j+1},\ q_{32}(z)=\sum_{j\in Z} b_3(2j)z^{2j},\ q_{41}(z)=\sum_{j\in Z} b_3(2j+1)z^{2j+1},\ q_{42}(z)=\sum_{j\in Z} b_3(2j)z^{2j}.$$

Тогда решение однородного функционального уравнения

$$Q(z)(q_{11}(z), q_{12}(z), q_{21}(z), q_{22}(z), q_{31}(z), q_{32}(z), q_{41}(z), q_{42}(z),)^T = 0, z \in C \setminus \{0\},,\ j \in Z,$$

будет означать, что $\langle \psi'', \varphi_m''(\cdot - j)\rangle = 0,\ m = 1,2,3,4,$

где $Q(z) = \{Q_{kj}(z)\}, k = \overline{1,4},\ j = \overline{1,8},$

$$Q_{11}(z)=0, Q_{12}(z)=\frac{315}{176}z^2-\frac{315}{88}+\frac{315}{176}z^{-2}, Q_{13}(z)=\frac{85}{11}z-\frac{85}{11}z^{-1}, Q_{14}(z)=-\frac{365}{176}z^2+\frac{365}{176}z^{-2},$$

$$Q_{15}(z)=0,\ Q_{16}(z)=-\frac{175}{528}z^2+\frac{175}{264}-\frac{175}{528}z^{-2}, Q_{17}(z)=\frac{1}{22}z-\frac{1}{22}z^{-1}, Q_{18}(z)=-\frac{5}{264}z^2+\frac{5}{64}z^{-2},$$

$$Q_{21}(z)=-\frac{5}{2}z+\frac{5}{2}z^{-1}, Q_{22}(z)=\frac{125}{352}z^2-\frac{125}{352}z^{-2}, Q_{23}(z)=-\frac{85}{22}z-\frac{85}{22}z^{-1},$$

$$Q_{24}(z)=\frac{1415}{1232}z^2+\frac{285}{154}+\frac{1415}{1232}z^{-2}, Q_{25}(z)=-\frac{1}{28}z+\frac{1}{28}z^{-1},\ Q_{26}(z)=\frac{629}{3696}z^2-\frac{629}{3696}z^{-2},$$

$$Q_{27}(z)=-\frac{1}{44}z-\frac{1}{44}z^{-1}, Q_{28}(z)=-\frac{5}{528}z^2+\frac{5}{264}+\frac{5}{528}z^{-2},$$

$$Q_{31}(z)=\frac{5}{4}z+\frac{5}{4}z^{-1},\ Q_{32}(z)=-\frac{185}{1056}z^2-\frac{1135}{528}-\frac{185}{1056}z^{-2}, Q_{33}(z)=\frac{659}{924}z-\frac{659}{924}z^{-1}, Q_{34}(z)=-\frac{449}{2112}z^2+\frac{449}{2112}z^{-2},$$

$$Q_{35}(z)=\frac{1}{56}z+\frac{1}{56}z^{-1},\ Q_{36}(z)=-\frac{223}{7392}z^2+\frac{95}{1848}-\frac{223}{7392}z^{-2}, Q_{37}(z)=\frac{23}{5544}z-\frac{23}{5544}z^{-1}, Q_{38}(z)=-\frac{73}{4452}z^2+\frac{73}{4452}z^{-2}$$

$$Q_{41}(z)=-\frac{1}{12}z+\frac{1}{12}z^{-1},\ Q_{42}(z)=\frac{23}{1408}z^2-\frac{23}{1408}z^{-2}, Q_{43}(z)=-\frac{8}{231}z-\frac{8}{231}z^{-1},$$

$$Q_{44}(z)=\frac{31}{2112}z^2-\frac{227}{3696}+\frac{31}{2112}z^{-2}, Q_{45}(z)=0,\ Q_{46}(z)=\frac{179}{88704}z^2-\frac{179}{88704}z^{-2},$$

$$Q_{47}(z)=\frac{1}{5544}z-\frac{1}{5544}z^{-1}, Q_{48}(z)=\frac{1}{9240}z^2-\frac{1}{12320}+\frac{1}{9240}z^{-2}.$$

Система имеет бесконечное множество решений. Из них можно подобрать четыре независимых решения:

$$\begin{pmatrix} q_{11}(z) \\ q_{12}(z) \\ q_{21}(z) \\ q_{22}(z) \\ q_{31}(z) \\ q_{32}(z) \\ q_{41}(z) \\ q_{42}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64\,z^{-1}+64\,z \\ 32 \\ 1155\ z^{-1}-1155\ z \\ 0 \\ -3360\ z^{-1}-3360\ z \\ 0 \\ -195090\ z^{-1}+195090\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11}(z) \\ q_{12}(z) \\ q_{21}(z) \\ q_{22}(z) \\ q_{31}(z) \\ q_{32}(z) \\ q_{41}(z) \\ q_{42}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -61\,z^{-1}+61\,z \\ 0 \\ -917\,z^{-1}-917\,z \\ 224 \\ 3570\ z^{-1}-3570\ z \\ 0 \\ 166110\ z^{-1}+166110\ z \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_{11}(z) \\ q_{12}(z) \\ q_{21}(z) \\ q_{22}(z) \\ q_{31}(z) \\ q_{32}(z) \\ q_{41}(z) \\ q_{42}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\,z^{-1} + 15\,z \\ 0 \\ 196\,z^{-1} - 196\,z \\ 0 \\ -966\,z^{-1} - 966\,z \\ 672 \\ -38220\,z^{-1} + 38220\,z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{11}(z) \\ q_{12}(z) \\ q_{21}(z) \\ q_{22}(z) \\ q_{31}(z) \\ q_{32}(z) \\ q_{41}(z) \\ q_{42}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,z^{-1} + 3\,z \\ 0 \\ -35\,z^{-1} - 35\,z \\ 0 \\ 210\,z^{-1} - 210\,z \\ 0 \\ 7350\,z^{-1} + 7350\,z \\ 3360 \end{pmatrix}.$$

Эти четыре решения порождают четыре материнских вейвлета $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$:

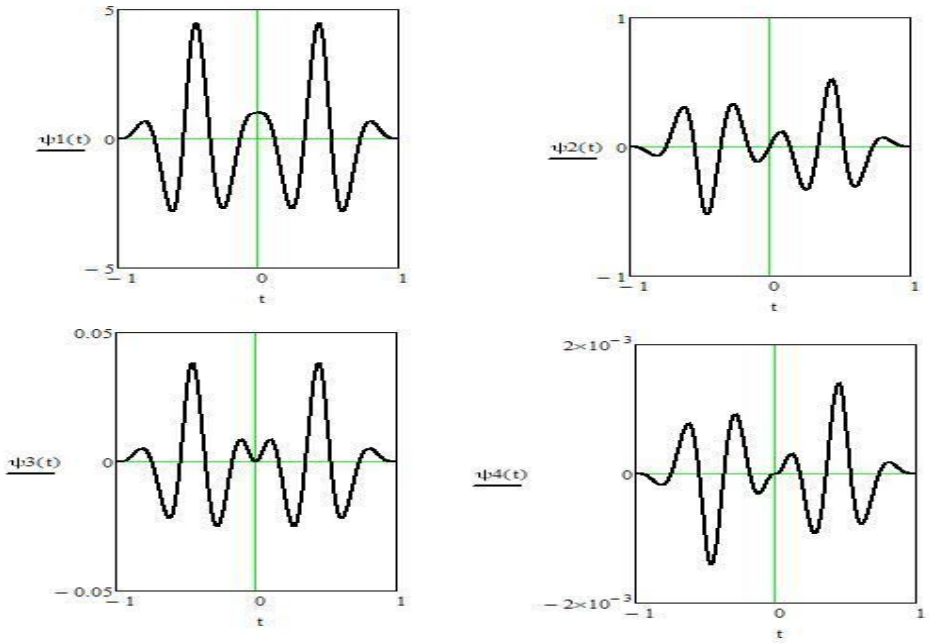
$\psi_1(t)=64\phi_1(2t+1)+64\phi_1(2t-1)+32\phi_1(2t)+1155\phi_2(2t+1)-1155\phi_2(2t-1)-3360\phi_3(2t+1)-$
$-3360\phi_3(2t-1)-195090\phi_4(2t+1)+195090\phi_4(2t-1);$

$\psi_2(t)=-61\phi_1(2t+1)+61\phi_1(2t-1)-917\phi_2(2t+1)-917\phi_2(2t-1)+224\phi_2(2t)+3570\phi_3(2t+1)-$
$-3570\phi_3(2t-1)+166110\phi_4(2t+1)+166110\phi_4(2t-1);$

$\psi_3(t)=15\phi_1(2t+1)+15\phi_1(2t-1)+196\phi_2(2t+1)-196\phi_2(2t-1)-966\phi_3(2t+1)-$
$-966\phi_3(2t-1)+672\phi_3(2t)-38220\phi_4(2t+1)+38220\phi_4(2t-1);$

$\psi_4(t)=-3\phi_1(2t+1)+3\phi_1(2t-1)-35\phi_2(2t+1)-35\phi_2(2t-1)+210\phi_3(2t+1)-$
$-210\phi_3(2t-1)+7350\phi_4(2t+1)+7350\phi_4(2t-1)+3360\phi_4(2t).$

Носителями построенных вейвлетов ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 является отрезок $[-1,1]$, они удовлетворяют условию (1), и их сдвиги генерируют пространство вейвлетов W, так что S_1 является прямой суммой S и W. Кроме, того ψ_1, ψ_3 –симметричны, а ψ_2, ψ_4 – антисимметричны.



Литература

1. Cohen A., Doubeshies, and P. Vial, Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, appl.comput.harmonic anal. 1(1993) 54-81.
2. W. Dahmen, Han R,Q. Jia and A. Kunoth , Biorthogonal multiwavelets on the interval: Cubic Hermite splines, Constr. Approx. 16(2000) 221-259.
3. Jia R.-Q., Liu S.-T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics, 2006, v. 25, p. 23-39.

4. Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Эшаров Э.А., Турсунов Э.А. Новый тип эрмитовых мультивейвлетов пятой степени / Пятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям / Под ред. Проф. А.В. Старченко. – Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2010, с. 101-105.
5. Турсунов Д.А., Шумилов Б.М. Новый тип эрмитовых сплайн-вейвлетов седьмой степени. Материалы 14-го всероссийского семинара “Моделирование неравномерных систем”, Красноярск 2011, С.176-181.
6. Vasily Strela. Multiwavelets: Theory and Applications. Massachusetts institute of technology. Submitted to the Department of Mathematics in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics, 99 p.

УДК 625.7:519.6

Турсунов Э.А., ОшГУ, Колупаев М.В., НИУ «Высшая школа экономики», Шумилов Б.М., ТомГАСУ

Применение мультивейвлетов и графического процессора при визуализаций данных лазерного сканирования автомобильных дорог[1]

Макалада эки ченемдүү графикалык объекттерди анализдөөдө жана синтездөөнүн көп масштабтуу усулдарын ортогоналдуу мультивейвлеттердин өзгөртүп түзүүсүнүн параллел бөлүштүрүүсүнүн негизинде ишке ашырылган. Моделдештирүү чыныгы убакытта иштейт, негизги эсептөөлөр үчүн видеокарта колдонулат бул өндүрүмдүүлүктү маанилүү артырат.

В работе предлагается реализация многомасштабных методов анализа и синтеза двумерных графических объектов, основанная на распараллеливании ортогонального мультивейвлет-преобразования. Моделирование работает в реальном времени и использует видеокарту для основного объема вычислений, что обеспечивает существенный прирост производительности.

This paper proposes a multi-scale implementation of the methods of analysis and synthesis of two-dimensional graphics based on parallelizing multiveyvlet orthogonal transformation. Simulation runs in real time and uses the card for the bulk of the computation, which provides a significant performance increase.

Введение. Повышение эффективности обработки информации является актуальной задачей компьютерной графики. Требования к реалистичности генерируемых изображений постоянно растут, что, в конечном итоге, приводит к росту вычислительных затрат. В то же время, для многих приложений (например, визуализации данных лазерного сканирования автомобильных дорог [1]) необходима очень высокая скорость обработки графической информации. Один из путей повышения эффективности обработки информации – применение методов, основанных на многомасштабном представлении графических объектов. Многомасштабное представление – это многослойная структура, первый слой которой содержит информацию, достаточную для грубого (с низким разрешением) приближения объекта; при добавлении информации из каждого последующего слоя степень детализации постепенно увеличивается, пока объект не будет восстановлен полностью (то есть с максимальным разрешением). Например, одним из популярных форматов для Интернет является GIF (Graphic Interchange Format), предложенный фирмой CompuServe (1987 г.). К числу самых заметных отличий формата GIF относится возможность использования режима постепенного проявления изображения (т.н. прогрессивная передача). В этом режиме строки изображения выводятся на экран не подряд, а в определенном порядке: сначала каждая 8-я, затем – 4-я и т. д. Таким образом, полностью изображение показывается в четыре прохода, что позволяет еще до полной загрузки изображения понять его суть, и, в случае необходимости, прервать его закачку [2].

В [3] нами рассматривались методы решения задач обработки и сжатия данных лазерного сканирования автомобильных дорог на основе неортогонального мультивейвлет-преобразования.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-07-90910-мол_снг_нр)

В настоящей работе предлагается реализация многомасштабных методов анализа и синтеза двумерных графических объектов, основанная на распараллеливании ортогонального мультивейвлет-преобразования. Моделирование работает в реальном времени и использует видеокарту для основного объема вычислений, что обеспечивает существенный прирост производительности.

Постановка задачи. Вейвлеты служат полезным инструментом в обработке данных, в том числе сжатия изображения, устранения шумов, визуализации графических объектов и пр. [4]. Ранее использовались только скалярные вейвлеты. Мультивейвлеты имеют некоторые преимущества по сравнению со скалярными. Например, такие свойства как компактный носитель, ортогональность, симметрия, нулевые моменты, как известно, являются важными в обработке сигналов. Скалярный вейвлет не может обладать всеми этими свойствами в одно и то же время [5]. С другой стороны, система, основанная на мультивейвлетах, может иметь все из них одновременно. Это означает, что мультивейвлеты могут обеспечивать совершенную реконструкцию (за счет ортогональности), хорошую эффективность на границах сигнала (за счет симметрии) и высокий порядок приближения (за счет большого числа нулевых моментов), так что они могут действовать при обработке сигналов и изображений лучше, чем скалярные [6].

Основой для построения любого вейвлет-преобразования является набор вложенных пространств $...V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1}....$ В частности, в [7] с использованием идей фрактальной интерполяции были построены непрерывные ортогональные симметричные мультимасштабирующие функции $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ с компактными носителями [0,1] и [0,2], соответственно (рис.1).

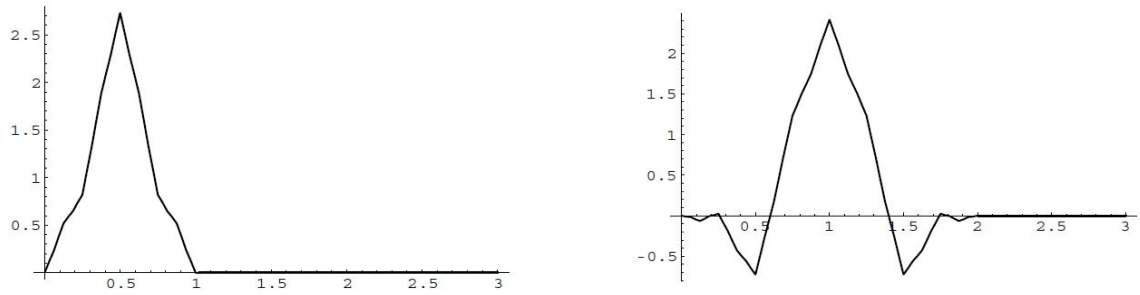


Рис. 1. Графики симметричных ортогональных мультимасштабирующих функций (слева – $\varphi_0(t)$, справа – $\varphi_1(t)$)

Сдвиги данных функций обеспечивают второй порядок приближения. Это означает, что и константа и линейная функция могут быть воспроизведены точно, что можно проверить непосредственно, вычисляя соответствующие линейные комбинации векторов $\varphi(t) = [\varphi_0(t)\ \varphi_1(t)]^T$, взятых с коэффициентами $\mathbf{u}_0 = [\sqrt{2}\ \ 1]$, $\mathbf{u}_1 = [1/\sqrt{2}\ \ 1]$ (рис.2):

$$1 = \sum_k \mathbf{u}_0 \varphi(t-k) = ... + \sqrt{2}\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \sqrt{2}\varphi_0(t-1) + \varphi_1(t-1) + ...$$

$$t = \sum_k (\mathbf{u}_1 - k\mathbf{u}_0)\varphi(t-k) = ... + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_0(t) + \varphi_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_0(t-1) + 0 \cdot \varphi_1(t-1) + ...$$

Здесь граничные артефакты появляются, потому что для целей отрисовки данные комбинации вычисляются на конечном отрезке.

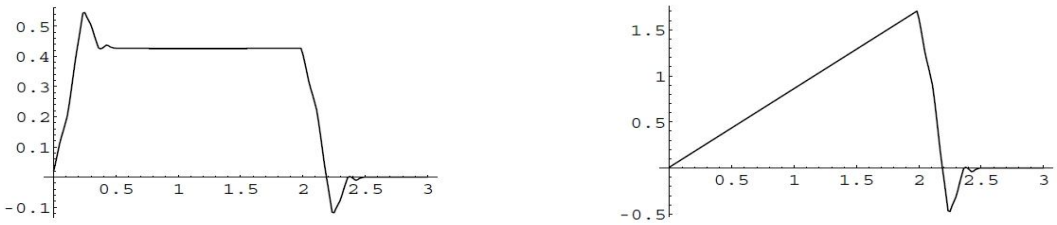


Рис. 2. Представление 1 и t с помощью линейной комбинации сдвигов мультимасштабирующих функций $\varphi_0(t),\varphi_1(t)$

Суть вейвлет-преобразования состоит в том, что оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на серию все более грубых приближенных представлений и локальных уточняющих подробностей. При этом «более грубый» уровень представления функции в V_{L-1} получается из «более подробного» уровня представления функции в V_L посредством прореживания (удаления каждого второго, как правило, отсчета). Здесь необходимо лишь, чтобы каждая базисная функция в V_{L-1} могла быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в V_L. В частности, двухмасштабное соотношение для фрактальных мультимасштабирующих функций можно записать в виде следующей векторной формулы [8]:

$$\begin{bmatrix}\varphi_0(t)\\ \varphi_1(t)\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{3}C_k\begin{bmatrix}\varphi_0(2t-k)\\ \varphi_1(2t-k)\end{bmatrix},$$

где

$$C_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5}\\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0\\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & 1\end{bmatrix},C_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix},\ C_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}.$$

Заметим, что данное двухмасштабное соотношение имеет 4 матричных коэффициента, поскольку масштабирующие функции имеют разные носители. При этом базисными функциями для V_{L-1} являются сжатия функций $\varphi_0(t),\varphi_1(t)$, с носителями в два раза большими по ширине. Следующим этапом является определение пространства уточняющих подробностей W_{L-1}. В случае ортогональных вейвлетов требуется, чтобы базисные функции из W_{L-1} были ортогональны между собой и, одновременно, ортогональны базисным функциям в V_{L-1}. Поскольку каждая функция масштабирования не может сочетать в себе одновременно симметрию и ортогональность, то соответствующее двухмасштабное соотношение содержит также четыре набора векторных коэффициентов разложения мультивейвлетов по масштабирующим функциям [7, 8]:

$$f_0^1=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -3\\ 1 & 3\sqrt{2}\end{bmatrix},\ f_1^1=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}\frac{9}{\sqrt{2}} & -10\\ -9 & 0\end{bmatrix},f_2^1=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}\frac{9}{\sqrt{2}} & -3\\ 9 & -3\sqrt{2}\end{bmatrix},\ f_3^1=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

и, следовательно, существуют два семейства мультивейвлетов $\psi_0(t),\psi_1(t)$ с носителями [0, 2] (рис.3)

$$\begin{bmatrix}\psi_0(t)\\ \psi_1(t)\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{3}f_k^1\begin{bmatrix}\varphi_0(2t-k)\\ \varphi_1(2t-k)\end{bmatrix}.$$

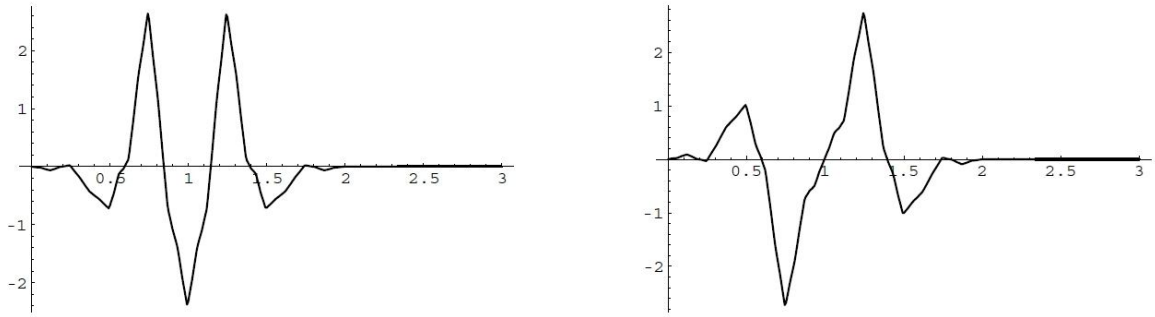


Рис. 3. Вид симметричного и несимметричного «материнских» вейвлетов
(слева – $\psi_0(t)$, справа – $\psi_1(t)$)

Предварительная обработка входных данных. Техника применения мультивейвлетов отличается от случая скалярных вейвлетов в том, что она требует нескольких входных потоков на входе в блок фильтров. В [6] описан метод аппроксимации/интерполяции для получения такого векторного входного потока из исходного одномерного сигнала, а также разработаны алгоритмы для симметричного расширения сигнала вблизи границ.

Пусть функция $f(t)$ принадлежит масштабирующему подпространству V_0, порожденному сдвигами фрактальных масштабирующих функций. Это означает, что $f(t)$ – линейная комбинация этих сдвигов:

$$f(t)=\sum_n v_{1,n}^{(0)}\varphi_0(t-n)+v_{2,n}^{(0)}\varphi_1(t-n). \qquad (1)$$

Предположим, что входная последовательность $f[n]$ содержит отсчеты $f(t)$ в полуцелых числах: $f[2n]=f(n),\quad f[2n+1]=f(n+1/2)$.

Носитель $\varphi_0(t)$ – отрезок [0,1], так что он обнуляется во всех целочисленных точках. Носитель $\varphi_1(t)$ – отрезок [0,2], и он отличен от нуля в 1. Выборка (1) в целых и полуцелых числах дает $f[2n]=\varphi_1(1)v_{2,n}$,

$$f[2n+1]=\varphi_1(3/2)v_{2,n}+\varphi_0(1/2)v_{1,n+1}+\varphi_1(1/2)v_{2,n+1}. \qquad (2)$$

Коэффициенты $v_{1,n}, v_{2,n}$ могут быть найдены из (2)

$$v_{1,n}=\frac{\phi_1(1)f[2n-1]-\varphi_1(1/2)f[2n-2]-\varphi_1(3/2)f[2n]}{\varphi_1(1)\varphi_0(1/2)},\qquad v_{2,n}=\frac{f[2n]}{\varphi_1(1)}.$$

Принимая во внимание симметрию $\varphi_1(t)$ $(\varphi_1(1/2)=\varphi_1(3/2))$, нетрудно получить

$$v_{1,n}=\frac{\varphi_1(1)f[2n-1]-\varphi_1(1/2)(f[2n-2]+f[2n])}{\varphi_1(1)\varphi_0(1/2)},\ v_{2,n}=\frac{f[2n]}{\varphi_1(1)}. \qquad (3)$$

Соотношения (3) дают естественный способ получить две входных строки $v_{1,n}, v_{2,n}$ исходя из одного заданного сигнала $f[n]$. Данный способ предварительной обработки сохраняет неизменным число обрабатываемых данных в отличие, например, от простого удваивания строк на входе мультивейвлет-обработки.

Другое преимущество метода предварительной обработки, основанного на аппроксимации, – в том, что этот метод естественно сочетается с требованием симметричного расширения для мультивейвлетов. Другими словами, если мы симметрично продолжим сигнал

$f[n]$ конечной длины за его границы и применим аппроксимационные формулы (3), то две строки $v_{1,n}^{(0)}, v_{2,n}^{(0)}$ на входе мультивейвлет-обработки будут иметь соответствующую симметрию.

Мультивейвлет-обработка двухмерных сигналов, как обычно, сводится к взятию тензорного произведения описанных выше одномерных методов (по каждому направлению отдельно). При этом возникает особенность, состоящая в том, что для случая обработки постоянного сигнала, $f[n]=1$, две строки половинного размера имеют значения $f[2n]=1$ и $f[2n]=\sqrt{2}$, в соответствии с вектором $\mathbf{u}_0$. Чтобы преодолеть это рассогласование, в [6] предлагалось каждый раз интерполировать выход горизонтального блока мультивейвлет-фильтра, для того чтобы создать две строки выходов (один аппроксимирующий, другой детализирующий) перед действием в перпендикулярном направлении. Вертикальный выход трансформируют аналогично прежде, чем применяется следующий уровень каскадного алгоритма.

Реализация. Приложение разработано на языке C с использованием компилятора Microsoft Visual Studio [9]. Работа с видеокартой происходит с использованием технологии CUDA [10].

Все массивы (сплайн-коэффициентов и вейвлет-коэффициентов) хранятся в виде текстур из 32-битных чисел [11]. Также создаются текстуры с вспомогательными таблицами констант для алгоритма вейвлет-преобразования [12]. Для обработки массивов данных используется рендеринг прямоугольника в текстуру. Для визуализации используется простой вывод полей яркостей для каждого цвета.

Программа позволяет в интерактивном режиме моделировать и визуализировать поверхность автомобильной дороги по данным лазерного сканирования. Можно влиять на форму поверхности, используя мышь. Скорость работы на видеокарте ATI Radeon HD 4870 составляет около 280 кадров в секунду на сетке 512x512 узлов и около 70 кадров в секунду на сетке 1024x1024 узлов. Таким образом, в реальном времени возможно моделирование с большой детализацией.

Заключение. С помощью методов, основанных на многомасштабном мультивейвлет-представлении, могут быть решены две основные проблемы обработки изображений – это удаление шумов посредством пороговой отбраковки мультивейвлет-коэффициентов и сокращение объемов данных за счет удаления избыточной и несущественной информации, снижая, тем самым, вычислительные затраты на последующую обработку. Алгоритмы обработки многомасштабных представлений, основанные на вейвлет-анализе (или анализе всплесков), достаточно просты и эффективны в реализации. При этом эффективность мультивейвлетов часто оказывается лучше, чем эффективность сравнимых по трудоемкости скалярных вейвлет-преобразований.

Литература

1. Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Байгулов А.Н., Колупаева С.Н. Предварительная обработка материалов лазерного сканирования автомобильных дорог // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета, №3(32), 2011, с. 184-191.
2. Дегтярев В. Компьютерная геометрия и графика. – М.: Издательство «Академия». – 2010. – 192 с.
3. Бекмуратов А.Т., Онопенко Г.А., Кудуев А.Ж., Шумилов Б.М., Эшаров Э.А. Вейвлет-преобразование и сжатие данных лазерного сканирования автомобильных дорог // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета, №4(33), 2011, с. 184-191.
4. Переберин А.В. Многомасштабные методы синтеза и анализа изображений. Дисс. на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша. – 2002. 138 с.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 332 с.
6. Strela V. Multiwavelets: Theory and Applications. - Massachusetts Institute of Technology, 1996. - 99 p. / Submitted to the Department of Mathematics in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics.

7. Geronimo J., Hardin D., Massopust P. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions, J. Approx. Theory 78 (1994) 373{401
8. Strang G., Strela V. Short wavelets and matrix dilation equations, IEEE Trans. on SP. 43 (1995) 108-115.
9. William H. Press. Numerical recipes in C: the art of scientific computing. / H.William. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 994 p.
10. Харламов А. А., Боресков А. В. Основы работы с технологией CUDA. – М.: ДМК-Пресс. – 2010. – 231 с.
11. GPU gems: programming techniques, tips, and tricks for real-time graphics. / editor Randima Fernando. – Boston: Addison-Wesley, 2004. – 765 p.
12. GPU gems 2. / Randima Fernando, Matt Pharr, Hubert Nguyen etc. – Boston: Addison-Wesley, 2007. – 880 p.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №12-07-90910-мол_снг_

УДК:517.928

Халматов А., ОГСУ

Аналог метода погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка

Макалада тиешелүү козголбогон теңдеме өзгөчө чекитте бүтүн уюлга ээ болгондогу Лайтхилдин моделдик теңдемесинин чыгарышын асимптотикасынын куру үчүн Вишик-Люстерник-Иманалиевдин чек аралык функциялар методуна окшош (аналогу) методунун колдонулуу мүмкүнчүлүгү далилденген.

В работе доказана возможность применения метода, который аналогичен методу погранфункций Вишика-Люстерника-Иманалиева, для построения асимптотики решения модельного уравнения Лайтхилла, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет полюс целого в особой точке.

Analogue of method of boundary layer function for the Lighthill's model equation in the case when corresponding unperturbed equation have pole entire order in the singular point

It is proved the possibility of the validity analogue of method of boundary layer function for the construct of the asymptotic of solution of the Lighthill's model equation with the regular singular point.

Сингулярно возмущенные уравнения, соответстующие невозмущенные уравнения которых имеют особую точку в рассматриваемой области, впервые начал изучать Лайтхилл [1]. В работе [2] были получены параметрические представления решений модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. В работе [3] асимптотика решения таких уравнений была получена методом структурного сращивания.

Метод погранфункций [4-8] применяется для построения асимптотики решения сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при старших производных.

Рассмотрим задачу Коши

(1) $u(1) = u^{(0)}$,

для модельного уравнения Лайтхилла [1]

(2) $(x + \varepsilon u(x))u'(x) = q(x)u(x) + r(x)$,

где $0 < \varepsilon << 1$-малый параметр, $u^{(0)}$-заданная постоянная, $x \in [0,1]$, $u'(x) = du/dx$,

$q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$. В частности имеют место асимптотические разложения $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$,

$r(x)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k$, $q_k = q^{(k)}(0)/k!$, $r_k = r^{(k)}(0)/k!$. Эти равенства понимаются в асимптотическом смысле. В [9] рассмотрен случаи: $q_0 = -1$.

Здесь рассматривается $q(0) = -m,\ m \in N$.

Решение задачи (1)-(2) ищется в виде

(3) $u(x,\mu) = \mu^{-m}\pi_{-m}(t) + \mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t) + ... + \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + u_0(x) + \pi_0(t) + \mu(u_1(x) + \pi_1(t)) +$
$+ \mu^2(u_2(x) + \pi_2(t)) + \mu^3(u_3(x) + \pi_3(t)) + ... + \mu^n(u_n(x) + \pi_n(t)) + ...$

где $t = x/\mu, \varepsilon = \mu^{m+1}, u_k(x) \in C^{(\infty)}[0,1], \pi_k(t) \in C^{(\infty)}[0,\mu_0], \mu_0 = 1/\mu$. Отметим, что функции $\pi_k(t) = \pi_k(t,\mu)$, т.е. является функцией двух переменных t и μ, но зависимость от μ не указываем. Это видно из уравнений, из которых определяются функции $\pi_k(t)$. Начальные условия для функций $\pi_j(t)$ берем в виде

$$\pi_{-m}(\mu_0) = \mu^m b, b = u^{(0)} - u_0(1) - \mu u_1(1) - \mu^2 u_2(1) - ... - \mu^n u_n(1) - ...,$$
$$\pi_k(\mu_0) = 0, k = -m+1, -m+2, ..., 0, 1, 2, ...$$

Подставляя (3) в (1), для определения неизвестных функций $\pi_k(t), u_j(x)$, имеем уравнения

$(4.-m)$ $(t+\pi_{-m}(t))\pi'_{-m}(t) = q(\mu t)\pi_{-m}(t),\quad \pi_{-m}(\mu_0) = b\mu^m,$

$(4.-m+1)$ $D\pi_{-m+1}(t) := (t+\pi_{-m}(t))\pi'_{-m+1}(t) + (\pi'_{-m}(t) - q(\mu t))\pi_{-m+1}(t) = 0,\ \pi_{-m+1}(\mu_0) = 0,$

$(4.-m+2)$ $D\pi_{-m+2}(t) := -\pi_{-m+1}(t)\pi'_{-m+1}(t),\ \pi_{-m+2}(\mu_0) = 0,$

$(4.-m+3)$ $D\pi_{-m+3}(t) := -\pi_{-m+1}(t)\pi'_{-m+2}(t) - \pi_{-m+2}(t)\pi'_{-m+1}(t),\ \pi_{-m+3}(\mu_0) = 0,$

$(4.-1)$ $D\pi_{-1}(t) := -\sum_{\substack{k+j=m-1 \\ k,j\in N}} \pi_{-m+k}(t)\pi'_{-m+j}(t),\qquad \pi_{-1}(\mu_0) = 0,$

(4.0) $D\pi_0(t) := -\pi_{-m}(t)u'_0(\mu t) - \pi_{-m+1}(t)\pi'_{-1}(t) - \pi_{-m+2}(t)\pi'_{-2}(t) - \pi_{-m+3}(t)\pi'_{-3}(t) - ... -$
$-\pi_{-2}(t)\pi'_{-m+2}(t) - \pi_{-1}(t)\pi'_{-m+1}(t) - u_0(\mu t)\pi'_{-m}(t),\qquad \pi_0(\mu_0) = 0,$

(5.0) $Lu_0(x) := xu_0'(x) - q(x)u_0(x) = r(x)$

(4.1) $D\pi_1(t) := -\pi_{-m}(t)u'_0(\mu t) - \pi_{-m+1}(t)\pi'_0(t) - \pi_{-m+2}(t)\pi'_{-1}(t) - \pi_{-m+3}(t)\pi'_{-2}(t) - ... -$
$-\pi_{-2}(t)\pi'_{-m+3}(t) - \pi_{-1}(t)\pi'_{-m+2}(t) - (u_0(\mu t) + \pi_0(t))\pi'_{-m+1}(t) - u_1(\mu t)\pi'_{-m}(t), \pi_0(\mu_0)$

(5.1) $Lu_1(x) := 0$

....

$(4.m-1)$ $D\pi_{m-1}(t) := -\pi_{-m}(t)u'_{m-2}(\mu t) - u_{m-1}(\mu t)\pi'_{-m}(t) - \sum_{\substack{k+j=-2 \\ k\in Z,\, k\ge 1-m}} (u_k(\mu t) + \pi_k(t))(u'_j(\mu t) + \pi'_{j+1}(t)),$
$\pi_{m-1}(\mu_0) = 0$

$(5.m-1)$ $Lu_{m-1}(x) := 0$

$(4.m)$ $D\pi_m(t) := -\pi_{-m}(t)u'_{m-1}(\mu t) - u_{m-1}(\mu t)\pi'_{-m}(t) - \sum_{\substack{k+j=-1 \\ k\in Z,\, k\ge 1-m}} (u_k(\mu t) + \pi_k(t))(u'_j(\mu t) + \pi'_{j+1}(t)),$
$\pi_m(\mu_0) = 0,\ (u_\nu(t) \equiv 0,\ \nu < 0)$

$(5.m)$ $\quad Lu_m(x):=0$

$(4.m+1)$ $\quad D\pi_{m+1}(t):=-\pi_{-m}(t)u'_m(\mu t)-u_{m+1}(\mu t)\pi'_{-m}(t)-\sum_{\substack{k+j=0\\ k\in Z,\,k\geq 1-m}}(u_k(\mu t)+\pi_k(t))(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)),$

$\pi_{m+1}(\mu_0)=0,\ (u_\nu(t)\equiv 0,\ \nu<0)$

$(5.m+1)$ $\quad Lu_{m+1}(x):=0, \qquad u_{m+1}(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$

……. ……………………………………………………………………..

$(4.s)$ $\quad D\pi_s(t):=-\pi_{-m}(t)u'_{s-1}(\mu t)-u_{s-1}(\mu t)\pi'_{-m}(t)-\sum_{\substack{k+j=s-(m+1)\\ k\in Z,\,k\geq 1-m}}(u_k(\mu t)+\pi_k(t))(u'_j(\mu t)+\pi'_{j+1}(t)),$

$\pi_s(\mu_0)=0,\ (u_\nu(t)\equiv 0,\ \nu<0)$

$$(5.m+1) \quad Lu_s(x):=\begin{cases}0, & s\neq(m+1)l,\ l\in N\\ -\sum\limits_{\substack{i+j=l-1\\ i\geq 0,\ j\geq 0}}u_i(x)u'_j(x), & s=(m+1)l,\end{cases} \qquad u_s(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$$

……………………………………………………………………………

Теперь будем решать эти задачи последовательно.

Теорема 1. При условии $b>0$ задача (4.m) имеет единственное ограниченное положительное решение на отрезке $[0,\,\mu_0]=I$ и $\pi_{-m}(t)\leq\frac{l}{t^m}$, $\left|\pi_{-m}{}'(t)\right|\leq\frac{l}{t^{m+1}}$ $\quad (t>0)$

Здесь и далее постоянные не зависящие от малого параметра обозначим через $l,l_0,l_1,l_2,\ldots.$.

Доказательство. Уравнение (4.m) перепишем в виде

$$Qz:=(t+z)z'(t)+mz=h(t,z), \quad z(\mu_0)=b\mu^m \tag{7}$$

где $h(t,z)=(m+q(\mu(t))z$

Задача

$$Qz:=(t+z)z'(t)+mz=0, \quad z(\mu_0)=b\mu^m$$

имеет решение

$$t=c_0\xi^{-1/m}-\frac{\xi}{1+m}:=\psi(\xi,c_0), \tag{8}$$

где $c_0=b^{1/m}+b^{\frac{1+m}{m}}\dfrac{\mu^{m+1}}{1+m}$, $\quad \xi_0=\xi(0)=\left[c_0(1+m)\right]^{\frac{m}{m+1}}$, $\xi(\mu_0)=b\mu^m$

Так, как $t'(\xi)<0$ при $\xi\in[\xi_0,c_0]$, то существует единственная строго убывающая функция $\xi=\psi^{-1}(t,c_0):=\varphi(t,c_0),\ t\in[0,\mu_0]$. Из (8) вытекает, что

$$\xi(t)<\frac{c_0^m}{t^m} \quad (t>0)\,. \tag{9}$$

Решение задачи (7) ищем методом вариации постоянной Лагранжа, т.е. в виде

$$z=\varphi(t,c)\text{, где } c=c(t)\,. \tag{10}$$

Тогда подставляя (10) в (7) для $c(t)$ имеем уравнение

$$c'(t)=\frac{h(t,\varphi(t,c))}{(t+\varphi)\varphi_c(t,c(t))}=\frac{(m+q(\mu t))\varphi(t,c)}{(t+\varphi(t,c))\varphi_c(t,c(t))}\,. \tag{11}$$

Из (8)

$$c = t\varphi^{1/m} + \frac{\varphi^{1+\frac{1}{m}}}{1+m}$$

поэтому

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi} = \frac{1}{m} t\varphi^{\frac{(1-m)}{m}}(t,c) + \frac{\varphi^{\frac{1}{m}}(t,c)}{m} = \frac{1}{m}\frac{\varphi^{\frac{1}{m}}}{\varphi}(t+\varphi). \tag{12}$$

Используя это соотношение (11) можно записать в виде

$$c'(t) = \frac{1}{m}(m+q(\mu t))\varphi^{\frac{1}{m}}(t,c) = \frac{1}{m}(m+q(\mu t))\frac{\varphi^{\frac{1}{m}}(t,c)}{c}c = \frac{1}{m}(m+q(\mu t))\frac{c}{t+\frac{\varphi}{1+m}}.$$

Отсюда, имеем

$$c = c_0 \exp\left\{(m+1)\int_{\mu_0}^{t}\frac{m+q(\mu s)}{(m+1)s+\varphi(s,c(s))}ds\right\} := F(t,c)$$

Очевидно, что $\varphi(t,c_0)$ отображает отрезок $[0,\mu_0]$ на отрезок $\left[\xi_0, b\mu^m\right]$. Оператор $F(t,c)$ отображает отрезок $J=[c_0,c_0 l]$ в себя, где

$$J = c_0 \exp\left\{(m+1)\mu\int_0^{\mu_0}\frac{ls}{(m+1)s+l_0}ds\right\} \le c_0 e^l,$$

Здесь, мы использовали неравенство $|m+q(\mu t)| \le l\mu t$.

Теперь докажем, что оператор F является сжимающим в J. Имеем

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)| = \left|c_0\exp\{(1+m)\mu\int_{\mu_0}^{t}\frac{(m+q(\mu s))ds}{(m+1)s+\varphi(s,c_1(s))}\} - c_0\exp\{(1+m)\mu\int_{\mu_0}^{t}\frac{(m+q(\mu s))ds}{(m+1)s+\varphi(s,c_2(s))}\}\right|$$

Применяя формулу Лагранжа и (12) , отсюда имеем

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)| \le l\mu\int_{t}^{\mu_0}\frac{sm\varphi^{1-\frac{1}{m}}(s,c)|c_1(s)-c_2(s)|ds}{((1+m)s+c_0)^2(S+\varphi(s))} \tag{13}$$

Для функции $c_0(t)\in[c_0,c_0 l]$ неравенство (9) выполняется, поэтому интеграл в правой части неравенства (13) разделив на два интеграла и оцелывая, получим

$$|F(t,c_1)-F(t,c_2)| \le \mu l_3\|c_1-c_2\|$$

Поэтому F является сжимающим на отрезке J. Теорема доказана.

Далее решаем последовательно задачи (4.m+k) (k=1, 2, …). Задача (4.m+1) однородная с нулевым начальным условием. Поэтому оно имеет тривиальное решение: $\pi_{-m+1}(t)=0$. Тогда задача $\pi_{-m+2}(t)$ также будет иметь нулевое решение. Аналогично, $\pi_{-m+3}(t)=...=\pi_{-1}(t)\equiv 0$.

Задача для $\pi_0(t)$ имеет вид

$$D\pi_0(t) = -u_0(\mu t)\pi'_{-m}(t) - \frac{du_0(\mu t)}{dt}\pi_{-m}(t), \quad \pi_0(\mu_0)=0 \tag{14.0}$$

Для решения этой неоднородной задачи нам нужна следующая лемма.

Лемма. Однородное уравнение

$$D\xi(t) := (t+\pi_{-m}(t))\xi(t) + (\pi_{-m}(t)-q(\mu t))\xi = 0$$

имеет фундаментальное решение

$$\xi_0(t)=\exp\left\{\int_{\mu_0}^{t}\frac{q(\mu s)-\pi'_{-m}(s)}{s+\pi_{-m}(s)}ds\right\}=\frac{1+b\mu^{m+1}}{\mu(t+\pi_{-m}(t))}\exp\left\{-\int_{t}^{\mu_0}\frac{1+q(\mu s)}{s+\pi_{-m}(s)}ds\right\}$$

или

$$\xi_0(t)=\frac{1+b\mu^{m+1}}{\mu(t+\pi_{-m}(t))}X(t,\mu)\phi(t,\mu),$$

где

$$X(t,\mu)=\exp\{-\int_t^{\mu_0}\frac{m+q(\mu s)}{s+\pi_{-m}(s)}ds\},\ \phi(t,\mu)=\exp\left\{(m-1)\int_t^{\mu_0}\frac{ds}{s+\pi_{-m}(s)}\right\}.$$

Решение неоднородного уравнения (14.0) представляется в виде

$$\pi_0(t)=-\frac{1}{t+\pi_{-m}(t)}X(t,\mu)\phi(t,\mu)\int_t^{\mu_0}X(s,\mu)\phi(s,\mu)\frac{d[u_0(\mu s)\pi_{-m}(s)]}{ds}ds,$$

Отсюда, имеем

(15.0) $$|\pi_0(t)|\le l,\ t\in J;|\pi_0(t)|<\frac{l}{t^{m+1}}\quad(t>0),\quad|\pi'_0(t)|<\frac{l}{t^{m+2}}\quad(t>0)$$

Таким образом доказали следующую лемму.

Лемма 2. Задача (14.0) имеет единственное ограниченное решение на отрезке $[0,\mu_0]$ и имеет место оценки (15.0).

Аналогично доказывается, что все уравнения (4.к) (к=1, 2, …) также имеют единственные решения из $C^{(\infty)}[0,\mu_0]$ и

$$|\pi_k(t)|\le l,\ |\pi_k(t)|\le\frac{l}{t^{m+1}},\quad|\pi'_k(t)|<\frac{l}{t^{m+2}}\quad(t>0).$$

Теперь для уравнений (5.0), (5.1), (5.2) нам потребуется следующая

Лемма 3.

(16) $$Lg(x)=\gamma(x),$$

где $\gamma(x)\in c^{(\infty)}[0,1]$ имеет единственное решение из класса $c^{(\infty)}[0,1]$ и оно представляется в виде

(17) $$g(x)=x^{-m}p(x)\int_0^x x^{m-1}p^{-1}(s)\gamma(s)ds,\quad p(x)=\exp\left\{\int_1^x\frac{q(s)+m}{s}ds\right\}.$$

Действительно, общее решение уравнения (16) имеет вид

$$g(x)=p(x)x^{-m}\left[q(1)+\int_1^x s^{m-1}p^{-1}(s)\gamma(s)ds\right].$$

Если мы выберем $g(1)=-\int_0^1 s^{m-1}p^{-1}(s)\gamma(s)ds$, то получим (17).

Из этой леммы 3 следует, что все уравнения (5.0), (5.1),… имеют единственные решения $u_k(x)\in c^{(\infty)}[0,1]$ и $u_k(x)\equiv 0,\quad k\ne \bmod m.$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. Пусть выполнено условие $U: q(x), r(x)\in c^{(\infty)}[0,1]$, $q(0)=m$ - некоторое целое число и $b=u^0-\int_0^1 s^{m-1}\exp\left\{\int_s^1\frac{q(\tau)+m}{\tau}d\tau\right\}ds>0$. Тогда, задача (1) имеет единственное решение и ее асимптотика представляется в виде (3), причем. $\pi_k(t)=0\ (k=-m+1,...,-1),\ u_k(x)\equiv 0,\quad k\ne \bmod m.$

Литература

1. M. G. Lighthill, A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid, Phil. Mag., 40 (1949), 1179-1201.
2. К. Алымкулов, Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач, Илим, Бишкек, 1992.
3. Алымкулов, Ж. К. Жээнтаева, «Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой», Матем. заметки,79:5(2006), 643-652.
4. Васильева А.Б., Бутузов.В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений, Наука, М., 1973.
5. М. И. Иманалиев, Асимптотические методы в теории интегро-дифференциальных систем, Илим, Бишкек, 1972.
6. В. А. Треногин, Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика, Успехи математических наук, 25:4 (1970), 121-156.
7. O'Malley R. E., Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, 1991.
8. W. Wasow, Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Dover Publ., Inc., New York, 1987.
9. К.Алымкулов, А.А.Халматов. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой, Матем. заметки,92,n.3(2012),
10. А.А.Халматов. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла , в случае , когда невозмущенное уравнениеимеет полюс второго порядка в регулярной особой точкой , Исследю по и.-д.уравнениям, вып.43,2010,с.89-93.

УДК 519.6

Эркебаев У.З. аспирант ОшГУ, Турсунов Д.А., ОшГУ

Применение кубических мультвейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка с условием Неймана

Макалада кубдук сплайн-вейвлеттердин жардамында экинчи тартиптеги дифференциалдык теодеме үчүн Нейман маселесинин сандык чыгарылышы каралган. Вейвлеттер эрмиттин кубдук сплайндарынын базисинде тургузулган. Вейвлеттер С классына таандык жана алардын таянычы[–1, 1], андан сырткары вейвлеттердин бири симметриялуу, ал эми экинчиси антисимметриялуу. Чек-аралык чекиттердин чеке-белинде ылайыкташтырылган базистик вейвлеттер тургузулган. Алынган сандык чыгарылыштар бул базисстик вейвлеттердин артыкчылыгын көрсөтөт.

В статье рассматривается численное решение краевой задачи Неймана для дифференциальных уравнений второго порядка с помощью кубических сплайн-вейвлетов. Вейвлеты построены в базисе эрмитовых кубических сплайнов. Вейвлеты принадлежат классу С и имеют носитель [–1, 1], кроме того один из вейвлетов симметричный а другой антисимметричный. Построены модифицированные базисные вейвлеты вблизи граничных точек. Полученные численные результаты демонстрируют преимущество построенных базисных вейвлетов.

In this paper, We use the wavelet bases of Hermite cubic splines to solve the differential equations second order with the Neiman boundary condition. A pair wavelets are constructed on the basis of Hermite cubic splines. This wavelets are in C^1 and supported on [–1, 1], moreover, one wavelet is symmetric, and other is anti-symmetric. The construction of boundary wavelets is remarkably simple. Furthermore, global stability of the wavelet basis is established and adapted to the interval [0,1]. The computational results demonstrate the advantage of the wavelet basis.

В конце прошлого века возникло и успешно развивается новое и важное направление в теории и технике обработки сигналов, изображений и временных рядов, получившее название вейвлет-преобразование (ВП), которое хорошо приспособлено для изучения структуры неоднородных процессов.

Термин вейвлет (wavelet), введенный впервые Морле (J. Morlet), образован из двух частей – корня wave (волна) и уменьшительного суффикса – let. Их работа послужила началом интенсивного исследования вейвлетов в последующее десятилетие рядом ученых таких, как Добеши (Dobechies), Мейер (Meyer), Малл (Mallat), Фарж (Farge), Чуи (Chui) и др. Таким образом, непосредственный перевод звучит как маленькая, или короткая волна. Малость относится к условию, что эта функция имеет конечную длину (компактный носитель). Волна относится к условию, что функция колебательная (осциллирующая). К вейвлету можно применить две операции: сдвиг, т.е. перемещение области его локализации во времени; масштабирование (растяжение или сжатие), т.е. перемещение области его локализации по частоте. Использование этих операций, с учетом свойства локальности вейвлета в частотно-временной области, позволяет анализировать данные на различных масштабах и точно определять положение их характерных особенностей во времени.

Вейвлеты обладают существенными преимуществами по сравнению с преобразованием Фурье, потому что с их помощью можно анализировать кратковременные локальные особенности сигналов, например, короткие всплески или провалы, разрывы и ступеньки и т.д. Уникальные свойства вейвлетов позволяют сконструировать базис, в котором представление данных может выражаться небольшим количеством ненулевых коэффициентов. Это свойство делает вейвлеты привлекательными для сжатия данных, в том числе видео- и аудиоинформации. Вейвлет-преобразование можно представить как один из методов первичной обработки сигнала для повышения эффективности его сжатия. Непосредственно сжатие выполняется после этой предобработки классическими методами. При этом сжатие выполняется для коэффициентов вейвлет-разложения сигнала, а его реконструкция по этим коэффициентам производится на этапе восстановления (декомпрессии). Сжатие вейвлет-разложения сигнала более эффективно, чем сжатие исходного сигнала

Введем следующие обозначения:

$H^1(0,1)$ – пространство функции $u(x)\in C(0,1)$ таких, что $u'(x)\in L_2(0,1)$;

$H_1^1(0,1)$ – замыкание множества $\{u\in C[0,1]\cap C'[0,1]: u'(0)=u'(1)=0\}$ в $H^1(0,1)$;

Π_3 – множество кубических многочленов;

V_n – пространство кубических сплайнов, удовлетворяющих следующим условиям, $n>0$:

а) $v\in C[0,1]\cap C'[0,1]$; б) $v'(0)=v'(1)=0$;

в) $v\big|_{(j/2^n,(j+1)/2^n)}\in\Pi_3\big|_{(j/2^n,(j+1)/2^n)}$, $j=0,\ldots,2^n-1$; $\dim(V_n)=2^{n+1}$;

$\|u(t)-u_n(t)\|_2=\sqrt{\int_0^1(u(t)-u_n(t))^2}$ - норма разностей,

$C(A_n)$ – число обусловленности матрицы A_n.

В [1, 2] предложен новый подход к построению базисных вейвлетов на пространстве эрмитовых кубических сплайнов, т.е. вейвлеты ортогональны со скалярным произведением $\langle u',v'\rangle$, а не $\langle u,v\rangle$. Это требование ортогональности лучше подходит для применения вейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка. Вдобавок, эти вейвлеты имеют меньший носитель. Добеши в работе [3] построила полуортогональные вейвлеты неполиномиального типа с компактным носителем. Коэн и др. в работе [4] адаптировали ортогональные вейвлеты Добеши на отрезок [0,1]. Чуи и Вонг в работе [5] построили полуортогональные сплайн-вейвлеты. В работе [5] эти сплайн-вейвлеты были адаптированы к отрезку [0,1]. В работе [6] эти вейвлеты применены для решения интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

Недостатками ранее построенных вейвлетов является то, что они либо не имеют аналитического представления, либо расположены на достаточно широком носителе. И то, и

другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Пусть ϕ_1 и ϕ_2 кубические сплайны вида:

$\phi_1(x)=(x+1)^2(1-2x)\,\chi_{[-1,0]}(x)+(1-x)^2(1+2x)\chi_{[0,1]}(x)$,

$\phi_2(x)=(x+1)^2x\chi_{[-1,0]}(x)+(1-x)^2x\chi_{[0,1]}(x)$,

где $\chi_{[a,b]}(x)$– характеристическая функция, $\chi_{[a,b]}(x)=1$, при $x\in[a,b]$ и $\chi_{[a,b]}(x)=0$, при $x\notin[a,b]$.

Множество

$$\Phi_n:=\{\phi_1(2^n\cdot-j)\colon j=0,\ldots,2^n\}\cup\{\phi_2(2^n\cdot-j)\big|_{(0,1)}\colon j=1,\ldots,2^n-1\}, \quad (1)$$

является базисом для V_n. Элементы Φ_n обозначим через $\{v_1,\ldots, v_2^{n+1}\}$.

Пусть Ψ_n множество вейвлетов которых мы определим ниже:

$$\Psi_n:=\{\psi_1(2^n\cdot-j)\colon j=0,\ldots,2^n\}\cup\{\psi_2(2^n\cdot-j)\big|_{(0,1)}\colon j=1,\ldots,2^n-1\}, \quad (2)$$

и W_n – линейное пространство, натянутое на Ψ_n, очевидно, что $\dim(W_n)=2^{n+1}$.

В работе [2] доказано следующее равенство

$$\int_0^1 w'(x)v'(x)dx=0,\ \forall w\in\Psi_n,\ \forall v\in\Phi_n\ . \quad (3)$$

Из этого следует, что $V_n\cap W_n=\{0\}$. Кроме того, показано, что $V_{n+1}\supseteq V_n+W_n$ и $\dim(V_{n+1})=\dim(V_n)+\dim(W_n)$. Это означает, что $V_{n+1}=V_n\oplus W_n$. Следовательно, мы получим разложение $H_1^1(0,1)$:

$$H_1^1(0,1)=V_1\oplus W_1\oplus W_2\oplus\ldots.$$

Напомним, что $\Phi_1=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; элементы Ψ_n обозначим $\Psi_n=\{w_2^{n+1},\ldots, w_2^{n+2}\}$, $n\in N$.

Пусть $g_k:=v_k/\|v'_k\|_2$ при $k=1,2,3,4$ и $g_k:=w_k/\|w'_k\|_2$ при $k>4$. Тогда $\|g'_k\|_2=1$ при $n\in\mathbf{N}$. Последовательность $(g'_k)_{k\in\mathbf{N}}$ является последовательностью Рисса в $L_2(0,1)$, [2].

Очевидно, что эрмитовы кубические сплайны ϕ_1 и ϕ_2 удовлетворяют условиям: $\phi_1, \phi_2\in C^1$, $\phi_1(0)=1$ $\phi'_1(0)=0$, $\phi_2(0)=0$ $\phi'_2(0)=1$.

Следовательно, эрмитова интерполяция для функции $f\in C^1(\mathbf{R})$, имеет следующий вид:

$$u=\sum_{j\in Z}f(j)\phi_1(\cdot-j)+f'(j)\phi_2(\cdot-j),\ \forall j\in Z\colon u(j)=f(j),\ u'(j)=f'(j).$$

Пусть S представляет собой инвариантное пространство сдвигов, порожденное ϕ_1 и ϕ_2. Функция g принадлежит пространству S тогда и только тогда, когда существуют две последовательности b_1, b_2 на $\mathbf{Z}$, для которых выполняется равенство: $g=\sum_{j\in Z}\left[b_1(j)\phi_1(\cdot-j)+b_2(j)\phi_2(\cdot-j)\right]$.

Пусть $S_1=\{g(2\cdot)\colon g\in S\}$, тогда $S\subset S_1$. Мы ищем пространство вейвлетов W, для которого $S_1=S\oplus W$. При этом мы хотим найти два вейвлета ψ_1, ψ_2, так что их сдвиги порождают W. Кроме того, мы потребуем выполнение равенств

$$\langle\psi'_1, \phi'_m(\cdot-j)\rangle=\langle\psi'_2, \phi'_m(\cdot-j)\rangle=0,\ m=1,2,\ \forall j\in\mathbf{Z}. \quad (4)$$

Для этой цели нам необходимо вычислить скалярное произведение производных сдвигов ϕ_1 и ϕ_2. Заметим, что $\phi'_1(x)=-6x(x+1)\chi_{[-1,0]}(x)+6x(x-1)\chi_{[0,1]}(x)$, $\phi'_2(x)=(1+x)(1+3x)\chi_{[-1,0]}(x)+(1-x)(1-3x)\chi_{[0,1]}(x)$.

Предположим, что

$$\psi(x)=\sum_{k\in Z}\left[b_1(k)\phi_1(2x-k)+b_2(k)\phi_2(2x-k)\right],\ \ x\in\boldsymbol{R}\ .$$

Тогда для $\forall j\in\mathbf{Z}$ имеем:

$$20\langle\psi', \phi'_1(\cdot-j)\rangle=-21b_1(2j-2)+42b_1(2j)-21b_1(2j+2)-3b_2(2j-2)+4b_2(2j-1)-4b_2(2j+1)+3b_2(2j+2),$$

$$120\langle\psi', \phi'_2(\cdot-j)\rangle=33(b_1(2j-2)-b_1(2j+2))-60(b_1(2j-1)-b_1(2j+1))+4(b_2(2j-2)+b_2(2j+2))-12(b_2(2j-1)+b_2(2j+1))+28b_2(2j).$$

Введем преобразование Лапласа последовательностей b_1, b_2 на $\mathbf{Z}$, так что положительная или отрицательная степень z означает сдвиг на один шаг по шаблону узлов эрмитового сплайна вправо или влево. Тогда

$$q_{11}(z)=\sum_{j\in Z} b_1(2j+1)z^{2j+1},\quad q_{12}(z)=\sum_{j\in Z} b_1(2j)z^{2j},$$
$$q_{21}(z)=\sum_{j\in Z} b_2(2j+1)z^{2j+1},\quad q_{22}(z)=\sum_{j\in Z} b_2(2j)z^{2j}.$$

Решение функционального уравнения $\mathbf{Q}(z)(q_{11}(z), q_{12}(z), q_{21}(z), q_{22}(z))^{\mathrm{T}}=0$, $z\in C\setminus\{0\}$, $j\in\mathbf{Z}$,

$$\boldsymbol{Q}(z)=\begin{pmatrix} 0 & -21z^2+42-21z^{-2} & 4z-4z^{-1} & -3z^2+3z^{-2} \\ -60z+60z^{-1} & 33z^2-33z^{-2} & -12z-12z^{-1} & 4z^2+28+4z^{-2} \end{pmatrix},$$

будет означать, что $\langle\psi', \phi'_m(\cdot-j)\rangle=0$, $m=1,2$. Отсюда находим два независимых решения:

$q_{11}(z)=-2z^{-1}-2z$, $q_{12}(z)=4$, $q_{21}(z)=-21z^{-1}+21z$, $q_{22}(z)=0$;

и $q_{11}(z)=z^{-1}-z$, $q_{12}(z)=0$, $q_{21}(z)=9z^{-1}+9z$, $q_{22}(z)=12$.

Эти два решения порождают два материнских вейвлета ψ_1, ψ_2:

$$\psi_1(x)=-2\phi_1(2x+1)+4\phi_1(2x)-2\phi_1(2x-1)-21\phi_2(2x+1)+21\phi_2(2x-1),$$
$$\psi_2(x)=\phi_1(2x+1)-\phi_1(2x-1)+9\phi_2(2x+1)+12\phi_2(2x)+9\phi_2(2x-1).$$

Носителями построенных вейвлетов ψ_1, ψ_2 является отрезок $[-1,1]$, они удовлетворяют условию (4), и их сдвиги генерируют пространство вейвлетов W, так что S_1 является прямой суммой S и W. Кроме, того ψ_1 – симметричен, а ψ_2 – антисимметричен.

Теперь мы построим вейвлет-базис в пространстве $H_1^1(0,1)$ из этих сплайн-вейвлетов. Пусть выполняется равенство (3) и $v\in V_1$ и $w_n\in W_n$ при $n\in\mathbf{N}$, то $\forall n\in\mathbf{N}$: $\langle v', w'_n\rangle=0$, $\langle w'_m, w'_n\rangle=0$, $m\neq n$. Отсюда,

$$\left\| v'+\sum_{n=1}^{\infty} w'_n \right\|^2_{L_2(0,1)} = \|v'\|^2_{L_2(0,1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \|w'_n\|^2_{L_2(0,1)} \qquad (5)$$

Пусть

$$\psi_{n,j}(x)=\frac{1}{\sqrt{307.2}}2^{-n/2}\psi_2\left(2^n x-\frac{j}{2}\right),\ \text{при}\ \ j=2,4,\ldots,2^{n+1}-2,$$

$$\psi_{n,j}(x)=\frac{1}{\sqrt{1459.2}}2^{-n/2}\psi_1\left(2^n x-\frac{j-1}{2}\right),\ \text{при}\ \ j=3,5,\ldots,2^{n+1}-1,$$

$$\psi_{n,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{729.6}}2^{-n/2}\psi_1\left(2^n x\right),\ \ \psi_{n,2^{n+1}}(x)=\frac{1}{\sqrt{729.6}}2^{-n/2}\psi_1\left(2^n x-2^n\right),$$

$$\phi_{1,1}(x)=\sqrt{\frac{5}{12}}\phi_1(2x),\quad \phi_{1,2}(x)=\sqrt{\frac{5}{24}}\phi_1(2x-1),$$

при $n\in\mathbf{N}$ и $x\in(0,1)$.

$$\phi_{1,3}(x)=\sqrt{\frac{5}{12}}\phi_1(2x-2),\quad \phi_{1,4}(x)=\sqrt{\frac{15}{8}}\phi_2(2x-1).$$

Тогда $\|\psi'_{n,j}\|_{L2(0,1)}=1$, $j=1,\ldots,2^{n+1}$ и $\|\phi'_{1,j}\|_{L2(0,1)}=1$, $j=1,2,3,4$.

Ясно, что V_1 разлагается на $\phi_{1,j}$, $j=1,2,3,4$. Следовательно $H_1^1(0,1)$ разлагается на g_j, $j=1,\ldots,2^{n+1}$, где $g_j=\phi_{1,j}$, при $j=1,\ldots,4$, и $g_{2^{n+1}+j}=\psi_{n,j}$, $n\in\mathbf{N}$, $j=1,\ldots,2^{n+1}$.

В работе [2] доказано, что $\left(\psi'_{n,j}\right)_{n\in N,1\le j\le 2^{n+1}}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Применение. В этом разделе мы используем построенные вейвлеты для решения дифференциальных уравнений вида:

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u(x)=f(x),\quad 0<x<1, \qquad (7)$$

с граничным условием Неймана

$$u'(0)=u'(1)=0, \qquad (8)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции. Коэффициенты уравнения (7) удовлетворяют условиям:

$$0\le p(x)\le c_3,\ 0\le q(x)\le c_4,\ x\in[0,1]. \qquad (9)$$

Если $q(x)\equiv 0$, то для разрешимости задачи (7)-(8) требуем выполнение условия $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Пусть $a(u,v)$ обозначает билинейную форму, $u, v \in H_1^1(0,1)$:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 p(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx,.$$

Тогда вариационная запись (7)-(8) имеет следующий вид:

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Соответствующая задача аппроксимации Галеркина: найти $u_n\in V_n$, при котором

$$a(u_n, v)=\langle f, v\rangle \quad \forall v\in V_n. \qquad (10)$$

По лемме Лакса-Милграмма [7] задача (10) имеет единственное решение. Мы предлагаем использовать найденное выше множество вейвлетов $G=\{g_1,\ldots,g_{2^{n+1}}\}$ как базис для V_n. С этим базисом для V_n задача (10) может быть дискретизирована следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a(g_j, g_k)c_k = \langle g_j, f\rangle, \qquad j = 1,\ldots,2^{n+1}.$$

Обозначим матрицу $A_n=(a(g_j,g_k))_{1\le j,k\le 2^{n+1}}$.

Ниже мы рассматриваем применение базисных вейвлетов G_n к конкретным примерам. Вычисления проведены в системе MathCad 15.

Пример 1. $-u''+u=2t^3-3t^2-12t+6$, $u'(0)=u'(1)=0$.

Точное решение $u(t)=2t^3-3t^2$,

численное решение $u_{16}(t)=-5.821\times10^{-6}g_1(t)-1.095g_2(t)-1.549g_3(t)-0.548g_4(t)-$
$-1.736\times10^{-7}g_5(t)-2.021\times10^{-11}g_6(t)+1.742\times10^{-7}g_7(t)+6.122\times10^{-7}g_8(t)+$
$+2.205\times10^{-6}g_9(t)+3.702\times10^{-7}g_{10}(t)+1.044\times10^{-6}g_{11}(t)+9.274\times10^{-7}g_{12}(t)+$
$+5.646\times10^{-7}g_{13}(t)-1.312\times10^{-6}g_{14}(t)+3.148\times10^{-6}g_{15}(t)+4.187\times10^{-7}g_{16}(t)$;

$\|u(t)-u_4(t)\|_2=3.933\times10^{-6}$, $\|u(t)-u_8(t)\|_2=3.933\times10^{-6}$, $\|u(t)-u_{16}(t)\|_2=3.933\times10^{-6}$.

$C(A_4)=19.69$; $C(A_8)=19.69$, $C(A_{16})=19.69$.

Пример 2. $-u''+e^tu=\pi^2\cos(\pi t)+e^t\cos(\pi t)$, $u'(0)=u'(1)=0$.

Точное решение $u(t)=\cos(\pi t)$,

численное решение $u_8(t)=1.556g_1(t)-2.771\times10^{-6}g_2(t)-1.556g_3(t)-1.179g_4(t)-$
$-0.026g_5(t)+5.798\times10^{-7}g_6(t)+0.026g_7(t)+0.029g_8(t)$;

$\|u(t)-u_4(t)\|_2=2.389\times10^{-3}$, $\|u(t)-u_8(t)\|_2=2.092\times10^{-4}$, $\|u(t)-u_{16}(t)\|_2=1.468\times10^{-5}$.

$C(A_4)=1.723$; $C(A_8)=2.342$, $C(A_{16})=3.201$.

Пример 3. $-u''+u'+u=t^4+2t^3-17t^2+14t-2$, $u'(0)=u'(1)=0$.

Точное решение $u(t)=t^2(1-t)^2$,

численное решение $u_8(t)=3.502\times10^{-3}g_1(t)+0.142g_2(t)+3.331\times10^{-3}g_3(t)-$
$-1.503\times10^{-5}g_4(t)-0.019g_5(t)-0.026g_6(t)-0.019g_7(t)+5.576\times10^{-5}g_8(t)$;

$\|u(t)-u_4(t)\|_2=1.37\times10^{-3}$, $\|u(t)-u_8(t)\|_2=1.528\times10^{-4}$.

$C(A_4)=20.9$; $C(A_8)=21.21$.

Следует отметить, что численные результаты показывают, что точность улучшается с повышением n. И значение n не влияет на число обусловленности матрицы A_n.

Замечание. Построенные эрмитовы сплайн вейвлеты также можно использовать при численном решений следующих задач:

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x), \qquad y'(0)=\alpha,\ y'(1)=\beta$$
$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x), \qquad y(0)=\alpha,\ y'(1)=\beta$$

$\varepsilon\, y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta,$

$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad y'(0) = \alpha,\ y'(1) = \beta,$ где α, β – const, ε – малый параметр.

Литература

1. R.-Q. Jia, S.-T. Liu. Wavelet bases of Hermite cubic splines, Adv. Comput. Math.25(2006) 23-39.
2. Турсунов Д.А., Губская М.М. Построение новых типов эрмитовых кубических сплайн вейвлетов. / Молодежная науч. конф., Томск, 9-13 окт. 2009 г. - Томск, 2009. - С. 10-15.
3. И. Добеши, Десять лекций по вейвлетам. – М.; Ижевск: РХД, 2001.
4. A. Cohen, I. Doubechies, and P. Vial, Wavelets on the interval and fast wavelettransforms, Appl. Comput. Harmonic Anal. 1(1993) 54-81.
5. C.K. Chui and J.Z. Wang. On compactly supported wavelets and a duality principle, Trans. Amer. Math. Soc. 330 (1992) 903-916.
6. Турсунов Д.А. Применение сплайн-вейвлетов для решения интегро-дифференциальных уравнений. Известия АлтГУ. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2011. – С. 42-44.
7. S.C. Brenner, L.R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods (Springer, New York, 1994).

УДК 621.311.2

Айдарбеков З.Ш., Жороев А.М.,
Жумакулов Ж.А., ОшГУ

Исследование и определение параметров аккумулирующих систем, входящих в энергосистему

Макалада автономдуу микроэнергосистеманын аккумуляциялоо системасынын зарылчылыгы жана иштөө тартиби изилденген. Электр тогунун электрохимиялык булагын жана ГАЭСтин суу сактагычындагы суусун аккумулятор катары колдонууда микроэнергосистеманын аккумуляциялоо системасынын параметрлерин аныктоонун методдору каралган.

В статье исследована необходимость и порядок работы аккумулирующей системы автономной микроэнергосистемы. Приведены методы определения параметров аккумулирующих систем микроэнергосистемы при использовании в качестве аккумулятора электрохимического источника электрического тока и воды водохранилища ГАЭС.

There are the necessity and an operating procedure of heat-sink system of an independent micropower supply system are investigated in this article. There are the methods of parameters definition for heat-sink systems inside micropower supply system resulted being used as the accumulator of an electrochemical source of electric current and water storages of hydro accumulating energy station.

Исследования и создание комплексных энергосистем требуют разработки методов расчета, учитывающих особенности совместного функционирования энергоустановок на основе возобновляемых источников энергии (ВИЭ) для комплексного электро- и теплоснабжения автономных потребителей. Выбор той или иной схемы микроэнергосистем для определенного потребителя должен основываться на технико-экономическом анализе с учетом местных факторов, как объем и график выработки, режима прихода первичных энергоресурсов, удаленность объекта от централизованной энергосистемы, а также экономические перспективы данного региона.

При определении и выборе мощности энергоустановок определенного вида, необходимо учитывать особенность влияния на установленную мощность энергосистемы климатических и сезонных условий, что будет способствовать правильному решению поставленной задачи оптимизации параметров энергосистемы.

В удовлетворении потребностей человека за счет ВИЭ существует проблема перераспределения получаемой от них энергии во времени, что вызывает неравномерность графика производства, производимой энергии [3]. А в свою очередь неравномерность график потребления энергии вызывает несогласование этих процессов. Как было отмечено в работе [1], существует несколько способов обеспечения согласования процесса производства и перераспределения, производимой энергии от ВИЭ:

1) недоиспользование энергии возобновляемых источников путем сброса излишков при превышении производства над потреблением;

2) накопление излишков энергии в периоды максимума прихода ВИЭ и отдача в периоды минимумов, т.е. использование принципа аккумулирования;

3) подстраивание процесса потребления под процесс производства.

Первый способ управления хоть и является простым и дешевым, но было бы расточительно безвозвратно терять существующий поток ВИЭ. Третий способ управления предполагает создание специальных типов нагрузок, имеющих обратную связь. Это возможно при наличии у потребителя нескольких видов нагрузки разной категории (секционирование нагрузки). Второй способ управления не предъявляет специальных требований ни к нагрузке, ни к энергоустановке, так как система аккумулирования может принимать на себя все колебания. Особенно эффективен этот метод при использовании ВИЭ с большими пульсациями прихода энергии во времени.

Аккумулирующая система (АС) является частью системы энергоснабжения, она должна работать как в нормальных режимах - заряда, хранения, разряда, так и аварийных, т.е. при резких сбросах, набросах нагрузки, качаниях и отключениях генерирующих мощностей и т.д. В аварийных режимах АС должна достаточно быстро выдавать или потреблять требуемое количество энергии и обладать достаточной маневренностью и аварийной емкостью для демпфирования колебаний нагрузки. Маневренностью АС считается время переключения из режима заряда в режим разряда и наоборот.

Вопросами аккумулирования энергии возобновляемых источников занимались такие ученые как Денисенко Г.И., Виссарионов В.И., Елистратов В.В., Мухаммадиев М.М., Тарнижевский Б.В., Твайделл Дж., Уэйр А., Шефтер Я.И., Амерханов Р.А. и др. [1,2,3,4].

В работе [1] было исследовано моделирование работы аккумулирующих систем, где отмечено, что АС должна работать в течение времени, определяемого из графика нагрузки, а емкость определяется выражением:

$$E_A = \int_0^{1раб} N_A\ (t)dt, \qquad (1)$$

где $t_{раб}$ - время работы АС (выбирается как наибольшее из времени заряда и времени разряда).

По конструктивным соображениям АС полностью не разряжается, поэтому полная емкость АС должна быть больше E_A, т.е.

$$E_{n..A} > E_A \qquad (2)$$

Значение минимальной емкости АС $E_{мин} = E_{n.A} - E_A$ для разных типов АС различный, так как определяется технической характеристикой АС.

В качестве вариантов схем микроэнергосистем на основе ВИЭ, рассмотрим два варианта электроснабжения потребителя:

1) микроэнергосистема на основе ВИЭ, имеющая схему «ВЭУ - СЭУ микроГЭС», дополненная электрохимическим аккумулятором;

2) микроэнергосистема «ВЭУ - СЭУ - микроГАЭС».

В обоих случаях для удовлетворения нужд потребителя необходимо, чтобы суммарная мощность всех энергоустановок микроэнергосистемы на основе ВИЭ в любой момент времени

была достаточной для покрытия соответствующей мощности графика нагрузки потребителя, т.е.

$$N_{ВИЭ}(t) = N_{Н}(t), Вт \qquad (3)$$

где $N_{ВИЭ} = N_{ВЭУ} + N_{СЭУ} + N_{ГЭС}$, Вт - суммарная мощность энергоустановок, входящих в энергосистему, соответственно ветроэнергоустановки, солнечной энергоустановки и гидроэлектростанции. N_H- мощность потребителя, Вт.

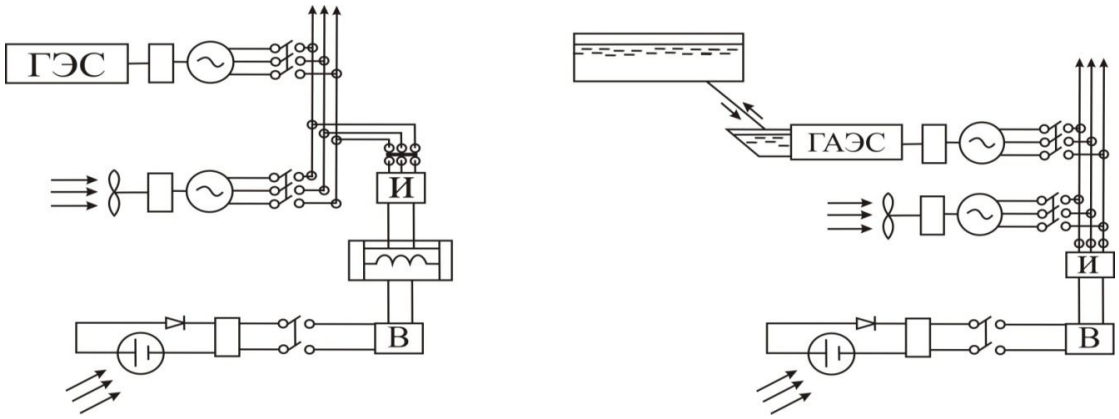


Рис. 3.4. Микроэнергосистема па основе ВЭУ-СЭУ-ГЭС

Для *варианта 1* например, в электрохимических аккумуляторах $E_{мин}$ может достигать 0,3 $E_{п.А}$ [1].

Для *варианта 2* (ГАЭС) - это значение может быть близко к нулю, если к верховому водоему не предъявляются специальные требования по уровненному режиму.

Полная энергоемкость АС с учетом аварийной составляющей может быть определена как:

$$E_{п.А} = E_{мин} + E_{А} + E_{ав} \qquad (4)$$

В частности для автономных энергосистем на основе ВИЭ, были определены следующие уравнения баланса при определении параметров АС. Прежде всего, емкость АС должна быть такова, чтобы обеспечивать регулирующую и частотоформирующую функции в локальной энергосистеме. Для этого необходимо в каждый момент времени· знать, сколько энергии производится и сколько потребляется. Для автономных энергосистем в каждый i-й период времени можно записать следующее уравнение баланса,

Вариант 1. $\Delta N_i = N_{Hi} - N_{ВЭУi}^{max} - N_{СЭУi}^{max} - N_{ГЭСi}^{max}, при, i = 1...8760ч.$ (5)

Вариант 2. $\Delta N_i = N_{Hi} - N_{ВЭУi}^{max} - N_{СЭУi}^{max}, при, i = 1...8760ч.$ (6)

где N_{Hi} - электрическая нагрузка в i-й период; $N_{ВЭУi}^{max}, N_{СЭУi}^{max}, N_{ГЭСi}^{max}$ – электрическая энергия, вырабатываемая составляющими энергосистемы в i-й период.

Обозначим также через $N_A^{мин}, N_A^{мах}, N_A$ соответственно минимальный, рабочий и максимальный уровни запасаемой энергии в АС. Предположим, что КПД разрядки постоянен и равен $\eta_{АС}$.При вычислении ΔN_j возможно несколько случаев:

1) если $\Delta N_j < 0$, то имеется избыток энергии при условии, что все составляющие энергосистемы передают всю энергию потребителю. Избыточная энергия направляется в АС и там аккумулируется в зависимости от соотношения между избытком мощности и остаточной емкостью АС.

Если $\Delta N_i > N_{Ai}^{max} - N_{Ai}$, то АС заряжается до значения $N_{Ai+1}^{max} = N_C$, в противном случае - до значения $N_{Ai+1} = N_{Ai} - \Delta N_i$; ;

2) если $\Delta N_i > 0$, то· нагрузка превышает выработку энергии составляющими энергосистемы. В этом случае состояние системы зависит от величины X_i

$$X_i = \Delta N_i - \eta_A (N_{Ai} - P_A^{min}), \qquad (7)$$

при этом:

а) если $X_i > 0$, то суммарная нагрузка не может быть полностью удовлетворена за счет работы энергосистемы. АС разряжена до минимума и остается непокрытая нагрузка значением X_i.

б) если $X_i < 0$, то нагрузка обеспечивается за счет работы АС и уравнение разряда АС будет иметь вид:

$$N_{Ai+1} = N_{Ai} - \Delta N_i / \eta_A \qquad (8)$$

В случае а) остается непокрытая нагрузка X_i, покрытие которой зависит от конфигурации автономной системы: если в системе имеется резервная мощность, например, на дизельной станции, то остаточную нагрузку можно покрыть этими генераторами, однако стоимость этой энергии имеет монотонно возрастающую зависимость при $X_i > 0$; если система полностью изолирована без резервной мощности, то может возникнуть ситуация, когда часть нагрузки остается непокрытой и такие обстоятельства могут возникнуть в ходе одного или последовательных периодов времени. Так же возможны аварийные ситуации. В конечном итоге обе эти ситуации приводят к экономическому ущербу от недодачи энергии $C(X_i)$ для всех $X_i > 0$ и $C(X_i)=0$ при $X_i < 0$. При этом нет необходимости различать функции ущерба от неподачи и от аварии.

Для того чтобы определять и оптимизировать работу АС целесообразно использовать в качестве интервала i один час и интервала осреднения - один год как соответствующих периодичности стохастических серий $N_{Hi}, N_{ЭКi}, \Delta N_i, X_i$.

Предполагая, что стоимость затрат энергосистемы выступает как сумма затрат энергоустановок, входящих в энергосистему, а также стоимости затрат АС как функции от максимальной мощности заряда. Стоимость годовых эксплуатационных затрат каждой составляющей складывается из фиксированных капитальных вложений и эксплуатационных затрат. Они определяются как отношение произведения реального движения стоимости на норму прибыли к числу часов использования за год.

Годовые затраты будут складываться:

$$З = c_{ВЭУ}(N_{ВЭУ}) + c_{СЭУ}(N_{СЭУ}) + c_{ГЭС}(N_{ГЭС}) + C(N_A^{\max}) + \sum_{i=1}^{n} C(X_i) \qquad (9)$$

Минимизация З по составу энергосистемы и мощности его составляющих при заданном графике нагрузки позволяет определить емкость аккумулирующей системы.

В рассматриваемых вариантах для определения емкости АС можно воспользоваться следующими зависимостями:

В *варианте 1*, емкость аккумулятора должна быть такова, чтобы обеспечить питание потребителя во время отсутствия энергоисточника (штилевые затишья ветра, облачность, оледенение реки или малые расходы и т.д.). На основании этого, емкость аккумулятора можно определить, зная величину максимальной энергии необходимой потребителю, т.е.

$$E_A = \frac{Э_H^{\max}}{U_A}, A \cdot ч \qquad (10)$$

где U_A - напряжение аккумулятора, В; $Э_H^{\max}$ - максимум потребляемой энергии потребителем, кВт.Ч.

В *варианте 2*, с гидравлическим аккумулированием энергии, объем воды, который необходимо запасать или срабатывать для удовлетворения нагрузки потребителя может быть найден по следующим зависимостям [1]:

Излишки энергии производимой энергоустановками на основе ПИЭ аккумулируются в верхнем водоеме. Максимальный объем, который может быть запасен за каждый час в суточном интервале времени выбирается из ряда, м^3:

$$V_{Hi} = \frac{(N_{ВИЭi} - N_{Hi})\eta_{Hi}}{3530 \cdot H_{Hi}} \to \max, i = 1...24ч. \qquad (11)$$

где H_{Hi}, η_{Hi},- напор и КПД в насосном режиме в i-тый час.

Для аккумулирования излишков энергии произведенной в течении суток необходимо выбрать максимальное значение объема из анализа балансов за год, м^3 :

$$V_{Hj}^{сут} = \sum_{i=1}^{24} \frac{(N_{ÂÈÝi} - N_{Hi})\eta_{Hi}}{3530 \cdot H_{Hi}} \to \max, j = 1...365äí.. \quad (12)$$

Максимальная емкость для турбинного режима, обеспечивающая бесперебойную почасовую работу в течении суток при недостаточной мощности установок энергосистемы на основе ВИЭ определяется по следующей зависимости:

$$V_{mi} = \frac{N_{Hi} - N_{ВИЭi}}{3530 \cdot H_{mi} \cdot \eta_{mi}} \to \max, i = 1...365ч. \quad (13)$$

где H_{mi}, η_{mi} - напор и КПД турбинного режима для i-того часа.

Для обеспечения суточной работы в течение года требуемая емкость составляет, м^3:

$$V_{mj}^{сут} = \sum_{i=1}^{24} \frac{(N_{Hi} - N_{ВИЭi})}{3530 \cdot H_{mi} \cdot \eta_{mi}} \to \max, j = 1...365ч. \quad (14)$$

Баланс суточных объемов воды верхового водоема в течение суток определяются выражением :

$$\Delta V_j^{сут} = V_{mj}^{сут} - V_{Hj}^{сут}, м^3 \quad (15)$$

причем значение $\Delta V_j^{сут}$ знаком “+” означает дефицит воды в верховом водоеме, а значение со знаком “-” означает избыток воды на начало следующих суток. Таким образом, требуемый объем на следующие, $j+1$ сутки, составит:

$$V_{mj+1} = V_{mj+1}^{сут} - \Delta V_j^{сут}, м^3 \quad (16)$$

Выбрав максимальное значение из всех рассмотренных соотношений требуемого объема для каждого дня года, будем иметь необходимый полезный объем резервуара для обеспечения гидравлического аккумулирования ВИЭ и обеспечения требуемого графика нагрузки.

Заключение. В заключении можно сделать вывод, что аккумулирующая система автономной микроэнергосистемы позволяет аккумулировать электроэнергию в электрохимических истониках тока или гидравлически аккумулировать в ГАЭС, достаточно быстро выдавать требуемое количество энергии и демпфировать колебания нагрузки небольших населенных пунктов, где отсутствует центральное электроснабжение. Изложенные методы определения параметров аккумулирующей системы автономной энергосистемы могут быть полезны при проектировании микроэнергосистем.

Литература

1. В.В. Елистратов. Основы и методы гидравлического аккумулирования энергии возобновляемых источников. Дисс. … д-ра техн. наук. - Санкт-Петербург: СПбГПУ, 1996.

2. М.М. Мухаммадиев, Б.У. Уришев. Автономные энергокомплексы на базе ВИЭ. /Научная школа Ю.С. Васильева в области энергетики и охраны окружающей среды: Сб. науч. тр. /Под ред. М.П. Федорова и В.В. Елистратова. - Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2004. – 132 с.

3. Р.А. Амерханов. Оптимизация сельскохозяйственных установок с использованием возобновляемых видов энергии. – М.: Колос, 2003 – 532 с.

4. Я.Б. Данилевич, А.Н. Коваленко, В.Л. Шилин. Автономные системы электро- и теплоснабжения с буферным накоплением энергии //Известия Академии Наук – Энергетика, 2002, №1. С.69-78.

УДК 537.86.535.343.

Арапов Б.А., Каденова Б.А., Садырова М. М., ОшГУ

Механизмы радиационного дефектообразования в щелочно - галоидных кристаллах

Изложены представления о совокупности процессов образования дефектов, созданных при распаде электронных возбуждений. Представлены основные результаты экспериментальных исследований структуры дефектов, эффективности их образования и релаксации дефектности в ионных кристаллах.

The paper presents ideas on the totality of the formation of defects created by electronic excitations. The main results of experimental studies of the structure of defects, the effectiveness of their formation and the relaxation of their imperfection in ionic crystals have been reported.

Создание радиационных дефектов в щелочно-галоидных кристаллах ведется с помощью облучения их рентгеновским, электронным излучениями, а также УФ радиацией. Механизмы возникновения радиационных дефектов при облучении кристаллов ионизирующим излучением можно разделить на два класса [1,2]: универсальный ударный механизм создания пар вакансий и междоузельных атомов и механизмы дефектообразования при распаде электронных возбуждений.

С другой стороны, давно показано, что в широкощелевых ионных кристаллах наряду с ударный механизм дефектообразования эффективно работают и неударные механизмы дефектообразования, когда основная часть энергии налетающей частицы-фотона передается неядерной, а электронной подсистеме твердого тела - осуществляется возбуждение и ионизация кристаллообразующих атомов (ионов) [1]. После быстрых промежуточных процессов в кристалле образуются горячие электроны проводимости и валентные дырки, а так же другие анионные и катионные электронные возбуждения. Если время жизни возбуждений достаточно велико, то при рекомбинации электронов (e) и дырок (h) или распаде анионных экситонов (e_a^0) могут, в принципе создаваться дефектов Френкеля (ДФ). Отметим, что такого создания пары ДФ затрачивается значительно меньшая энергия, чем в случая ударный механизм дефектообразования.

По ударному механизму создания радиационных дефектов точечные радиационные дефекты возникают в основном в результате упругих соударений падающих на кристалл электронов, протонов и других частиц с ядрами атомов или ионов кристалла [2,3].

Если энергия, переданная в результате упругого столкновения от движущейся частицы атому (иону), превышает некоторое значение, то атом выбитый из узла решетки, оставляя вакансию, движется через кристалл. Наименьшее значение энергии, которую необходимо передать одному из атомов кристалла, чтобы он оказался в ближайшей междоузельной позиции, называют пороговой энергией. Если энергия, переданная атому быстрой частицей, меньше пороговой, то смещения атома не происходит, а возникают лишь упругие волны, энергия которых переходит в энергию теплового движения атомов.

Опыт показывает, что пороговая энергия примерно в два-три раза больше энергии, необходимой для адиабатического перемещения атома из узла решетки в междоузлие. Так пороговая энергия приблизительно равна 25 эВ для большинства кристаллов, в которых энергия связи атомов составляет примерно 10 эВ. Каждый атом кристалла, получивший от быстрой частицы энергию большую пороговой, может сместиться в междоузлие, в результате чего одновременно возникают вакансия и междоузельный атом. При этом если значение энергии смещенных атомов, называемых атомами отдачи, значительно превышает пороговую энергию, то эти первичные атомы отдачи могут, в свою очередь, создавать вторичные атомы отдачи, вторичные - третичные и т. д. До тех пор, пока энергия смещенных атомов не приблизится к пороговому значению. Таким образом, возникает каскад атомных смещений.

Из рассмотренного механизма следует, что радиационные точечные дефекты всегда парные, то есть это ДФ [1]. При ударном механизме создания радиационных дефектов возникающие радиационные дефекты могут рождаться как в бездефектных областях кристалла, так и в областях, где имелись дорадиационные нарушения симметрии решетки. Причем наличие изначальных дефектов не является необходимым условием для радиационного создания дефектов [2].

Но при взаимодействии заряженных частиц с твердым телом основная доля их энергии тратятся на возбуждение электронной структуры кристалла. Долгое время считалось, что возбужденная электронная подсистема не участвует в формировании радиационных дефектов. Исследования широкощелевых ионных систем, каковыми являются щелочно-галоидные кристаллы (ЩГК) и некоторых полупроводников показали, что в этих материалах радиационное

дефектообразование связано не только с механизмом упругого смещения, но и с возбуждением электронной подсистемы кристалла [2].

Так при исследовании процессов формирования F-центров окраски первоначально полагали; что их образование происходит в результате захвата электронов существующими в кристалле дорадиационными вакансиями. Поиск одиночных анионных вакансий в необлученных ЩГК оказался неудачным. Применение чувствительных люминесцентных методов показало, что при 300К в необлученных щелочно-галоидных кристаллах содержание одиночных анионных вакансий не превышает 10^{14}см$^{-3}$. Однако после низкотемпературного облучения рентгеновской радиацией число анионных вакансий в ЩГК можно легко повысить до 10^{17}см$^{-3}$. Была высказана идея, что при 300К анионные вакансии (V_a^+) ассоциированы с катионными вакансиями (V_c^-) и образуют бивакансии ($V_a^+ \; V_c^-$). Поэтому уже в пятидесятые годы началось изучение процессов образования F-центров при взаимодействии электронов проводимости и экситонов с бивакансиями. Выигрыш энергии при захвате электрона на V_a^+ превосходит энергию связи дефектов в бивакансии. Поэтому, в принципе, при захвате электрона бивакансией может возникнуть F - центр и одиночная катионная вакансия. Электронно-ионные процессы преобразования дорадиационных дефектов действительно усложняют многие физические явления в ЩГК, однако не эти процессы лежат в основе их радиационного окрашивания. Эксперименты показали, что в выращенных из растворов при 260-300К нитевидных ЩГК с исчезающе малым содержанием бивакансий и дислокаций, X-облучение создает F -центры в концентрации до $3\cdot10^{17}$см$^{-3}$, что намного порядков превышает число дорадиационных анионных вакансий и анионно-катионных бивакансий.

Было обнаружено распухание ЩГК при рентгеновском облучении, причем параллельное исследование радиационных изменений плотности кристалла и постоянной решетки показало, что в ЩГК под действием X- облучения происходит рождение френкелевских дефектов. Междоузельные атомы галоида в облученных ЩГК были обнаружены методом электронного парамагнитного резонанса. Стало ясно, что создание электронные возбуждения не только преобразует уже существовавшие в кристалле дорадиационые дефекты, но и создает новые дефекты [2,4].

Измерениями спектров создания F-центров монохроматической ультрафиолетовой радиацией было показано, что при 300К и 80К F-центры возникают при оптическом создании экситонов и рекомбинации электронов и дырок. Также было показано, что тип облучения не влияет на тип возникающих радиационных дефектов. Так кристаллы NaCl облучались в ядерном реакторе и X-облучением, но в обоих случаях создавались те же самые радиационные дефекты, что и при облучении вакуумной ультрафиолетовой радиацией.

После обнаружения процессов создания и преобразования радиационных дефектов в диэлектриках и полупроводниках рентгеновской радиацией и электронами подпороговых энергий возникла необходимость выяснить возможные механизмы того явления. Из спектров характеристических потерь энергии электронов в твердых телах следует, что при взаимодействии электронов с кристаллами возникают плазмоны, экситоны, разделенные электроны, дырки. Изучение спектров поглощения кристаллов и ультрамягкой рентгеновской области выявило структуру, связанную с возбуждением и ионизацией внутренних электронных оболочек ионов кристаллической решетки.

Подпороговое образование дефектов в твердых телах естественно связывается с созданием и распадом рентгеновских электронных возбуждений (X) плазмонов (p), оптических экситонов (e^0) или электронно-дырочных пар (e^- e^+). Распад этих электронных возбуждений в бездефектных областях кристаллической решетки (R), около точечных дефектов (P), около линейных дефектов - дислокаций (D) или вблизи поверхностных дефектов (S) может привести к образованию новых дефектов и к преобразованию уже существующих в кристалле нарушений. Реальные эффективности этих процессов могут отличаться на много порядков. Лущик и Эланго рассмотрели общую классификацию возможных подпороговых механизмов дефектообразования в твердых телах при распаде различных электронных возбуждений с рождением дефектов в различных элементах структуры кристалла [2]. Для ионных кристаллов классификация механизмов

дефектообразования в ионных кристаллах при распаде различных электронных возбуждений (e°; e^-e^+, $e°_м$; p; x) в бездефектных участках кристалла (R) и около точечных (P), линейных (D) и поверхвостных (S) дефектов. Буквой Э обозначены механизмы, наблюдавшиеся экспериментально, буквой Т - теоретически рассмотренные случаи [2] приведена в таблице 1.

Таблица 1

Элементы кристалла	e°	e^-, e^+	$e°_м$	p	x
R	Э,Т	Э,Т	Э?		Т
P	Э	Э			
D					
S					

После создания квантовомеханической модели твердых тел значительный прогресс в понимании многих физических явлений в кристаллах был обусловлен введением концепции элементарных возбуждений. К таковым относятся фононы, рассмотренные Таммом [5], электроны проводимости, дырки, бестоковые собственные электронные возбуждения – экситоны коллективные малые колебания электронной плотности валентных электронов - плазмоны [6].

К числу элементарных возбуждений ионных кристаллов можно отнести также рассмотренные Френкелем точечные дефекты: междоузельные ионы и пустые узлы кристаллической решетки – вакансии.

Рассматривая элементарных возбуждений как идеальный “газ” в твердом теле, удается описать многие оптические и электрические явления. При этом в духе квантовой статистики рассматривают фермиевские ветви рождающихся попарно, элементарных возбуждений (e^- и e^+, анионные междоузельные ионы и вакансии, катионные междоузельные ионы и вакансии), описываемые статистикой Ферми-Дирака, а также бозонные ветви рождаемых по одиночке элементарных возбуждений (фононы, экситоны), приближенно описываемых статистикой Бозе-Эйнштейна [7].

Концепция элементарных возбуждений в кристаллах является приближенной. В последние годы для описания физических явлений в твердых телах приходится выходить за рамки этого приближения. Это необходимо, например, когда плотность газа элементарных возбуждений в кристалле высока и взаимодействие между элементарными возбуждениями уже не является слабым. С помощью лазеров или электронных пучков большой мощности, а также в треках протонов или α -частиц такие ситуации легко реализуются в твердых телах.

Концепция идеального газа элементарных возбуждений не пригодна также для описания очень важных эффектов, связанных с взаимодействием элементарных возбуждений с фононом идеальной кристаллической решетки. Это актуально при рассмотрении взаимных превращений различных элементарных возбуждений (например, распада экситонов с рождением френкелевских дефектов).

В бинарных ионных системах на основе ЩГК долгие годы для описания физических явлений кроме фононов привлекали только пять элементарных возбуждений (таблица 2): электроны проводимости (e^-), дырки (e^+), экситоны (e°), анионные и катионные вакансии (V_a^+ и V_c^-). Эти пять квазичастиц использовались [8] для интерпретации многих свойств ЩГК. Позже были обнаружены междузельные атомы и ионы галоида (анионные междоузельные ионы i_a^0, i_a^-), а также междоузельные катионы (i_c^+). Методом электронного парамагнитного резонанса было обнаружено существование в ЩГК неподвижных при низких температурах автолокализованных дырок (e_s^+) [9]. Затем оптическими методами было обнаружено существование в ЩГК неподвижных при низких температурах автолокализованных экситонов. Этим было выявлено резкое различие между широкощелевыми ионными кристаллами и узкощелевыми

полупроводниками: в последних автолокализованные состояния не существуют. Развитие представлений о квазичастицах ЩГК приведена в табл.2.

Таблица 2

1950-1960г.	1960-1970г.	1970-1980г.	1980-1990г.	1990-2000г.	2000-2010г.
e^0	e^0	$e^0, e_s^{\,0}$	$e^0, e_s^{\,0}$	$e^0, e_s^{\,0}$	$e^0, e_s^{\,0}$
e^-	e^-	e^-	e^-	e^-	e^-
e^+	$e_s^{\,+}$	$e^+, e_s^{\,+}$	$e^+, e_s^{\,+}$	$e^+, e_s^{\,+}$	$e^+, e_s^{\,+}$
$V_a^{\,+}$	$V_a^{\,+}$	$V_a^{\,+}$	$V_a^{\,+}$	$V_a^{\,+}$	$V_a^{\,+}, (V_a^{+}, e^-)_1, (V_a^{\,+}, e^-)_2, (V_a^{\,+}, e^-)_3$
V_c^-	V_c^-	V_c^-	V_c^-	V_c^-	V_c^-
		$i_a^{\,0}$	$i_a^{\,0}$	$i_a^{\,0}, i_{as}^{\,0}$	$i_a^{\,0}, i_{as}^{\,0}$
		i_a^-	i_a^-	i_a^-	i_a^-, i_{as}^-
			i_{c^+}	i_{c^+}	i_{c^+}

В процессах, протекающих в ионных кристаллах, большую роль играют нарушения кристаллической решетки. В реальных кристаллофосфорах, представляющих собой сложные системы, эти нарушения могут быть точечными, линейными или поверхностными. Некоторые дефекты кристаллической решетки являются местами возможной локализации электронов и дырок, т.е. центрами захватами.

Во многих явлениях, связанных с люминесценцией, происходит перемещение и перегруппировка точечных дефектов и центров окраски по кристаллической решетке. Вопрос о преобразованиях друг в друга центров пока остается открытым. До настоящего времени не выяснена структура и формирования некоторых электронных центров окраски. Нами в работе $[10-13]$ изучены преобразования электронных центров окраски и свечения друг в друга в отдельных мультиплетах.

На основании рассматриваемых представлений $Ag_c^{\,+}$ центр имеет состав $Ag_a^{-}(v_a^{\,+}e^{-})_8$. Таким образом, ион $Ag_c^{\,+}$ центра свечения I рода окружен 8 электронами, находящимися на месте 8 анионных вакансий, окружающих катион активатора. Поэтому $Ag_c^{\,+}$ -центры имеют окружение из устойчивой электронной оболочки с восьмью электронами. Это соответствует хорошей изоляции иона Ag^+ - центра свечения I-рода от кристаллической решетки фосфора (см. табл.3).

Таблица 3

Состав электронных центров окраски в кристаллах NaCI-Ag.

Обозначения центров	Состав центров
B_1^-	$Ag_c^{\,+}(V_a^{\,+}e^-)_2$
B_3^-	$Ag_c^{\,+}(V_a^{\,+}e^-)_4$
-	$Ag_c^{\,+}(V_a^{\,+}e^-)_6$
$Ag_c^{\,+}$ I рода	$Ag_c^{\,+}(V_a^{\,+}e^-)_8$
	$Ag_c^{\,+}(V_a^{\,+}e^-)_{10}$
E^-	$Ag_c^{\,+}V_a^{\,+}$
C_4-	$Ag_c^{\,+}V_a^{\,+}(V_a^{\,+}e^-)_2$
B-	$Ag_c^{\,+}V_a^{\,+}(V_a^{\,+}e^-)_4$

А-	$Ag_c^+V_a^+(V_a^+e^-)_6$
II рода	$Ag_c^+V_a^+(V_a^+e^-)_8$
К–	$2(Ag_c^+V_a^+)$
$Д_1$–	$2(Ag_c^+V_a^+)(V_a^+e^-)_2$
$\mathbf{C_2^-}$	$2(Ag_c^+V_a^+)(V_a^+e^-)_4$
$\mathbf{B_2^-}$	$2(Ag_c^+V_a^+)(V_a^+e^-)_6$
III рода	$2(Ag_c^+V_a^+)(V_a^+e^-)_8$
$\mathbf{Д^-}$	$3(Ag_c^+V_a^+)(V_a^+e^-)_4$
$\mathbf{C_1^-}$	$3(Ag_c^+V_a^+)(V_a^+e^-)_6$
$\mathbf{Д_2^-}$	$4(Ag_c^+V_a^+)(V_a^+e^-)_4$
$\mathbf{C_3}$	$4(Ag_c^+V_a^+)(V_a^+e^-)_6$
$\mathbf{M^-}$	$(V_a^+e^-)_2$
$\mathbf{O^-}$	$(V_a^+e^-)_4$
$\mathbf{Q^-}$	$(V_a^+e^-)_6$
$\mathbf{F^-}$	$Na_c^+(V_a^+e^-)$
$\mathbf{R^-}$	$Na_c^+(V_a^+e^-)(V_a^+e^-)_2$
$\mathbf{N^-}$	$Na_c^+(V_a^+e^-)(V_a^+e^-)_4$
$\mathbf{P^-}$	$Na_c^+(V_a^+e^-)(V_a^+e^-)_6$

Вследствие этого ион Ag_c^+ является эффективными центром свечения в кристаллофосфоре NaCl-
Ag. Так как активаторные центры свечения I-рода существуют в кристалле непосредственно после его выращивания, то возникает вопрос: как могут образоваться такие сложные центры типа $Ag_a^-(v_a^+e^-)_8$ при выращивании кристаллофосфора NaCl-Ag. Можно предложить следующее объяснение. Так как энергия связи ионов галоида Cl^- -больше с ионом Na^+ , чем с ионом Ag^+, по-видимому, с большой вероятностью анионы Cl^- -будут удерживаться, располагаясь при выращивании кристалла, ближе к Na^+ чем к Ag^+. Поэтому в кристаллофосфоре в ходе выращивания ионы Ag_c^+ могут оказаться окруженным определенным числом положительных анионных вакансий (v_a^+). При этом будет происходить нарушение электронейтральности кристалла вблизи ионов Ag_c^+ , находящихся в окружении анионных вакансий. Стремление к восстановлению электронейтральности приведет к стоку свободных электронов на анионных вакансиях (v_a^+) вблизи Ag_c^+ и может привести к образованию центров вида $Ag_c^+(v_a^+e^-)_8$, в ходе выращивания кристаллофосфора. При рентгеновском облучении кристалла возникновение А,-В-,С-,Д-,Е-центров окраски можно объяснить как результат захвата центрами свечения I – рода на $(v_a^+e^-)$, находящихся в составе этих центров дырок Cl^- или Cl_2^-, в ходе облучения.

Но не все центры данного типа могут превращаться в другие центры определенного типа. Для этого необходимы дополнительные условия. Например, в К –центр может превратиться при добавлении квазичастицы $^-(v_a^+e^-)$ только такой Е -центр, у которого в соседнем узле имеется ион Ag_c^+, ибо в составе К –центра должна быть 2 иона серебра. Аналогично, в центры свечения III рода как будто содержит 2 иона Ag_c^+. Возможность существования электронных центров с двумя концами ионов Ag_c^+ или K_c^+ обсуждена в работах [14,15,16].

Так как центры свечения I, II, III рода имеют структуры замкнутой электронной оболочки из 8 электронов (2+6) и поэтому мало взаимодействуют с окружением, то наличие или отсутствие вблизи этих центров дополнительного иона Ag_c^+ не приведет, по-видимому, к существенным изменением величины.

Для ЩГК приходится рассматривать состояние как свободных (когерентных) электронных возбуждений (e^-, e^+, e^0), так и автолокализованных релаксированных) дырок и экситонов (e_s^+, e_s^-). В последние годы в данных кристаллах обнаружено различие в поведении нерелаксированных (подвижных при низких температурах) и релаксированных (локализованных) междоузельных анионов и i_a^- и i_{as}^- [2].

Таким образом, в настоящее время для описания щелочно-галоидных кристаллов привлекают, кроме фононов, восемь различных элементарных электронных возбуждений, причем три из них рассматривают в двух принципиально отличающихся состояниях свободном (подвижном) и автолокализованном (неподвижном при низких температурах). Список к квазичастиц, реально существующих и необходимых для интерпретации физических явлений в щелочно-галоидных кристаллах расширяются.

Литературы

1. Павлов П.В., Хохлов А.Ф. Физика твердого тела. - М.: Высш.шк., 2000.- С. 494.
2. Лущик Ч.Б., Лущик А.Ч. Распад электронных возбуждений с образованием дефектов в твердых телах. - М.: Наука, 1989. – С. 263.
3. 3. Гречкина Т.В. Релаксация первичной радиационной дефектности в кристаллах фторидов лития и магния. Диссертация на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. - Томск, 2004.
4. Александров Ю.М., Лущик Ч.Б., Махов В.Н., Сырейщиков Т.И., Якименко М.Н. Использование синхротронного излучения для исследования механизма образования F_2-центров окраски LiF. ФТТ, 1982, Т. 24, №6, - С. 1696-1699.
5. Тамм И.Е. Собрание научных трудов. М.: Наука, Т.1, 1975.
6. б. Пайнс Д. Элементарные возбуждения в твердых телах. - М.: Мир, 1965.
7. Брандт Н.Б., Кульбачинский В.А. Квазичастицы в физике конденсированного состояния. - М.: Физматлит, 2005. – С. 632.
8. Seitz F. Colour centers in alkali halide crystals. II. Rev. Mod. Phys., 1954, 26, № 1, p. 7-94.
9. Castner T.G., Kanzig W.J. Phys. and Chem. Solid., 1957 3, №3-4, p. 178-195.
10. Арапов Б., Садырова М., Каденова Б. Группа преобразований и состав электронных центров окраски и свечения в кристаллах NaCI-Ag. Изв. ВУЗов.- Бишкек, 2002.-С.26-31.
11. Арапов Б., Каденова Б., Садырова М. Структура электронных центров и групп преобразований в NaCI-Ag. Вестник ОшГУ, сер.физ.-мат.н., Ош, 2002, -С.203 - 209.
12. АрапоВБ., Садырова М., Каденова Б. О преобразованиях электронных центров окраски и свечения в ионных кристаллах. Вестник ОшГУ, сер.физ.-мат.н., Ош, 2002. - С. 209-215.
13. Б.Арапов, А.Усаров, ….и др. Образование распад и взаимопревращения примесно-радиационных центров в ионных кристаллах. Ош 2007, - С. 114.
14. Өскөнбаев М.Ч. Роль вакансионных дефектов в распаде и преобразовании радиационных центров в кристаллах NaCl и KCl.Диссерт. на соиск. …канд. физ.-мат.наук, Ош, 1996.
15. Арапов Т.Б. Механизм и кинетика тушения свечения радиационного наведенных центров окраски в ЩГК. Диссерс. На соис... канд. физ.- мат. наук. – Ош, 2004.
16. Арапов Б.,Сидляренко В.И., Өскөнбаев М. ЭПР первычных и промежуточных радиационных дефектов в кристаллах KCl-Ag. Вестник ОшГУ, №1. Ош, 1995 - С. 54-62.

УДК 621.396.677.3

Багышев А., Ташполотов Ы., ОшГУ

Фрактальные антенны и методы их проектирования

Показано, что использование фрактальных антенн позволяет создавать устройства с принципиально новыми свойствами, улучшая эксплуатационные характеристики антенн. Для решения таких задач численное моделирование является одним из основных методов, позволяющим установить оптимальные параметры антенн, предсказывающей уникальные свойства структур, построенных на основе фрактальных множеств. Необходимо объединить усилия по разработке алгоритмов, основанных на природе фракталов, и методов мультимасштабного(самоподобного) численного моделирования, поскольку в фрактальной электродинамике важным направлением является исследования в области теории антенн и их расчет структуры(дизайн) фрактальных антенн.

Фракталдык антенналар, антенналардын эксплуатациялык мүнөздөмөлөрүн жакшыртуу менен бирге принципиалдык жаңы касыеттерге ээ болгон түзүлүштөрдү түзүү үчүн колдонулат. Мындай маселени чечүү үчүн сандык моделдештирүү усулу бирден-бир негизги усул болуп саналат. Бул усулдун жардамында фракталдык көптүктүн негизинде тургузулган түзүмдүн уникалдуу касиетин көрсөтүү жана антенналардын оптималдуу параметрлерин тургузуу мүмкүн. Фракталдардын жана мультимасштабдуу (өзүнө окшош) сандык моделдөөнүн жаратылышына негизделген алгоритмдерди иштеп чыгуу боюнча күч аракеттерди бириктирүү зарыл, анткени фракталдык электродинамикадагы маанилүү багыттардын бири – антенналардын теориясы жана фракталдык антенналардын түзүлүшүн эсептөө областы болуп саналат.

It is shown that the use of fractal antenna allows you to create devices with fundamentally new properties, improving the performance of the antenna. To solve such problems numerical simulation is one of the main methods optimized settings antennas predicting the unique properties of structures that are based on fractal sets. It is necessary to combine efforts to develop algorithms based on the nature of fractals and multiscale methods numerical modeling, because the fractal electrodynamics is an important area of research in the field of antenna theory and calculation of the structure (design) of fractal antennas.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований последних лет по распространению и рассеянию электромагнитных волн во фрактальных системах являются основой для создания различных технических устройств, использующих особенности фрактальных систем. Поскольку развитие мобильных телекоммуникационных технологий, радаров и СВЧ датчиков перемещений диктует необходимость разработки новых многоэлементных (н-р, антенных) систем, имеющих малые размеры и оптимальную конфигурацию. К таким устройствам относятся и фрактальные антенны [1].

В настоящее время разработка фрактальных антенн активно ведется по трем направлениям: *фрактальные антенные решетки, широкополосные и многочастотные фрактальные излучатели и апертурные фрактальные антенны*[2,3].

Как известно, фракталы представляют собой геометрические фигуры, рекурсивно повторяющиеся по закону дробной размерности [4,5]. Среди большого разнообразия фрактальных структур наиболее приемлемыми для антенн являются фракталы Коха, Серпинского, Минковского [6].

На рис.1 приведен пример первой итерации фрактального преобразования Минковского прямой дипольной антенны длиной L, которую можно принять за нулевую итерацию. Применяя подобное преобразование к каждому прямому отрезку, можно получить фрактальные диполи высокого порядка итераций.

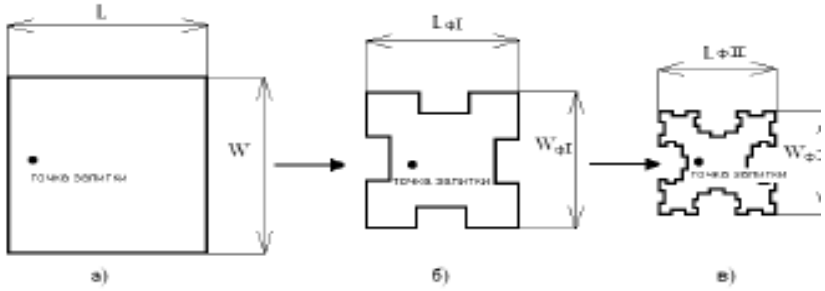


Рис.1. Квадратная (а), первая (б), вторая (в) итерации фрактального преобразования Минковского.

Поскольку резонансная частота диполя определяется его длиной, для сохранения ее неизменной при фрактальном преобразовании примем

$$L_{\Sigma.n} = L \ , \qquad (1)$$

где $L_{\Sigma.n}$ - общая длина фрактального диполя *n-й* итерации [5].

При условии $L_{\Sigma.n} = 3l + 2h$ *и* $h = 1/2l$ высота фрактального диполя составит

$$L_{ф,n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n L \ , \qquad (2)$$

т.е. с повышением порядка итерации высота диполя сокращается, что и является основным преимуществом фрактальных антенн. Учитывая, что резонансная частота квадратных антенн определяется условием

$$L = 0.49 \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{эф}}} \ , \qquad (3)$$

которое можно использовать при инженерных расчетах. Здесь λ - резонансная длина волны; $\varepsilon_{эф}$ - эффективная диэлектрическая проницаемость среды между антенной и земляной плоскостью.

Таким образом, использование фрактальной теории в проектировании антенн предоставляет инженерам беспрецедентные возможности для изучения неограниченного числа конфигураций, ранее недоступных для исследований и приложений, так как геометрические размеры антенны определяются длиной рабочей волны. Они также влияют на массогабаритные характеристики радиосистемы. Начало практическому использованию фрактального направления в антенной технике более 10 лет назад положил американский инженер Натан Коэл, профессор Бостонского университета.

В настоящее время теория фрактальных антенн находится на этапе становления. В основном исследователи экспериментальным путем, методом проб и ошибок, пытаются применить известные в геометрии и алгебре фракталы к антенным конструкциям. В результате многочисленных экспериментов установлено, что подобного типа антенны позволяют получить практически тот же коэффициент усиления, что и обычные, при меньших габаритных размерах. Поэтому, можно считать, что фрактальные антенны позволяют создать многополосные варианты, уменьшенный размер и частотно-оптимальную технологию таких устройств. Несомненным достоинством фрактальных антенн является тот факт, что они нередко имеют меньшие резонансные частоты по сравнению с классическими антеннами с теми же размерами. Врожденные широкополосные качества фрактальных антенн идеальны для интеллектуальных приложений, в частности при защите информации.

Одним из современных направлений при анализе и синтезе фрактальных антенн является конструирование на их основе новых видов частотно избирательных поверхностей и объемов [9-12]. Идея реализации характеристик излучения с повторяющейся (самоподобной) структурой на произвольных масштабах дает возможность создавать новые режимы во фрактальной электродинамике, а также получать принципиально новые свойства. В частности, размещение фрактальных элементов на корпусе или теле объекта может существенно исказить сигнатуру или радиолокационный портрет обнаруживаемого объекта.

Отметим также и другие области применения фрактальных антенн: современные телекоммуникации, широкополосная и нелинейная радиолокация, системы поиска, локализации и трассировки мобильных объектов, пеленгация в сложных городских условиях, определение местоположения несанкционированных источников радиоизлучения при борьбе с террористами, оперативная связь в войсках, маркеры на различных предметах, космическая связь и др.

. С этой точки зрения один из перспективных путей – применение новых перспективных радиопоглощающих покрытий и материалов (Н-р,фрактальные наноструктурированные

композитные материалы), должны обеспечивать поглощение широкого спектра электромагнитного излучения при произвольных углах зондирования и поляризации падающего излучения. Для решения таких задач предлагаются создание следующих видов антенн: минифрактальные антенны, синтез фрактальных структур, физическое моделирование фрактальных импедансов[4,5]. При этом здесь подразумевается суммарное использование по возможности результатов, полученных микроскопическими, мезоскопическими и макроскопическими методами, работающими на разных пространственных/временных масштабах.

Таким образом, можно рассматривать построение пассивных электронных компонентов и базовых элементов нового поколения на основе фрактальных эффектов и свойств [7-12]. В частности, элементарное обобщение *канторова множества* на физическом уровне позволяет перейти к канторовым блокам в технологии молекулярных наноструктур. Применение рекурсивного процесса позволяет создавать самоподобную иерархическую структуру, вплоть до отдельных проводящих дорожек в микросхеме и в наноструктурах. При этом необходимо учитывать и научиться рассчитывать взаимодействие всех электромагнитных полей со всеми компонентами микросхемы: проводящие дорожки, полупроводник, диэлектрик и т.д.

Поэтому в настоящее время большое внимание специалисты уделяют моделированию фрактальных объектов комплексной динамики при помощи различных диссипативных систем. Наиболее естественный путь моделирования – использование сценария Фейгенбаума - перехода к хаосу через удвоение периода. В контексте будущих разработок множества Жюлиа и Мандельброта –объекты для физического синтеза новых форм и видов фрактальных антенн и других фрактальных структур на их основе.

Фрактальные многослойные наноструктурированные композитные структуры, полученные на основе углеродных нанотрубок и нанопроволок, дендримерных молекул (обладающих эффектом “молекулярной антенны”), помимо прямого назначения, могут быть “кирпичиками” разнообразных функциональных устройств.

Например, дендримеры–способны безызлучательно передавать энергию от периферии к центру, вследствие чего возникают эффективное поглощение света в широком диапазоне спектра и излучение в узком, более длинноволновом диапазоне из-за своей специфической архитектуры. А наноантенны созданные с применением нанотрубок и нанопроволок могут быть использованы в качестве антенны, т.е. в качестве антенной решетки из полупроводниковых диполей, воспринимающих микроволновое излучение и преобразующих затем его в энергию постоянного тока (выпрямляющая антенна). При создании таких структур, по фрактальному закону можно контролировать подключение подмножества углеродных нанотрубок, размещенных вертикально на подложке.

При комплексном применении фрактальных технологий можно уменьшить расход материалов и массу антенных систем, особенно, если излучатели объединены в антенную решетку. В последнем случае миниатюризация антенных элементов на фрактальной основе позволяет существенно снизить их взаимное влияние за счет увеличения межэлементного зазора.

Другой эффект, получаемый вследствие компактности фрактальных излучателей в антенных решетках, состоит в возможности более плотной упаковки антенных элементов в интересах расширения сектора сканирования.

Работа фрактальных антенн достигается через геометрию проводников, а не через накопление отдельных компонентов или элементов (как в классических антеннах), т.е. усложнением контура фигуры или введением вырезов в площади фигуры с уменьшением масштабов изменения на каждой итерации и т.д.(см.рис.2). При этом итерация фрактала должна быть оптимальной для достижения максимальной полосы.

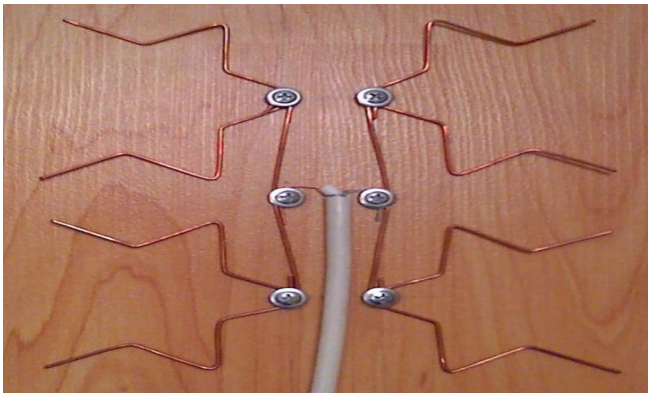


Рис.2. Внешний вид фрактальной антенны.

Заключение: Проведенные исследования показали, что использование фрактальных антенн позволяет создавать новые режимы и получать объекты с принципиально новыми свойствами, улучшая эксплуатационные характеристики подобных устройств. Для выполнения этих задач компьютерное моделирование является одним из основных методов, позволяющим априори установить их оптимальные параметры, так как до сих пор нет строгой электродинамической теории, объясняющей и предсказывающей достаточно уникальные свойства структур, построенных на основе фрактальных множеств. Необходимо объединить усилия по разработке алгоритмов, основанных на рекурсивной природе фракталов, и методов мультимасштабного численного моделирования.

Таким образом важным направлением в фрактальной электродинамике являются исследования в теории антенн и их расчет (дизайн фрактальных антенн). Поскольку особенностью фрактальных антенн является теоретически бесконечное уплотнение ограниченной области пространства геометрией антенны и позволяют решать ряд важных задач фундаментального и прикладного характера, открывают широкие перспективы для исследований в различных областях современной радиоэлектроники и практической физики.

Литература

1. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд-е 2-е, перераб. и доп. - М.: Университетская книга, 2005.-848с.
2. Слюсар В. Фрактальные антенны. Принципиально новый тип «ломаных» антенн. Ч.1 // Электроника: наука, технология, бизнес. 2007, №5, с.78-82.
3. Слюсар В. Фрактальные антенны. Принципиально новый тип «ломаных» антенн. Ч.2 // Электроника: наука, технология, бизнес. 2007, №6, с.82-89.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: Пер. с анг. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.-656с.
5. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ., М.:Мир, 1991. -262с. Пистолькорс А. А. Антенны. - М.:Связьиздат, 1947. - 478 с.
6. Бобрешов А.М., Калашников А.Е., Потапов А.А. Фрактальные антенны // Успехи современной радиоэлектроники. 2010. № 7. С. 47-60.
7. Ротхаммель К. Антенны /перевод с немецкого - СПб: Издательство «Бояныч», 1998. - 656 с.
8. Ерохин Г. А., Чернов О. В., Козырев Н. Д.,. Кочержевский В. Д. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн. - М.: Горячая линия -Телеком, 2007. - 496 с.
9. Проектирование фазированных антенных решёток /Под ред. Д. И. Воскресенского. М.: Радиотехника, 2003. - 631 с.
10. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах // Дополнение к кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ / под ред. Т.Э. Кренкеля. М.: Техносфера. 2006. С. 374-479.

11. Мальцев П.П., Матвеенко О.В., Гнатюк Д.Л., Лисицкий А.П., Федоров Ю.В. Обзор реализаций планарных встроенных антенн диапазона 5 ГГц с минимальным обьемом / Нано- и микросистемная техника,2011,№10, с.39-46.
12. Werner D.H., Gangulu S. An Overview of Fractal Antenna Engineering Research // IEEE Antennas and Propagation Magazine. February 2003. Vol. 45, №I. P.38-57.

УДК.: 620.178.146: 005.591.1: 621.3.011.2

Жанкуанышев М.К., ПГУ, Казахстан

Факторы выбора и критерии оптимизации режима нейтрали

В статье рассмотрены основные факторы выбора и критерии оптимизации режима нейтрали сетей с емкостными токами однофазного замыкания на землю свыше 15А.

Макалада 15 А(ден) жогору нейтралдык торлордогу бир фазалуу сыйымдуулук токторду жерге туташтыруу учурундагы негизги тандоо факторлору жана режимдерди оптимизациялоо критерийлери каралган.

In this article are considered the main factors of a choice and criterias of optimization of a mode of a neutral of networks with capacitor currents of single-phase ground fault from above 15A.

Оптимизацию режима нейтрали высоковольтных сетей следует осуществлять, прежде всего, в направлении обеспечения электро- и пожаробезопасности ОЗЗ и селективности отключения поврежденных линий.

При больших токах ОЗЗ (свыше 15 А) увеличение полного тока замыкания на землю за счет дополнительной активной составляющей может привести к возрастанию напряжений прикосновения на заземленных корпусах электрооборудования и увеличению пожароопасности.

Для оценки технической эффективности того или иного режима нейтрали можно ввести обобщенный показатель - некоторую функцию F, имеющую вид:

$$F = f_1(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), \qquad (1)$$

где X_1- фактор электробезопасности;

X_2 – фактор, учитывающий уровень чувствительности и селективности токовых направленных защит;

X_3 – фактор, определяющий уровни перенапряжении в режимах дуговых перемежающихся ОЗЗ;

X_4 – фактор пожароопасности;

X_5 – фактор, определяющий возможность возникновения феррорезонансных процессов.

В свою очередь, все пять переменных $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ представляют собой функции, зависящие от значений коэффициента активного дополнительного тока $I_{a\cdot}$ и степени расстройки компенсации U_k:

$$X_i = f_2(I_{a\cdot}, U_i), \qquad \text{где } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Задача определения оптимального режима нейтрали состоит в нахождении такого режима, при котором обеспечивается наибольшая техническая (включая электробезопасность) и экономическая эффективность.

Решение сводится к определению значений $I_{a\cdot}$ и U_k для каждого из пяти факторов оптимизации. Необходимо установить интервалы, при которых оптимизация наиболее целесообразна. На основании этого находится область, удовлетворяющая, по возможности, всем факторам.

Для расчета токов поражения человека при непосредственном прикосновении к

токоведущим частям в режиме активно-индуктивного заземления нейтрали использована классическая схема замещения с сосредоточенными параметрами [1, 2]. При этом пренебрегаем активными и индуктивными сопротивлениями элементов сети, которые малы в сравнении с сопротивлениями тела человека ($R_2 = 900$ Ом) и дугогасящей катушки X_L.

Минимальное значение тока через тело человека достигается при сопротивлении резистора в нейтрали, равном [3]:

$$R_A = \frac{X_L \cdot \left[X_L + \sqrt{X_L^2 + 4R_2^2 \cdot \left(1 - \frac{X_L}{X_C}\right)^2}\right]}{2R_2 \cdot \left(1 - \frac{X_L}{X_C}\right)^2}, \qquad (2)$$

где X_L - дугогасящая катушка,

$R_2 = 900$ Ом - сопротивление тела человека,

X_C - катушки сети.

Ток через тело человека в относительных единицах при этом определится из выражения:

$$I_{2*} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{I_{2m*}} + \frac{I_{A*}}{I_{A*}^2 + U_k^2}\right]^2 + \left[\frac{U_k}{I_{A*}^2 + U_k^2}\right]^2}}, \qquad (3)$$

где I_{A*} - активный дополнительный ток,

U_k – степень расстройки компенсации.

Данный фактор не имеет решающего значения для выбора режима нейтрали, поскольку ток, проходящий через тело человека при прикосновении к токоведущим частям, весьма велик и значительно превосходит предельно допустимые значения, установленные ГОСТ 12.I.-038-82. Тем не менее, важно выделить область, в которой режим активно-индуктивного заземления нейтрали не ухудшает условия электробезопасности по сравнению с «I –сетью» или «L - сетью»

Более существенное значение в обеспечении электробезопасности имеют напряжения прикосновения на заземленном оборудовании, оказавшемся под напряжением, при дуговых и металлических 033.

Как показано в [3] режима «I –сети» ток замыкания на землю чисто емкостный, а при включении в нейтраль резистора полный ток ОЗЗ несколько увеличивается за счет активной составляющей. Напряжение прикосновения при этом в установившемся режиме будет равно

$$U_{\text{пр}} = \sqrt{1 + I_{A*}^2} \cdot I_C R_3. \qquad (4)$$

В режиме активно-индуктивного заземления нейтрали имеем

$$U_{\text{пр}} = \sqrt{U_k^2 + I_{A*}^2} \cdot I_C R_3. \qquad (5)$$

Принимая, согласно ГОСТ 12.1.038-82, допустимое время действия тока ОЗЗ равным 0,7с (время срабатывания резервной ступени защиты от ОЗЗ) и соответствующее ему напряжение прикосновения 70В, получим, что безопасность прикосновения человека к заземленному оборудованию обеспечивается в режиме «I –сети» при токах ОЗЗ до 17,5А. включительно [4].

Заземление нейтрали через высокоомный резистор несколько увеличивает напряжение прикосновения. Так, активный дополнительный ток $I_{AX} = 0,5 \div 0,6$ дает напряжение прикосновения $U_{\text{пр}} = (1,12 \div 1,17) \cdot I_C R_3$ и уровень допустимых напряжений прикосновения $U_{\text{пр.доп}}$ достигается при емкостных токах ОЗЗ до значений

$$I_C = \frac{U_{\text{пр.доп}}}{(1,12 \div 1,17) \cdot R_3} = \frac{70}{4,48 \div 4,68} = 15,6 \div 14,9 \text{ (А)} \qquad (6)$$

При степени расстройки компенсации $U_k = 0,5$ и $I_{A*} = 0,2 \div 0,5$ режим активно-индуктивного заземления нейтрали можно использовать до значений токов ОЗЗ, равных (при $t = 0,7$с):

$$I_C = \frac{U_{пр.доп}}{\sqrt{U_k^2 + I_A^2} \cdot R_3} = 32,5 \div 24,75 \text{ (А)} \qquad (7)$$

Режим «***R-L***» заземления нейтрали снижает напряжение прикосновения в $\frac{1}{\sqrt{U_k^2 + I_{A*}^2}}$ раз по сравнению с «***I***-сетью» и в $\frac{\sqrt{1 + I_{A*}^2}}{\sqrt{U_k^2 + I_{A*}^2}}$ раз по сравнению с режимом активного высокоомного заземления нейтрали, что составляет $1,4 \div 1,9$ раза при $U = 0,5$ (В) и $I_{A*} = 0,2 \div 0,5$ (А).

Были проведены экспериментальные и аналитические исследования причин ложного и неселективного действия защит, реагирующих на направление МНП (ЗЗП-1м, РЗН-3 и др.) [5]. В результате было установлено, что условием неселективных срабатываний этих защит является возможность изменения фазы и начальной амплитуды вектора емкостного ТНП в отдельных присоединениях за счет компенсирующего влияния имеющихся в них измерительных трансформаторов напряжения с индуктивной проводимостью на землю. Это характерно для воздушно-кабельных сетей с небольшими токами ОЗЗ. После устранения ОЗЗ в сети на входы фазочувствительных органов устройств защиты ЗЗП-I на неповрежденных присоединениях поступают ложные сигналы ННП и ТНП, направления которых могут приблизиться друг к другу или совпасть в течение первых 2-3 полупериодов переходного процесса. Это приводит к неселективному срабатыванию защит на одном или нескольких присоединениях.

Для устранения этого явления, а также подавления феррорезонансных колебаний необходимо создание активного дополнительного тока в соотношении, $I_{A*} = 0,3 \div 0,5$ (А), что обеспечит работоспособность указанных типов защит от ОЗЗ за счет увеличения МНП [6].

В сетях с большими токами замыкания на землю (свыше 15 А) проблем, связанных с возникновением феррорезонансных явлений, практически не возникает, а поперечная селективность достигается при правильно выбранных соотношениях между активной и индуктивной составляющими тока в нейтрали (см. ниже).

Следующим фактором оптимизации являются кратности перенапряжения при дуговых перемежающихся ОЗЗ. Этот вопрос достаточно освещен в разделе 1. Здесь следует отметить только, что кратности перенапряжение при активно-индуктивном заземлении нейтрали будут такими же, как при высокоомном или низкоомном заземлении.

Основные факторы выбора и критерии оптимизации режима нейтрали «***R-L*** –сетей» приведены на рисунке 1.

Согласно рассмотренным выше условиям и результатам проведенных исследований, система показателей эффективности режимов нейтрали для сетей 6-10 кВ с токами ОЗЗ свыше 15 А выглядит следующим образом:

$$X_1 \qquad \begin{cases} U_{пр.дуг}(t) = f_1'(I_{a*}, U_Л, I_C R_3, K_U, U_k) \to min; \\ U_{прг}(t) = f_1''(I_{a*}, U_Л, I_C, R_3, U_k) \le U_{пр.дуг}; \\ I_2 = f_1'''(I_{AX}, U_Л, R_2, U_k) \to min; \\ W_{d3}(t) = f_1''''(I_{a*}, k_n, t_{C3}, U_k); \end{cases}$$

$$X_2 \qquad \begin{cases} W_{Л1} = f_2'(I_{a*}, f_{C31}, P_a, U_k); \\ W_{Л2} = f_1''(I_{ax}, t_{C32}, \overline{U}_{от}, U_k); \end{cases}$$

X_3 $\quad K_n = f'_3(I_{a*}, U_Л, R_{03}, U_k);$

X_4 $\quad Q = f'_4(I_{a*}, R_{03}, U_Л, U_k);$

X_5 $\quad \Phi = f'_5(I_{a*}, U_Л, I_C, U_k).$

Здесь: $K_U, K_П$ – соответственно кратности дуговых перенапряжений на поврежденной и здоровых фазах; R_{03}, R_3 – переходные сопротивления в месте ОЗЗ и заземляющей сети ; $W_{ДЗ}$ – вероятность перехода ОЗЗ в двойное через землю; $W_{Л1}, W_{Л2}, \Phi$ – показатели, характеризующие условия соответственно неселективных срабатываний первой ступени, ложных срабатываний второй (с выдержкой времени) ступени защит от ОЗЗ и условий возникновения феррорезонанса в сети; $P_ф$ – вероятность того, что вектор свободно затухающего ТНП на поврежденной линии окажется в зоне угловой чувствительности защиты от ОЗЗ; Q – количество тепловой энергии, выделяющейся в месте ОЗЗ; U_{om} – математическое ожидание амплитуды свободно затухающего ННП при времени выдержки второй ступени защиты.

Оптимизация режима нейтрали (выбор оптимальных границ I_{a*} и U_k) производилось следующим образом. Критерии оптимизации, соответствующие функциями $f'_1 - f'_5$, ранжировались по степени их важности.

Определены оптимальные границы наиболее важного критерия по f'_1 (напряжение прикосновения к заземленному оборудованию). Остальные показатели эффективности режима $(f'_1 - f'_5)$ переведены в ограничения. Результаты оптимизации сведены в таблице 1, где приведены рекомендуемые значения $I_{a*}(R_a)$ и U_k для «естественных» различных токов ОЗЗ кабельных линий при параллельно включенных R_a и ДГР.

Таблица 1

Наибольший суммарный емкостной ток ОЗЗ в сети, А	**Сопротивление в нейтрали, подключенное параллельно к ДГР, кОм**	**Степень расстройки ДГР**
15	0,8	
20	0,8	0,75
25	0,8	0,6
30	0,8	0,5
35	0,8	0,42
40	0,8	0,37
45	0,8	0,33
50	0,8	0,3
55	0.8	0.27
60	0.8	0.25

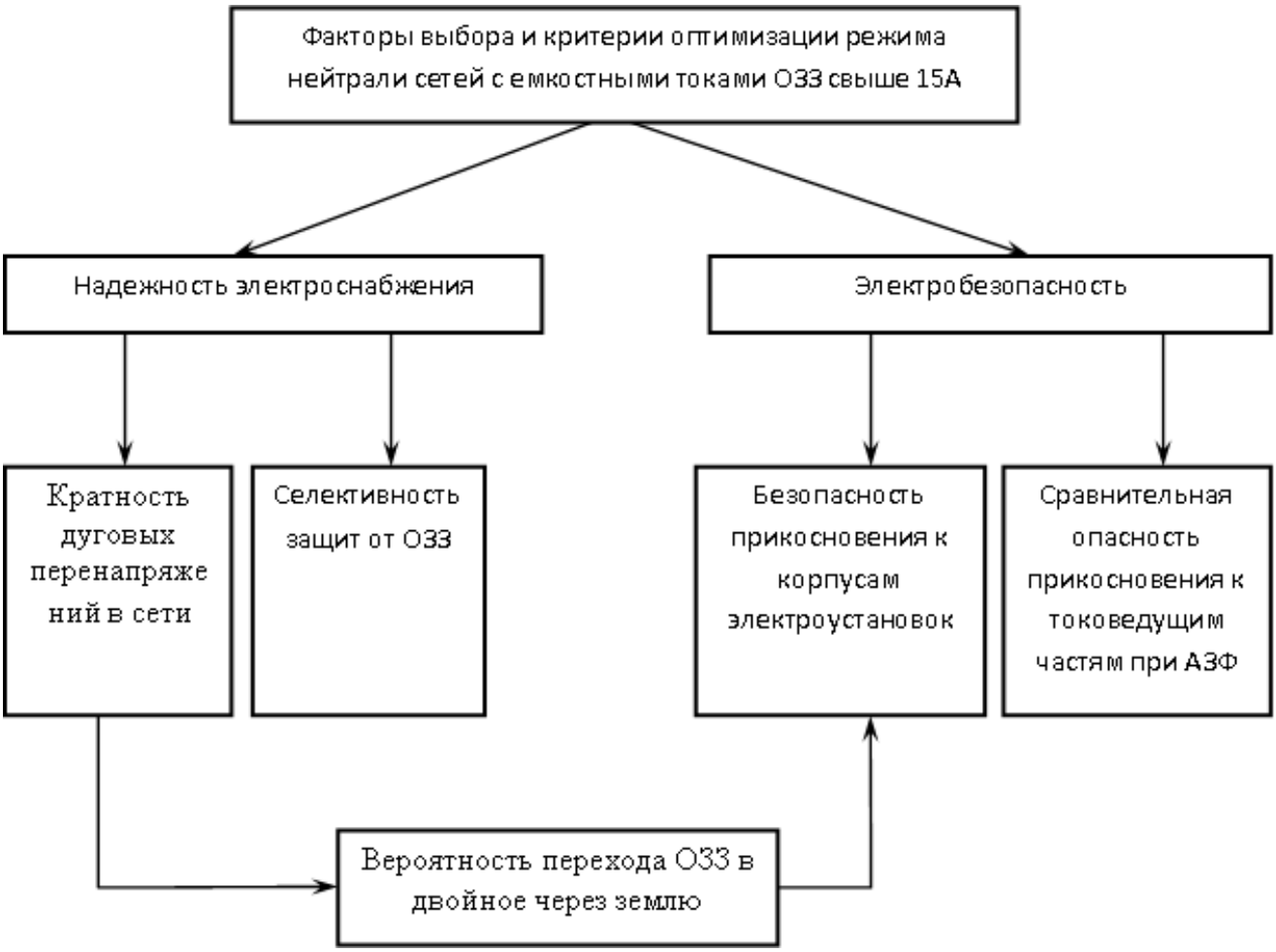


Рис. 1. Факторы выбора и критерии оптимизации «R-L -сетей» с токами ОЗЗ свыше 15

Литература

1. Серов В. И., Щуцкий В. И., Ягудаев Б. М. Методы и средства борьбы с замыканиями на землю в высоковольтных системах горных предприятием. – М.: Наука, 1985.
2. Обабков В.К., Сергин Е.В. Построение самонастраивающейся системы компенсации емкостных токов утечки с поиском поврежденной фазы // Изв. вузов. Горный журнал. 1983. – №3. – С. 90 – 94.
3. Ягудаев Б.М., Цибукидис Д.К. К выбору оптимального режима нейтрали шахтных электрических сетей 6–10 кВ. Актуальные вопросы электрификации горных предприятий. Научные сообщения. – М.: ИГД им. А.А. Скочинского, 1987.
4. ГОСТ 12.1.038-82. Система стандартов безопасности труда. Электробезопасность. Предельно допустимые значения напряжений прикосновения и токов.
5. Проведение исследований и установление параметров рационального режима нейтрали, повышающего надежность и безопасность эксплуатации распределительных сетей 6-10 кВ на угольных разрезах // Отчет НИР. Инв. №Б 839496. – М.: ИГД им. А. А. Скочинского, 1972–79 гг.
6. А.с.СССР № 1399847 Ягудаев Б.М. Способ направленной защиты от однофазного замыкания на землю в электрической цепи с изолированной нейтралью. Опубл. 30.05.88, Б. И. – № 20.

УДК 622.023

Калдыбаев Н.А., Институт природных ресурсов ЮО НАН КР, г.Ош
Кожогулов К. Ч., Институт геомеханики и освоения недр НАН КР, г. Бишкек

Концепция комплексного освоения малых месторождений нерудных строительных материалов Кыргызской Республики

В работе изложено видение перспективных путей освоения малых месторождений нерудных строительных месторождений, ранее не разрабатываемых по различным причинам. Намечены стратегические направления эффективного освоения маломасштабных месторождений, базирующегося на учете горно-геологических условий, горнотехнических параметров разработки и экономических факторов.

Макалада мурда ар кандай себептер менен иштетилбей келген курулуш материалдары алынуучу кичи кендерди өздөштурүүнүн келечектүү жолдору изилденген. Мындай кичи кендерди тоо-геологиялык шарттарын, техникалык параметрлерди жана экономикалык факторлорду эске алуу менен иштетүүнүн стратегиялык багыттары жана илимий негиздери аныкталган.

The paper sets out a vision of promising tracts of small deposits of nonmetallic building fields, previously developed for various reasons. Outlines the strategic directions of the effective exploitation of small-scale fields, based on the account of the geological conditions, the development of mining parameters and economic factors.

Кыргызская республика располагает месторождениями практически всех полезных ископаемых, необходимых для производства строительных материалов. Горные предприятия отрасли добывают свыше 50 наименований горных пород (табл. 1). Детальный анализ всех имеющихся геологических материалов позволил отнести к месторождениям и проявлениям неметаллических полезных ископаемых 2929 объектов, изученных на разных стадиях геологоразведочных работ, из них 1967 объектов (по состоянию на 01.01 2011г.) отнесены к строительному сырью.

Среди разведанных месторождений нерудных строительных материалов (НСМ) наибольшее количество приходится на обломочные породы (пески, песчано-гравийно-валунные смеси), и на объекты глинистого сырья, пригодного для производства строительной керамики (рис.1).

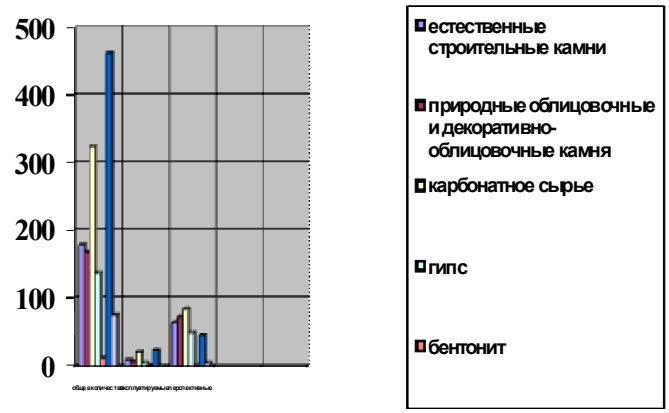


Рис. 1. Количественная характеристика основных видов месторождений нерудных строительных материалов Кыргызской республики

Далее по количеству месторождений идет карбонатное сырье, ресурсы которых преимущественно используются цементной промышленностью. Экспортно ориентированными являются месторождения облицовочного камня, которые составляют почти четверть от всего объема месторождений НСМ.

Однако, количество месторождений еще не дает четкого представления о возможности их разработки без учета экономических запасов по категориям и горнотехнических параметров. Следует отметить, что большинство месторождений нерудных строительных материалов по количеству учтенных запасов относятся к малым. По численности на одно крупное месторождение, по разным оценкам, приходится от 10 до 90 маломасштабных. До недавнего времени в научной литературе понятие «маломасштабное месторождение» употребляли только применительно к жильным золоторудным месторождениям [1-3], поэтому ниже уточняется содержание этого понятия.

Анализ современных представлений о маломасштабном месторождении показывает, что это понятие определяется, с различными нюансами, преимущественно по величине разведанных запасов, а понятие малое предприятие – по экономическим характеристикам или численности персонала.

Малые месторождения представляют собой самую многочисленную группу месторождений, относящихся к нерудным и расположенных большей частью в районах с гористым рельефом на значительном удалении от транспортных магистралей. При этом в сфере нерудной промышленности к малым мы относим месторождения строительных материалов с запасами менее 1 млн $м^3$. В Кыргызской республике имеется также большое количество «бросовых» месторождений природного камня, до сих пор не разрабатываемых промышленностью всилу различных причин (низкая блочность, повышенная трешиноватость массива и т.п.). Именно за счет таких месторождений в современных экономических условиях возрастает количество осваиваемых и перспективных маломасштабных месторождений.

По горнотехническим условиям маломасштабные месторождения могут отрабатываться открытым способом, что может обеспечить максимальную производительность при низких капитальных затратах и создает благоприятные возможности для полной механизации горных работ.

Таким образом, в Кыргызской республике актуальной является освоение малых месторождений нерудного сырья, которые ранее из-за малых запасов и особых горно-технических условий не разрабатывались и не брались в экономический учет.

Характерным особенностями малых месторождений нерудного сырья являются: неравномерное распределение по площади и мощности залежей полезных ископаемых; большой разброс производственных мощностей предприятий по добыче строительных материалов (от пяти тысяч тонн до 1 миллионов тонн в год); преобладание предприятий небольшой производственной мощности.

Новые условия хозяйствования привели к определенному изменению структуры выпускаемой продукции, а рентабельность предприятий промышленности стройматериалов значительно ниже, чем средняя по промышленности республики.

Главными сдерживающими факторами интенсивного освоения маломасштабных месторождений являются слабое методическое обеспечение выбора оптимальных горно-технологических параметров, а также отсутствие рациональных технологий разработки, учитывающих горно-геологические особенности этих месторождений.

В научном и практическом плане освоение малых месторождений нерудных строительных материалов требует развития теоретических основ и совершенствования технологии разработки таких месторождений с учетом конкретных горно-геологических, горно-технических, гидрогеологических условий и геомеханических процессов. В концептуальном плане решение этой проблемы требует поэтапного решения следующих **задач**:

- анализ состояния промышленности нерудных строительных материалов для разработки оптимальных направлений повышения эффективности отрасли;
- обоснование новой методологии оценки и составление Кадастра малых месторождений нерудных полезных ископаемых;
- изучение конкретных горно-геологических, горно-технических, гидрогеологических условий и разработка математических моделей технологического процесса разработки малых месторождений;
- геомеханическое обоснование разработки малых месторождений нерудного сырья в зависимости от состояния массива;

- разработка научных принципов освоения малых месторождений нерудных строительных материалов (на примере месторождений природного камня и песчано-гравийного материала);
- создание оптимальных технологий и оборудования для предприятий малой производственной мощности, обеспечивающих выпуск конкурентоспособной продукции;
- оптимизация параметров разработки мелкоблочных месторождений природного камня направленным расколом;
- разработка инновационных технологий переработки отходов добычи нерудных полезных ископаемых.

Для решения поставленных задач может быть использован комплекс методов исследований, включающий анализ научного уровня обоснований технологических решений и практического опыта, системный технико-экономический анализ, аналитические исследования, методы исследования операций, математической статистики и теории вероятностей, экономико-математическое моделирование, физическое моделирование и опытно-промышленные эксперименты. Для анализа современного состояния освоения малых месторождений необходимо изучить фондовые материалы Госагенства КР по геологии и минерально-сырьевым ресурсам.

Проведение широкомасштабных научно-исследовательских и опытно-экспериментальных работ в направлении освоения малых месторождений должно обеспечить следующие научные результаты:

-выработка теоретических положений по рациональной разработке малых месторождений нерудных строительных материалов с наивысокими технико-экономическими показателями;

-совершенствование технологической схемы добычи и переработки нерудных полезных ископаемых;

-прогноз и создание опережающих технологий для предприятий нерудной промышленности с малой производительной мощностью;

-разработка и внедрение инновационных, ресурсосберегающих технологий переработки отходов нерудной промышленности.

Таким образом, исследования, направленные на научно-методическое обоснование технологических решений по освоению маломасштабных месторождений нерудных строительных материалов позиционируются как весьма актуальные. Научно-исследовательские работы в этом направлении начаты в Институте природных ресурсов ЮО НАН КР и в настоящее время продолжаются в Ошском технологическом университете по линии Управления науки при МОН КР.

По предварительным результатам исследований можно сделать следующие выводы [4-6]:

- ✓ Уточнено содержание понятия о маломасштабных месторождениях, которое должно включать в себя не только количество запасов, но и комплексную геотехнологическую оценку, а также критерии экономической целесообразности разработки.
- ✓ Сформулированы первоочередные задачи комплексного освоения малых месторождений, связанные с составлением Кадастра и разработкой научно обоснованной методологической базы по разработке указанной группы месторождений.
- ✓ Эффективность освоения группы маломасштабных месторождений повышается посредством максимизации чистого дисконтированного дохода с учетом пространственного взаимного расположения добычных участков и перерабатывающего цеха.

Реализация предлагаемых концептуальных положений по комплексному освоению малых месторождений нерудных строительных материалов несомненно внесет экономическую пользу за счет небольших капитальных вложений, короткого срока их окупаемости, минимальных затрат на создание инфраструктуры, а также применения простых схем вскрытия и технологии очистных работ.

Литература

1. Галченко Ю.П., Сабянин Г.В. Перспективы развития геотехнологии освоения маломасштабных месторождений. / Экологобезопасные технологии освоения недр Байкальского региона – Улан-Удэ, 2000. – С. 89-95.
2. Глотов В.В. Научные основы освоения маломасштабных месторождений Восточного Забайкалья. \автореф.дисс. на соискание уч. степени д.т.н., Московская государственная геологоразведочная академия им. С. Орджоникидзе. М.:2007.
3. Сабянин Г.В. Обоснование геотехнологических методов повышения экологической безопасности освоения маломасштабных месторождений.\автореф.дисс. на соискание уч. степени к.т.н. Институт проблем комплексного освоения недр РАН. М.:2007.-18 стр.
4. Кожогулов К.Ч., Калдыбаев Н.А. Проблемы освоения малых месторождений нерудных строительных материалов Кыргызстана. \\ Современные проблемы механики сплошных сред. Вып. двенадцатый. Гидрогазодинамика, геомеханика и геотехнологии. -Бишкек, 2010. -стр. 27-33.
5. Калдыбаев Н.А. Султаналиев А., Султанов И. Горно-геологические и горно-технические условия разработки месторождения Талдыксай. Журнал “Инженер”.\ Материалы II-международной конференции «Наука, техника, технология». -стр. 233-248.
6. Калдыбаев Н.А., Караева З.У., Ысманова М. Критерии и методы оптимизации разработки малых месторождений природного камня Известия ОшТУ, №2, 2011г. стр. 54-59.

УДК 621.311.2.

Кудайбердиев Б.Э., ОшГСУ

Комбинированная биоэнергетическая установка с двигателем Стирлинга

В данной работе рассматривается применение двигателя Стирлинга в автономной энергетической установке с использованием возобновляемых источников энергии (энергии биомассы).

In given work is considered using the engine Stirlinga in autonomous energy installation with use the renewed sources to energy (the energy of the biomass).

Обострение экологических проблем, истощение запасов и роста цен на невозобновляемые энергоресурсы, обусловили интерес в рациональном использовании всех существующих на Земле и околоземном пространстве источников топлива и энергии [1]. Одним из возобновляемых видов энергии, которое человечество использует в течении многих лет, являются отходы животного и растительного происхождения [2].

Известно, что животные плохо усваивают энергию растительных кормов и более половины ее уходит в навоз, который является ценным органическим удобрением и может быть при этом использован в качестве возобновляемого источника энергии. Концентрация животных в сельской местности обусловили увеличение объемов навоза и навозных стоков, которые должны утилизироваться, не загрязняя окружающую среду.

В любой сельской местности в течение года собирается значительное количество навоза и ботвы растений [3]. Обычно под воздействием окружающей среды они разлагаются и их используют как органическое удобрение. Однако мало кто знает, какое количество биогаза и тепла выделяется при ферментации отходов животного и растительного происхождения. А ведь эта

энергия тоже может гарантировать минимум энергоснабжения в зонах децентрализованного и неустойчивого энергоснабжения.

Одним из путей рациональной утилизации навоза и навозных стоков является их анаэробное сбраживание, которое обеспечивает обезвреживание навоза и сохранение его как удобрения при одновременном получении биогаза.

При анаэробном сбраживании навоза получается 2 вида полезных продуктов — биогаз и удобрения. Их свойства представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Показатель	CH_4	Компоненты CO_2	H_2	H_2S	Смесь 60% CH_4 + 40% CO_z
Объемная доля, %	55-70	27-44	1	3	100
Объемная теплота сгорания, МДж/м^3	35,8	10,8	22,8	—	21,5
Температура воспламенения, °С	650-750	—	585	—	650-750

На сегодняшний день во многих странах эксплуатируются биоэнергетические установки (БЭУ), позволяющие значительно экономить другие виды топлива.

В работе [4] нами предложена конструкция БЭУ с двигателем Стирлинга (ДС) предназначенная для автономного энергоснабжения локальных потребителей.

Отличительной особенностью разработанной БЭУ с ДС является кроме производства биогаза, возможность выработки электрической энергии. При этом производимая установкой часть биогаза утилизируется и используется для работы ДС. Часть электрической энергии, вырабатываемая ДС используется для бытовых нужд, а другая часть для обеспечения работоспособности БЭУ.

Кроме того, в результате анаэробной переработки биомассы в установке получаются высококачественные экологически чистые органические удобрения. Состав получаемых минеральных удобрений представлены в табл.2.

Таблица 2

Продолжительность сбраживания, сутки	Азот общий, N	Азот аммонийный, N-NH_4	P_20_5	K_2O	C : $N_{общ}$
0 (контроль)	0,32	0,13	0,11	0,24	12,2
5	0,31	0,13	0,11	0,24	11,9
10	0,31	0,16	0,11	0,24	10,5
15	0,31	0,16	0,11	0,24	9,6

На рис.1 представлена технологическая схема биоэнергетической установки. Органические отходы животных накапливаются в навозоприемнике 2, где происходит их предварительное сбраживание. Посредством насоса 3 жидкий навоз поступает в метантенк 4. В процессе анаэробной бактериальной деструкции органических веществ биомассы выделяется биогаз, который накапливается в газгольдере 5.

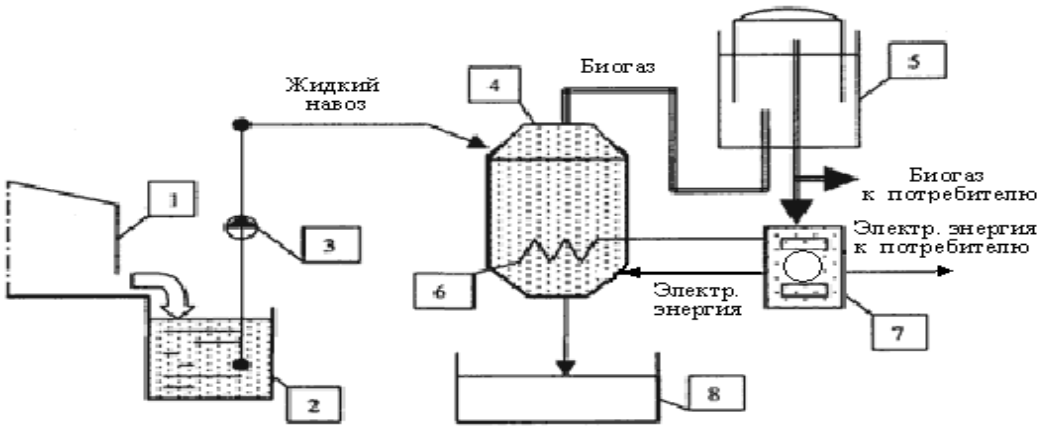


Рис.1. Обобщенная схема биогазовой установки: 1- ферма; 2 - навозоприемник; 3- насос; 4 -метантенк; 5 - газгольдер; 6 - мешалка; 7 – двигатель Стирлинга; 8 - хранилище удобрения.

Далее осуществляется утилизация получаемого биогаза: часть получаемого биогаза используется путем непосредственного сжигания в бытовых отопительных газовых приборах; часть его идет для сжигания в биогазовом бойлере предназначенного для подвода теплоты к теплоприемнику ДС 7.

Принцип работы ДС заключается в попеременном нагреве и охлаждении заключенного в изолированном пространстве рабочего тела. При этом преобразование тепловой энергии в механическую происходит посредством сжатия постоянного количества рабочего тела при низкой температуре и последующего его расширения при высокой температуре. Поскольку работа, затрачиваемая поршнем на сжатие рабочего тела, меньше работы, которую поршень совершает при расширении рабочего тела, двигатель вырабатывает полезную механическую энергию. Посредством встроенного генератора (в схеме не показано) механическая энергия ДС преобразуется в электрическую. Вырабатываемая ДС электрическая энергия непосредственно используется для питания бытовых электроприборов, а также для поддержания необходимой температуры и периодического смешивания биомассы в метантенке для обеспечения непрерывной работы системы.

Выбор ДС как преобразователя тепловой энергии в механическую (электрическую) в составе БЭУ был обоснован следующими его достоинствами:

- высокий коэффициент полезного действия (КПД) по сравнению с безмашинными преобразователями и с преобразователями машинного типа. В опытных ДС получен КПД до 40 % [5];
- возможность использования любого источника тепловой энергии (горение газообразного, жидкого или твердого топлива, энергия солнечной радиации и др.);
- бесшумность работы и широкий диапазон мощностей;
- имеет замкнутый рабочий процесс, следовательно, не отравляет окружающую среду выхлопными газами.

Термический КПД ДС, так же как и других тепловых двигателей, возрастает с повышением температуры при подводе тепловой энергии и с понижением температуры при отводе тепловой энергии. Влияние температуры при подводе и отводе тепла на термический КПД следует из уравнения Карно для идеального случая [5]:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_x}{T_r} \qquad (1)$$

где T_x – температура рабочего тела в холодной полости, К; T_r – температура рабочего тела в горячей полости, К.

Термический КПД, определяемый по формуле (1), – это КПД идеального цикла, основанный на предположении, что тепловая энергия подводится и отводится при соответствующих

постоянных температурах. Для определения термического КПД реального двигателя используется выражение:

$$\eta_{TE} = \frac{Q_{пол} - Q_{хол}}{Q_{пол}}, \qquad (2)$$

где $Q_{пол}$ – энергия, получаемая от источника энергии, Дж; $Q_{хол}$ – энергия, отводимая в холодный теплообменник.

Выражение (2) не определяет действительный индикаторный КПД двигателя, поскольку тепловая энергия, отдаваемая источником энергии или содержащаяся в нем, не обязательно полностью поглощается рабочим телом двигателя. Поэтому более точное выражение для определения индикаторного КПД рассматриваемого нами ДС имеет следующий вид:

$\eta = \eta_{бг}\ \eta_{TE}$, где $\eta_{бг}$ – КПД биогазовой горелки.

Достигнутый к настоящему времени КПД ДС при температурах нагрева 600…700°С достигает до 40 % [6].

Применяемый в качестве топлива для работы ДС биогаз имеет теплоту сгорания от 21 до 36 тысяч кДж/нм^3 в зависимости от содержания в нем метана. По этому показателю он сравним с лучшими видами современных топлив: бензином, керосином, углем, природным газом, пропаном, дровами, навозными брикетами. Температура воспламенения биогаза, содержащего 60 % метана, составляет 627°С. Результаты теоретических расчетов показывают, что в идеальных условиях в метан может переходить до 25 % конвертируемой при фотосинтезе энергии солнца. На каждую тонну органического вещества (по сухому весу) образуется от 200 до 600 м^3 биогаза.

Вывод: Особенности природно-климатических условий Республики Кыргызстан, концентрация домашнего скота в сельских местностях способствуют накоплению биологических масс. Поэтому применение автономной комбинированной биоэнергетической установки с ДС, может существенно повысить уровень энергообеспечения потребителей в условиях отсутствия централизованного энергоснабжения.

Литература

1. Панцхава Е.С., Кошкин Н.Л. Использование энергии биомассы в России: Проблемы и перспективы // Тезисы германо-российской конференции «Возобновляемые источники энергии и их роль в энергетической политике России и Германии», Фрайнбург. 1994.
2. Березин И.В., Панцхава Е.С. Техническая биоэнергетика // Биотехнология.1986.Т.2. №2. - с.1-12.
3. Осмонов О.М. Основы инженерного расчета автономных гелиобиоэнергетических установок. Москва. 2011. с. 9-15.
4. Осмонов О.М., Ковалев Д.А., Кенжаев И.Г. Патент на изобретение № 2253211 Российской Федерации, Биоэнергетическая установка. 2005г.
5. Кудрин О.И. Солнечные высокотемпературные космические энергодвигательные установки. // Под ред. В.П.Белякова. – М., Машиностроение, 1987. – 248 с.
6. Ридер Г., Хупер Ч. Двигатели Стирлинга. // Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 464 с.

УДК621.232.

Обозов А. Дж., Насирдинова С.,
КГТУ им. И. Раззакова

О повышении к. п. д. термосифонной солнечной установки

В статье рассматривается один из методов повышения коэффициента полезного действия термосифонной солнечной водонагревательной установки. Обсуждаются новые технические решения и излагаются методические основы определения к.п.д. установки с учетом предлагаемых новых методов.

Статьяда күндүн энергиясы менен иштөөчү термосифондуу суу ысытуучу орнотмонун пайдалуу аракеттин коэффициентин жогорулатуунун методдорунун бири каралган. Жаңы техникалык чечимдер

талкууга алынды жана орнотмонун пайдалуу аракеттин коэффициентин аныктоонун сунушталып жаткан жаңы методун камтыган методикалык негиздери баяндалды.

The article deals with one of the methods of increasing the efficiency of the thermosiphon of solar water-heating installation. The new technical solutions and outlines the methodological basis for the definition of efficiency of the plant according to the proposed new methods

Как известно самое широкое распространение в практике получили солнечные водонагревательные установки для нагрева воды [1,2,3]. Значительная часть из них, это сезонные солнечные установки с термосифонной системой циркуляции. [4]. Их простота конструкций, невысокая стоимость и надежность работы стали основными критериями для потребителей при их приобретении и эксплуатации. Как правило, эти установки небольшой мощности и используются для автономных потребителей. Принципиальная схема наиболее распространенной термосифонной солнечной установки приведена на рис.1.

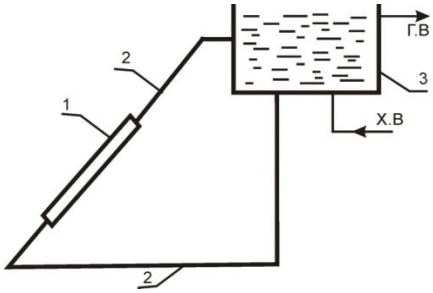


Рис. 1. Принципиальная схема установок
1 - Солнечный коллектор
2 - Соединительные трубопроводы
3 - Бак аккумулятор
Х.В. – подача холодной воды
Г.В. – отвод горячей воды

Несмотря на имеющиеся достоинства, данная установка имеет один существенный недостаток. Дело в том, что в первоначальный период в утреннее время солнечная энергия затрачивается не только на нагрев воды, но и расходуется на нагрев циркуляционных трубопроводов, непосредственного корпуса солнечного коллектора и корпуса бака-аккумулятора. Последние это есть не что иное, как вынужденные потери. Но в данной установке также присутствуют, назовем их, не вынужденные потери.

Это потери, которые возникают в завершающий вечерний период работы установки. В этот период времени циркуляция воды в системе прекращается и первоначально затраченная энергия

на разогрев системы (трубы, корпус СК, бака-аккумулятора) в том числе и воды, находящейся в трубопроводах и СК вновь теряется в виде тепловых потерь. Чтобы избежать части потерь обусловленных охлаждением воды в трубопроводах и самом солнечном коллекторе, предлагается новая принципиальная схема установки, которая приведена на 2.

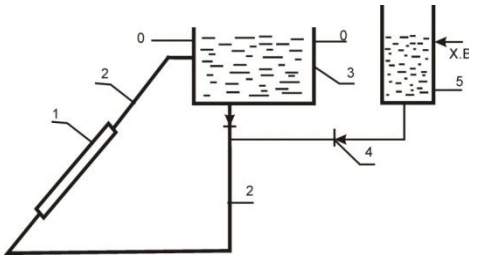


Рис. 2. Предлагаемая схема установок
1 - Солнечный коллектор
2 - Соединительные трубопроводы
3 - Бак аккумулятор
4 - Обратный клапан
5 – Дополнительный бочок.

Работает установки следующим образом. Первоначально система через дополнительный бачок 5 заполняется до уровня 0-0. То есть уровень воды в обоих баках одинаков. Заполненные системы происходит через бак. 5. При выходе воды на уровень (0-0) подача воды прекращается. Установка начинает работать в термосифонном режиме. Так как имеется обратный клапан 4, холодная вода находящаяся в баке 5 не участвует в процессе нагрева и остается холодной, нагревается лишь вода в основном баке 3.

В течении светового дня температура в баке 3 постепенно поднимается с температуры холодной воды $t_{x.â}$ до некоторой температуры t_k : то есть

$$t_k > t_{x.â} \qquad (1)$$

При этом плотность воды так же снижается с ρ_0 до ρ_k т.е.

$$\rho_0 > \rho_k \qquad (2)$$

В вечерний период времени когда солнце перестает светить начинаем заполнять бак 5 дополнительно холодной водой. Причем объем подаваемой воды должен быть равен объему воды находящейся в солнечном коллекторе 1 и циркуляционных трубопроводах -2

$$V_{äîï} = V_{ñê} + (V^{ïð}/_{òð} + V^{íá}/_{òð}) = V_{ñê} + V_{òð} \qquad (3)$$

где $V_{äîï}$ - объем дополнительной холодной воды подаваемой в бак 5.

$V_{ñê}$ - объем солнечного коллектора (коллекторного поля).

$V^{ïð}/_{òð}$ - объем воды находящейся в прямом трубопроводе.

$V^{íá}/_{òð}$ - объем воды находящейся в обратном трубопроводе.

При заполнении бака 5. уровень в нем поднимается и появляется разность давлений, что заставляет открыться клапану 4 и вода из бака 5 начинает перетекать в бак 3. Так как температура холодной воды в баке 5 ниже чем в баке 3 то выполняется условие (2), вследствие этого более холодная вода поступает из бака 5 через трубопроводы 2 и солнечный коллектор 1. в бак 3. Таким образом, вся горячая вода остающаяся в системе перейдет в изолированный бак 3. Вследствие этого в ночной период времени количество воды ране остающаяся в системе не охлаждается и следовательно суточный к.п.д. установки повысится.

Выясним, на какую величину увеличится к.п.д. установки.

К.п.д. солнечной установки приведенной на рис. 1 определяется как

$$\eta_{ñó} = Q_{ïîë} / Q_{çàò}; \qquad (4)$$

где $Q_{ïîë}$ – количество полезно нагретой воды.

$Q_{çàò}$ – количество затраченной солнечной энергии для нагрева воды.

В нашем случае

$$Q_{ïîë} = mc\Delta t \qquad (5)$$

где m – масса объема воды в солнечной установке с теплоемкость воды, Δt разность температур. $(\Delta t = t_k - t_{x.ä})$

Величина массы воды состоит из $m_{áà}$ – массы в баке аккумуляторе – 3, массы в солнечном коллекторе $M_{ñê}$ и массы воды в трубопроводах т.е. $(m_{òð})$

$$m = m_{áà} + m_{ñê} + m_{òð} \qquad (6)$$

тогда можно записать (4) в виде

$$Q_{ïîë} = ñ\Delta t m_{áà} + c\Delta t(m_{ñê} + m_{òð}) \qquad (7)$$

или

$$\eta_{ñó} = c\Delta t m_{áà} / Q_{çàò} + c\Delta t(m_{ñê} + m_{òð}) / Q_{çàò}; = \eta_{ïñí} + \eta_{äîï} \quad (8)$$

Таким образом, в нашем случае при наличии бака 5 (рис.2) объем воды нагретой в СК и трубопроводах перемещается в основной бак аккумулятор, тем самым объем нагретой воды за день увеличивается на величину $m_{ñê} + m_{òð}$, а к.п.д.

$$\eta_{ñó} = \eta_{ïñí} + \eta_{äîï}$$

Таким образом, $\eta_{ñó}$ увеличится на величину.

$$\eta_{äîï} = \eta_{ñó} - \eta_{ïñí} = +ñ\Delta t(m_{ñê} + m_{òð}) / Q_{çàò}$$

$$\eta_{äîï} = ñ\Delta t(m_{ñê} + m_{òð}) / Q_{çàò} \qquad (9)$$

Из уравнения (9)видно, что при прочих равных условиях $\eta_{äîï}$ зависит в основном только от массы воды $c\Delta t$ т.к. теплоемкость воды в рассматриваемых пределах Δt практически не изменяется и ее можно считать $const$.

Следовательно величина $\eta_{äîï}$ будет тем больше, чем больше Δt и чем больше $(m_{ñê} + m_{òð})$. Таким образом можно сделать следующий вывод

- Что для традиционных термосифонных солнечных установок сезонного режима работы величина к.п.д. $(\eta_{ñó})$ установки тем меньше, чем больше разность температур воды на входе и выходе из СК и чем больше количества воды находится в СК и трубопроводах.
- Следует стремиться к снижению Δt в термосифонных СУ и $(m_{ñê} + m_{òð})$.
- Предлагаемый способ позволяет увеличить $\eta_{ñó}$ и практически избежать дополнительных потерь в термосифонных солнечных установках для нужд горячего водоснабжения.

Литература

1. Мак-Вейч. Применение солнечной энергии м: Энергоиздат, 1981г.
2. Авезов Р.Р, Орлов А. Ю Солнечные системы отопления и горячего водоснабжения, Ташкент, ФАН, 1988.
3. Харченко Н. В. Индивидуальные солнечные установки. М. Энергоатомиздат 1991г.
4. Обозов А. Дж, Ботбаев Р. М. Возобновляемый источники энергии. Бишкек. Изд. «Текник», 2010г.

УДК 32.95

Ормонова И.А., Ормонов М.Р., ОшТУ

Моделирование беспроводных сенсорных сетей

В статье рассмотрены вопросы разработки имитационной модели беспроводной сенсорной сети. Обосновано использование системы моделирования TOSSIM, которая является частью TinyOS. В качестве критерия эффективности настройки параметров протоколов передачи данных и программного обеспечения узлов беспроводной сенсорной сети взято среднее количество пересылок пакетов данных и пакетов маршрутизации, которое вызвано функционированием сети на протяжении определенного времени моделирования.

The paper deals with the development of a simulation model of the wireless sensor network. Justified the use of the simulator TOSSIM, which is part of TinyOS. As a criterion of efficiency settings data transmission protocols and software components wireless sensor network is the average number of hops data packets and routing packets, which is caused by the operation of the network for some time modelin

Введение. Беспроводная сенсорная сеть (англ. WSN – Wireless Sensor Network) – это распределённая самоорганизующаяся сеть множества датчиков (сенсоров), объединенных между собой посредством радиоканала. Область покрытия подобной сети может составлять от нескольких метров до нескольких километров за счет способности ретрансляции сообщений от одного узла к другому (рис. 1). Датчики, объединенные в беспроводную сенсорную сеть, образуют территориально-распределенную самоорганизующуюся систему сбора, обработки и передачи информации. Основная область применения беспроводных сенсорных сетей – контроль и мониторинг измеряемых параметров физических сред и объектов [1, 2].

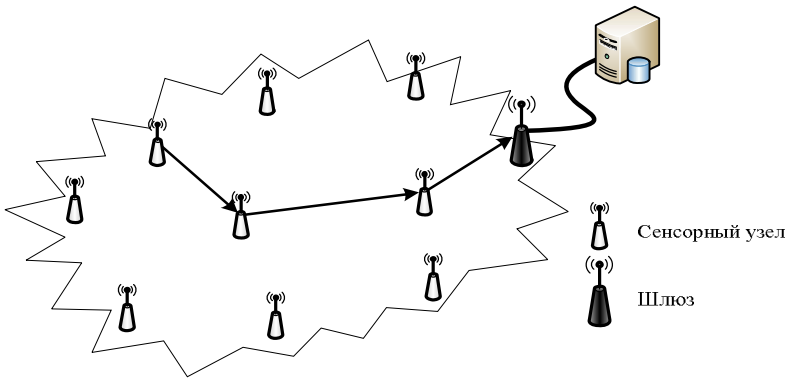


Рисунок 1 – Архитектура беспроводной сенсорной сети

Системы моделирования – это важный инструмент для разработки беспроводных сенсорных сетей. С их помощью разработчики могут быстро и эффективно создавать и отлаживать новые протоколы и алгоритмы работы сети. Это особенно важно, так как затраты на развертывание реальных сетей остаются достаточно высокими.

Модели могут использоваться для того, чтобы выбрать наиболее подходящие протоколы передачи данных и определить их оптимальные параметры. Кроме этого выполнить настройку любых других компонент программного обеспечения узлов WSN без моделирования также затруднительно, так как программирование каждого узла беспроводной сенсорной сети осуществляется отдельно, а не всей сети в целом. Поэтому, внесение каких-либо изменений в ПО узлов сопровождается большими затратами времени на подключение каждого из них к компьютеру посредством последовательного порта и перепрограммирование {3}.

При проектировании беспроводных сенсорных сетей невозможно перенести программное обеспечение, которое хорошо протестировано и отлажено в лабораторных условиях для небольшой сети, на реальную сеть. Это связано с тем, что динамические процессы, протекающие в беспроводных сенсорных сетях, существенно меняются при масштабировании систем. Наличие

большого количества транзитных узлов, которые ретранслируют пакеты, существенно влияет на оптимальность выбранных параметров протоколов передачи данных. Поэтому, для анализа и понимания динамических процессов, протекающих в беспроводных сенсорных сетях, также необходимы модели.

Все это говорит о том, что работы, нацеленные на создание моделей беспроводных сенсорных сетей, которые давали бы возможность с высокой точностью моделировать поведение сети, являются актуальными {2}.

Системы моделирования беспроводных сенсорных сетей позволяют:
- повысить эффективность разработки сенсорных сетей;
- понять обоснованность реального развертывания сенсорной сети;
- проводить научные исследования в области сенсорных сетей;
- существенно сократить затраты на разработку и развертывание сети.

В настоящее время для моделирования беспроводных сенсорных сетей используются системы NS-2 [3] и TOSSIM [4-6]. Однако, данные системы моделирования обладают недостатками, которые не позволяют или делают затруднительным их использование для моделирования больших сенсорных сетей.

Данная работа нацелена на создание имитационной модели беспроводной сенсорной сети для анализа динамических процессов, протекающих в них. Данная модель должна адекватно воспроизводить протоколы передачи данных, используемые в реальных беспроводных сенсорных сетях. Кроме этого, модель должна позволять эмулировать работу больших сенсорных сетей, содержащих сотни и даже тысячи узлов.

Постановка задачи

Целью данной работы является упрощение разработки и отладки программного обеспечения для узлов беспроводной сенсорной сети за счет использования имитационных моделей на этапе проектирования.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Рассмотрение особенностей функционирования беспроводных сенсорных сетей как распределенных систем особого вида.
2. Формулирование критерия эффективности функционирования беспроводной сенсорной сети.
3. Рассмотрение современных систем моделирования, которые могут быть использованы для создания имитационной модели беспроводной сенсорной сети.
4. Разработка тестовой модели для небольшой сенсорной сети для проверки возможности ее использования при расчете сформулированного критерия эффективности.

Объектом исследования является беспроводная сенсорная сеть. Беспроводная сенсорная сеть представляет собой множество узлов $Y = \{y_i \mid i = \overline{1,n}\}$ и множество соединений $C = \{c_j \mid j = \overline{1,m}\}$. Таким образом, структуру беспроводной сенсорной сети можно описать ориентированным графом $G(X,U)$, в котором множеству узлов Y поставлено во взаимно однозначное соответствие множество вершин X, а множеству соединений C – множество дуг U. Пример такого графа можно увидеть на рис. 4. В процессе функционирования сети инициируется пересылка множества пакетов данных $P_i = \{p_{i,k} \mid k = \overline{1,r_i}, i = \overline{1,n}\}$, где r_i - количество пересылок i-того пакета. Для определения особенностей функционирования беспроводной сенсорной сети как распределенной системы особого вида, рассмотрим детали их реализации {8}.

Особенности функционирования беспроводной сенсорной сети под управлением TinyOS.

Общепринятым стандартом для беспроводных сенсорных сетей в настоящее время является операционная система TinyOS. TinyOS – это ОС, разработанная в Университете Беркли как часть проекта NEST, финансируемого DARPA (Defense Research Projects Agency). TinyOS является программным обеспечением с открытым исходным кодом, который доступен по адресу www.tinyos.net. TinyOS – это управляемая событиями операционная система реального времени, рассчитанная на работу в условиях ограниченных вычислительных ресурсов. Рассмотрим основные механизмы и протоколы, используемые в TinyOS.

Для реализации передачи данных по радиоканалу в TinyOS, начиная с версии 1.0, используется метод *Low-Power Listening (LPL)* [7]. Этот метод гарантирует надежную доставку сообщений и, при этом, позволяет значительно сократить затраты энергии в отличие от случая постоянного прослушивания канала. В этом методе узел включает свой радиоканал на прослушивание только на время, достаточное для того, чтобы обнаружить несущую частоту в канале. Если узел обнаруживает несущую, то он продолжает прослушивать радиоканал на время достаточное для обнаружения пакета. Поскольку длина пакета не велика, передающий узел должен посылать свой первый пакет множество раз, чтобы получатель имел шанс услышать его при периодическом прослушивании. Передатчик прекращает посылать пакеты, как только он получает подтверждение о его получении или по истечении времени ожидания. Когда узел получает пакет, он продолжает прослушивать канал для того, чтобы получить второй пакет [8, 9]. Поэтому, очередь пакетов амортизирует затраты на ожидание первого из них по последующим. Следовательно, при использовании Low-Power Listening, более энергоэффективно послать пакеты в очередях, чем посылать отдельные пакеты с фиксированной периодичностью. Это необходимо учитывать при разработке приложений, которые должны обеспечивать малое потребление энергии {5}.

В качестве основного протокола сетевого уровня в TinyOS 2.x. используется *Collection Tree Protocol (CTP)* [1]. CTP является дейтаграммным протоколом с адресацией любому устройству группы для передачи данных одному из корней дерева сети. Древовидная структура сети образуется благодаря особенности протокола CTP. Передача данных в шлюз, подключенный к базовой станции, является общим требованием для любой сенсорной сети, поэтому корнями дерева сети являются шлюзы. Когда у узла есть данные, которые должны быть переданы, он посылает их вверх по дереву в направлении ближайшего шлюза. Кроме данных, которые узел получает от своих датчиков, он также ретранслирует данные, переданные ему другими узлами. Таким образом, образуется дерево сети. Иногда, в зависимости от особенности беспроводной сенсорной сети, узлы должны быть в состоянии обработать пакеты, которые проходят через них для того, чтобы собрать статистику, вычислить агрегаты или предотвратить избыточные передачи.

В CTP применяются несколько механизмов для того, чтобы достигнуть высокой надежности передачи, но он не гарантирует 100% надежности доставки.

Для того, чтобы передать полезную информацию от датчиков, а также для тестирования согласованности топологии сети, используются пакеты данных. Рассмотрим формат пакетов данных CTP.

Протокол CTP не использует адреса, т.е. узлы не посылают пакеты в определенный корень; вместо этого протокол неявно выбирает корень, определяя следующий транзитный узел. Узлы генерируют маршруты к корням, используя градиент маршрутизации. В качестве градиента маршрутизации используется ожидаемое число транзитных узлов до корня (expected transmissions - ETX). У корня ETX равен 0. ETX узла равен ETX его родителя, плюс ETX соединения с родителем. Эта совокупная величина учитывает, что узлы могут использовать повторные передачи на канальном уровне. Для того, чтобы выбрать правильный маршрут, CTP должен выбрать узел с самым низким значением ETX.

В сетях с протоколом CTP могут возникать две серьезные проблемы: маршрутные циклы и дублирование пакетов. Маршрутные циклы появляются, когда узел выбирает новый маршрут, у которого значительно более высокий ETX, чем у старого маршрута. Это возможно в случае потери связи с предыдущим родителем. Если новый маршрут по каким либо причинам включает узел, который был потомком, то возникает цикл {6}.

CTP решает проблему циклов используя два механизма. Во-первых, каждый пакет CTP содержит текущее значение градиента узла. Если узел получает пакет данных со значением градиента ниже, чем его собственное, то это означает, что в дереве сети есть несогласованность. CTP пытается решить эту несогласованность, передавая пакет "неисправность", с надеждой, что узел, который послал пакет данных, получит его и соответственно скорректирует свой маршрут. Второй механизм – CTP не рассматривает маршруты с ETX выше, чем определенная константа, значение которой зависит от реализации сети.

Дублирование пакетов - это еще одна проблема, которая может возникать в CTP. Дублирование пакетов происходит, когда узел успешно получает пакет данных и передает

подтверждение, но отправитель не получает его. При этом отправитель повторно передает пакет в сеть. Для того, чтобы обнаружить дубликаты пакетов, узлы сохраняют небольшойкэш сигнатур тех пакетов, которые проходили через них. Когда на узел поступает новыйпакет, выполняется проверка, и, если его сигнатура есть в кэше, узел удаляет пакет, потому что это – дубликат {7}.

Маршрутные циклы усложняют подавление дубликатов, поскольку цикл маршрутизации может заставить узел легитимно получать пакет более одного раза. Поэтому, если узел удаляет дубликаты, основываясь исключительно на адресе отправителя и порядковом номере, пакеты в цикле маршрутизации могут быть удалены. Поэтому в пакетах данных CTP есть дополнительное поле - время жизни (time has lived - THL), которое увеличивается на каждом транзитном узле. Формат пакета данных CTP представлен на рис. 2.

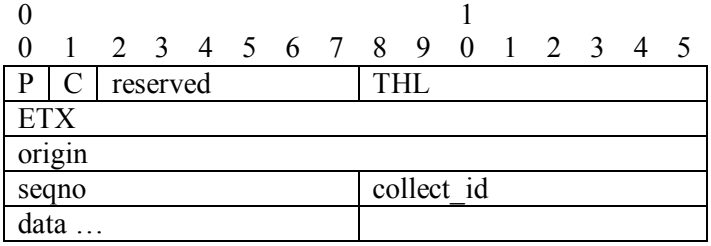


Рисунок 2 – Формат пакета данных CTP

Рассмотрим назначение полей пакета данных.

- P: запрос маршрутизации. Бит P позволяет узлам запрашивать информацию маршрутизации у других узлов. Если адресат получает пакет с установленным битом P, то он в ближайшее время должен послать в сеть пакет маршрутизации.
- C: уведомление о потере пакета. Если узел удаляет пакет данных CTP, то он должен установить поле C=1 в следующем пакете данных, который он будет передавать.
- THL: время жизни. Когда узел генерирует пакет данных CTP, он устанавливает THL в 0. Когда узел получает пакет данных, он увеличивает это поле на 1.
- ETX: показатель градиента маршрутизации отправителя. Когда узел передает пакет данных CTP, он должен записать значение ETX своего маршрута к адресату в поле ETX. Если узел получит пакет с более низким градиентом чем его собственный, то он в ближайшее время должен послать в сеть пакет маршрутизации.
- origin: адрес узла-источника пакета {4}.
- seqno: порядковый номер, установленный узлом-источником пакета.
- collect_id: высокоуровневый идентификатор протокола.
- data: полезные данные, произвольного размера (от нуля байт и больше).

Узлы посылают пакеты данных CTP как одноадресные сообщения канального уровня.

Для обновления и выстраивания дерева сети CTP использует специальные пакеты маршрутизации. Формат пакета маршрутизации представлен на рис. 3.

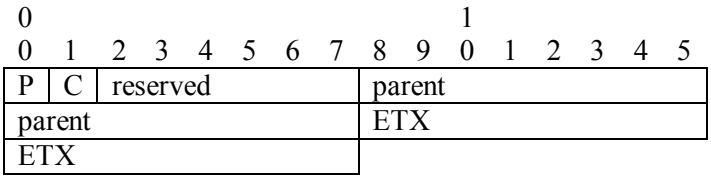


Рисунок 3 – Формат пакета маршрутизации CTP

Рассмотрим назначение полей.

- P: то же самое, что и для пакета данных с одним отличием: пакеты маршрутизации широковещательные, поэтому на бит P в них отвечает множество узлов.
- C: уведомление о потере пакета. Если узел удаляет пакет данных CTP, он должен установить поле C в следующем пакете маршрутизации, который он будет передавать.

- parent: текущий родитель узла.
- ETX: текущее значение градиента маршрутизация узла.

Когда узел получает пакет маршрутизации, он должен изменить свою таблицу маршрутизации, чтобы отразить новое значение градиента адресата. Если значение ETX узла изменяется значительно, то он должен передать широковещательный пакет маршрутизации, чтобы оповестить другие узлы, которые должны изменить свои маршруты. Поле родительского узла содержит идентификатор объекта для одноадресной передачи пакетов данных. Если родитель обнаружит, что ETX дочернего узла значительно ниже его собственного, он должен в ближайшее время послать в сеть пакет маршрутизации.

Узлы посылают пакеты маршрутизации CTP как широковещательные сообщения.
Для обмена информацией о качестве связи с соседями используется протокол *Link Estimation Exchange Protocol (LEEP)*.

Протокол маршрутизации требует знания качества связи между соседними узлами для определения маршрутов. В паре узлов (A, B) качество соединения – это значение в диапазоне от 0 до 255, которое описывает долю успешно полученных пакетов узлом B к общему числу пакетов переданных ему узлом A. Таким образом, качество соединения – эмпирическая вероятность того, что пакет будет успешно передан по нему. Значение 255 представляет вероятность равную 1, а значение 0 представляет нулевую вероятность успешного получения пакета по данному соединению.

В качестве метода доступа к среде передачи в TinyOS используется *«Множественный доступ с опросом несущей и предотвращением коллизий» CSMA/CA.*
Перед началом передачи, радиомодуль узла беспроводной сенсорной сети выполняет оценку чистоты канала (CCA). Если канал не чист, радиомодуль ожидает некоторый короткий случайный промежуток времени, прежде, чем повторит попытку передачи. Если канал свободен, то узел посылает сигнал строба [9].

Критерий эффективности настройки параметров ПО узлов беспроводной сенсорной сети.

Учитывая все особенности протоколов передачи данных, применяемые в TinyOS, можно сделать вывод о том, что в качестве критерия эффективности настройки протоколов и параметров ПО узлов беспроводной сенсорной сети может выступать среднее число пересылок сетевых пакетов. Критерий должен учитывать повторные пересылки при ошибках.

Пусть задано множество пакетов данных, которые генерируют узлы $P_i = \{p_{i,k} \mid k = \overline{1, r_i}, i = \overline{1, n}\}$, где r_i – количество пересылок i-того пакета. Эти пакеты содержат информацию полученную от датчиков. Так как в беспроводной сенсорной сети возможны повторные пересылки пакетов, величина r_i определяется не только количеством промежуточных узлов на пути от i-того узла до шлюза, но и количеством повторных пересылок, которое зависит от качества связи между узлами по радиоканалу. Пусть $l(p_{i,k}, t)$ - количество пересылок пакетов $p_{i,k}$ произошедшее за все время моделирования. Суммарное количество всех пересылок пакетов данных протокола CTP с учетом ретрансляции и повторной передач при возникновении ошибок будет определяться выражением:

$$N = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} l(p_{i,k}, t), \quad (1)$$

Исходя из того, что программное обеспечение узлов обычно использует стандартные протоколы принятые в TinyOS, которые описаны выше, то настройки программного обеспечения определяют лишь количество пакетов данных и пакетов маршрутизации, которые пересылаются в сети при ее функционировании. Поэтому, в качестве критерия эффективности настройки параметров ПО узлов можно взять среднее количество пересылок каждого пакета данных инициированного узлами и пакетов маршрутизации:

$$K = \frac{N + M}{n \cdot T / \tau} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} l(p_{i,k}, t) + M}{n \cdot T / \tau} \to \min, \quad (2)$$

где N – суммарное количество всех пересылок пакетов данных в сети с учетом ретрансляции;

M – суммарное количество всех пакетов маршрутизации пересылаемое в сети за время моделирования.

T – период моделирования,

τ – временной шаг – периодичность снятия показаний датчиков,

n – количество узлов сети.

Выражение $n \cdot T/\tau$ определяет суммарное количество пакетов данных, инициированных в сети без учета ретрансляций и повторных передач. Эти пакеты данных определяют функциональность системы, то есть это полезные данные, количество которых не зависит от протоколов и настройки ПО узлов.{8}

Для определения критерия (2) необходимо иметь возможность с помощью имитационной модели беспроводной сенсорной сети фиксировать каждое событие пересылки пакетов данных и пакетов маршрутизации. Рассмотрим системы моделирования, которые могут быть для этого использованы.

Система моделирования сетей NS-2.

Проект NS-2 является частью проекта VINT (Virtual InterNetwork Testbed), который организован DARPA и реализуется под руководством целого ряда научных организаций: USC/ISI (University of Southern California / Information Sciences Institute), Xerox PARC, LBNL (Lawrence Berkley National Laboratory) и UCB (UC Berkley). На сегодня основными спонсорами проекта являются DARPA, NSF и ACIRI (AT&T Center for Internet Research at ICSI) [3].

Главной целью проекта VINT являлось построение программного продукта, позволяющего осуществлять имитационное моделирование сетей связи и обладающего целым рядом характеристик, среди которых – высокая производительность, хорошая масштабируемость, визуализация результатов и гибкость. В качестве основы программной реализации был выбран разрабатываемый в University of California с 1989 г. пакет Network Simulator (до 1995 года известный как REAL). Для программного продукта было выбрано имя Network Simulator version 2 (NS-2).

NS-2 является программным обеспечением с открытым исходным кодом. Одним из отличительных свойств NS-2 с точки зрения гибкости является кроссплатформенность. NS-2 является объектно-ориентированной системой, ядро которой реализовано на языке C++, а в качестве интерпретатора используется язык сценариев OTcl (Object oriented Tool Command Language). Использование двух языков программирования в NS-2 объясняется следующими причинами: с одной стороны, для детального моделирования протоколов необходимо использовать язык программирования, обеспечивающий высокую скорость выполнения и способный манипулировать большими объемами данных, а с другой стороны, для удобства пользователя и быстроты реализации и модификации различных сценариев моделирования лучше использовать более высокоуровневый интерпретируемый язык программирования. Такой подход является компромиссом между удобством использования и скоростью эмуляции {4}.

На C++ в NS-2 можно реализовывать специфические функции, например, дисциплины обслуживания, которые не реализованы изначально. Пакет NS-2 содержит набор полезных утилит и средств, таких как генератор сценариев моделирования и генератор топологии сети. С помощью генератора топологии GT-ITM можно автоматически создать топологию очень крупной сети без необходимости вручную определять все ее компоненты. Генератор сценариев моделирования используется для создания трафика между узлами, а также может быть использован для определения передвижения узлов.

В NS-2 на уровне ядра реализованы почти все известные протоколы сетей связи. Среди наиболее актуальных на данный момент можно отметить следующие: MPLS, IPv6, OSPF, RSVP, протоколы беспроводной связи, web caching и многие другие. Реализовано целое семейство дисциплин обслуживания очередей – RED, WFQ, CBQ, SFQ и т.д. Также есть возможность реализации собственного протокола {3}

NS-2 является универсальной системой моделирования, сильной стороной которого является возможность реалистичного моделирования физического распространения сигналов, однако, использование этой системы для моделирования беспроводных сенсорных сетей потребует написания расширений. Кроме этого, NS-2 позволяет моделировать только сеть, но не позволяет эмулировать работу программного обеспечения узлов.

Система моделирования TOSSIM

Основным управляющим механизмом в TinyOS является событие. Событие сигнализирует о получении показаний сенсора, о поступлении пакета данных по беспроводной связи, о срабатывании таймера или о завершении вычислений. Обработка аппаратного события лежит в основе всех операций в TinyOS. Таким образом, основная задача TOSSIM — эмуляция событий для беспроводной сенсорной сети, узлы которой работают под управлением TinyOS.

Эмулятор TOSSIM позволяет моделировать работу как отдельных узлов, так и больших сетей, состоящих из сотен и даже тысяч узлов, а также предоставляет разработчику возможность анализировать и тестирокомпилятор, входящий в состав TOSSIM, заменяет низкоуровневые компоненты приложения, которые взаимодействуют с аппаратными ресурсами узла, компонентами, взаимодействующими с программными реализациями этих устройств в симуляторе. Благодаря этому эмулятор выполняет тот же код, что и узлы реальной сети.

TOSSIM выстраивает события модели в очередь, которая управляет выполнением приложения TinyOS для отдельного моделируемого узла. Сгенерированное событие модели является аналогом аппаратного прерывания для моделируемого узла. Возникающее событие вызывает обработчик прерывания, который посылает сигналы событиям и вызывает команды TinyOS, имитируя то, что происходит в реальных узлах {8}.

В TOSSIM переменные, описывающие компоненты узла, представляются в виде массивов. Элементом этого массива является переменная отдельного моделируемого узла, индекс которого равен индексу этого элемента в массиве. Когда ядро эмулятора обрабатывает событие, в глобальную переменную-состояние устанавливается индекс узла, работающего в текущий момент. Этот индекс используется для выборки из массивов данных тех элементов, которые относятся к активному узлу {8}.

TOSSIM использует простую, но мощную модель беспроводной сети. Сеть представляется в виде ориентированного графа, в котором каждая вершина — беспроводной узел, и каждой дуге между узлами поставлено в соответствие некоторое значение — величина затухания сигнала, причем величина затухания при передаче сообщения узлом a узлу b необязательно равна затуханию при обратной передаче. Такой подход позволяет моделировать асимметричные связи. Величина затухания для каждого соединения может быть задана разработчиком и может изменяться в процессе моделирования. Величина затухания определяет вероятность ошибок, возникающих при передача сообщений.

На рис. 4 представлен пример описания в TOSSIM беспроводной сенсорной сети, состоящей из шести узлов. Между ними существует 16 соединений, причем большинство из них несимметричны. Например соединение от узла 0 к узлу 1 более качественно, чем в обратном направлении. В первом случае затухание -80 dB, во втором -90 dB. Это может быть связано с более высоким уровнем сигнала передатчика н а узле 0.

```
from TOSSIM import *
t = Tossim([])
r = t.Radio()
mote0 = t.getNode(0)
mote1 = t.getNode(1)
mote2 = t.getNode(2)
mote3 = t.getNode(3)
mote4 = t.getNode(4)
mote5 = t.getNode(5)
r.add(0, 1, -80)
r.add(1, 0, -90)
r.add(0, 2, -80)
r.add(2, 0, -83)
r.add(2, 3, -70)
r.add(3, 2, -80)
r.add(1, 3, -90)
r.add(3, 1, -92)
r.add(4, 3, -88)
r.add(3, 4, -85)
r.add(5, 3, -60)
r.add(3, 5, -76)
r.add(2, 1, -90)
r.add(1, 2, -90)
r.add(5, 4, -90)
r.add(4, 5, -90)
```

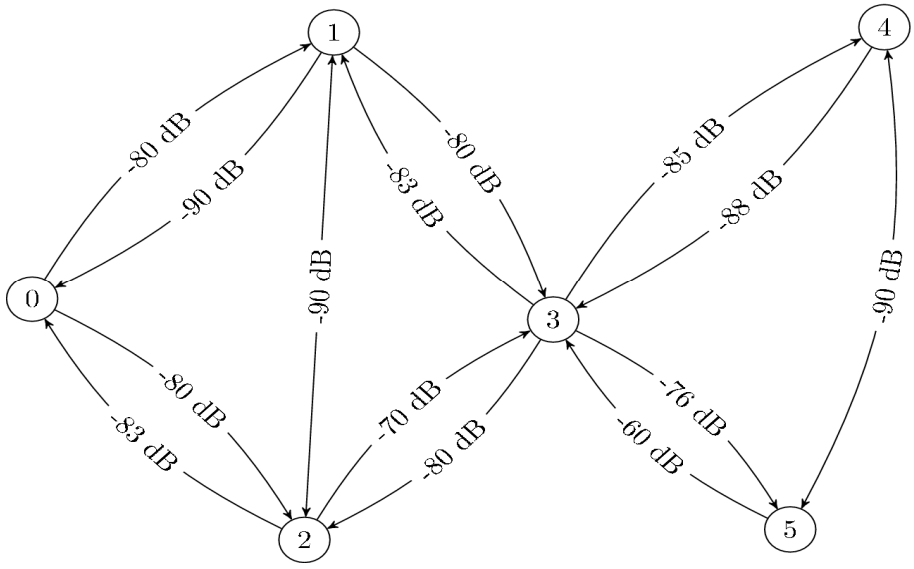


Рисунок 4 – Пример описания беспроводной сенсорной сети из 6-ти узлов в TOSSIM

Для данной тестовой модели был осуществлен сбор статистики пересылок пакетов данных и пакетов маршрутизации, которые генерировались с периодичностью в 1 с в течении одного часа модельного времени. Данная статистика может быть использована для определения различных параметров функционирования сети, в том числе и для определения значения сформулированного критерия эффективности. Для тестовой модели значение критерия эффективности составило 3,76 пересылок {9}.

Заключение

Беспроводные сенсорные сети сегодня являются объектом множества научных исследований. До настоящего времени большинство исследований были направлены на разработку протоколов передачи данных. Сейчас уже существуют достаточно хорошие протоколы канального и сетевого уровней и новые исследования нацеливаются на совершенствование средств разработки ПО для узлов беспроводных сенсорных сетей, которое могло бы работать в больших сетях. При разработке больших сенсорных сетей большое значение имеют системы моделирования.

TinyOS – это широко распространенная операционная система с открытыми исходными кодами для беспроводных сенсорных сетей. Эта ОС работает на узлах с ограниченными аппаратными ресурсами. Основной ресурс, который приходится экономить – это заряд батареи. Поэтому, одна из основных задач при разработке и отладке ПО – это минимизация энергозатрат при заданной функциональности, т.е. при заданной периодичности считывания показаний датчиков и передачи их по сети.

В качестве критерия эффективности настройки параметров протоколов передачи данных и программного обеспечения узлов беспроводной сенсорной сети взято среднее количество

пересылок пакетов данных и пакетов маршрутизации, которое вызвано функционированием сети на протяжении определенного времени моделирования.
Системы моделирования беспроводных сенсорных сетей TOSSIM и NS-2 фокусируются на различных аспектах и имеют различную архитектуру. NS-2 является универсальным пакетом имитационного моделирования сетей. TOSSIM предназначен для эмуляции программ написанных для операционной системы TinyOS.

Несмотря на эти отличия, TOSSIM и NS-2 имеют некоторые схожие черты. Обе системы одинаково подходят к моделированию событий происходящих в сетях. Обе системы являются симуляторами дискретных событий, которые происходят внутри сетей.

Для создания имитационной модели беспроводной сенсорной сети выбран пакет TOSSIM, так как он в полной мере позволяет моделировать сети под управлением TinyOS. Кроме этого, он позволяет моделировать не только протоколы передачи данных, но и все ПО узла. Важным преимуществом пакета TOSSIM является то, что он позволяет запускать приложения написанные для реальных узлов без модификации.

В работе создана имитационная модель небольшой сенсорной сети, состоящей из 6-ти узлов. В дальнейшем планируется разработка модели для большой сенсорной сети и настройка с ее помощью параметров протоколов передачи данных и других компонент ПО.

Литература

1. David Culler, Deborah Estrin, and Mani Srivastava, Guest Editors' Introduction: Overview of Sensor Networks, IEEE Computer, Vol. 37, No. 8, August 2004.
2. K. Martinez, J. K. Hart, R. Ong. Environmental Sensor Networks, Computer, 37(8):50-56, 2004
3. J. Chung, M. Claypool. NS by Example. Worcester Polytechnic Institute (WPI) http://nile.wpu.edu/NS/purpose.
4. P. Levis, N. Lee, M. Welsh, and D. Culler. TOSSIM: Accurate and Scalable Simulation of Entire TinyOS Applications. Proceedings of the First ACM Conference on Embedded Networked Sensor Systems (SenSys 2003).
5. P. Levis and N. Lee. TOSSIM: A Simulator for TinyOS Networks, 2003.
6. Simulating TinyOS Networks http://www.cs.berkeley.edu/~pal/research/tossim.html
7. "MICA2 Radio Stack for TinyOS." http://www.tinyos.net/tinyos-1.x/doc/мівать код, который предназн MICA2 Radio Stack for TinyOS." http://www.tinyos.net/tinyos-1.x/doc/mica2radio/CC1000.html
8. TI/Chipcon CC1000 Datasheet http://www.chipcon.com/files/CC1000_Data_Sheet_2_2.pdf
9. TI/Chipcon CC2420 Datasheet. p://www.chipcon.com/files/CC2420_Data_Sheet_1_3.pdf

УДК 32.95

Ормонова И.А., Ормонов М.Р., ОшТУ

Интегральная оценка качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи

В данной статье рассматриваются два численных метода определения интегральной оценки качества: арифметический и геометрический Проведенный анализ дает возможность выявить достоинства и недостатки каждого из методов.

In this paper we consider two numerical methods for integrated assessment of quality: the arithmetic and geometric. This analysis makes it possible to identify the advantages and under ¬ ings of each method.

При оценке качества передачи речевой информации по проводным или составным каналам связи применяются различные, ранее разработанные методы как правило, субъективные, квазисубъективные либо объективные {2}.

В последнее время наиболее часто используются объективные методы оценки, дающие возможность автоматизировать данный процесс, сделать его экономичнее и технологичнее и, что самое важное, осуществлять оценку качества без перерыва связи.

Все эти методы практически реализованы на современной элементной базе. Однако применить их для оценки качества при передаче речевой информации по каналам мобильной связи становится практически невозможным. В этих целях необходимо ввести какую-то количественную величину коэффициента оценки. За основу может быть принят обобщенный коэффициент качества, используемый при оценке показателя качества передачи речевого сигнала по проводным и составным каналам связи{1}.

$$K_{общ.кач.} = \mu_1 K_{гр} + \mu_2 K_{разб.} + \mu_3 K_{нат.} \quad (1)$$

где $K_{ообощ.кач.}$ — обобщенный коэффициент оценки качества, определяемый по арифметическому методу; $\mu 1, \mu 2, \mu 3$—весовые коэффициенты соответствующих оценок качества передачи речевой информации по громкости, по разборчивости и по натуральности.

Задача выбора интегрального критерия оценки качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи сводится к определению величины обобщенного коэффициента $K_{ообощ.кач.}$.

Отмечено, что интегральную оценку качества определяет либо средняя арифметическая, либо средняя геометрическая величина. В данной статье рассматриваются разные возможные численные методы определения интегральной оценки качества передачи речевой информации, передаваемой по мобильным каналам связи, и стремление к правильному выбору одного из них [3].

Арифметический метод определения интегрального критерия сводится к решению проблемы оптимизации многокомпонентной функции оценки качества . Авторами статьи предлагается два варианта арифметического метода вычисления $K_{обощ.кан..}$.

В первом случае выражение для обобщенного коэффициента качества определяется формулой:

$$K_{обощ.кан..} = \mu_1 K_{гр} + \mu_2 K_{разб.} + \mu_3 K_{нат.} + \mu_4 K_{стр.кан.} \quad (2)$$

где величины весовых коэффициентов, определенные методом экспертных оценок, соответственно равны: $\mu 1 = 0.2$; $\mu 2 = 0,4$; $\mu 3 = 0,2$; $\mu 4 = 0,2$.

Во втором случае $К_{0б0бщ.кач}$ определяется выражением:

$$\kappa_{ОБОБЩ.КАЧ.} = \mu_1 \frac{\kappa_{ГР} + \kappa_{СТР.КАН.}}{2} + \mu_2 \frac{\kappa_{РАЗБ.} + \kappa_{СТР.КАН.}}{2} + \mu_3 \frac{\kappa_{НАТ} + \kappa_{СТР.КАН.}}{2} \quad (3)$$

где величины весовых коэффициентов выбираются равными: $\mu 1 = 0,25$; $\mu 2 = 0,5$; $\mu 3 = 0,25$. $\mu 4 = 0,2$

отнести то, что он учитывает удельный вес каждого индивидуального критерия оценки (разборчивости, натуральности, громкости, структуры мобильного канала связи). Для решения проблемы возможности использования данного выбора в качестве интегрального критерия оценки качества передачи речевой информации по каналам связи предлагается рассмотреть взаимосвязь между индивидуальными компонентами и интегральным критерием {1}.

Однако практика показывает, что когда одна из составляющих интегрального критерия равна нулю, то интегральный критерий тоже должен быть равен нулю. Формулы (2) и (3) эту взаимосвязь не отражают. Поэтому необходимо внести коррекцию в формулы (2) и (3), позволяющую устранить основной недостаток арифметического метода. Таким образом, выражения (2) и (3) принимают следующий вид:

$$K_{\text{ообощ.кач.}} = M \text{ x } (\mu\ K_{гр} + \mu\ K_{разб.} + \mu\ K_{нат.} . + \mu\ K_{стр.кан.}) \quad (4)$$

где: M =1, если $K_{гр}, K_{разб.}$, $K_{нат.}, K_{стр.кан.}$ не равны 0

M =0, если хоть один из указанных коэффициентов К будет равен 0.

$$\kappa_{ОБОБЩ.КАЧ.} = \mu_1 \frac{\kappa_{ГР} + \kappa_{СТР.КАН.}}{2} + \mu_2 \frac{\kappa_{РАЗБ.} + \kappa_{СТР.КАН.}}{2} + \mu_3 \frac{\kappa_{НАТ} + \kappa_{СТР.КАН.}}{2} \quad (5)$$

где $K_{\text{ообощ.кач.}}$ - величина коэффициента M принимает такие же значения, как и в формуле (4).

При геометрическом методе определения интегрального критерия возможны три варианта: оптимистический, пессимистический и реалистический.{4}

Оптимистический критерий оценки качества определяется как максимальное значение, формула которого описывается следующим образом:

$$K_{\text{ообощ.кач.опт.}} = \sqrt[4]{K_{гр.\max} . xK_{разб\ \max} . xK_{нат.\max} . xK_{стр.кан.\max} .} \quad (6)$$

где $K_{\text{ообощ.кач.опт.}}$ - интегральная оценка по оптимистическому критерию.

Очевидно, из формулы (6) следует, что если любая из составляющих компонент равна нулю, то К0бобщ.кач.оптоже равен нулю, и достигает максимума только тогда, когда все компоненты достигают максимума. Значит, данная формула удовлетворяет требуемому условию {1}.

Пессимистический критерий оценки качества передачи определяется как минимальное значение. Интегральная оценка равна самому минимальному значению из всех компонент:

$$K_{\text{ообощ.кач.пес.}} = \sqrt[4]{K_{гр\min} . xK_{разб\ \min} .. xK_{нат\ \min} .. xK_{стр.кан.\min} .} \quad (7)$$

где $K_{\text{ообощ.кач.пес.}}$ - интегральная оценка качества передачи по пессимистическому критерию.

Реалистический критерий является комбинированным вариантом оптимистического и пессимистического критерия. Сущность реалистического критерия заключается в том, что интегральная оценка К0б0бщ.кач.реал. равна: одной из составляющих компонент, когда три остальные равны максимуму; геометрической средней величине двух компонент когда третья и четвертая равны максимуму; в) геометрической средней величине трех компонент, когда одна изних достигает максимума; геометрической средней величине всех компонент, когда не одна из них не достигает максимума {4}.

При определении $K_{0б0бЩ.Кач.реал}$ практически применим четвертый вариант. Тогда выражение для определения реальной величины коэффициента качества примет вид:

. $$K_{\text{ообощ.кач.реальн.}} = \sqrt[4]{K_{гр.реальн.} xK_{разб.реальн.} xK_{на.реальн.} xK_{стр.канреальн.}} \quad (8)$$

Необходимо отметить, что реалистический критерий оценки качества передачи речи действительно является интегральным. Используя этот критерий оценки качества передачи речевой информации, можно считать, что: в данном выбранном интегральном критерии содержатся все основные показатели, характеризующие качество передачи речевой информации по каналам связи; — оценки по реалистическому критерию действительно правильно характеризируют качество передачи речевой информации в особенных или любых значениях каждого компонента {3}.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что выбранный критерий допускает количественную оценку качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи. Желательно, чтобы при геометрическом методе определения интегрального критерия, также как и при арифметическом, учитывались весовые коэффициенты каждой из его составляющих. Поэтому авторами предлагается скорректированное выражение для определения численной величины интегрального критерия независимо от числа составляющих.

$$K_{\text{ообощ.кач.}} = n_i x^n \sqrt{A_1 x A_2 x ... x A_i} \quad (9)$$

где: n_i — число составляющих интегрального критерия качества

$A_i = n_i x k_i$ — произведение весового коэффициента на величину отдельной составляющей интегрального критерия качества.

На основе выбранного критерия предлагается создание новой методики объективной оценки качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи, которая обладает соответствующим преимуществом перед субъективными (абонентскими) методами {2}.

Учитывая, что конечным приемником речевой информации в канале связи обычно является слуховой аппарат человека, который осуществляет восприятие речи, считается целесообразным оценивать качество передачи речи "искусственным ухом", характеристики которого должны совпадать с основными характеристиками естественного уха [1].

Согласно выбранному критерию, в "искусственном ухе" должны присутствовать эталонные значения каждой из компонент, характеризующих качество передачи речи по каналам связи. Сопоставление реальных параметров речевого сигнала, передаваемого по каналу мобильной связи с эталонными значениями, помещенными в "искусственном ухе", дает возможность сделать оценку качества с требуемой точностью {1}.

С целью автоматизации процесса контроля качества передачи речевой информации по каналам связи "искусственное ухо" должно оценивать не акустический, а электрический входной сигнал (первичный сигнал). Поэтому в данной работе будем "искусственное ухо" называть электронным. "Электронное ухо" представляет собой совокупность частотных фильтров, усилителей, генераторов эталонных сигналов, компараторов накопителей и ряда вспомогательных устройств {4}.

Необходимо, чтобы чувствительность "электронного уха" совпадала с чувствительностью естественного. Порог слышимости является одной из основных характеристик естественного уха. На малых уровнях совокупность слышимых тонов ограничена порогом слышимости, на больших — болевым порогом.

Доказано, что ухо обладает повышенной механической чувствительностью к некоторым частотным составляющим сигнала и пониженной к другим. Подобная частотная зависимость определяется субъективно. В какой-то степени изменения порога слышимости могут быть объяснены просто изменением механической чувствительности уха {1}.

Поэтому при телефонной связи равные мощности сигнала и помехи различной частоты оказывают различное влияние на качество связи вследствие частотной зависимости чувствительности уха. Следовательно, чувствительность "искусственного уха" должна совпадать с чувствительностью естественного уха при частотном диапазоне канала ТЧ от 0,3 до 3,4 кГц {2}.

В опубликованных ранее работах была исследована кривая зависимости чувствительности уха от частот в дБ. относительно исходного давления 2.10^{-5} н /м2 или 2.10^{-4}мкб (1мкб=10^{-1}н/м2). В таблице приведена частотная характеристика чувствительности уха.

При телефонной передаче, как было сказано выше, действие отдельных составляющих спектра сигнала помехи оказывается неодинаковым из-за частотной зависимости чувствительности уха. В соответствии с приведенными выше положениями, главным условием практической применимости

Частота кГц	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
Чувствительность, дБ	-20	-13	-9	-4	-2	0
Частота кщ	1,6	2,0	2,1	2,4	3,0	3,4
Чувствительность, дБ	-2	-2,5	-2,6	-3	-4	-7

предлагаемой методики является наличие устройства, обеспечивающего возможность взаимного отличия речевых сигналов, отраженных сигналов и других видов шумов, и измерение

энергетических характеристик каждого из этих факторов на фоне мешающего воздействия остальных с применяемой степенью достоверности {1}.

Традиционно решение подобных задач осуществляется с помощью устройств, получивших название детекторов речи. Эти устройства используются во многих приложениях - статистических системах уплотнения (передачи), эхо-подавляющих устройствах и др. Степень достоверности обнаружения определяется алгоритмом распознавания, заложенным в детекторе речи {4}.

Заключение: Резюмируя приведенные положения, представляется целесообразным сделать следующие выводы. Предлагаемая методика объективной оценки качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи, базирующаяся на основе понятия эквивалентного по мешающему воздействию уровня шума, позволяет адекватно оценить интегральное мешающее воздействие основных для телефонного канала мобильной связи факторов

Практическая реализация предлагаемой методики возможна при использовании корреляционного принципа обнаружения речевых сигналов на фоне шумов, позволяющего дифференцировать вклад в интегральную объективную оценку качества передачи основных мешающих факторов и оценить общее качество передачи, с учетом степени субъективного мешающего воздействия этих факторов.

Литература

1. Системы мобильной связи: Учебное пособие для вузов /В.П. Ипатов, В.К. Орлов, И. М. Самойлов, В.Н Смирнов; Под ред. В.П. Ипатова. - М.: Горячая линия - Телеком, 2003.
2. В.Г. Карташевский, С.Н. Семенов, Т.В. Фирстова. Сети подвижной связи.- М.: Эко-Трендз, 2001.
3. Журнал “Вестник связи”, номер1- 12, 2007 г.
4. Бабков В.Ю., Вознюк М.А., Никитин А.Н., Сиверс М.А. Системы связи с кодовым разделением каналов / СПб ГУТ, - СПб. 1999.

УДК 631.171.32/38

Осмонов Ы.Дж., КНАУ, Турдуев И.Э., ОшТУ

Обоснование параметров устройств для загрузки камеры шерстопресса немытой шерстью

В данной статье рассматривается вопрос о том что при прессовании шерсти в камере шерстопресса уменьшается её объемная масса, шерсть легко транспортируется и длительно хранится долго.

In given article considered question that when pressing wool? Decreases three-dimensional mass, with camera woolpressing is easy transported and kept duration long.

Шерсть, имеющая малую объемную массу, транспортируют на большие расстояния и часто хранят длительное время. Неупакованная шерсть легко загрязняется и быстро теряет свои ценные качества. Поэтому ее прессуют и упаковывают в специальные тары. Прессование немытой шерсти в кипы является прямым путем снижения транспортных затрат. В железнодорожный вагон грузоподъемностью 64 тонны можно вместить всего до шести тонн неуплотненной шерсти, а в кипах плотностью 480 кг/м^3- около 60-62 тонн шерсти. Упакованная в кипы шерсть безопасна в противопожарном отношении.

Чтобы получить максимальный эффект при прессовании шерсти необходимо добиться наиболее равномерного распределения плотности в объеме кипы. Этого добиваются путем равномерной загрузки камеры шерстопресса немытой шерстью. Поскольку технологический процесс прессования шерсти осуществляется в современных прессах (ПГШ-1Б, ЦС-73-3), в камеру шерстопресса необходимо подавать одинаковые порции шерсти. Однако в существующих прессах камера загружается вручную. В результате такого субъективного выполнения этой операции

меняется характер распределения сил внутри прессовальной камеры, что, в свою очередь, влияет на нагрузку на прессующую плиту и далее на плотность кипы.

Нами разработано устройство для загрузки камеры шерстопресса одинаковыми порциями шерсти (рис. 1).

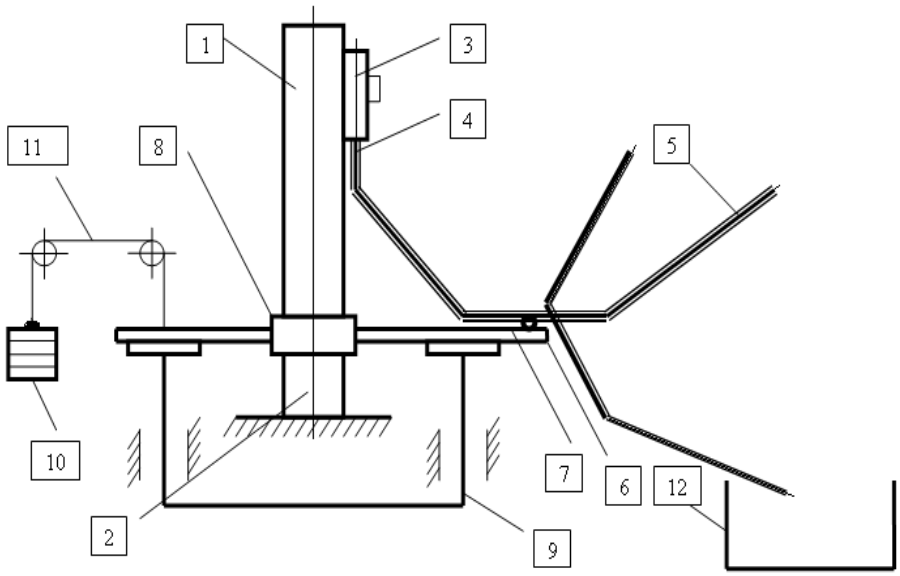


Рис. 1. Устройство для загрузки камеры шерстопресса:
1 – стойки; 2 – рама пресса; 3 – направляющие; 4 – втулка;
5 – клиновидная ложа; 6 – ось; 7 – поддон; 8 – ошейники; 9 – рамка;
10 – груз; 11 – троссоблочный механизм; 12 – камера шерстопресса.

Устройство состоит из двух стоек 1 закрепленных на раме пресса 2. На стойках установлены направляющее 3 с защелками, которые при соединении с втулками 4 клиновидного ложа 5 составляют скользящую пару: ось-втулка. Клиновидная ложа с наружной стороны дна имеет ось 6 со смещенным центром тяжести и установлена на поддон 7, поддон через ошейники 8 соединен со стойками, которые также могут совершать скользящее движение в вертикальной плоскости. Поддон закреплен на рамку 9, которая связана с грузом 10 через троссоблочный механизм 11.

Тарирование необходимой массы груза осуществляется в зависимости от массы шерсти, необходимой для загрузки камеры шерстопресса. Когда масса шерсти в клиновидной ложе преодолевает сопротивление груза, подставка с ошейником скользят по стойке вниз и одновременно втулка, также соскальзывая вниз, выходит из направляющих, в результате чего клиновидная ложа опрокидывается от массы шерсти, загружая камеру шерстопресса содержимым. От массы груза, под действием рамки, поддон с ошейниками занимает исходное положение. Клиновидная ложа вставляется в направляющую вручную. При этом срабатывают защелки направляющих.

В соответствии с расчетной схемой устройства (рис. 2). клиновидная ложа 2 опирается на опоры А и В, на которые действуют силы:

в нагруженном состоянии ложи немытой шерстью

$$F_{к}^{1} = g\,(m_{ш}L + m_{y}l - m_{o}l_{o})/h\,, \qquad (1)$$

$$F_{г}^{11} = g\,(m_{o}l_{o} - m_{y}l)/h\,, \qquad (2)$$

где $m_{ш}$, m_{y}, m_{o} – массы соответственно шерсти, подвижных деталей устройства и противовеса, кг;
L, l и l_{o} – плечи действующих сил, м;
h – расстояние между опорами, м.

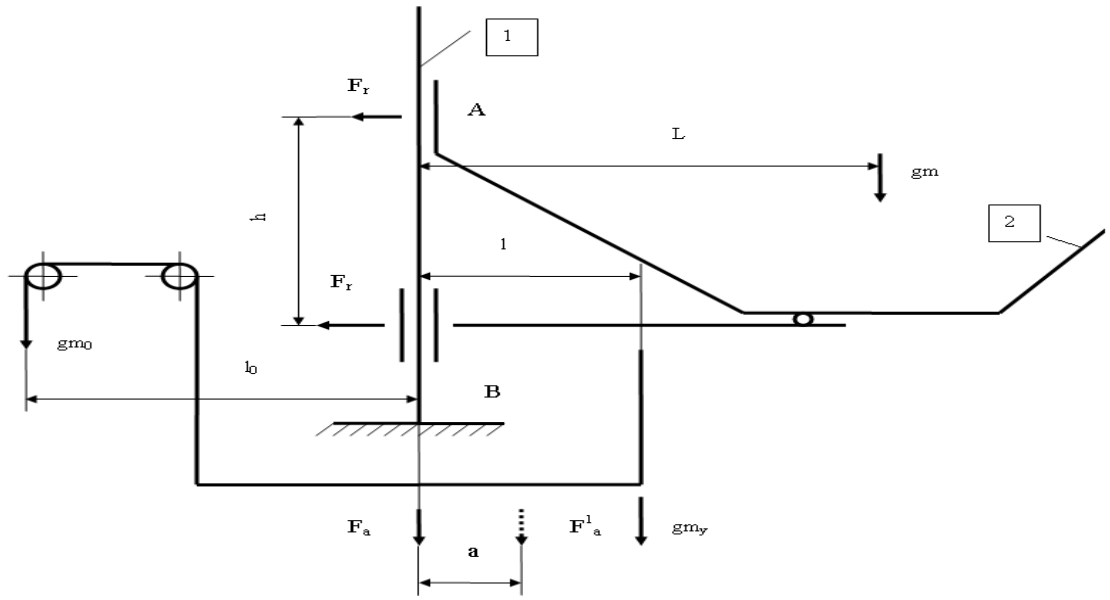


Рис. 2. Расчетная схема устройства: 1 – опора; 2 – клиновидная ложа.

Для рационального размещения противовеса определим момент от противовеса при $F^1_к = F^{11}_r$

$$g\, m_o l_o = g\,(2\, m_ш L + m_y l)\,, \qquad (3)$$

опрокидывание загруженной ложи произойдет при условии $F^1_к > F^{11}_r$. Выбор величин m_o и l_o зависит от массы шерсти $m_ш$, необходимой для загрузки камеры шерстопресса.

Суммарная осевая сила на опору равна

$$F_a = g\,(m_ш + m_y + m_o). \qquad (4)$$

В этом случае момент сопротивления движению клиновидной ложи от трения

$$T_f = g\,(m_ш + m_y + m_o) \quad к, \qquad (5)$$

где к – коэффициент, учитывающий сопротивление скольжения по неподвижной опоре.

В момент опрокидывания нагруженной ложи суммарная осевая сила трения F_a может быть приложена на расстоянии а от центра. Из уравнения моментов сил можно определить

$$a = g\,(m_ш L + m_y l - m_o l_o)/ F_a \quad . \qquad (6)$$

В соответствии с техническими характеристиками, масса одной кипы при прессовании шерсти прессом ПГШ-1Б достигает 0,885-1,32 кН (90,2- 134,5 кг)[1]. Технологический процесс прессования немытой шерсти предусматривает загрузку камеры три раза для формирования кипы. Отсюда масса шерсти для одной загрузки равна $m_ш$ = 30,06- 44,83 кг. При известной плотности непрессованной шерсти $\rho_ш$ = 60 кг/м^3 [2],

$$V_Л = \frac{m_Ш}{k_З \bullet \rho_Ш}\,, \qquad (7)$$

где $k_з$ – коэффициент заполнения ложи, $k_з$ = 1,4) [3].

Геометрические параметры клиновидной ложи определены с учетом конструктивных параметров камеры шерстопресса и угла естественного откоса немытой шерсти в покое $\varphi_п$ = = 38^0-43^0 [4].

Из уравнения (3) масса противовеса равна:

$$m_o = \frac{2m_{Ш} \bullet L + m_y \bullet l}{l_o} \qquad (8)$$

Для решения (8) при различных значениях l_o и других эмпирических констант использованы численные методы решения уравнений пакета Mathematica-3, в результате m_y=4,7-5,3 кг; l=0,19-0,21 м; l_o =0,20 м; h=0,6-0,7 м; m_o =19,0-0,21 кг; $V_Л$ = 0,372 $м^3$; F_a = 611,55 Н; a = 0,221 м.

Литература

1. Пресс гидравлический для шерсти ПГШ–1Б. Техническое описание и инструкция по эксплуатации. – Завод: Актюбинсксельмаш, 1983. – 30 с.
2. Крагельский И.В. Трение и износ. – М.: Машгиз, 1962. – 320 с.
3. Красников В.В., Дубинин В.Ф. и др. Подъемно-транспортные машины. – М.: Агропромиздат, 1987. – 272 с.

УДК 662.997.534.4

Сатыбалдыев А.Б., Матисаков Т.К.

Суу ысытуучу күн коллекторлорунун техникалык экономикалык эффективдүүлүгүн анализдөө

Суу ысытуучу күн коллекторлорунун техникалык-экономикалык эффективдүүлүктөрүнө анализ жүргүзүлдү. Суу ысытуучу күн коллекторлорунун техникалык – экономикалык эффективдүүлүктөрүн эсептөө үчүн теңдемелер иштелип чыгарылды.

Проведено анализ технико-экономической эффективности солнечных водонагревательных коллекторов. Разработаны уравнения для расчета технико-экономической эффективности солнечных водонагревательных коллекторов.

The organized analysis to technical-econmic efficiency solar water heating collector. Designed equation for calculation of technical-econmic efficiency solar water heating collector

Кыргыз Республикасынын аймагында өндүрүш ишканалары бардык эле айылдарда бар эмес [1]. Айылдарда пайданын негизги булагы көбүнчө пенсия жана пособие болуп эсептелет. Кожолуктагы бир адамдын ай ичиндеги орточо пайдасы (үй-бүлөнүн мүчөлөрүнө кеткен үй чарбасындагы натуралдык продукцияны эсептебегенде) 800-4000 сомду түзөт. Көпчүлүк кожолуктарда майда же ири мүйүздүү малдар бар. Бирок көпчүлүк айыл калкы күн энергиясын колдонуучу түзүлмөлөр үчүн 1500 сомдон 10 000 ге чейин коротууга даяр.

Мындай керектөөчүлөрдүн муктаждыгын канаттандыруу үчүн иштелип чыккан түзүлмөнүн материалы арзан, аларды алуу технологиясы жөнөкөй жана көп чыгым менен эмгекти талап кылбоосу зарыл.

Сууну турмуш-тиричиликке пайдалануу үчүн эффективдүү ысытуунун технологиясы жакшы иштелип чыккан жана кеңири белгилүү [2-3]. Бирок ысык суу алуу үчүн колдонулган күн коллекторлорунун көптүгүнө карабастан, базарда алар кымбат болуп, колдонуучулардын негизги бөлүгү аларды сатып алууга мүмкүнчүлүгү жок. Күн коллекторлорун үй шартында жасоо бул маселени жеңилдетет.

Суу ысытуучу күн коллекторлоруна болгон атаандаштык жөндөмдөрүн камсыз кылуучу жалпы талаптар болуп төмөнкүлөр эсептелет [4]:

▪ ысык суу менен камсыздоо ишенимдүүлүгүнүн деңгээли колдонуучулардын талаптарынан төмөн болбошу керек;

▪ күн коллекторлорунан алынган жылуулук энергиясынын баасы биринчи талаптын шартын сактоодо минималдуу болушу керек;

▪ суу ысытуучу күн коллекторлору курчап турган чөйрөгө терс таасирин азайтыш керек, келечекте толугу менен жоюу керек;

▪ суу ысытуучу күн коллекторлорун эксплуатациялоо учурунда коопсуздук сакталышы керек;

▪ суу ысытуучу күн коллекторлору жайгашкан региондогу күн энергияларын максималдуу пайдалануу керек.

Жогоруда айтылган суу ысытуучу күн коллекторлоруна коюлган талаптардан оптималдаштыруу критерийи катары иштелип чыккан жылуулук энергиясынын же күн коллекторунун баасын колдонууга болот [5]. Түрдүү суу ысытуучу күн коллекторлордун бааларын билүүгө болот. Бул суу ысытуучу күн коллекторлорунун эффективдүү вариантын издеп табуу маселесин чечүүгө өбөлгө түзөт.

Коюлган маселенин чегинде максаттык функцияны төмөнкү түрдө көрсөтүүгө мүмкүн:

$$\frac{C_{СВК} + Э_{СВК}}{Q_{пр}} \to \min, \qquad (1)$$

мында $C_{СВК}$, $Э_{СВК}$ – тиешелүү түрдө суу ысытуучу күн коллекторлорунун баасы жана эксплуатациялоо чыгымдары, сом.; $Q_{пр}$ – атайын убакыт ичинде иштелип чыккан жылуулук энергиясы, Вт·ч.

Суу ысытуучу күн коллектолору тарабынан иштелип чыккан жылуулук энергиясын төмөнкү формула боюнча аныктоого мүмкүн:

$$Q_{пр} = \int_0^t S\, E_c \eta_{эф} tdt\,, \qquad (10)$$

мында E_C – суммардык күн радиациясы, Вт·чУм^2; $\eta_{эф}$ – күн коллекторунун ПАК; t – иштетүү узактыгы, саат.

Жогоруда айтылгандай белгилүү болгон күн коллекторлорунун бааларынын жана өндүрүштөгү эффективдүүлүктөрүнө жараша эсептелген маанилеринин жардамында эң төмөнкү квадраттар сандык анализдөө ыкмасын пайдалануу менен төмөнкү формулаларды алууга болот.

Жалпак коллектор үчүн

$$Q = 0{,}002939C^2 + 5{,}58C$$

Түтүк коллектор үчүн

$$Q = 0{,}002953C^2 + 5{,}95C$$

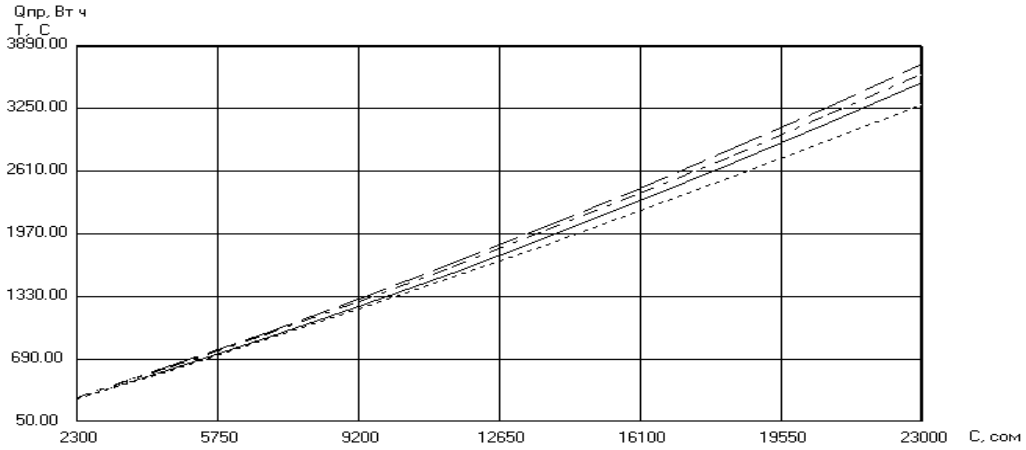
Концентраторлуу коллектор үчүн

$$Q = 0{,}00189C^2 + 5{,}66C$$

Көлөмдүк коллектор үчүн

$$Q = 0{,}002678C^2 + 6{,}07C$$

Түрдү коллекторлор тарабынан өндүрүлгөн жылуулук энергиясынын коллекторлордун бааларынан болгон көз карандылыктары төмөнкү сүрөттө келтирилди.



1.1. Сүрөт. Түрдүү коллекторлор тарабынан өндүрүлгөн жылуулук энергиясынын коллекторлордун бааларынан болгон көз карандылктары — — - вакуумдук түтүк тибиндеги, - - — - - —- көлөмдүк тибиндеги, —— - жалпак, ------ - концентраторлуу коллекторлор.

Сүрөттөн көрүнүп тургандай, жалпы учур үчүн коллекторлордун аянтынын өсүшү менен алар аркылуу өндүрүлгөн жылуулук энергиянын саны да коллекторлордун бааларынын да өсүшү байкалат. Эгерде анализ кыла турган болсок, мисалы, эң жогорку баа концентраторлуу коллекторго ал эми төмөнкү баа көлөмдүк коллекторлорго, мүнөздүү. Бирок алардын өндүрүмдүүлүктөрүн баалары боюнча салыштырсак, мисалы 3 $м^2$ аянтына ээ болгон жалпак коллекторлор тарабынан өндүрүлгөн жылуулук энергия саатына 1301 Вт ч ка, ал эми баасы 9660 сомго туура келет. Ал эми калган коллекторлор түтүкчөнүкү 1598 Вт ч баасы 11040 сом, концентраторлуу коллектордуку 1868 Вт ч баасы 13800 сом, көлөмдүк коллекторлордуку 1074 Вт ч баасы 8280 сомду түзүп, өзүнө тиешелүү кетирилген чыгымга салыштырганда, коллекторлордун өндүргөн жылуулугу, дээрлик, бири бирине жакын болууда.

Бүгүнкү күндө калктын тиешелүү эффективдүү муктаждыгын канааттандырган коллекторлорду үй шартында иштеп чыгууга болот. Мындай жол калктын энергияны күнүмдүк турмуш тиричиликте кеңири колдонуусуна шарт түзүп, мындан ары да күн энергиясын суу ысытуу системасында колдонуучулардын санын кеңейтмекчи.

Адабияттар

1. Обозов А.Дж., Касымов М.А., Матосмонов А., Кожобаев А. Возобновляемые источники энергии Кыргызской Республики // Гелиотехника. - 1998. - №1. - С. 32-33.
2. Харченко Н.В. Индивидуальные солнечные установки. М.:Энергоатомиздат,-1991.-208 с.: ил.
3. Байрамов Р.Б., Ушакова А.Д. Солнечные водонагревательные установки. / Под ред. Л.Е. Рыбаковой - Ашхабад: Ылым, 1987. - 168 с.
4. Твайделл Дж., Уэйр А. Возобновляемые источники энергии. //пер. с англ. М: Энергоатомиздат-1990.-385 с.
5. Ташполотов Ы., Сатыбалдиев А.Б., Матисаков Т.К. Исследование технико-экономических показателей солнечной водонагревательной установки //http://www.econf.rae.ru/article/6288. 18 okt 2011. 208 Кб.

УДК 621.311.2

Шадыханов К.Т., ИА КР, МОиН КР,
Айдарбеков З.Ш., Жороев А.М., Ураимов Р.Ж., ОшГУ

Анализ водных ресурсов Кыргызстана и перспектива использования малых водотоков для выработки электроэнергии на малых и микроГЭС

Статьяда Кыргызстан боюнча жалпы географиялык маалымат, суу ресурстары жөнүндө анализ жана изилдөө жүргүзүп, чакан жана микроГЭСтерди жасоо үчүн кичи суулардын агымын колдонуу мүмкүнчүлүктөрү каралган. Ар түрдүү энергетикалык потенциалга ээ болгон кичи сууларга курулган микроГЭСтердин мисалында кичи гидроэнергетиканын өнүгүү перспективасы каралды.

В статье рассмотрены общие географические сведения о Кыргызстане, проведены анализ и исследования водных ресурсов и возможность использования водного потенциала малых горных рек для разработки малых и микроГЭС. Приведена перспективность развития малой гидроэнергетики на примере строительства микроГЭС на малых водотоках с различным энергетическим потенциалом.

In this article general geographical information about Kyrgyzstan is given. This article contains the analysis and investigations of water resources and possibility of using water potential of small rivers for working out small and microHES (hydro-electric-stations) are held. The perspective development of small and minor hydro-energy on the example of construction microHES on small water streams with different energetic potential is considered.

В настоящее время во всем мире уделяется большое внимание к использованию возобновляемой энергетики. По прогнозам экспертов ожидается дальнейшее усиление этой тенденции.

Сегодня мировым лидером в области энергопроизводства, с использованием возобновляемых источников энергии (ВИЭ), является Китай. Развитие и более широкое применение ВИЭ способствует решению таких актуальных проблем, как проблема экологии, обеспечение населения продовольствием и насыщение энергетического рынка без ущерба природным богатствам.

Кыргызстан является горной страной и расположен в центре азиатского континента, на северо-востоке Центральной Азии между 39^0 и 43^0 северной широты и 69^0 и 80^0 восточной долготы. На севере страна граничит с Казахстаном, на Западе – с Узбекистаном, на юге – с Таджикистаном и на востоке – с Китаем (рис.1) [1].

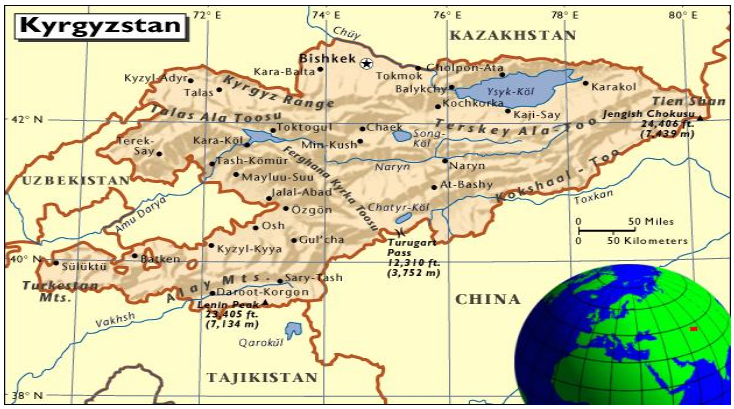


Рис. 1. Карта Кыргызской Республики

Основная часть территории располагается в пределах Тянь-Шаня и меньшая часть в пределах Памиро-Алая, которые являются одними из наиболее высоких горных поднятий земного шара [3]. 89,7% площади – горные территории (Алай, Тянь-Шань и Памир), самая высокая точка – пик Победы (7439м), 10,3% - равнины: на юге – Западный Памиро-Алай (до 4643 м н.у.м), на

востоке - Западный Тянь-Шань (до 4482 м н.у.м). межгорные котловины (Ферганская, Чуйская, Таласская, Иссыккульская) [2].

Республика располагает значительными прогнозными запасами угля (свыше 4 млрд. т) и потенциальными запасами гидроэнергии (18,5 млн. кВт по мощности и 162, 5 млрд.кВт·ч по выработке). Из 290 млн. тонн ресурсов условных углеводородов 110 млн. тонн приходится на долю Ферганской впадины, 50 млн. тонн – Алайской, 30 млн. тонн – Восточно-Чуйской, 25 млн. тонн – Ыссык-Кульской и 75 млн. тонн – Нарынской. Запасы газа оцениваются в 6,5 млрд. $м^3$, а нефти – 12 млн. тонн [1].

В настоящее время единственным энергоресурсом, производимым в республике в достаточном количестве, как для внутреннего потребления, так и для экспорта, являются электрическая энергия. Развитие этой отрасли в последние годы сопровождалось увеличением доли электроэнергии, произведенной гидроэлектростанциями и снижением доли электроэнергии, выработанной тепловыми электростанциями.

В связи с этим, актуальным становится вопрос широкого использования водного потенциала страны, для выработки электрической энергии.

Известно, что Кыргызстан располагает значительными запасами водных ресурсов, представленными стоком рек, подземными водами и водами, аккумулированными в ледниках и озерах. В средний по водности год общие водные ресурсы составляют 2458 $км^3$, из них: 47,23 $км^3$ - поверхностный речной сток (величина среднемноголетнего речного стока по разным источникам составляет: от 44,5091 до 51,92 $км^3$), 13 $км^3$ - потенциальные запасы подземельных вод, 1745 $км^3$ - озерная вода и 650 $км^3$ – ледники [2].

Всего на территории Кыргызстана насчитывается 8208 ледников различных размеров.

Площадь оледенения составляет 8169,4 $км^2$ или 4,2% территории республики. Основные его центры на крайнем востоке, в бассейне реки Сары-Джаз, где расположены крупнейшие долинные ледники и на юге - Заалайский хребет. Запасы законсервированных в горных ледниках пресной воды оцениваются в 650 $км^3$, что более чем в 12 раз превышает ресурсы стока рек республики [2].

В Кыргызстане насчитывается 1923 озера, общая площадь водной поверхности которых 6836 $км^2$. Самые крупные озера Кыргызстана - озеро Иссык-Куль, площадь водной поверхности которого составляет 6236 $км^2$, Сон-Куль - площадь которого 275 $км^2$, Чатыр-Куль с площадью поверхности 175 $км^2$.

Также, река Нарын, самая длинная река протяженностью 535 км, река Чаткал длиной 205 км и река Чу, длина которой равна 221 км. Более 3500 рек, протекающих по территории республики, снабжают водой сопредельные государства: Казахстан, Узбекистан, Таджикистан, а также Синьцзян-Уйгурский автономный район Китая [2].

Кроме того, в Кыргызстане имеется 12 искусственных водохранилищ общей площадью 378,2 $км^2$ и объемом воды 23.41 $км^3$.

За последние годы Кыргызстан забирает для использования на собственные нужды объем воды порядка 8,0-9,0 $км^3$ в год, используя его в основном на орошение, остальной сток, кроме замкнутого бассейна озера Иссык-куль, уходит на территорию соседних государств – более 30,0 $км^3$ в средний по водности год.

В силу природных условий республики в обеспечении водой орошаемых земель республики участвуют, в основном, малые горные реки, из которых орошается 806 тыс. га (76% наличия орошаемых земель). Из них только 86 тыс. га питаются водой из зарегулированного стока, а 720 тыс.га (89%) орошаются живым не зарегулированным стоком [2].

Учитывая вышесказанное можно считать, что основной характеристикой, определяющей масштабы развития гидроэнергетики, является гидроэнергетический потенциал рек. Гидроэнергетические ресурсы относятся к возобновляемым источникам энергии, и занимает особое место в структуре природных богатств Кыргызстана и составляет 39% потенциальных гидроресурсов Средней Азии.

По оценке, суммарный, технически возможный для освоения энергетический потенциал малой энергетики Кыргызстана составляет 5-8 млрд. кВт электроэнергии в год. Но при этом потенциал гидроэнергетических ресурсов малых рек и водостоков со средне-многолетними расходами от 3 до 50 куб. м/секунд используется всего на 3%.

И вместе с тем, наиболее интересным для республики представляется использование энергии малых горных водотоков. В горных водотоках Кыргызстана имеется огромный потенциал механической энергии, используя которую можно получить электрическую энергию. Их потенциал оценивается в 1,6 млн. кВт. В республике освоено промышленное производство и успешно эксплуатируется микрогидроэлектрстанции с установленной мощностью 1; 5; 16 и 22 кВт [3].

Малая энергетика - это на сегодняшний день наиболее экономичное решение энергетических проблем для территорий, относящихся к зонам децентрализованного электроснабжения. Обеспечение энергией удаленных и энергодефицитных регионов требует значительных затрат. И здесь далеко не всегда выгодно использовать мощности существующей энергосистемы. Гораздо экономичнее развивать мощности малой энергетики, экономический потенциал которой в Кыргызстане намного выше, чем потенциал таких возобновляемых источников энергии, как ветер и биомасса.

По оценке специалистов, в республике можно построить более 60 малых ГЭС с суммарной мощностью до 300 МВт и среднегодовой выработкой до 1,5 млрд. кВт.ч. В настоящее время в республике имеется 9 действующих малых ГЭС с установленной мощностью 38,5 МВт и выработкой около 120 млн. кВт.ч. электроэнергии. Более 18 малых ГЭС, которые были построены в 50-60-х годах, требуют восстановления [1].

На сегодняшний день наиболее экономичным решением энергетических проблем для территорий, относящихся к зонам децентрализованного электроснабжения, является развитие строительства именно микроГЭС.

Однако такой перспективный источник энергии практически не используется, хотя технология его использования не представляет больших трудностей.

В пользу применения малой гидроэнергетики в нашем регионе также говорит то, что современное энергообеспечение почти всегда осуществляется от сетей, техническое состояние которых неудовлетворительное и продолжает ухудшаться.

Поэтому в условиях богатой гидроэнергетическими ресурсами Кыргызстана, сооружение малых и микроГЭС может быть достаточно экономически эффективным.

В связи с вышеизложенными, нами проведена определенная работа по разработке и созданию микроГЭС.

Нами построена микроГЭС мощностью 40 кВт в ущелье Чычкан на 241км автодороги Бишкек-Ош. Длина водовода микроГЭС составляет 260 м, диаметр 250 мм и напор составляет 32 м (рис.2).

Рис. 2. МикроГЭС мощностью 40 кВт в ущелье Чычкан на 241км автодороги Бишкек-Ош.

Рис.3. МикроГЭС мощностью 5 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Огонек»)

Рис.4. МикроГЭС мощностью 37 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Форель»

Кроме этого еще установлены 3 микроГЭС мощностями: 5 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Огонек», рис.3), 37 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Форель», рис.4) и 85 кВт в селе Кербен (Аксыйский район, рис.5)

Рис.5. МикроГЭС мощностью 85 кВт в селе Кербен (Аксыйский район)

Заключение. В заключении можно сделать вывод, что полезность и перспективность использования энергетического потенциала малых водотоков в хозяйственной жизни небольших населенных пунктов, особенно удаленных от больших промышленных предприятий и городов, очевидна. Это подтверждается также тем, что энергетическая политика государства по энергообеспечению страны, по мнению авторитетных энергетиков, должна основываться на конкуренции между энергопроизводителями. В этом случае малая гидроэнергетика могла бы стать достойным конкурентом энергомонополистам за счет низких (более чем в 2-2,5 раза) цен на электроэнергию, невысокой стоимости строительства МГЭС, сравнительно малых сроков окупаемости и других положительных свойств малых гидроэлектростанций. Одной из целей статьи является попытка привлечь внимание общественности и специалистов к столь перспективной области энергетики.

Литература

1. Боконбаев К.Д., Родина Е.М., Ильясов Ш.А., Подрезов О.А., Касымова В.М., Абайханова З.А., Джумадылова Ч.К. Климат и окружающая среда.- Бишкек.:2003.–208 с.
2. Национальный отчет КР в рамках Программы UNEP по содействию и помощи развивающимся странам в выполнении Йоханнесбургского Плана реализации цели - «Планы (2005) действий по Интегрированному Управлению Водными Ресурсами и Водосбережению». Бишкек: 2006.
3. Возобновляемая энергия. «Солнечная энергетика в России и в мире». (Ежеквартальный бюллетень). - М.: 2001

Ош мамлекеттик университети 60 жылдык өнүгүү жолунда тиешелүү салым кошкон ардактуу агай-эжейлерибизди кутман куректары менен куттуктайбыз
Мүчөлтой ээлерине чын ден соолук, чыгармачыл ийгиликтер үй бүлөлүк бакыт, бактылуу өмүр каалайбыз.

Алымкулов Келдибай

1943-жылы Төөлөс айыл өкмөтүнүн Герейт-Шорон кыштагында туулган.

Ал 1964-жылы Кыргыз мамлекеттик университетинин физика-математика факультетин бүтүрүп, “Дифференциалдык теңдемелер” адистигин алган. Украинада Советтик Армияда кызмат өтөгөн. 1969-1971-жылдары Ноокат районунун Көк-Жар мектебинде математика мугалими болуп эмгектенген.

1966-1969-жылдарында Кыргыз илимдер Академиясында аспирант, 1971-1999-жылдары илимий кызматкер, лаборатория башчысы болуп иштеген.

1973-жылы КССРнин ИАнын математика институтунда кандидаттык диссертациясын коргогон.

1984-жылы СССР илимдер академиясынын А. Стеклов атындагы математика институнда академик Л.С. Понтрягин жетекчилик кылган “Кадимки дифференциалдык теңдемелер” лабораториясында билимин жогорулаткан. 1991-жылы ошол эле институтта докторлук диссертациясын коргогон жана консультанты Россия илимдер академиясынын академиги Д.В. Аносов болгон.

Ал 130дан ашык илимий макалалар жана бир илимий китептин автору. Алымкулов Келдибай Болгария (Варна), Венгрия (Будапешт), Польша (Варшава), Таиланд (Бангкок), Греция (Самос-Пифагор аралы), Швеция (Стокгольм), Россия (Москва, Новосибирск, Нальчик, ж.б.), Украина (Киев, Черновцы, Тернополь), Казахстан (Алма-Ата), Өзбекстан (Ташкент, Самарканд), Азербайжанда (Баку) өткөрүлгөн эл аралык конференцияларда катышып, илимий баяндама жасаган.

Ал 1979-1988-жылдары Кыргыз мамлекеттик улуттук университетинде “Дифференциалдык теңдемелер”, “Математикалык физика” жана “Оптималдык башкаруу” сабактары боюнча лекцияларды окуган.

Алымкулов Келдибай 1999-жылдан баштап Ош мамлекеттик университетинде иштеп келе жатат, азыр Алгебра жана геометрия кафедрасынын профессору.

Ал Кыргыз улуттук илимдер академиясынын Теоретикалык жана колдонмо математика институтунун алдындагы докторлук жана кандидаттык диссертацияларды коргоо кеңешинин мүчөсү. Ошондой эле Ош мамлекттик университетинин алдындагы дифференциалдык теңдемелер, геометрия жана топология адистиктери боюнча кандидаттык жактоо диссертациялык кеңештин төрагасы.

Анын жетекчилигигинде 6 физика-математика илимдеринин кандидаттары даярдалган .

Алымкулов Келдибай 2005-жылдан бери Америка математиктер коомунун мүчөсү, Кыргызстан математиктер коомунун вице президенти. 2011-жылдан тартып Американын математика жана статистика журналынын редакциялык кеңешине мүчө болуп эсептелет.

Ал 2010-жылы Кыргыз улуттук илимдер академиясына мүчө корреспондент болуп шайланган.

Ал Ош шаардык мериясынын жана Ош облустук администрациянын ардак грамоталары менен сыйланган, 2011-жылы “Кыргыз Республикасынын илимине эмгек сиңирген ишмери” наамын алган.

Каримов Салы

1935-жылы 15-апрелде Ноокат районундагы Кыргыз-Ата айылында туулган. Орто мектепти аяктагандан кийин 1955-1960-жылдары Ош мамлекеттик педагогикалык институтунун физика-математика факультетинде окуп, аны артыкчылык диплому менен аяктап, «Жогорку математика» кафедрасына окутуучулук кызматка калтырылган.

1961-1964-жылдары Кыргыз ССРнин Илимдер академиясынын физика-математика институтунда дифференциалдык теңдемелер адистиги боюнча аспирантурада окуган. 1964-1974-жылдары Ош мамлекеттик педагогикалык институтунун «Жогорку математика» кафедрасында ага окутуучулук, доценттик кызматтарда эмгектенген.

1967-жылы Алма-Ата шаарында кандидаттык диссертациясын ийгиликтүү коргогон. 1969-1977-жылдары Ош мамлекеттик педагогикалык институтунун «Математикалык анализ» кафедрасында доценттик кызматта иштеген.

1977-жылдан бери «Математикалык анализ» кафедрасынын башчысы кызматында иштеп келе жатат.

1984-жылы Киев шаарында доктордук диссертациясын коргогон. Ал эми 1988-жылы ага профессордук наам ыйгарылган.

Көптөгөн эл аралык жана республикалык конференцияларга катышып, баяндамаларды жасаган.

Кичине параметрди кармаган дифференциалдык теңдемелер теориясынын өнүгүшүнө жана жаштарга билим берүүдө жасаган зор эмгектери үчүн ОшМУнун жана Министрликтин көптөгөн алкыштары жана грамоталары менен сыйланган. «Кыргыз ССРнин Эл агартуусунун отличниги» төш белгиси менен (1983), Кыргыз ССРнин Жогорку Советинин Ардак грамотасы менен (1985), Кыргыз ССРнин Элге билим берүү министрлигинин ардак грамотасы менен сыйланган (1987). С. Каримовдун аты Кыргыз Республикасынын эмгек даңк китепчесине жазылган (№667 токтом,1985-жыл, 26-декабрь).

Анын жетекчилиги астында бир доктордук жана төрт кандидаттык диссертация жакталган. Азыркы учурда төрт аспирант С. Каримовдун жетекчилигинде илимий-изилдөө иштерин жүргүзүп жатышат. Токсондон ашуун илимий макаланын, беш китептин автору.

С. Каримов сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер багытында ири адис катарында өзү түзгөн илимий мектепте шакиртттери менен биргеликте илимий-изилдөө иштерин үзүрлүү жүргүзүп келет.

Э С Т У Т У М

Ош мамлекеттик университети 60 жылдык тарыхында, мыкты эмгек менен курбалдаш-коллегаларынын, окуткан окучууларынын эсинде калган, университеттин өнүгүү жолунда тиешелүү орду болгон агай-эжейлерибизди эскерип, сиздердин жаркын элесинер ОшМУнун ардактуу ардагери катары түбөлүккө кала бермекчи демекчибиз

Заитов Ферран Назибович

Заитов Ферран Назибович 1932-жылы 27-июлда Россия Федерациясынын Примор крайында Сучан шаарында мугалимдин үй-бүлөсүндө төрөлгөн. Атасы Назиб Хазиахметович орто мектепте химия сабагынан мугалим болсо, апасы Юсупова Факиха Фаткулловна башталгыч класстардын мугалими болуп иштеген. Апасы 1954-жылы, атасы 1958-жылы дүйнөдөн өткөн.

Заитовдордун үй-бүлөсү 1937-жылы Татар АССРне көчүп келишкен, 1940-жылы Ферран биринчи класска барган.

Алардын үй-бүлөөсү 1947-жылы Кыргызстанга көчүп келишип, Ф. Заитов Петров районундагы Петровка орто мектебин 1950-жылы аяктаган. Ошол эле жылы Кыргыз педагогикалык институтунун физика-математика факультетинин физика адистигине студент болуп кабыл алынган. 1951-жылы Кыргыз педагогикалык институту Кыргыз мамлекеттик университети болуп кайра түзүлгөн. Студенттик кезинен эле Ферран Назибович эксперименталдык физика кафедрасынын доценти Л.А. Спектровдун жетекчилигинде илимий изилдөө иштерине активдүү катышып келген.

1954-жылы университетти аяктап, Окумуштуулар Кеңешинин чечими менен “Эксперименталдык физика” адистиги боюнча университеттин алдындагы аспирантурага кирген жана диссертациялык ишин бүтүрүү максатында Эстон республикасынын Тарту университетине жөнөтүлгөн.

Диссертациялык ишин Эстон илимдер академиясынын мүчө-корреспонденти, ф.-м.и.д., профессор Ч.Б. Лущиктин жетекчилигинде жүргүзгөн. Аспирантурада окуу менен Эстон республикасынын физика институтундагы жана Тарту университети менен биргеликте уюштурулган люминесценция боюнча илимий семинарга активдүү катышып, баяндамаларды жасаган. Илимий лабораториянын мүчөлөрүнүн колдоосу менен 1957-жылы диссертациялык ишин аяктап, 1958-жылдын март айында ийгиликтүү коргогон. 1963-жылдан доценттик аттестатын алган.

1957-жылдан 1965-жылга чейин Ош педагогикалык институтунда окутуучу, ага окутуучу, доцент, окуу жана илимий иштер боюнча проректор болуп иштеген. 1965-жылдан 1985-жылдын май айына чейин эксперименталдык жана теориялык физика кафедрасынын башчысы болуп эмгектенген.

1960-жылдан Ю.Л. Луканцевер менен бирге Ош педагогикалык институтунда люминесценция боюнча илимий лаборатория түзүшүп, илимий семинарда алынган материалдар талкуудан өтүп турган. Ал илимий лабораторияда физика-математика факультетинин окутуучулары В.И. Сидляренко, В.П. Черненко, Е.С. Дударев, Ю.Н. Евстифеев, С. Абдиев, Н. Луканцевер, Ш. Исмаилов, Б. Арапов, Р. Муминов, М. Койчуманов, К. Биймурзаев, А. Алтымышев, Р. Халиуллин, О. Мурзабаев, А. Минбаева, Ж. Эгембердиев , М. Тайиров, К. Осмоналиев, А. Усаровдор активдүү илимий изилдөөлөр жүргүзүшкөн.

Ф.Н. Заитов жана Ю.Л. Луканцевердин жетекчилиги менен В.И. Сидляренко, Е.С. Дударев, Ш. Исмаилов, Б. Арапов, Р. Муминовдор Ош пединститундагы илимий лабораторияда алынган илимий жыйынтыктардын натыйжасында кандидаттык диссертацияларын ийгиликтүү коргошкон.

Ф. Заитовдун жубайы Заитова Насифа Хамзиевна орус тили кафедрасында улук окутуучу болуп иштеген. Кызы Танзиля (1960-жылы туулган) Киевдеги экономика факультетин аяктаган, Альфия (1965-жылы туулган) Башкортастандагы айылчарба институн аяктаган.

Ф.Н. Заитов 1985-жылы май айында узакка созулган оорудан кийин дүйнөдөн өткөн.

Ф.Н. Заитовдун элеси кесиптештеринин жана окуучуларынын эсинде ар дайым түбөлүккө сакталат.

Турмашев Эркинбай Турмашевич

Турмашев Эркинбай Турмашевич 1933-жылы 20-мартта Өзгөн районуна караштуу Заргер айылында туулган.

Орто мектепти 1954-жылы бүтүрүп, ошол эле жылы Кыргыз мамлекеттик университетинин физика-математика факультетинин физика адистигине тапшырган.

Эркинбай Турмашев эмгек жолун 1959-жылы университетти ийгиликтүү бүтүргөндөн кийин Кыргыз ССРинин Илимдер академиясынын физика институтунда кенже илимий кызматкер болуп иштөөдөн баштаган.

1963-жылы Ташкент шаарындагы Электроника институтунун аспирантурасына тапшырып, кандидаттык диссертациясын ийгиликтүү жактап, физика-математика илимдеринин кандидаты деген илимий даражага ээ болгон. 1986-жылга чейин аталган институтта илимий кызматкер болуп эмгектенген.

1986-жылдын февраль айында Ош мамлекеттик педагогикалык институтунун физика-математика факультетинин ТСО жана МПФ кафедрасына конкурстук негизде ага окутуучу болуп которулуп келген.

1992-жылы Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар кеңешинин чечими менен Жалпы физика кафедрасына доценттик кызмат орунуна шайланат.

1997-жылы Ош технологиялык университетинин Өзгөндөгү филиалына кафедра башчы кызматына которулган.

2001-жылдан тартып 2010-жылга чейин Ош мамлекеттик университетинин ЭТФ кафедрасында доцент болуп эмгектенген.

2010-2011-жылдары өмүрүнүн акырына чейин Энергетика кафедрасында доценттик кызматта иштеди.

Э. Турмашев билим берүүдөгү, илимдеги жетишкен ийгиликтери, адамдык мыкты сапаттары менен кесиптештеринин жүрөгүндө түбөлүккө сакталат.

ISBN 9967-03-030-5 **ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР СЕРИЯСЫ**

«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ»
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ
№3- 2012

Секретариат:

Чыгарууга жооптуу: *Т.Т. Жумабаева - б.и.д, профессор*
Корректорлор: *К. Зулпукаров - фил.и.д., профессор*
Ж. Элчиев - ф.и.к., доцент

Компьютерге калыпка салгандар: *Г.А.Файзуллаева, Г.М. Мамасалиева*

Басууга берилди: 8.02.2013-ж.
Формат 210х297 1/8
Көлөмү: 28 басма табак.
Буюртма № 4
Нускасы 100 даана.

ОщМУ «Билим» редакциялык- басма бөлүмү
Ош шаары, Ленин көчөсү 331, каб. 135. тел.: 7 20 61