ISSN 1694-7452

ВЕСТНИК
ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА

№ 1 2021

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН
ЖАРЧЫСЫ

Osh State University

Journal of Mathematics, Physics and Engineering

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН

ЖАРЧЫСЫ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА

№ 1 2021

ВЕСТНИК

ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный журнал

№1 2021

Свидетельство о регистрации: серия ГР № 003782,
регистрационный номер 84 от 25 августа 2014 г.

OSH STATE UNIVERSITY

JOURNAL OF MATHEMATICS, PHYSICS, TECHNICS

© **Ошский государственный университет**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА» МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА

Главный редактор: Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич - д-р физ.-мат. наук, проф., E-mail: Kudayberdi.Kozhobekov@oshsu.kg.

Заместитель главного редактора: Осумбеков Байышбек Зияйдинович - д-р мед. наук, проф., E-mail: osumbekov_osh@mail.ru.

Члены редакционной коллегии: **Алымкулов Келдибай Алымкулович** – д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. НАН КР, E-mail: kalymkulov@oshsu.kg; **Арапов Байыш Арапович** – д-р физ.-мат. наук, проф.; **Сопуев Адахимжан Сопуевич** – д-р физ.-мат. наук, проф., E-mail: asopuev@oshsu.kg, sopuev@mail.ru; **Ташполотов Ысламидин Ташполотович –** д-р физ.-мат. наук, проф., E-mail: itashpolotov@mail.ru; **Алыбаев Курманбек Сарманович** – д-р физ.-мат. наук, проф., E-mail: alybaevkurmanbek@rambler.ru; **Матиева Гулбадан Матиевна** – д-р физ.-мат. наук, проф., E-mail: gulbadan_57@mail.ru; **Асанов Авыт Асанович** – д-р физ.-мат. наук, проф., E-mail: avyt.asanov@manas.edu.kg; **Турсунов Дилмурат Абдиллажанович** – д-р физ.-мат. наук, проф., E-mail: dtursunov@oshsu.kg; **Кенжаев Идирисбек Гуламович** – д-р техн. наук, проф., E-mail: kenjaevig@rambler.ru; **Обозов Алайбек Джумабекович – д-р техн. наук, проф.,** Obozov-a@mail.ru**; Клычев Шавкат Исакович** – д-р техн. наук, проф., klichevsh@list.ru; **Маткаримов Таалайбек Ысманалиевич** – д-р техн. наук, проф.

Илимий журнал Кыргыз мамлекеттик китеп палатасынан 2000-жылдын 28-декабрында каттоодон өткөн.

Жарыяланган макалалар тууралуу маалымат №564-10/2016 келишими боюнча ***Россиялык илимий цитата берүү индекси менен индекстелет (РИНЦ)***

Жыйнактын электрондук версиясын www.oshsu.kg, vestnik.oshsu.kg, elibrary.ru сайттары аркылуу эркин кирип көрүүгө болот.

Адрес редакции: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331,
Электронный адрес: https://www.oshsu.kg
Контактный тел.: +996 3222 7 22 73, Факс: +996 3222 7 09 15
Басууга берилди: 26.03.2021
Көлөмү: 16,0 б.т. Буюртма: № 30. Форматы: 70х108. Тираж 300 экз.

«Билим» редакциялык–басма бөлүмү

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Alymkulov K., Kozhobekov K.G., Azimov B.A. About the model equation for the of the jump an phenomenon and its generalization. paramtrization and asymptotics……..... 6

Абдирайимова Н.А. Достаточные признаки устойчивости решений слабо нелинейного вольтерра интегро – дифференциального уравнения второго порядка с неполными ядрами на полуоси……..... 12

Абдумиталип уулу Кубатбек. Краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами…… 19

Алымкулов К., Кожобеков К.Г., Азимов Б.А., Султанова Н.З. Об одной сингулярно возмущенной краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка…… 31

Бекмаматов З.М. О задаче сопряжения для уравнений смешанно-составного типа четвертого порядка на плоскости…… 38

Искандаров С., Абдирайимова Н.А. Метод вспомогательных ядер и устойчивость решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с неполными ядрами…….. 46

Каримов С., Акматов А.А. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения матрицы имеют мнимые части…… 55

Йозеф Микеш. Пространства солодовникова V(K) и их обобщения…… 62

Нарымбетов Т.К. Анализ исследований сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях…….…… 74

Омаралиева Г.А., Турсунов Д.А., Маматбуваева М.И., Раманкулова Ш.А. Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем…… 91

Папиева Т.М., Абдулазизова М.Х., Адиева Б.Т., Исакова Э.М., Максатбек к Б. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_3\right)$ в евклидовом

пространстве E_3…… 98

Сопуев А., Бекмаматов З.М. Краевые задачи для уравнения смешанно-составного типа четвертого порядка, содержащий эллиптико-гиперболический оператор..... 106

Сулайманов З.М., Эркебаев У.З., Абасова Г.З., Турсунов Д.А. Асимптотика решения сингулярной задачи с внутренним слоем..... 113

Шамшиева Г.А., Исакова Э.М., Максатбек к Б., Кулматова Б.У. Существование квазидвойной линии пары $\left(f_1^5, \Delta_4\right)$ в евклидовом пространстве E_3…… 121

ФИЗИКА

Ибраимов Т.К., Эркинбаева Н.А., Ташполотов Ы., Садыков Э. Способ преобразования химических элементов на основе эффекта электрофизической ионизации…….. 129

Калбекова М.Ж., Калмурзаева А.Т., Марс к Т., Ормош к А. Мультифизическое моделирование процесса теплопроводности….. 136

Калмурзаева А.Т., Абдимуталипова З.Н., Курбаналиев А.Ы., Марс к Т. Численное моделирование нестационарного ламинарного обтекания кругового цилиндр…… 144

Сагындыкова Р.К., Калбекова М.Ж., Курбаналиев А.Ы., Ормош к А. Мультифизическое моделирование процесса свободной конвекции в пористых средах……... 151

РЕФЕРАТТАР……. 159

ABSTRACTS…… 168

Сведения об авторах…….. 176

МАТЕМАТИКА

УДК 517.928

K. ALYMKULOV, K.G. KOZHOBEKOV, B.A. AZIMOV

ABOUT THE MODEL EQUATION FOR THE OF THE JUMP AN PHENOMENON AND ITS GENERALIZATION. PARAMTRIZATION AND ASYMPTOTICS

Here, for the Reiss equation, a new equation is proposed for the parametric representation of its solution. And on the basis of this representation, a new asymptotic representation of the solution is obtained. A new generalized Reiss equation for the jump phenomenon is also proposed.

Keywords: *Model equation, parametrization, asymptotic.*

ОТНОСИТЕЛЬНО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЯВЛЕНИЯ СКАЧКА И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ИХ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКА

Для уравнения Рейсса предложено новое уравнение для параметрического представления его решения. И на основе этого представления, получено новое асимптотическое представление решения. Также предложено новое обобщенное уравнение Рейсса для явления прыжка.

Ключевые слова: *модельное уравнение, параметризация, асимптотика.*

1. Introduction. In [1], the American mathematician Reiss proposed a model equation for the jump phenomenon

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^2(t)(1-y(t)),\ \ y(0)=\varepsilon, \qquad (1)$$

where $0<\varepsilon<<1$ is a small parameter. The works $[1-2],[8]$ are devoted to

the construction of the asymptotic of the solution of this problem.

Here, a new parametrization of the solution to this problem is proposed. In [8] another parametrization was proposed and two-band asymptotics were obtained.

2. Historical overview of the parameterization method. It is known that the implicit equation of the circle, $x^2 + y^2 = 1$, if they are solved explicitly, then a nonsmooth solution is obtained, but if its equations are parameterized, then we obtain an analytical expression.

For perturbed differential equations, apparently, the first parametrization of a periodic solution was obtained by H. Poincaré for the Duffing equation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon y^3 + y(x) = 0 \tag{2}$$

If we seek for a 2π-periodic solution in the form

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

then into a function $y_j(t)$ $(j = 1,2,...)$ appear secular terms and this series is not a uniformly asymptotic series.

Therefore, this periodical solution will seeked in parametrical form

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \varepsilon^2 y_2(\xi) + \dots \\ t &= \xi + \varepsilon t_1(\xi) + \varepsilon^2 t_2(\xi) + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

here $y_j(\xi),\ t_j(\xi)(j = 1,2,\dots) - 2\pi$ periodic functions.

In 1948 in [3] the English mechanic and mathematician J.J. Lighthill made a great contribution to the development of Poincaré's method. He considered, in particular, the singularly perturbed equation

$$\begin{aligned} &\left(x + \varepsilon u(x)\right)\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = r(x), \\ &u(1) = y^0 \end{aligned} \tag{4}$$

Where y^0 is a given constant $p(x)$, $r(x)$ are analytic functions on the interval [0,1]. He suggested seek for a parametric solution to problem (4) in the form

$$y(x)=y_0(\xi)+\varepsilon y_1(\xi)+\varepsilon^2 y_2(\xi)+\dots$$
$$y(\xi)=\xi+\varepsilon\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2 x_2(\xi)+\dots \quad (5)$$

and for this solution to give a uniformly suitable representation for the solution of problem (4), on the interval $\xi\epsilon\left[\xi_0(\varepsilon),1\right]$, where $\xi_0(0)=A$ further generalization of the Lighthill method was made in [6-7], where the parametric solution of the equation is obtained from the explicit equation

$$\xi\frac{dy}{d\xi}=-q\left(x(\xi)\right)y(\xi)+r\left(x(\xi)\right),\ \ y(1)=y^0,$$

$$\xi\frac{dy}{d\xi}=-q\left(x(\xi)\right)y(\xi)+r\left(x(\xi)\right),\ \ y(1)=y^0, \quad (6)$$

$$\xi\frac{dx}{d\xi}=x(\xi)+\varepsilon y(\xi),\quad \boldsymbol{x}(1)=1.$$

This equation is named uniformized equation after G. Templ [10].

A simple example.

$$(x\ +\varepsilon y(x))\ dy\ /\ dx\ +\ y(x)\ =\ 0,\ y(0)\ =\ b \quad (7)$$

b-given constant, gives an excellent example of the parameterization method.

Equation (7) is solved exactly

$$\mathrm{y(x)}=\frac{1}{\varepsilon}[x-\sqrt{x^2+\varepsilon(2+\varepsilon b)} \quad (8)$$

It is clear that this solution exists on the segment [0,1]. The asymptotic of the expansion can be obtained by the Lighthill method or the parameterization method.

It is clear that this solution exists on the segment [0,1]. The asymptotic of the expansion can be obtained by the Lighthill method or the parameterization method. If we apply the parameterization method (6), then it has

$$\begin{cases}\xi\frac{dy}{d\xi}=-y(\xi),\ y(1)=b,\\ \xi\frac{dx}{d\xi}=x+\varepsilon y(\xi),\ \ x(1)=1\end{cases} \quad (9)$$

Solving problem (9), we obtain

$$y\ (\xi)\ =\ b\ /\xi,$$
$$x(\xi)=\xi\left(1+b\varepsilon 2^{-1}\right)-\varepsilon(2\xi)^{-1} \tag{10}$$

Eliminating the variable ξ from (10), we obtain the exact solution (8) of problem (7).

3. Parametrization method for the Reiss equation. For the parameterized equation for (1) we take the equation

$$\frac{dy(\xi)}{d\xi}=y(\xi)\left(1-y(\xi)\right),\ \ y(0)=\varepsilon \tag{11.1}$$

$$\frac{dt(\xi)}{d\xi}=\left(y(\xi)\right)^{-1},\ \ t(0)=0 \tag{11.2}$$

Solving (11.1) we have

$$\frac{dy}{y(1-y)}=\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right]dy=d\xi\ \Rightarrow \ln\frac{y}{1-y}*\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}=\xi\ \ \Rightarrow$$

$$\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-y)}=e^{\xi}\qquad \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}y=e^{\xi}-e^{\xi}y\quad \Rightarrow \tag{12}$$

$$\left[\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}+e^{\xi}\right]y=e^{\xi}\ \ \Rightarrow y(\xi)=\frac{e^{\xi}}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}+e^{\xi}}=\frac{\varepsilon e^{\xi}}{1-\varepsilon+\varepsilon e^{\xi}}$$

Substituting (12) into (11.2) and solving it

$$t(\xi)=\xi+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left[1-e^{-\varepsilon}\right]$$

thus, the parametric representation of problem (1) - (2) is represented in the form

$$y(\xi)=\frac{\varepsilon e^{\xi}}{1-\varepsilon+\varepsilon e^{\xi}}=\frac{1}{1+\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)e^{-\xi}} \tag{13.1}$$

$$t(\xi)=\xi+(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\left(1-e^{-\xi}\right) \tag{13.2}$$

it follows from (13) that for $\xi\epsilon\left[0,\infty\right)$, t-also change on the segment $\left[0,\infty\right)$. The function y (ξ) varies from ε to unity. Therefore, problem (1) is equivalent to problem (11).

Because

$$t'(\xi)=1+(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}e^{-\xi}>0$$

it follows from (13.2) that on the interval, the variable t changes on the interva $\left[0, \boldsymbol{t}_0\right)$, where

$$t_0 = 1 + \frac{\left(1 - e^{-1}\right)\left(1 - \varepsilon\right)}{\varepsilon},$$

and then exponentially quickly goes to the equilibrium point $y = 1$.

4. Generalization of the Reis model equation. Consider the equations

$$\frac{dy}{d\xi} = y^n(t)\left(1 - y(t)\right),\ y(0) = \varepsilon \tag{14}$$

nϵN, n>2. The solution to problem (14) is parametrized by the following equation

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{d\xi} = y(\xi)\left(1 - y(\xi)\right),\ \ y(0) = \varepsilon\ , \\ &\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{y^{n-1(\xi)}},\ t(0) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Solving these problems, we have

$$\begin{aligned} &y(\xi) = \frac{\varepsilon e^{\xi}}{1 - \varepsilon + \varepsilon e^{\xi}}, \\ &\frac{dt}{d\xi} = (1 + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} e^{-\xi})^{n-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Bibliographia

1. Reiss S.L. New asymptotic methods for jump phenomens // SIAM J. Appl. Math. – 1980. – V.39. – №3. – P.440-455.

2. Kassoy A.R. Note on asymptotic methods for jump phenomena // SIAM J. Apll. Math. – 1982. – V.42. – № 3. – P.926-932.

3. Lighthill M.J. A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid // Philos. Mag. – 1949. – (7) 40. – P.1179–1201.

4. Alymkulov K. The method of uniformization and justification of Lighthill method (in Russian) // Izvestia AN KyrgSSR. – 1981. – № 1. – P.35-38.

5. Alymkulov K. and Tursunov T.D. Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “Recent Studies in Perturbation Theory”, Chapter

1, Edited by Dimo I. Uzunov, Publisher InTech. - 2017.

6. Alymkulov K. Perturbed differential equation with singular points and some bifurcations problems (in Russian). – Bishkek : Ilim, 1992. – 108 p.

7. Alymkulov K. Method of the uniformization and justification (in Russian). // Izvestia AN Kirg. SSR. – 1981. – № 1. – P.35-38.

8. Alymkulov K., Kochobekov K.G. On the asymptotics of the solution of the Reiss problem for the jump phenomenon (шт Russian) // Vestnik JAGU Вестник. – 2019. – №2(41). – P.3-6.

9. Kochobekov K.G. Asymptotics of solutions of bisingylarly perturbed differential equations, Dissertation for the degree of Doctor of Science. – Bishkek: 2020.

10. Temple G. Linearization and delinearization. Proc. Inter. Congr. Math., Edinburg. - 1958. – P.233-247.

УДК 517.968.74

Н.А. АБДИРАЙИМОВА

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕПОЛНЫМИ ЯДРАМИ НА ПОЛУОСИ

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений и их первых производных, т.е. устойчивости решений слабо нелинейнего интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра с неполными ядрами. Развивается метод вспомогательных ядер С. Искандарова (1998). Приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение второго порядка, слабая нелинейность, устойчивость решений, метод вспомогательных ядер.*

Введение. Все фигурирующие функции от t, (t,τ), $(t,x,y),(t,\tau,x)$ являются непрерывными при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0, |x|, |y| < \infty$ и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $I = [t_0, \infty)$; ИДУ (интегро-дифференциальное уравнение); под устойчивостью решений слабо нелинейного ИДУ второго порядка понимается ограниченность на I всех его решений и их первых производных.

Задача. Установить достаточные условия устойчивости решений слабо нелинейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида

$$x''(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} Q_0(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) + F(t,x(t),\int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau))d\tau),\ t \ge t_0 \quad (1)$$

в случае, когда выполняется условие:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}|Q_0(t,\tau)|d\tau dt=\infty \qquad (Q_0)$$

и со слабой нелинейностью:

$$|F(t,x,y)|\le F_0(t)+g_0(t)|x|+g_1(t)|y|, \qquad |h(t,\tau,x)|\le g_2(t,\tau)|x| \qquad (F,\ h)$$

с неотрицательными $F_0(t), g_k(t), g_2(t,\tau)$ $(k=0,1)$.

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t)\in C^2(I,R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k=0,1)$. В силу условия *(F, h)* каждое такое решение существует.

Отметим, что аналогичная задача для ИДУ второго порядка вида (1) с дополнительным слагаемым $a_1(t)x'(t)$ и интегральным членом с $K(t,\tau)x'(\tau)$ ранее рассмотрена в [1] и результаты этой статьи не применимы к решению сформулированной нами задачи.

Ниже покажем, как решается рассматриваемая выше задача.

Аналогично [2-4] в ИДУ (1) вводим некоторое вспомогательное ядро $H(t,\tau)$ с $x'(\tau)$ по закону “веса” [5;6,с.114]:

$$Q_0(t,\tau)x(\tau)\equiv Q_0(t,\tau)x(x)-H(t,\tau)x'(\tau)+H(t,\tau)x'(\tau). \qquad (2)$$

Далее, как в [3, 4], проведем интегрирование по частям:

$$-\int_{t_0}^{t}H(t,\tau)x'(\tau)d\tau=-H(t,t)x(t)+H(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}H'_{\tau}(t,\tau)x(\tau)d\tau. \qquad (3)$$

С учетом соотношений (2), (3) из ИДУ (1) приходим к следующему нагруженному ИДУ:

$$x''(t)+b(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[Q(t,\tau)x(\tau)+H(t,\tau)x'(\tau)\right]d\tau=f(t)-H(t,t_0)x(t_0)+$$

$$+F(t,x(t),\ \int_{t_0}^{t}h(t,\tau,x(\tau))d\tau),\ \ t\ge t_0, \qquad (4)$$

где $b(t)\equiv a_0(t)-H(t,t),\quad Q(t,\tau)\equiv Q_0(t,\tau)+H'_{\tau}(t,\tau)$.

Далее к ИДУ (4) развиваем метод частичного срезывания [7].
Пусть [7]

$$H(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}H_i(t,\tau), \qquad (H)$$

$\psi_i(t)$ $(i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции, $P_i(t)\equiv H_i(t,t)(\psi_i(t))^{-2}$, $T_i(t,\tau)\equiv H_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1}$ - частично срезанные ядра $(i=1..n)$.

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ (4) умножаем на $x'(t)$ [8, с. 194-217], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим условие *(H)*, функции $\psi_i(t)$, $P_i(t)$, $T_i(t,\tau)$, применяем лемму [7]. Тогда получаем следующее тождество:

$$\left(x'(t)\right)^2+b(t)\left(x(t)\right)^2-\int_{t_0}^{t}b'(s)\left(x(s)\right)^2ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[P_i(t)(X_i(t,t_0))^2-\int_{t_0}^{t}P_i'(s)(X_i(s,t_0))^2ds-2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}T_{i\tau}'(s,\tau)X_i(\tau,t_0)x'(s)d\tau ds\right]+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}Q(s,\tau)x'(\tau)x'(s)d\tau ds\equiv c_*+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}x'(s)\left[f(s)-H(s,t_0)x(t_0)+F(s,x(s),\int_{t_0}^{s}h(s,\tau,x(\tau))d\tau)\right]ds, \qquad (5)$$

где $X_i(t,t_0)\equiv\int_{t_0}^{t}\psi_i(\eta)x'(\eta)d\eta$ $(i=1..n)$, $c_*=\left(x'(t_0)\right)^2+b(t_0)(x(t_0))^2$.

Аналогично [1] вводим условие

$$b(t)=b_0(t)+b_1(t) \qquad (b)$$

и проделаем следующее преобразование с интегрированием по частям:

$$2\int_{t_0}^{t}f(s)x'(s)ds=2f(t)x(t)-2f(t_0)x(t_0)-2\int_{t_0}^{t}f'(s)x(s)ds, \qquad (6)$$

а также вводя некоторую функцию $c_0(t)$ [1], из (5) имеем

$$u(t) \equiv (x'(t))^2 + b_0(t)(x(t))^2 - 2f(t)x(t) + c_0(t) - \int_{t_0}^{t} \left[b_0'(s)(x(s))^2 - 2f'(s)x(s) + c_0'(s) \right] ds +$$

$$+ b_1(t)(x(t))^2 + \sum_{i=1}^{n} P_i(t)(X_i(t,t_0))^2 \equiv c_{**} + \int_{t_0}^{t} b_1'(s)(x(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left[P_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 + 2\int_{t_0}^{s} T_{i\tau}'(s,\tau) X_i(\tau,t_0) x'(s) d\tau \right] ds -$$

$$- 2\int_{t_0}^{t} \left[H(s,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)x'(\tau)d\tau - F(s,x(s), \int_{t_0}^{s} h(s,\tau,x(\tau))d\tau) \right] x'(s)ds, \qquad (7)$$

где $c_{**} = c_* + c_0(t_0)$.

Переходом от тождества (7) к интегральному неравенству, при этом, в частности, учитывая условие *(F, h)*, применяя лемму 1 [9], аналогично теореме 2.1 [1] доказывается

Теорема 1. Пусть 1) выполняются условия *(F, h), (H), (b);*

2) $b_0(t) \geq 0,\ b_0'(t) \leq 0,$ существует функция $c_0(t)$ такая, что

$(f^{(k)}(t))^2 \leq b_0^{(k)}(t) c_0^{(k)}(t)\ \ (k = 0,1);$

3) $b_1(t) \geq b_{10} > 0,$ существует функция $b_1^*(t) \in L^1(I, R_+)$ такая, что

$b_1'(t) \leq b_1^*(t) b_1(t);$

4) $P_i(t) > 0,$ существуют функции $P_i^*(t) \in L^1(I, R_+)$ такие, что

$P_i'(t) \leq P_i^*(t) P_i(t),\ \ (i = 1..n);$

5) $|H(t,t_0)| + \int_{t_0}^{t} |Q(t,\tau)| d\tau + F_0(t) + g_0(t) + g_1(t) \int_{t_0}^{t} g_2(t,\tau) d\tau \in L^1(I, R_+);$

6) $\int_{t_0}^{t} |T_{i\tau}'(t,\tau)| (P_i(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau \in L^1(I, R_+) \qquad (i = 1..n).$

Тогда любое решение ИДУ (1) устойчиво.

Отметим, что в этом случае получается интегральное неравенство

$$u(t) \leq c_{**} + \int_{t_0}^{t} \left[b_1^*(s) + g_0(s)(b_1(s))^{-\frac{1}{2}} \right] u(s) + \sum_{i=1}^{n} \left[P_i^*(s)u(s) + 2\int_{t_0}^{s} |T_{i\tau}'(s,\tau)| (P_i(\tau))^{-\frac{1}{2}} (u(\tau))^{\frac{1}{2}} (u(s))^{\frac{1}{2}} d\tau \right] +$$

$$+ 2(u(s))^{\frac{1}{2}} \left[|H(s,t_0)||x(t_0)| + \int_{t_0}^{s} |Q(s,\tau)| (u(\tau))^{\frac{1}{2}} d\tau + F_0(s) + g_1(s) \int_{t_0}^{s} g_2(s,\tau)(b_1(\tau))^{-\frac{1}{2}} (u(\tau))^{\frac{1}{2}} d\tau \right] ds,$$

к которому применяется лемма 1 [9].

Далее рассматривается случай, когда выполняется условие:

$$H(t,t_0)\equiv 0. \qquad (H_0)$$

В этом случае на $f(t)$ налагается следующее условие:

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n} f_i(t) \qquad (f)$$

и вводятся функции $E_i(t)\equiv f_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$ $(i=1..n)$, а также некоторые функции $c_i(t)$, связывающие функции $P_i(t)$ и $E_i(t)$ аналогично, как в [1]. В этом случае вместо тождества (7) имеем следующее тождество:

$$u(t)\equiv (x'(t))^2+b_0(t)(x(t))^2-2f_0(t)x(t)+c_0(t)-\int_{t_0}^{t}\left[b_0'(s)(x(s))^2-2f_0'(s)x(s)+c_0'(s)\right]ds+$$

$$+b_1(t)(x(t))^2+\sum_{i=1}^{n}\left\{P_i(t)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}\left[P_i'(s)(X_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)X_i(s,t_0)+c_i'(s)\right]ds\right\}\equiv$$

$$\equiv c_{***}+\int_{t_0}^{t}b_1'(s)(x(s))^2ds+2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}T_{i\tau}'(s,\tau)X_i(\tau,t_0)x'(s)d\tau ds-$$

$$-2\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{s}Q(s,\tau)x'(\tau)d\tau-F(s,x(s),\int_{t_0}^{s}h(s,\tau,x(\tau)d\tau)\right]x'(s)ds, \qquad (8)$$

где $c_{***}=c_{**}+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0)$.

Пусть

$$P_i(t)=A_i(t)+B_i(t) \qquad (i=1..n). \qquad (P)$$

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. Пусть 1) выполняются условия (F,h), (H), (b), (H_0), (f), (P), условия 3), 5) теоремы 1;

2) $b_0(t)\ge 0$, $b_0'(t)\le 0$, существует функция $c_0(t)$ такая, что

$\left(f_0^{(k)}(t)\right)^2\le b_0^{(k)}(t)c_0^{(k)}(t)$ $(k=0,1)$;

3) $A_i(t)>0$, существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(I,R_+)$ такие, что

$A_i'(t) \le A_i^*(t)A_i(t)\ \ (i=1..n);$

4) $B_i(t) \ge 0,\ B_i'(t) \le 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2 \le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\ \ (i=1..n;\ k=0,1);$

5) $\int\limits_{t_0}^{t} |T_{i\tau}'(t,\tau)|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau \in L^1(I,R_+)\ (i=1..n).$

Тогда верно утверждение теоремы 1.

Приведем простейшие примеры. **Пример 1.** Для ИДУ (1) с $a_0(t) \equiv 4 + \frac{t+1}{t+2} + \frac{5}{t+3},\ Q_0(t,\tau) \equiv -e^{-t+\tau}\sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}$,

$f(t) \equiv -\frac{7}{t+4},\ f(t,x,y) \equiv -(2+\cos t)\sin e^{-t} - \frac{|x|}{t^2+1} + y, h(t,\tau,x) \equiv \frac{x^2}{(t+\tau+2)^3(|x|+1)},\ \ t_0 = 0$

выполняются все условия теоремы 1 для $H(t,\tau) \equiv e^{-t+\tau}\sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}$, здесь

$b(t) \equiv \frac{t+1}{t+2} + \frac{5}{t+3},\ b_0(t) \equiv \frac{5}{t+3},\ b_1(t) \equiv \frac{t+1}{t+2} \ge b_{10} = \frac{1}{2},\ c_0(t) \equiv \frac{49}{5(t+4)},$

$Q(t,\tau) \equiv -\frac{e^{-9t+\tau}}{2\sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}},\ n=1,\ \psi_1(t) \equiv e^t,\ P_1(t) \equiv 4e^{-2t},\ T_1(t,\tau) \equiv e^{-t}\sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}},$

$T_{1\tau}'(t,\tau) \equiv -\frac{e^{-9t}}{2\sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}},\ H(t,0) \equiv e^{-t}\sqrt{16+te^{-8t}},\ F_0(t) \equiv 3e^{-t},\ g_0(t) \equiv \frac{1}{t^2+1},\ g_1(t) \equiv 1,$

$g_2(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t+\tau+2)^3}.$

Пример 2. Для ИДУ (1) с

$a_0(t) \equiv \frac{t+3}{t+21} + \frac{8}{t+6} + 4e^{2t}\sin^2 t,\ Q_0(t,\tau) \equiv -e^{t+\tau}\sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}(\sin\tau+\cos\tau)\sin t,$

$f(t) \equiv -\frac{2}{t+5} - 7e^t \sin t,$ с теми же $F(t,x,y),\ h(t,\tau,x)$, как в примере 1,

выполняются все условия теоремы 2 для $H(t,\tau) \equiv \sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}e^{t+\tau}\sin t\sin\tau,\ t_0 = 0,$

здесь $b(t) \equiv \frac{t+3}{t+21} + \frac{8}{t+6},\quad Q(t,\tau) \equiv -\frac{e^{-7t+\tau}\sin t\sin\tau}{2\sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}},$

$n=1,\ \psi_1(t) \equiv e^t\sin t,\ P_1(t) \equiv 4,\ T(t,\tau) \equiv \sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}e^t\sin t,$

$$T'_\tau(t,\tau) \equiv -\frac{e^{-7t}\sin t}{2\sqrt{16+(t-\tau)e^{-8t}}},\ b_0(t) \equiv \frac{8}{t+6},\ f_0(t) \equiv -\frac{2}{t+5},\ c_0(t) \equiv \frac{1}{t+6},\ f_1(t) \equiv -7e^t \sin t,$$

$$E_1(t) \equiv -7,\ c_1(t) \equiv \frac{49}{4},\ H(t,0) \equiv 0.$$

Литература

1. Искандаров С. Достаточные условия ограниченности и устойчивости решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка типа Вольтерра. Неограниченность решений линейных однородных уравнений первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С. 149 – 184.

2. Искандаров С. Теория асимптотической устойчивости двух классов вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка // 1-съезд математиков Казахстана, Шымкент, сент. 1996 г.: Тез. докл. – Шымкент: Ғылым, 1996. – С. 101 – 102.

3. Искандаров С. О влиянии вольтерровых интегральных возмущений на ограниченность решений линейных дифференциальных уравнений // Вестник КГНУ. Сер. естественно-техн. науки. – Бишкек, 1998. – Вып. 1. – С. 83-87.

4. Искандаров С. Асимптотическая устойчивость двух классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерры // Дифференц. уравнения. – М., 2008. – Т. 44, №7. – С.883-895.

5. Искандаров С. Об одном способе изучения влияния вольтерровых интегральных членов на асимптотические свойства решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Туранское матем.собрание. – Ош, 1995. – Вып. 1. – С. 60-64.

6. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

7. Искандаров С., Шабданов Д.Н. Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып. 33. – С. 67-71.

8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр./Под ред.Ю.М.Свирежева. – М.: Наука, 1976. –288 с.

9. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып.9. – С. 68 – 103.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2021. №1

УДК 517.956.6

АБДУМИТАЛИП уулу КУБАТБЕК

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Доказаны теоремы существования и единственности решений краевой задачи для уравнения четвертого порядка, когда смешанный параболо-гиперболический оператор применяется к дифференциальному оператору второго порядка по *y*.

Ключевые слова: *краевая задача, условия склеивания, смешанный параболо-гиперболический оператор, метод интегральных уравнений.*

1. Постановка задачи. В области D, ограниченная отрезками линии

$$AC: x+y=0,\ CB: x-y=\ell,$$

$$BB_0: x=\ell,\ B_0A_0: y=h,$$

$$B_0A: x=0\ (\ell, h>0),$$

рассмотрим уравнение

$$L_1 L_2 u = 0, \qquad (1)$$

где

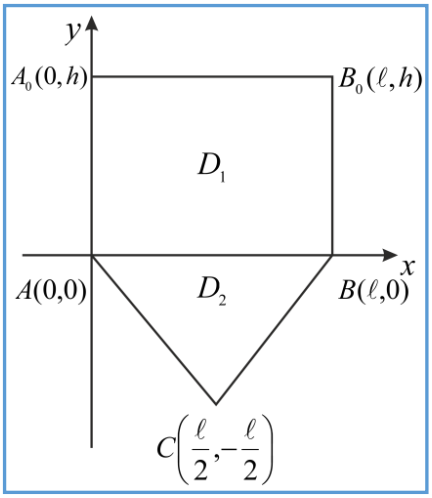

Рис. 1. Рисунок области D

$$L_1 = \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + a_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + c_1(x,y), y>0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y), y<0, \end{cases}$$

$L_2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $a_i(x,y)$, $c_i(x,y)(i=1,2)$, $b_2(x,y)$ - заданные гладкие функции.

Пусть $D_1 = D \cap (y>0)$, $D_2 = D \cap (y<0)$ (Рис. 1). Отметим, что прямые $x+y=0$, $x-y=\ell$ являются характеристиками гиперболического уравнения

$$L_{12}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c_2(x,y)u = 0, \qquad (2)$$

а прямые $y=0$, $y=h$ являются кратными характеристиками параболического уравнения

$$L_{11}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + c_1(x,y)u = 0. \qquad (3)$$

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющие непрерывные все производные $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(r=0,1,...,n;\ s=0,1,...,m\right)$.

Задача 1. Требуется определить функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ является решением уравнения (1) в области $D \setminus (y=0)$;

2) $u(x,y) \in C^1(\overline{D}), u_{yy}(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap \left[C^{2+1}(D_1) \cup C^2(D_2)\right]$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y),\ u|_{BB_0} = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \qquad (4)$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2},\ \ u|_{BC} = \psi_2(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_3(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2},\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_4(x), \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC} = \psi_5(x),\ \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \tag{7}$$

где $\varphi_i(y)\ (i=1,2),\ \psi_j(j=\overline{1,5})$ - заданные гладкие функции, n - внутренняя нормаль, причем

$$\forall (x,y) \in \bar{D}_1 :\ c_1(x,y) - \frac{1}{2} a_{1x}(x,y) \le 0, \tag{8}$$

$$\varphi_i(y) \in C^1[0,h]\ (i=1,2),\ \psi_j(x) \in C^3\left[0,\frac{\ell}{2}\right]\ (j=1,3),$$
$$\psi_k(x) \in C^3\left[\frac{\ell}{2},\ell\right]\ (k=2,4),\ \psi_5(x) \in C^2\left[\frac{\ell}{2},\ell\right], \tag{9}$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0),\ \varphi_2(0) = \psi_2(\ell),\ \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{\ell}{2}\right),$$
$$-\psi_1'\left(\frac{\ell}{2}\right) + \sqrt{2}\psi_3\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_2'\left(\frac{\ell}{2}\right) + \sqrt{2}\psi_4\left(\frac{\ell}{2}\right). \tag{10}$$

Отметим, что краевые задачи для уравнения второго порядка $L_1 u = 0$ изучена в работах [1, 2], а для уравнения $L_2 L_1 u = 0$ в работах [2, 3].

Краевые задачи для уравнения вида (1), когда L_1 представляет собой эллиптико-гиперболический оператор, рассмотрены в работе [4]. В работе [5] изучены краевые задачи для уравнения вида (1), когда L_1 - эллиптико-гиперболический, а L_2 - дифференциальный оператор n-го порядка в бесконечной области.

Задача 1, когда $a_i \equiv c_i \equiv 0\ (i=1,2),\ b_2 \equiv 0$, а вместо условия (7) берется условие $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{AC} = \psi_5(x), 0 \le x \le \frac{\ell}{2}$, изучена в работе [1].

Из постановки задачи 1 вытекает следующие условия склеивания

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \tau(x), u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell, \tag{11}$$

$$u_{yy}(x,-0) = u_{yy}(x,+0) = \mu(x), u_{yyy}(x,-0) = u_{yyy}(x,+0) = \theta(x), 0 \le x \le \ell, \tag{12}$$

где $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x),\ \theta(x)$ - пока неизвестные функции. Из условий (5) - (7) имеем

$$u_y(x,-x)=g_1(x), 0\le x\le\frac{\ell}{2},\ u_y(x,x-\ell)=g_2(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell, \tag{13}$$

$$u_{yy}(x,x-\ell)=g_3(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell, \tag{14}$$

где

$$g_1(x)=-\frac{1}{2}\psi_1'(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x),\ g_3(x)=\frac{1}{4}\psi_1''(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3'(x)+\frac{1}{2}\psi_5(x), 0\le x\le\frac{\ell}{2},$$

$$g_2(x)=\frac{1}{2}\psi_2'(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_4(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell.$$

Введем новые функции:

$$w_1(x,y)=u_{yy}(x,y),\ (x,y)\in D_1, \tag{15}$$

$$w_2(x,y)=u_{yy}(x,y),\ (x,y)\in D_2. \tag{16}$$

Тогда из уравнение (1) имеем

$$L_{11}w\equiv w_{1xx}-w_{1y}+a_1(x,y)w_{1x}+c_1(x,y)w_1=0,(x,y)\in D_1, \tag{17}$$

$$L_{12}w\equiv w_{2xx}-w_{2yy}+a_2(x,y)w_{2x}+b_2(x,y)w_{2y}+c_2(x,y)w_2=0,\ (x,y)\in D_2, \tag{18}$$

2. Получение соотношения из области D_2 для $w_2(x,y)$. Из (16) с учетом условия склеивания (12) для $w_2(x,y)$ имеем начальные условия

$$w_2(x,0)=\mu(x),\ w_{2y}(x,0)=\theta(x),\ 0\le x\le\ell. \tag{19}$$

На отрезке BC из условия (14) получим следующее краевое условие

$$w_2(x,x-\ell)=g_3(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le 0. \tag{20}$$

Решение задачи Коши для уравнения (18), удовлетворяющее условиям (19) имеет вид [6]

$$w_2(x,y)=\frac{1}{2}\Big[R(x,y;x+y,0)\mu(x+y)+R(x,y;x-y,0)\mu(x-y)\Big]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\Big[R_\eta(x,y;\xi,0)+b_2(\xi,0)R(x,y;\xi,0)\Big]\mu(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}R(x,y;\xi,0)\theta(\xi)d\xi, \tag{21}$$

где $R(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана, определяемая как решение задачи Гурса для уравнения

$$R_{\xi\xi}-R_{\eta\eta}-(a_2R)_\xi-(b_2R)_\eta+c_2R=0, \tag{22}$$

удовлетворяющее условиям

$$R(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=x+y-\xi}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_\xi^x\big[a_2(t,x+y-t)+b_2(t,x+y-t)\big]dt\right\}, \tag{23}$$

$$R(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=\xi-x+y}=\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_x^\xi\big[a_2(t,t-x+y)-b_2(t,t-x+y)\big]dt\right\}, \tag{24}$$

$$R(x,y;x,y)=1. \tag{25}$$

Полагая $y=x-\ell$ в (21) и с учетом условия (20) будем иметь

$$R(x,x-\ell;2x-\ell,0)\mu(2x-\ell)+R(x,x-\ell;\ell,0)\,\mu(\ell)+$$
$$+\int\limits_{2x-\ell}^{\ell}\Big[R_\eta(x,x-\ell;\xi,0)+b_2(\xi,0)R(x,x-\ell;\xi,0)\Big]\,\mu(\xi)d\xi- \tag{26}$$
$$-\int\limits_{2x-\ell}^{\ell}R(x,x-\ell;\xi,0)\,\theta(\xi)d\xi=2g_3(x),\ \frac{\ell}{2}\le x\le\ell.$$

Заметим, что $\forall x\in\left[\frac{\ell}{2},\ell\right]: 0\le 2x-\ell\le\ell$. Если учесть, что $\mu(\ell)=g_3(\ell)$, то из (24), введя замену $2x-\ell=z$, затем меняя z на x имеем

$$R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)\mu(x)=$$
$$=-\int\limits_x^\ell\left[R_\eta\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)+b_2(\xi,0)R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)\right]\mu(\xi)d\xi+ \tag{27}$$
$$+\int\limits_x^\ell R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)\theta(\xi)d\xi+2g_3\left(\frac{x+\ell}{2}\right)-R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)g_3(\ell).$$

Лемма 1. $\forall x \in [0,\ell]$ имеет место неравенство

$$R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)>0. \tag{28}$$

Доказательство. В самом деле из (23) при $\xi = x+y$ имеем

$$R(x,y;x+y,0)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x}\left[a_2(t,x+y-t)+b_2(t,x+y-t)\right]dt\right\}.$$

Отсюда, полагая $x=\frac{z+\ell}{2}$, $y=\frac{z-\ell}{2}$, $0\le z\le \ell$, имеем соотношение

$$R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};z,0\right)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{z}^{(z+\ell)/2}\left[a_2(t,z-t)+b_2(t,z-t)\right]dt\right\}>0,$$

которое доказывает справедливость неравенства (28). Лемма 1 доказана.

С учетом неравенства (28) из (27) получим соотношение между функциями $\mu(x)$ и $\theta(x)$, принесённое из области D_2, в виде:

$$\mu(x)=\int\limits_{x}^{\ell}P_1(x,\xi)\,\mu(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x}^{\ell}P_2(x,\xi)\,\theta(\xi)\,d\xi+g_0(x), \tag{29}$$

где

$$P_1(x,\xi)=-\left[R_\eta\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)+b_2(\xi,0)R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)\right]\Big/R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)$$

$$P_2(x,y)=R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)\Big/R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right),$$

$$g_0(x)=\left[2g_3\left(\frac{x+\ell}{2}\right)-R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)g_3(\ell)\right]\Big/R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)$$

Обращая Вольтеровскую часть уравнения (29), имеем соотношение между $\mu(x)$ и $\theta(x)$, полученное из области D_2:

$$\mu(x)=\int\limits_{x}^{\ell}T(x,\xi)\,\theta(\xi)d\xi+\chi(x), \tag{30}$$

где $T(x,\xi)=P_2(x,\xi)+\int_{\xi}^{x}\Gamma(x,t)P_2(t,\xi)\,dt,\quad \chi(x)=g_0(x)+\int_{x}^{\ell}\Gamma(x,t)g_0(t)\,dt,$

$\Gamma(x,\xi)$ - резольвента ядра $P_1(x,\xi)$.

3. Получение соотношения из области D_1 для $w_1(x,y)$.

Устремляя y к нулю из уравнения (17) с учетом (12) получим соотношение

$$\mu''(x)+a_1(x,0)\mu'(x)+c_1(x,0)\mu(x)=\theta(x),\ 0\le x\le \ell. \qquad (31)$$

Из краевых условий (4) имеем следующие условия

$$\mu(0)=\varphi_1''(0),\ \mu(\ell)=\varphi_2''(0). \qquad (32)$$

Если введем обозначение

$$\mu(x)=\varphi_1''(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_2''(0)-\varphi_1''(0)\right]+\mu_1(x), \qquad (33)$$

где $\mu_1(x)$ - новая неизвестная функция, тогда из (31) имеем

$$L_{11}\mu_1\equiv\mu_1''(x)+a_1(x,0)\mu_1'(x)+c_1(x,0)\mu_1(x)=\theta(x)+\Phi_1(x),\ 0\le x\le\ell, \qquad (34)$$

где $\Phi_1(x)=-\frac{1}{\ell}[\varphi_2''(0)-\varphi_1''(0)]a_1(x,0)-\varphi_1''(0)c_1(x,0)+\frac{x}{\ell}[\varphi_2''(0)-$

$-\varphi_1''(0)]c_1(x,0)$. Краевые условия при этом имеют вид:

$$\mu_1(0)=0,\ \mu_1(\ell)=0. \qquad (35)$$

Лемма 2. Если

$$\forall x\in[0,\ell]:\ c_1(x,0)-\frac{1}{2}a_{1x}(x,0)\le 0, \qquad (36)$$

то однородная задача (34)-(35) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Интегрируя тождество

$$\int_0^{\ell}\mu_1(x)L_{11}\mu_1(x)dx\equiv\mu_1(x)\mu_1'(x)\Big|_0^{\ell}+\frac{1}{2}a_1(x,0)\mu_1^{\,2}(x)\Big|_0^{\ell}+$$

$$+\int_0^{\ell}\left\{-\left[\mu_1'(x)\right]^2+\left[c_1(x,0)-\frac{1}{2}a_{1x}(x,0)\right]\mu_1^{\,2}(x)\right\}dx\equiv 0.$$

Если учесть условия (35), то из предыдущего тождества имеем

$$\int_0^{\ell}\left\{\left[\mu_1'(x)\right]^2-\left[c_1(x,0)-\frac{1}{2}a_{1x}(x,0)\right]\mu_1^2(x)\right\}dx\equiv 0.$$

Отсюда, при выполнении условия (36), заключаем что $\forall x\in[0,\ell]:\ \mu_1(x)\equiv 0.$ Лемма 2 доказана.

Решение задачи (34)-(35) с помощью функции Грина представим в виде [7]:

$$\mu_1(x)=\int_0^{\ell}G(x,\xi)\left[\theta(\xi)+\Phi_1(\xi)\right]d\xi,$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина первой краевой задачи (34)-(35). Тогда с учетом (33) получим соотношение между функциями $\mu(x)$ и $\theta(x)$, принесённое из области D_1, в виде:

$$\mu(x)=\Phi(x)+\int_0^{\ell}G(x,\xi)\theta(\xi)d\xi,\ 0\le x\le\ell, \qquad (37)$$

где $\Phi(x)=\varphi_1''(0)+\frac{x}{\ell}[\varphi_2''(0)-\varphi_1''(0)]+\int_0^{\ell}G(x,\xi)\,\Phi_1(x)dx.$

4. Сведение задачи к интегральному уравнению. Исключая $\mu(x)$ из (30), (37) придём к уравнению

$$\int_x^{\ell}T(x,\xi)\theta(\xi)d\xi+\chi(x)=\Phi(x)+\int_0^{\ell}G(x,\xi)\theta(\xi)dt.$$

Дифференцируя полученное уравнение по x получим

$$\theta(x)=\int_x^{\ell}T_x(x,\xi)\theta(\xi)d\xi+\chi'(x)-\Phi'(x)+\int_0^{\ell}G_x(x,\xi)\theta(\xi)d\xi. \qquad (38)$$

После обращения Вольтеровской части уравнения (38) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\theta(x)=\int_0^{\ell}K(x,t)\theta(t)dt+g(x), \qquad (39)$$

где $K(x,t)=G_x(x,t)+\int_x^{\ell} R_1(x,t)G_x(t,\xi)d\xi$, $R_1(x,\xi)$ - резольвента ядра

$T_x(x,\xi)$, $g(x)=\chi'(x)-\Phi'(x)+\int_x^{\ell} R_1(x,\xi)\left[\chi'(\xi)-\Phi'(\xi)\right]d\xi$.

В силу свойств заданных функций, заключаем, что $K(x,\xi)\in C\left(\bar{Q}\right)\cap$

$\cap C^{1+0}\left(Q\right)$, $g(x)\in C\left[0,\ell\right]$, где $Q=\left\{\left(x,t\right): 0\le x\le \ell,\ 0\le t\le h\right\}$.

Если потребуем от заданных функций выполнения условия

$$\ell\cdot\max_{0\le x,t\le\ell}\left|K(x,t)\right|\le 1, \tag{40}$$

то интегральное уравнение (39) имеет единственное решение.

Представим решение интегрального уравнения (39) в виде

$$\theta(x)=g(x)+\int_0^{\ell} R_2(x,t)\,g(t)dt,$$

где $R_2(x,t)$ – резольвента ядра $K(x,t)$. После определения $\theta(x)$, неизвестная функция $\mu(x)$ определяется по формуле (30).

5. Построение решения задачи 1 в области D_2. После нахождения функции $w_2(x,y)$ для определения решения задачи 1 в области D_2 придём к следующей задаче: найти в области D_2 решение уравнения

$$u_{yy}(x,y)=w_2(x,y),\ (x,y)\in D_2, \tag{41}$$

удовлетворяющее краевым условиям (5), (6). Решение этой задачи представимо в виде

$$u(x,y)=\begin{cases}\psi_1(x)+(x+y)\,g_1(x)+\int_{-x}^{y}(y-\eta)\,w_2(x,\eta)\,d\eta,\ x<\dfrac{\ell}{2},\\ \psi_2(x)+(y-x+\ell)\,g_2(x)+\int_{x-\ell}^{y}(y-\eta)\,w_2(x,\eta)\,d\eta,\ x>\dfrac{\ell}{2}.\end{cases} \tag{42}$$

Отсюда имеем:

$$u_y(x,y)=\begin{cases} g_1(x)+\int\limits_{-x}^{y} w_2(x,\eta)\,d\eta, \ x<\dfrac{\ell}{2}, \\ g_2(x)+\int\limits_{x-\ell}^{y} w_2(x,\eta)\,d\eta, \ x>\dfrac{\ell}{2}. \end{cases} \tag{43}$$

Нетрудно заметить, что при выполнении условия (10), $u(x,y),\ u_y(x,y)\in C(\bar{D}_2)$. Из (42) и (43) получим

$$\tau(x)=\begin{cases} \psi_1(x)+x\,g_1(x)-\int\limits_{-x}^{0}\eta\,w_2(x,\eta)\,d\eta, \ x<\dfrac{\ell}{2}, \\ \psi_2(x)+(\ell-x)\,g_2(x)-\int\limits_{x-\ell}^{0}\eta\,w_2(x,\eta)\,d\eta, \ x>\dfrac{\ell}{2}. \end{cases}$$

$$\nu(x)=\begin{cases} g_1(x)+\int\limits_{-x}^{0} w_2(x,\eta)\,d\eta, \ x<\dfrac{\ell}{2}, \\ g_2(x)+\int\limits_{x-\ell}^{0} w_2(x,\eta)\,d\eta, \ x>\dfrac{\ell}{2}. \end{cases}$$

Заметим также, что $\tau(x),\ \nu(x)\in C[0,\ell]$.

6. Построение решения задачи 1 в области D_1. Единственность решения первой краевой задачи для уравнения (17) в области D_1 устанавливается методом интегралов энергии. Интегрируя тождество

$$\int_0^{\ell}\int_0^{h} w_1(x,y)L_{11}w_1(x,y)\,dxdy\equiv\int_0^{\ell}\int_0^{h}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[w_1(x,y)w_{1x}(x,y)+\frac{1}{2}w_1^2(x,y)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}w^2(x,y)\right]\right\}+\left(-w_{1x}^2(x,y)+\left[-\frac{1}{2}a_{1x}(x,y)+c_1(x,y)\right]w^2(x,y)\right)dx\,dy\equiv 0$$

по области D_1 и учитывая однородные краевые условия имеем

$$\int_0^{\ell}\int_0^{h}\left\{\left[w_{1x}(x,y)\right]^2-\left[c_1(x,y)-\frac{1}{2}a_{1x}(x,y)\right]w_1^2(x,y)\right\}dxdy+\frac{1}{2}\int_0^{\ell}w_1^2(x,h)\,dx\equiv 0$$

Отсюда, при выполнении условия (8) имеем $w_1(x,y)\equiv 0$ для

$\forall (x,y) \in \bar{D}_1$.

Существование решения первой краевой задачи для уравнения (3) построено методом тепловых потенциалов в работе [8].

Решение задачи 1 в области D_1 определяется как решение задачи Коши для уравнения

$$u_{yy}(x,y) = w_1(x,y),\ (x,y) \in D_1,$$

удовлетворяющее начальным условиям (11), которое представимо в виде

$$u(x,y) = \tau(x) + y\nu(x) + \int_0^y (y-\eta) w_1(x,\eta) d\eta,\ (x,y) \in D_1.$$

Таким образом доказана

Теорема 1. Если выполняются условия (8), (9), (10), (36) и (40), тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Аналогично исследуется

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую все условия задачи 1, если вместо условий (7) выполняется условие

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{AC} = \psi_5(x),\ 0 \le x \le \frac{\ell}{2},$$

где $\varphi_i(y)\ (i = 1,2),\ \psi_j\ (j = \overline{1,5})$ - заданные гладкие функции, n - внутренняя нормаль.

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
3. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
4. Бобылева Л.А., Смирнов М.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно–составного типа 4-го порядка // Известия вузов. Математика. – 1972, №5. – С. 15-21.
5. Жегалов В.И. Некоторые задачи для уравнения смешанного-составного типа в бесконечной области // Труды семинара по

краевым задачам. – 1972. – Вып. 9. – С. 75-85.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

8. Камынин Л.С. Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Сибирский математический журнал. – 1963. – Том 4. – № 5. – С. 1071–1105.

УДК 517.928

К. АЛЫМКУЛОВ, К.Г. КОЖОБЕКОВ, Б.А. АЗИМОВ,
Н.З. СУЛТАНОВА

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка. Задача решается повторным применением метода малого параметра.

Ключевые слова: *модельное уравнение, метод малого параметра.*

1. Введение. Рассматривается следующая сингулярно возмущенная краевая задача [1]

$$\varepsilon \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{2x dy(x)}{dx} + xy(x) = 0 \qquad (1)$$

$$y(0) = 0, \;\; y(1) = e^{-1/2} \qquad (2)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, ε - малый параметр.

Отметим, что в [1] было получено первое приближение по параметру без обоснования оценки остаточного члена. Здесь строится асимптотическое приближение Пуанкаре любого порядка по малому параметру ε решение этой задачи, методом функции Грина. Первый шаг.

2. Классический метод малого параметра или построение внешнего решения. Решение задач (1)-(2) ищем в виде ряда

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots \qquad (3)$$

где $y_k(x)(k = 1,2,3,\ldots)$ пока неизвестные функции. Подставляя (3) в (1) для определения этих функций, имеем следующие задачи:

$$Ly_0(x) := 2x\frac{dy_0(x)}{dx} + xy_0 = 0,\ y_0(1) = e^{-1/2} \tag{4.0}$$

$$Ly_1(x) := -\frac{d^2y_0}{dx^2},\ y_0(1) = e^{-1/2} \tag{4.1}$$

… … … … … … … … … …

$$Ly_k(x) := -\frac{d^2y_{k-1}(x)}{dx^2},\ y_0(1) = 0 \tag{4.k}$$

Из (4.0) имеем

$$y_0(x) = e^{-x/2} \sim 1,\ x \to 0 \tag{5.0}$$

$$2\frac{dy_1(x)}{dx^2} + y_1(x) = -\frac{1}{x}\frac{d^2y_0}{dx^2} = -\frac{1}{4x}e^{-x/2} \sim -\frac{1}{4x},\ x \to 0$$

$$y_1(x) \sim -\frac{1}{8}lnx, \qquad \frac{d_1y_1(x)}{dx} \sim \frac{-1}{8x}, \qquad \frac{d^2y_1(x)}{dx^2} \sim \frac{1}{8x^2},\ x \to 0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} + \frac{1}{2}y_2(x) \sim -\frac{1}{16x^3}$$

$$y_2(x) \sim \frac{1}{32x^2},\ \frac{dy_2(x)}{dx} \sim -\frac{1}{16x^3},\ \frac{d^2y_2(x)}{dx^3} \sim \frac{3}{26x^4},\ x \to 0$$

$$\frac{dy_3(x)}{dx} + \frac{1}{2} \sim \frac{-3}{32x^5},\ x \to 0.$$

Отсюда

$$y_3(x) \sim \frac{3*4}{32x^4},\ \frac{dy(x)}{dx} \sim \frac{3*4*4}{32x^5},\ x \to 0.$$

Далее, получим

$$y_n \sim a_n x^{-(2n-1)}\ (n \geq 2),\ x \to \infty \tag{5.n}$$

Таким образом, главная асимптотика решения задачи (1)-(2) имеет вид

$$y(x) \sim 1 - \frac{3}{8}ln(x) + \frac{\varepsilon}{x^2}\left[\frac{1}{32} + a_3\frac{\varepsilon}{x^2} + a_4\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^2 + \ldots + a_m\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^{m-2} + \ldots\right],\ x \to 0 \tag{6}$$

Отсюда видно, что решение (3) является асимптотическим рядом, только на отрезке $\left[x_0 = x_0(\varepsilon), 1\right]$ где $x_0 = \varepsilon^{\alpha_0}$, $0 < \alpha_0 < 1/2$.

Нами формально доказана

Теорема 1. Решение (3) является асимптотическим рядом, только на отрезке $\left[x_0, 1\right]$.

Строгое доказательство этой теоремы проводится методом мажорант, переходом из (1) к интегральному уравнению.

3. Второй шаг. Теперь чтобы приблизится к точке $x = 0$ делаем второй шаг. В (1) производим подстановку

$$x = x_0 t \tag{6}$$

Тогда (1) примет вид

$$\varepsilon_1 \frac{d^2 y(t)}{dt} + t\frac{dy(t)}{dt} + x_0 t y(t) = 0, \tag{7}$$

$$y(0) = 0,\ y(x_0) = y^0 \sim 1 - \frac{3}{8} ln x_0 + \ldots \tag{8}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1-2d_0}$.

Таким образом, опять получим сингулярно возмущенную краевую задачу (7)-(8). Для решения этой задачи опять применим классический метод малого параметра, т.е. решение этой задачи ищем в виде

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon_1 y_1(t) + \varepsilon_1^2 y_2(t) + \ldots + \varepsilon_1^m y_m(t) + \ldots. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε_1, получим

$$Hy_0(t) := \frac{dy_0(t)}{dt} + x_0 y_0(t) = 0,\ y_0(x_0) = y^{(0)}, \tag{10.0}$$

$$Hy_1(t) = \frac{-1}{t}\frac{d^2 y(t)}{dt^2},\ y_1(x_0) = 0, \tag{10.1}$$

$$Hy_2(t) = -\frac{1}{t}\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2},\ y_2(x_0) = 0, \tag{10.2}$$

… … … … … … … … … … … … …

$$Hy_m(t) = -\frac{1}{t}\frac{d^2 y_m(t)}{dt},\ y_m(x_0) = 0, \qquad (10.\text{m})$$

… … … … … … … … … … … … …

Решение задачи (10.0) имеет вид

$$y_0(t) = y^{(o)} e^{-x_0(t-x_0)}.$$

Уравнения (10.1) запишется в виде

$$Hy_1(t) = \frac{-1}{t} y^{(0)} x_0^2 \cdot e^{-x_0(t-x_0)} \sim -\frac{x_0^2 \cdot y^{(0)}}{t},\ t \to 0.$$

Отсюда, имеем

$$y_1(t) \sim -x_0^2 \cdot y^{(0)} lnt,\ t \to 0.$$

Тогда

$$Hy_2(t) \sim +x_0^2 \cdot y^{(0)} \cdot \frac{1}{t^3},\ t \to 0.$$

Отсюда, получим

$$y_2(t) \sim -\frac{a_2}{2t^2},\ t \to 0.$$

где $a_2 = x_0^2 y_0$.

Далее, уравнение для $y_3(t)$ запишется в виде

$$Hy_3(t) = -\frac{1}{t}\frac{d^2 y_2}{dt} = -3a_2 t^{-5},\ t \to 0.$$

Отсюда

$$y_3(t) \sim \frac{3}{4} a_2 t^{-4},\ t \to 0.$$

Аналогично, из уравнения (10.m) получим

$$y_m(t) \sim a_m t^{-2(m-1)},\ (t \to 0)\ m \geq 2. \qquad (11.\text{m})$$

Таким образом, асимптотика решения задачи (7) имеет вид

$$y(t) \sim y^{(0)} - a_2 lnt\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 a_2}{2t^2} + \frac{3}{y} a_2 \left(\frac{\varepsilon_1}{t^4}\right)^2 + \ldots + a_{m+1}\left(\frac{\varepsilon_1}{t^4}\right)^m + \ldots\ (m \geq 1). \qquad (12)$$

Следовательно ряд (12) является асимптотическим рядом только, на отрезке $[x_1, x_0]$,

где $x_1 = \varepsilon_1^{1-2\alpha_1}$ $(0 < \alpha_1 < 1/2)$.

Таким образом, мы приближались к точке $x = 0$. Имеет место

Теорема 2. Ряд (12) является асимптотическим только на отрезке $[x_1, x_0]$. Строгое доказательство проводится на основе метода мажоранта.

Мы можем, снова повторить эту процедуру и вплотную подойти к точке $x = 0$, однако к этой точке мы не можем достичь, т.к. в этой процедуре в решении участвует логарифмическая функция.

Доказательство теоремы 1. Уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y(x) - \varepsilon\frac{1}{x}\frac{d^2y(x)}{dx^2}, \quad y(1) = e^{-1/2}.$$

Интегрируя эту задачу, получим

$$y(x) = e^{x/2} + \varepsilon e^{x/2}\int_2^x e\frac{1^{-s/2}d^2y(s)}{sds^2}ds.$$

Отсюда, дважды интегрируя интегральное выражение этого равенства имеем

$$y(x) = e^{-x/2} - \frac{\varepsilon}{x}e^{-x/2}\frac{dy(x)}{dx} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{e}}y'(1) + \varepsilon\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-x/2} - 3\varepsilon + 2\int_1^x \varepsilon\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right)e^{-s/2}y(s)ds. \quad (13)$$

Дифференцируя это равенство один раз имеем

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{-1}{2}e^{-x/2} - \frac{\varepsilon}{x^2}e^{-x/2}\frac{dy(x)}{dx} -$$

$$-\frac{\varepsilon}{2x}e^{-x/2}\frac{dy(x)}{dx} + \frac{\varepsilon}{x}e^{-x/2}\frac{d^2y(x)}{dx^2} - \varepsilon\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)e^{-x/2} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-x/2} +$$

$$+2\varepsilon\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)y(x)e^{-x/2}$$

Полагая в этом равенстве $x = 1$

$$y'(1) = -\frac{1}{2}e^{-1/2} + \varepsilon e^{-1/2}y'(1) - \frac{\varepsilon}{2}e^{-1/2}y'(1) + \varepsilon e^{-1/2}y''(1) - \frac{3}{2}\varepsilon e^{-1/2} -$$

$$-\varepsilon e^{-1/2} + 4\varepsilon \cdot y(1)e^{-1/2}$$

Отсюда учитывая значение $\varepsilon y''(1)$ из (1) определением значение

$y'(1)=A$. Подставим его в (13). Теперь получим интегрально дифференциальное уравнение (13) решая это уравнение как дифференциальное уравнение имеем

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}x=b(x)y(x)+\varepsilon g(x)-2\varepsilon e^{x/2}\int_1^x\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}\right)e^{-x/2}y(s)ds,$$

где

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{e}}A-\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{s^2}\right)e^{-x/2}+\frac{2\varepsilon}{2},\quad b(x)=xe^{x/2}$$

Тогда, имеем

$$\begin{aligned}&y(x)=e^{-1/2}e^{-1/\varepsilon\int_1^x b(s)ds}+\\&+h(x)+2\int_1^x e^{-1/\varepsilon\int_1^x b(s)ds}e^{1/\varepsilon\int_1^\tau b(s)ds}\int_1^\tau\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{s^2}\right)e^{-s/2}y(\rho)d\rho d\tau\end{aligned}\qquad(14)$$

где

$$h(x)=e^{-1/\varepsilon\int_1^x b(s)ds}\cdot\int_1^x e^{-1/\varepsilon\int_1^\tau b(s)ds}g(\tau)d(\tau).$$

Применяя к последнему члену, содержащему двукратный интеграл, формулу Дирихле имеем

$$\begin{aligned}&\int_1^x e^{1/\varepsilon\int_1^\tau b(s)ds}\int_1^\tau\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\right)y^{-\rho/2}y(\rho)d(\rho)d(\tau)=\\&=\int_1^x\int_\rho^x e^{1/\varepsilon\int_1^\tau b(s)ds}d\tau\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\right)e^{-s/2}y(\rho)d(\rho)=\int_1^x K(x,\rho)y(\rho)d(\rho).\end{aligned}$$

где

$$K_1(x,\rho)=\int_\rho^x e^{1/\varepsilon\int_1^\tau b(s)ds}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\right)e^{-s/2}d\rho.$$

Теперь уравнение (14) запишется в виде

$$y(x)=e^{-1/2}e^{-1/\varepsilon\int_1^x b(s)ds}+h(x)+\int_1^x K(x,\rho)y(\rho)d(\rho)\qquad(15)$$

где

$$K(x,\rho)=e^{-1/\varepsilon\int_1^x b(s)ds}K_1(x,\rho).$$

Так как $b(x)>0$ при $x>0$, то интегрируя по частям получим оценку

$$\left|K_1(x,\rho)\right|\le\varepsilon l \quad (0<l=const).$$

При некотором $x\ge\tilde{x}>0$. Поэтому уравнение (15) имеет при $x\ge x_0$ имеет единственное решение. Теорема доказана.

Литература

1. Reiss S.L. New asymptotic methods for jump phenomens // SIAM J.Appl. Math. – 1980. – V.39. – №3. – P.440-455.
2. Kassoy R.A. note on asymptotic methods for jump phenomena // SIAM J. Apll. Math., 1982. – V.42. – № 3. – P.926-932.
3. Lighthill M.J. “A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid” // Philos. Mag. – 1949. - (7) 40. – P.1179–1201.
4. Алымкулов К. The method of uniformization and justification of Lighthill method (in Russian) // Izvestia AN KyrgSSR. – 1981. – № 1. - P.35-38.
5. Alymkulov K. and Tursunov T.D. Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “ Recent Studies in Perturbation Theory”, Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov – Publisher InTech. – 2017.
6. Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач – Бишкек: Илим, 1992. – 108 с.
7. Алымкулов К. Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла // Известия АН Кирг. ССР. – 1981. – № 1. – С. 35-38.
8. Алымкулов К., Кожобеков К.Г. Об асимптотике решения задачи Рейсса для явления прыжка [Текст] // Вестник ЖАГУ. – 2019. – №2(41). – С. 3-6.
9. Кожобеков К.Г. Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, Дисс. на соискание степени доктора наук. – Бишкек. – 2020.

УДК 517.956.6

З.М. БЕКМАМАТОВ

О ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Исследована задача сопряжения для уравнения смешанно-составного типа четвертого порядка на плоскости. При $y>0$ уравнение характеристик имеет два кратных действительных и комплексно-сопряжённых корней, а при $y<0$ - две различных двукратных действительных корней. Доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения в прямоугольной области с линией сопряжения $y=0$.

Ключевые слова: *задачи сопряжения, краевые условия, функция Грина, задача Гурса, интегральные уравнения.*

1. Постановка задачи. Пусть D означает прямоугольник, ограниченный отрезками прямых $A_1A_2: x=0,\ A_2B_2: y=-h_2,\ B_2B_1: x=\ell,$

$B_1A_1: y=h_1\ \ (h_1,h_2,\ell>0)$, а $D_1=D\cap\left(y>0\right),\ D_2=D\cap\left(y<0\right),$

В области D рассмотрим уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,\ (x,y)\in D_1, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}+cu=0,\ (x,y)\in D_2,, \qquad (2)$$

где $a(x,y),\ b(x,y)$ - заданные функции, c – постоянное число.

Уравнение характеристик для уравнения (1) имеет вид [1]: $dy^4+dy^2dx^2=0$ или $dy^2(dy^2+dx^2)=0$. Таким образом, уравнение (1)

имеет две действительные кратные и две комплексно сопряжённые характеристик. Следовательно, уравнение (1) является уравнением составного типа [1].

Уравнение характеристик для уравнения (2) имеет вид [1]: $dy^3dx=0$.

Следовательно, уравнение (1) имеет два различных двукратных корней, поэтому уравнение принадлежит гиперболическому типу [1].

В работах [2–5] рассмотрены краевые задачи для уравнений составного и смешанного типов четвертого порядка.

Задача 1. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающая следующими свойствами:

1). $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{4+0}(D_1)\cup C^{1+3}(D_2)]$;

2). удовлетворяет в области D_1 уравнению (1) и краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,\ y)=\varphi_2(y), \tag{3}$$

$$u_{xx}(0,\ y)=\varphi_3(y),\ u_{xx}(\ell,y)=\varphi_4(y), \tag{4}$$

$$u(x,h_1)=\psi(x),\ 0\le y\le h_1,\ 0\le x\le \ell, \tag{5}$$

3). удовлетворяет в области D_2 уравнению (2) и краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi(y),-h_2\le y\le 0, \tag{6}$$

$$u(x,-h_2)=\psi_1(x),\ u_y(x,-h_2)=\psi_2(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{7}$$

где $\varphi(y),\ \varphi_i(y),\psi(x),\psi_j(x),\ (i=1,4,\ j=1,2)$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям

$$\begin{gathered}\varphi(y)\in C^3[-h_2,0],\ \varphi_i(y)\in C^3[0,h_1]\ (i=1,2),\ \varphi_j(y)\in C^2[0,h_1]\ (j=3,4)\\ \psi(x),\ \psi_1(x)\in C^3[0,\ell],\ \psi_2(x)\in C^2[0,\ell],\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\varphi(0)=\varphi_1(0),\ \varphi'(0)=\varphi_1'(0),\ \psi(0)=\varphi_1(h_1),\ \psi(\ell)=\varphi_2(h_1),\\ \psi_1(0)=\varphi(-h_2),\ \varphi'(-h_2)=\psi_2(0).\end{gathered} \tag{9}$$

При решении задачи 1 будем использовать следующие условия сопряжения:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=v(x),$$
$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{10}$$

где $\tau(x)$, $v(x)$, $\mu(x)$ – пока неизвестные функции.

Уравнение (1) запишем в виде

$$u_{xx}+u_{yy}=z(x,y), \tag{11}$$

$$z_{xx}+a(x,y)z_x+b(x,y)z=0, \tag{12}$$

где $z=z(x,y)$ – новая искомая функция. Запишем общее решение уравнения (12) в виде:

$$z(x,y)=C_1(y)z_1(x,y)+C_2(y)z_2(x,y), \tag{13}$$

где $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ – линейно независимые частные решения уравнения (12), а $C_1(y)$, $C_2(y)$ – произвольные достаточно гладкие функции. Из краевых условий (4) и (5), а также из (11) получаем следующее

$$z(0,y)=\varphi_3(y)+\varphi_1''(y),\quad z(\ell,y)=\varphi_4(y)+\varphi_2''(y) \tag{14}$$

Для определения неизвестных функций $C_1(y)$, $C_2(y)$ подставив (13) в левую часть (14), получим следующую систему уравнений

$$z_1(0,y)C_1(y)+z_2(0,y)C_2(y)=\varphi_3(y)+\varphi_2''(y),$$
$$z_2(\ell,y)C_1(e)+z_2(\ell,y)C_2(y)=\varphi_4(y)+\varphi_2''(y), \tag{15}$$

Решив систему (15) находим

$$C_1(y)=\frac{1}{\Delta}\left[z_2(\ell,y)(\varphi_3(y)+\varphi_1''(y))-z_2(0,y)(\varphi_4(y)+\varphi_2''(y))\right],$$
$$C_2(y)=\frac{1}{\Delta}\left[z_1(0,y)(\varphi_4(y)+\varphi_2''(y))-z_1(\ell,y)(\varphi_3(y)+\varphi_1''(y))\right], \tag{16}$$

где $\Delta=z_1(0,y)\,z_2(\ell,y)-z_1(\ell,y)\,z_2(0,y)$.

Подставив эти значения в (13) найдем

$$z(x,y) \equiv z_0(x,y) = \frac{1}{\Delta}\big[(z_1(x,y)\cdot z_2(\ell,y) - z_2(x,y)z_1(\ell,y))(\varphi_3(y) - \varphi_1''(y)) + \\ +(z_2(x,y)\cdot z_1(0,y) - z_1(x,y)\cdot z_2(0,y))(\varphi_4(y) + \varphi_2''(y))\big], \tag{17}$$

где $z_0(x,y)$ - известная функция.

2. Соотношение, полученное из области D_1. Уравнение (11) запишем в виде

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv z_0(x,y),\ (x,y) \in D_1. \tag{18}$$

Переходя к пределу при $y \to 0$ в (18) будем иметь соотношение, принесённое из области D_1

$$\tau''(x) + \mu(x) = z_0(x,0),\ 0 \le x \le \ell. \tag{19}$$

Решение уравнения (19), при краевых условиях

$$\tau(0) = \varphi_1(0),\ \tau(\ell) = \varphi_2(0), \tag{20}$$

имеет вид

$$\tau(x) = \alpha(x) + \int_0^\ell G(x,t)\mu(t)dt, \tag{21}$$

где $\alpha(x) = \varphi_1(0) + \frac{x}{\ell}\big[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)\big] + \int_0^\ell G(x,t)z_0(t,0)dt,$

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(t-\ell)}{\ell}, & 0 \le x \le t, \\ \dfrac{t(x-\ell)}{\ell}, & t \le x \le \ell, \end{cases}$$ – функция Грина.

3. Представление решения задачи Гурса. Для получения решения уравнения (2) удовлетворяющее условиям (6) и условиям

$$u(x,-0) = \tau(x),\ u_y(x,-0) = \nu(x),\ u_{yy}(x,-0) = \mu(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{22}$$

будем иметь интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$u(x,\ y) = u_0(x,y) + \frac{\lambda}{2}\int_0^x d\xi \int_0^y (y-\eta)^2 u(\xi,\eta)d\eta, \tag{23}$$

где $u_0(x,\ y) = \tau(x) + y\nu(x) + \frac{1}{2}y^2\mu(x) + \varphi_0(y),\ \lambda = -c,$

$$\varphi_0(y) = \varphi(y) - \varphi(0) - \varphi'(0)y - \frac{1}{2}y^2\varphi''(0).$$

Методом последовательных приближений найдем явное решение интегрального уравнения Вольтерра (23) в виде

$$u(x,\ y) = u_0(x,y) - c\int_0^x d\xi \int_0^y \vartheta(x,y;\xi,\eta)u_0(\xi,\eta)d\eta, \qquad (24)$$

где $\vartheta(x,y;\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n c^n}{n!(3n+2)!}(x-\xi)^n(y-\eta)^{3n+2}$ – резольвента ядра $\frac{h}{2}(y-\eta)^2.$

Функция $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,y;\xi,\eta) = 0,\ \vartheta_y(x,y;x,\eta) = 0,\ \vartheta_{yy}(x,y;x,\eta) = 1, \\ &\vartheta(x,y;x,\eta) = \frac{1}{2}(y-\eta)^2,\ \vartheta_y(x,y;x,\eta) = y-\eta,\ \vartheta_{yy}(x,y;x,\eta) = 1 \end{aligned} \qquad (25)$$

Подставив значение $u_0(x,y)$ в (24) будем иметь

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \Phi(x,y) + \tau(x) + y\nu(x) + \frac{1}{2}y^2\mu(x) + \\ &+ \int_0^x H_1(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^x H_2(x,y;\xi)\nu(\xi)d\xi + \int_0^x H_3(x,y;\xi)\mu(\xi)d\xi, \end{aligned} \qquad (26)$$

где

$$\Phi(x,y) = \varphi_0(y) - c\int_0^x d\xi\int_0^y \vartheta(x,y;\xi,\eta)\varphi_0(\eta)d\eta, \quad H_k(x,y;\xi) = -c\int_0^y \vartheta(x,y;\xi,\eta)\eta^{k-1}d\eta;$$

$$H_3(x,y;\xi) = -\frac{c}{2}\int_0^y \vartheta(x,y;\xi,\eta)\eta^2 d\eta; \quad k = 1,2.$$

4. Соотношение, полученное из области D_2. Для определения неизвестных функций $\tau(x), \nu(x), \mu(x)$, подставив $u(x,y)$, $u_y(x,y)$ из (26) в условие (7), получаем соотношения, принесённые из области D_2;

$$\tau(x)-h_1\nu(x)+\frac{1}{2}h_1^2\mu(x)=\tilde{\psi}_1(x)-\int_0^x\Big[H_1(x,-h_1,\xi)\tau(\xi)+$$
$$+H_2(x,-h_1,\xi)\nu(\xi)+H_3(x,-h_1,\xi)\mu(\xi)\Big]d\xi,\ 0\le x\le \ell, \qquad (27)$$

$$\nu(x)-h_2\mu(x)=\tilde{\psi}_2(x)-\int_0^x\Big[H_{1y}(x,-h_2,\xi)\tau(\xi)+$$
$$+H_{2y}(x,-h_2,\xi)\nu(\xi)+H_{3y}(x,-h_2,\xi)\mu(\xi)\Big]d\xi,\ 0\le x\le \ell, \qquad (28)$$

где

$$\tilde{\psi}_1(x)=\psi_1(x)-\Phi(x,-h_2),\ \tilde{\psi}_2(x)=\psi_2(x)-\Phi_y(x,-h_2).$$

Обращая Вольтерровскую часть уравнения (28) относительно $\nu(x)$, получим соотношение

$$\nu(x)=h_2\mu(x)+\int_0^x\Big[\tilde{H}_1(x,\xi)\tau(\xi)+\tilde{H}_2(x,\xi)\mu(\xi)\Big]d\xi+\Psi(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (29)$$

где $\tilde{H}_1(x,\xi)=-H_{1y}(x,-h_1,\xi)-\int_\xi^x R_1(x,t)H_{1y}(t,-h_2,\xi)dt,$

$$\tilde{H}_2(x,\xi)=-H_{3y}(x,-h_2,\xi)-\int_\xi^x R_1(x,t)H_{3y}(t,-h_2,\xi)dt,$$

$$\Psi(x)=\psi_2(x)+\int_0^x R_1(x,t)\psi_2(t)dt.$$

Исключив $\nu(x)$ из (27) и (29), будем иметь

$$\mu(x)=\frac{2}{h_2^2}\tau(x)+\int_0^x\Big[N_1(x,\xi)\tau(\xi)+N_2(x,\xi)\mu(\xi)\Big]d\xi+\tilde{\mu}_0(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (30)$$

где

$$N_1(x,\xi)=\frac{1}{h_2^2}\left[-h_2\tilde{H}_1(x,\xi)+H_1(x,-h_2,\xi)+\int_\xi^x H_2(x,-h_2,t)\tilde{H}_1(t,\xi)dt\right],$$

$$N_2(x,\xi)=\frac{1}{h_2^2}\left[-h_2\tilde{H}_1(x,\xi)+H_1(x,-h_2,\xi)+\int_\xi^x H_2(x,-h_2,t)\tilde{H}_2(t,\xi)dt\right],$$

$$\tilde{\mu}_0(x)=\frac{1}{h_2^2}\left[\Phi(x,-h_2)-\psi_1(x)-h_2\Psi(x)+\int_0^x H_2(x,-h_2,t)\Psi(\xi)d\xi\right].$$

Исключая $\tau(x)$ из (21) и (30), будем иметь

$$\mu(x)=\int_0^x N_2(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\int_0^\ell N_3(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\alpha_1(x), \qquad (31)$$

где $\alpha_1(x)$ – вполне определенная функция.

Обращая Вольтерровскую часть уравнения (31) относительно $\mu(x)$, будем иметь интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x)=\mu_0(x)+\int_0^\ell N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi, \qquad (32)$$

где $N(x,\xi)=N_3(x,\xi)+\int_0^x R_1(x,t)N_3(t,\xi)dt,$

$\mu_0(x)=\alpha_1(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)\alpha_1(\xi)d\xi$, $R_1(x,t)$ – резольвента ядра $N_2(x,\xi)$.

Пусть выполняется условие

$$\ell\cdot\max_{0\le x\le\ell}\left|N(x,\xi)\right|<\ell \qquad (33)$$

Тогда уравнение (32) имеет единственное решение. Далее, определив $\mu(x)$ из (32), затем подставляя её значение в (21) находим $\tau(x)$ и после этого из (29) определим значение $\nu(x)$.

5. Решение задачи 1 в области D_1. Из вышеприведённых следует, что уравнение (1) после двукратного интегрирования с учетом условий (4) сводится к уравнению (18). Следовательно, решение задачи 1 в области D_1 эквивалентно сводится к решению задачи Дирихле для уравнения (18) с краевыми условиями (3), (5) и $u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell,$ решение которой дается формулой [6]

$$u(x,y)=\int_0^{\ell} G_{\eta}(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\int_0^{\ell} G_{\eta}(x,y;\xi,h)\psi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^{h} G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\int_0^{h} G_{\xi}(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d(\eta)- \qquad (34)$$

$$-\int_0^{\ell} d\xi\int_0^{h} G(x,y;\xi,\eta)z_0(\xi,\eta)d\eta,$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4\ell h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h^2n^2+\ell^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h}y\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\xi\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h}\eta\right)$$

– функция Грина.

Таким образом, имеет место

Теорема. Пусть выполнены (8), (9) и (33). Тогда решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (34) и (26) соответственно.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

2. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.

3. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

4. Смирнов М.М. Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка. – Ленинград: ЛГУ, 1972. – 123 с.

5. Джураев А. Системы уравнений составного типа. – М.: Наука, 1972. – 228 с.

6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2021. №1

УДК 517.968.74

С. ИСКАНДАРОВ, Н.А. АБДИРАЙИМОВА

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЯДЕР И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕПОЛНЫМИ ЯДРАМИ

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений и их первых, вторых, третьих производных, т.е. устойчивости решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра. С этой целью применяется и развивается метод вспомогательных ядер, нестандартный метод сведения к системе, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод срезывающих функций, метод интегральных неравенств. Строится иллюстративный пример.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка, уравнение с неполными ядрами, слабая нелинейность, ограниченность решений и их производных, устойчивость решений.*

Все фигурирующие функции от t, (t,τ), (t,x,y,z), (t,τ,x,y) являются непрерывными при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$, $|x|,|y|,|z| < \infty$ и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $I = [t_0, \infty)$; ИДУ (интегро-дифференциальное уравнение); под устойчивостью решений слабо нелинейного ИДУ четвертого порядка понимается ограниченность на I всех его решений и их производных до третьего порядка включительно.

Задача. Установить достаточные условия устойчивости решений слабо нелинейного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида

$$x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+$$

$$+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau = f(t)+F(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t}h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau), \quad t\geq t_0 \tag{1}$$

при немалости ядер $Q_k(t,\tau)$ $(k=0,1,2)$, т.е. при

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}|Q_k(t,\tau)|d\tau dt=\infty \quad (k=0,1,2) \tag{2}$$

и при условии слабой нелинейности функций $F(t,x,y,z), h(t,\tau,x,y)$:

$$|F(t,x,y,z)|\leq F_0(t)+g_0(t)|x|+g_1(t)|y|+g_2(t)|z|,$$

$$|h(t,\tau,x,y)|\leq g_3(t,\tau)|x|+g_4(t,\tau)|y| \tag{SN}$$

с неотрицательными $F_0(t),\ g_k(t),\ g_v(t,\tau)$ $(k=0,1,2;\ v=0,1)$.

Речь пойдет о решениях ИДУ $x(t)\in C^4(I,R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k=0,1,2,3)$. На основании условия (SN) каждое такое решение существует.

Заметим, что сформулированная нами задача ранее никем не рассмотрена. Для решения этой задачи, аналогично статье авторов [1], сначала вводим в ИДУ (1) некоторое вспомогательное ядро с $x'''(\tau)$, затем преобразованное ИДУ четвертого порядка нестандартным методом сведения к системе [2, 3] сводим к эквивалентной системе. Далее полученную систему исследуем методом преобразования уравнений В. Вольтерра [4, с. 194-217], методом срезывающих функций [5, с. 41], методом интегральных неравенств [6].

Приступим к решению поставленной нами задачи.

Следуя [1], в ИДУ (1) вводим некоторое вспомогательное ядро $H_3(t,\tau)$ с $x'''(\tau)$ по правилу “веса” [5, с.114]:

$$\sum_{k=0}^{2}Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)=\sum_{k=0}^{2}Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)+H_3(t,\tau)x'''(\tau)-H_3(t,\tau)x'''(\tau). \tag{3}$$

Также аналогично [1], интегрированием по частям имеем

$$-\int_{t_0}^{t} H_3(t,\tau)x'''(\tau)d\tau = -H_3(t,t)x''(t) + H_3(t,t_0)x''(t_0) + \int_{t_0}^{t} H'_{3\tau}(t,\tau)x''(\tau)d\tau. \qquad (4)$$

Тогда на основании (3), (4) из ИДУ (1) получается следующее нагруженное ИДУ [1]:

$$x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + \left[a_2(t) - H_3(t,t)\right]x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \{Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + \left[Q_2(t,\tau) + H'_{3\tau}(t,\tau)\right]x''(\tau) + H_3(t,\tau)x'''(\tau)\}d\tau =$$

$$= f(t) - H_3(t,t_0)x''(t_0) + F(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau), \quad t \geq t_0. \qquad (5)$$

В ИДУ (5) сделаем нестандартную замену [2, 3]:

$$x''(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \qquad (6)$$

где $0 \neq \lambda$ -некоторый вспомогательный параметр; $0 < W(t)$ - некоторая весовая функция, $y(t)$-новая неизвестная функция.

Далее аналогично [3] дифференцированием из (6) находим $x'''(t), x^{(4)}(t),$ подставляем их в ИДУ (5), проведем некоторые простые преобразования, делим обе части полученного соотношения на $W(t)$, вследствие чего будем иметь ИДУ второго порядка для $y(t)$ и наконец объединяя это ИДУ для $y(t)$ с заменой (6), получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \\ y''(t) + b_3(t)y'(t) + b_2(t)y(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) + \\ +\int_{t_0}^{t} \left[T_0(t,\tau)x(\tau) + T_1(t,\tau)x'(\tau) + T_2(t,\tau)y(\tau) + K(t,\tau)y'(\tau)\right]d\tau = \\ = (W(t))^{-1}[f(t) - H_3(t,t_0)x''(t_0)] + (W(t))^{-1}F(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau), \quad t \geq t_0, \end{cases} \qquad (7)$$

эквивалентную нагруженному ИДУ (5), где

$$b_3(t) \equiv a_3(t) + 2W'(t)(W(t))^{-1},$$
$$b_2(t) \equiv a_2(t) - H_3(t,t) - \lambda^2 + a_3(t)W'(t)(W(t))^{-1} + W''(t)(W(t))^{-1},$$
$$b_1(t) \equiv [a_1(t) - \lambda^2 a_3(t)](W(t))^{-1},$$
$$b_0(t) \equiv [a_0(t) - \lambda^2 a_2(t) + \lambda^2 H_3(t,t) + \lambda^4](W(t))^{-1},$$
$$T_0(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) - \lambda^2 Q_2(t,\tau) - \lambda^2 H'_{3\tau}(t,\tau)],$$
$$T_1(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau) - \lambda^2 H_3(t,\tau)],$$
$$T_2(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_2(t,\tau)W(\tau) + H'_{3\tau}(t,\tau)W(\tau) + H_3(t,\tau)W'(\tau)],$$
$$K(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1} H_3(t,\tau)W(\tau).$$

Пусть [5, 1]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$(W(t))^{-1} f(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t), \qquad (f)$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1},\ E_i(t) \equiv f_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1}\ (i = 1..n),$$
$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t)\ (i = 1..n), \qquad (R)$$

$c_i(t)$ $(i = 1..n)$ - некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t))$ системы (7), сначала аналогично [4, с. 194-217], ее первое уравнение умножаем на $x'(t)$, второе - на $y'(t)$, сложим полученные соотношения, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом следуя [5,1], вводим условия *(K)*, *(f)*, функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau), E_i(t)$, условие *(R)*, функции $c_i(t)$ $(i = 1..n)$, применяем леммы 1.4, 1.5 [7]. В результате будем иметь следующее тождество:

$$u(t) \equiv (x'(t))^2 + \lambda^2 (x(t))^2 + (y'(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_3(s)(y'(s))^2 ds + b_2(t)(y(t))^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t,t_0) + c_i(t) -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\Big[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+c_i'(s)\Big]ds+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\}\equiv$$

$$\equiv c_*+2\int_{t_0}^{t}\{W(s)y(s)x'(s)+\frac{1}{2}b_2'(s)(y(s))^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2+$$

$$+\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2d\tau]\}ds+2\int_{t_0}^{t}y'(s)\{f_0(s)-(W(s))^{-1}H_3(s,t_0)x''(t_0)-b_1(s)x'(s)-b_0(s)x(s)-$$

$$-\int_{t_0}^{s}[T_0(s,\tau)x(\tau)+T_1(s,\tau)x'(\tau)+T_2(s,\tau)y(\tau)+K_0(s,\tau)y'(\tau)]d\tau+$$

$$+(W(s))^{-1}F(s,x(s),x'(s),\int_{t_0}^{s}h(s,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau), \qquad (8)$$

где $Y_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x'(\eta)d\eta \quad (i=1..n),$

$$c_*=(x'(t_0))^2+\lambda^2(x(t_0))^2+(y'(t_0))^2+b_2(t_0)(y(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$$

Теорема. Пусть 1) $\lambda\neq 0, W(t)>0,$ выполняются условия (SN), *(K), (f), (R)*; 2) $b_3(t)\geq 0$; 3) $b_2(t)\geq b_{20}>0,$ существует функция $0\leq b_2^*(t)\in L^1(I,R_+)$ такая, что $b_2'(t)\leq b_2^*(t)b_2(t)$; 4) $A_i(t)\geq 0,\ B_i(t)\geq 0,\ B_i'(t)\leq 0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\geq 0,$ существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(I,R_+),\ c_i(t),\ R_i^*(t)\in L^1(I,R_+)$ такие, что

$$A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t), \qquad (E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\ (i=1..n;\ k=0,1);$$

$$5)\ W(t)+|f_0(t)|+(W(t))^{-1}|H_3(t,t_0)|+|b_k(t)|+\int_{t_0}^{t}\Big[|T_j(t,\tau)|+|K_0(t,\tau)|\Big]d\tau+$$

$$+(W(t))^{-1}\{F_0(t)+g_k(t)+\int_{t_0}^{t}g_2(t)[g_3(t,\tau)+g_4(t,\tau)]d\tau\}\in L^1(I,R_+\setminus\{0\})$$

$(k=0,1;\ j=0,1,2).$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (7) верны утверждения:

$$x^{(k)}(t) = O(1) \quad (k = 0,1), \tag{9}$$

$$y^{(k)}(t) = O(1) \quad (k = 0,1), \tag{10}$$

$$b_3(t)(y'(t))^2 \in L^1(I, R_+), \qquad A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 = O(1) \quad (i = 1..n). \tag{11}$$

Пусть, кроме того, 6) $W^{(k)}(t) = O(1)$ $(k = 0,1)$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1): $x^{(v)}(t) = O(1)$ $(v = 0,1,2,3)$, т.е. любое решение ИДУ (1) устойчиво.

Для доказательства этой теоремы с учетом условий 1)-4) теоремы из тождества (8) переходим к интегральному неравенству

$$0 \le u(t) \le c_* + 2\int_{t_0}^{t} \{W(s)b_{20}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}b_2^*(s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i^*(s) + R_i^*(s)]\}u(s)ds + 2\int_{t_0}^{t}(u(s))^{\frac{1}{2}}\{|f_0(s)| +$$

$$+(W(s))^{-1}|H_3(s,t_0)x''(t_0)| + |b_1(s)|(u(s))^{\frac{1}{2}} + |\lambda||b_0(s)|(u(s))^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\int_{t_0}^{s}[|\lambda||T_0(s,\tau)| + |T_1(s,\tau)| + b_{20}^{-\frac{1}{2}}|T_2(s,\tau)| + |K_0(s,\tau)|](u(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau +$$

$$+(W(s))^{-1}[F_0(s) + |\lambda| g_0(s)(u(s))^{\frac{1}{2}} + g_1(s)(u(s))^{\frac{1}{2}} +$$

$$+g_2(s)\int_{t_0}^{s}(|\lambda| g_3(s,\tau) + g_4(s,\tau))(u(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau]\}ds$$

и к этому интегральному неравенству применим лемму 1 [6] об интегральном неравенстве и с учетом условий 3)-5) теоремы получаем, что $u(t) = O(1)$. Так как

$$(x'(t))^2 + \lambda^2(x(t))^2 + (y'(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_3(s)(y'(s))^2 ds + b_2(t)(y(t))^2 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 \le u(t),$$

то отсюда вытекают утверждения (9)-(11) теоремы. Далее из замены (6) в силу $W(t) = O(1)$, $y(t) = O(1)$ имеем $x''(t) = O(1)$. На основании утверждений (9), (10) и условия 6) из соотношения $x'''(t) = -\lambda^2 x'(t) + W(t)y'(t) + W'(t)y(t)$, получаемого из замены (6) дифференцированием, следует, что $x'''(t) = O(1)$.

Следовательно, все решения и их производные до третьего порядка включительно ИДУ четвертого порядка (1) ограничены на полуинтервале I. Значит, любое решение ИДУ (1) устойчиво. Теорема доказана.

Приведем простейший

Пример. ИДУ (1) с

$$a_3(t)\equiv 6+e^{\sqrt[3]{t}},\ a_2(t)\equiv \exp\left(\frac{\sin t}{(t+1)^2}\right)+H_3(t,t)+25+3e^{\sqrt[3]{t}},\ a_1(t)\equiv 96+16e^{\sqrt[3]{t}}-\frac{e^{-3t}}{(t+4)^2},$$

$$a_0(t)\equiv 16\exp\left(\frac{\sin t}{(t+1)^2}\right)+144+48e^{\sqrt[3]{t}}-300e^{-3t}\left(\frac{\sin 5t}{t}\right)^2,$$

$$Q_0(t,\tau)\equiv 48H_3(t,\tau)-\frac{16e^{-3t+3\tau}}{(t+5\tau+6)^3}-\frac{e^{-3t}\left(\sin 6\tau\right)^{\frac{1}{3}}}{(t^2+\tau^2+7)^2},\ \ Q_1(t,\tau)\equiv 16H_3(t,\tau)-e^{-4t}(\sin t\sin\tau)^{\frac{1}{5}},$$

$$Q_2(t,\tau)\equiv 3H_3(t,\tau)-H'_{3\tau}(t,\tau)-\frac{e^{-3t+3\tau}}{(t+5\tau+6)^3},$$

$$f(t)\equiv -\frac{e^{-3t}\left(e^{t^2}+2\right)\ln(t+1)}{t+12}+\frac{15e^{-3t}\sin t}{t^2+1},\ F(t,x,x',z)\equiv e^{-3t}\left[\frac{\sin z}{t^3+4}+\frac{|x|}{e^t+2}-\frac{|x'|}{t^2+5}+z\sin(\sqrt[3]{t\tau})\right],$$

$h(t,\tau,x,x')\equiv \dfrac{x\sin x}{(t+2\tau+4)^5}-\dfrac{x'\cos z}{e^{2t}+\tau+3}$, $t_0=0$ удовлетворяет всем условиям теоремы при

$$H_3(t,\tau)\equiv e^{-3t+3\tau}\left[\frac{t+\tau+6}{t+\tau+7}+\frac{1}{t-\tau+10}\right]\left(e^{t^2}+2\right)\left(e^{\tau^2}+2\right)\ln(t+1)\ln(\tau+1)-\frac{e^{-3t}\cos 2\tau}{(t+\tau+14)^3},$$

$\lambda=4,\ W(t)\equiv e^{-3t}$,

здесь

$$b_3(t)\equiv e^{\sqrt[3]{t}},\ b_2(t)\equiv\exp\left(\frac{\sin t}{(t+1)^2}\right),\ b_{20}=e^{-1},\ b_2^*(t)\equiv\frac{t+3}{(t+1)^3},$$

$$b_1(t)\equiv -\frac{1}{\left(t+4\right)^2},\ \ b_0(t)\equiv -300\left(\frac{\sin 5t}{t}\right)^2,\ T_0(t,\tau)\equiv -\frac{\left(\sin 6\tau\right)^{\frac{1}{3}}}{(t^2+\tau^2+7)^2},$$

$$T_1(t,\tau)\equiv -e^{-t}(\sin t\sin\tau)^{\frac{1}{5}},\ T_2(t,\tau)\equiv -\frac{1}{\left(t+5\tau+6\right)^3},$$

$$K(t,\tau)\equiv\left[\frac{t+\tau+6}{t+\tau+7}+\frac{1}{t-\tau+10}\right]\left(e^{t^2}+2\right)\left(e^{\tau^2}+2\right)\ln(t+1)\ln(\tau+1)-\frac{e^{-3\tau}\cos 2\tau}{(t+\tau+14)^3},$$

$n=1,\ \psi_1(t)\equiv(e^{t^2}+2)\ln(t+1),\ R_1(t,\tau)\equiv\dfrac{t+\tau+6}{t+\tau+7}+\dfrac{1}{t-\tau+10},$

$A_1(t)\equiv\dfrac{t+6}{t+7},\ \ A_1^*(t)\equiv\dfrac{1}{(t+6)(t+7)},\ B_1(t)\equiv\dfrac{1}{t+10},$

$E_1(t)\equiv-\dfrac{1}{t+12},\ c_1(t)\equiv\dfrac{1}{t+10},\ K_0(t,\tau)\equiv-\dfrac{e^{-3\tau}\cos 2\tau}{(t+\tau+14)^3},\ \ f_0(t)\equiv\dfrac{15\sin t}{t^2+1},$

$F_0(t)\equiv\dfrac{e^{-3t}}{t^3+4},\ g_0(t)\equiv\dfrac{e^{-3t}}{e^t+2},\ g_1(t)\equiv\dfrac{e^{-3t}}{t^2+5},\ \ g_2(t)\equiv e^{-3t},\ g_3(t,\tau)\equiv\dfrac{1}{\left(t+2\tau+4\right)^5},$

$g_4(t,\tau)\equiv\dfrac{1}{e^{2t}+\tau+3}$.Поэтому любое решение такого ИДУ четвертого порядка устойчиво.

Таким образом, найден класс ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида (1), для которого выше сформулированная нами задача решаема.

Литература

1. Искандаров С., Абдирайимова Н.А. Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с неполными ядрами // Вестник КРСУ. – 2020. – Т. 20. – №12. – С. 23-29.
2. Искандаров С. Об одном нестандартном методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 36-40.
3. Искандаров С., Шабданов Д. Н. Метод частичного срезывания для устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 37. – С. 44-48.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с фр. / Под ред. Ю. М. Свирежева. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
5. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
6. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по

интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып.9. – С. 68–103.

7. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс. … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34 с.

УДК 517.928

С. КАРИМОВ, А.А. АКМАТОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, КОГДА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ ИМЕЮТ МНИМЫЕ ЧАСТИ

Исследованы решения нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений когда собственные значения матрицы имеют чисто мнимые значения. Ранее в этом направлении также велись работы, но тогда собственные значения имели устойчивый интервал в действительной области. Здесь, собственные значения не имеют в действительной области условие устойчивости, хотя в других работах эти условия выполняются. Поэтому решение исследовано в комплексной области. Чтобы получить асимптотику решений использован метод последовательных приближений. Решение поставленной задачи рассматривается в комплексной плоскости. Комплексная плоскость с помощью кривых первого порядка разделяется на конечное число областей. Это тоже связано от выбора собственных значений. Собственные значения-аналитические функции, поэтому используя линии уровня обе части аналитических функций можно покрывать линиями рассматриваемой области. Чтобы исследовать решение выбраны пути интегрирования и получена соответствующая оценка. В результате доказаны единственность и равномерные сходимости решений.

Ключевые слова: *устойчивость, малый параметр, сингулярные возмущения, начальная точка, асимптотика, решение, последовательные приближения, линии уровня, дифференциальные уравнения, сходимость, бесконечно малые величины.*

Введение. Ранее проводимые работы в этом направлении хорошо изучены. Например, в работах [1-9] рассмотрены случаи, когда собственные значения имели в действительной части значения отличные от нуля, т.е. $\lambda_k(t) = \alpha(t) \pm i\beta(t),\ k = 1,2$. В этих случаях определяются

устойчивые и неустойчивые интервалы относительно действительной области. Получены соответствующие оценки.

Новизна нашей работы заключается в том, что не выполняются условия устойчивости как в работах [1-9]. Этот случай раньше не рассматривался.

Материалы и методы исследования. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t, y(t,\varepsilon)), \tag{1}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

где $D(t) = diag(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$, $y(t,\varepsilon) = colon(y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon))$, $t \in \Omega \subset C$, $0 < \varepsilon$ - малый параметр, $f(t, y(t,\varepsilon)) = colon(f_1(t,y), f_2(t,y))$, $[t_0, T)$ - отрезок действительной оси, $t_0 < T, (t_0 > -T)$, $Q(\Omega)$ - пространство аналитических функций, C - комплексная плоскость.

Пусть выполняются условия:

$$\begin{gathered}\lambda_1(t) \in Q(\Omega), \lambda_2(t) \in Q(\Omega), \forall t \in \Omega(\lambda_k(t) \neq 0, k = 1,2), \\ f(t, y(t,\varepsilon)) \in Q(H), H = \{(t,y) t \in \Omega, |y| < \delta, \delta > 0|\},\end{gathered} \tag{3}$$

$$\forall \tilde{y}, \tilde{\tilde{y}} \in \{|y| \le \delta\} \left(\left| f(t,\tilde{y}) - f(t,\tilde{\tilde{y}}) \right| \le M(\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}) \right), \; 0 < M - const. \tag{4}$$

Введем обозначения:

$$\Omega = \{(t_1,t_2) : u_k(t_1,t_2) \le 0, \; k = 1,2\}. \tag{5}$$

$$\Omega_1 = \{(t_1,t_2) : u_k(t_1,t_2) \le -\varepsilon, k = 1,2\}, \tag{6}$$

$$\Omega_2 = \{(t_1,t_2) : u_k(t_1,t_2) \le \varepsilon \ln \varepsilon, \; k = 1,2\}, \tag{7}$$

$$\Omega_3 = \left\{ (t_1,t_2) : u_k(t_1,t_2) \le -d\left(\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{n}}, k = 1,2, 0 < d < 1, n \in N \right\}, \tag{8}$$

$$\Omega_4 = \{(t_1,t_2) : u_k(t_1,t_2) \le -d, k = 1,2,) \; 0 < d < 1)\}, \tag{9}$$

где $u_k(t_1,t_2) = \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds$, $(k = 1,2)$, $t_1, t_2 \in R$, $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 = \Omega$.

Надо учитывать что, $\Omega \subset C$ вся комплексная плоскость.

Справедлива

Теорема. Пусть выполняются условия (3), (4). Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для нее справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon)\| \le \widetilde{C}\delta(\varepsilon) \tag{10}$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0,\ t \in C,\ \widetilde{C}$ - постоянное число.

Доказательство. От задачи (1), (2) переходим к эквивалентному уравнению:

$$y(t,\varepsilon) = y_0(\varepsilon))E(t,t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\, f(\tau, y(\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{11}$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds\right)$.

Уравнение (11) будем решать методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} &y^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv 0, \\ &y^{(n))}(t,\varepsilon) = y^0 E(t,t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)y_{n-1}(\tau,\varepsilon)d\tau, \end{aligned} \tag{12}$$

где $E(t,t_0,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} D(s)ds\right),\ \ n \in N$.

Первообразная функция от собственных значений

$$z(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds = u_k(t) \pm i\vartheta_k(t), \tag{13}$$

где $u_k(t,t_0) = \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds$, $\vartheta_k(t,t_0) = \mathrm{Im}\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds,\ k = 1,2,\ \ t_0, t \in C$.

Линии уровня определяющиеся (13) являются компенсирующими друг друга, поэтому при пограничных слоях можно использовать линии уровня $\vartheta_k(t,t_0) = -d, 0 < d < 1, k = 1,2$. Если использовать обе линии уровня одновременно, то имеем полное покрытие рассматриваемой области.

Определяя пути интегрирования l_n, $\widetilde{l}_n$, ($n \in N$), n приближения и соединяют точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_1;t_2)$. В каждом приближении пути

интегрирования $l_n = l_n^j, \left(j = \overline{1,n}\right)$ состоят из отрезков этих путей. Путь интегрирования $\tilde{l}_n$ выбирается симметрично l_n.

Область, определяющаяся равенством (6) является простирающимися пограничными слоями. Для этого верна оценка в работе [8].

Область определяющаяся (7) является переходной пограничных слоев. Тоже верно полученная оценка в работе [8].

Область определяющаяся (8) является исключаемая регулярная область, поэтому для получения оценки равенства (12) можно выбирать пути интегрирования.

Область определяющаяся (9) является уверенной регулярной областью. В этой области, учитывая равенства (12) можно выбрать пути интегрирования для получения оценки.

Учитывая пути интегрирования, производим оценку последовательных приближений

$$y^{(1)}(t,\varepsilon) = y^0 E(t,t_0,\varepsilon) + \int_{l_1} E(t,\tau,\varepsilon) f(t,0) d\tau .$$

Оценка задачи (1), (2) оценивается таким образом

$$\left\| y^{(1)}(t,\varepsilon) \right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon), \text{ где } \tilde{C}\text{-некоторая постоянная.}$$

Далее учитывая условия (4) имеем

$$\left\| y^{(2)}(t,\varepsilon) \right\| \le \left| y^{(1)}(t,\varepsilon) \right| + \int_{l_2} \left| E(t,\tau,\varepsilon) \right| \times \left| f(\tau, y^{(1)}(\tau,\varepsilon) - f(\tau,0) \right\| d\tau | \le$$

$$\le \tilde{C}\delta(\varepsilon) + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^2, \text{ где } \tilde{C}\text{-некоторая постоянная.}$$

Предположим справедливость следующего неравенства

$$\left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) \right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^2 + ... + (\tilde{C}\delta(\varepsilon))^n,$$

где $\tilde{C}$ -некоторая постоянная, $n \in N$. Справедливость оценки (10) доказана.

Теперь докажем сходимость последовательных приближений. Имеем

$$\left\| y^{(1)}(t,\varepsilon) \right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) < 1,$$

$$\left\| y^{(2)}(t,\varepsilon) - y^{(1)}(t,\varepsilon) \right\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^2 < 1,$$

$$\left\| y^{(3)}(t,\varepsilon) - y^{(2)}(t,\varepsilon) \right\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon)\right)^3 < 1.$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$\left\| y^{(n-1)}(t,\varepsilon) - y^{(n-2)}(t,\varepsilon) \right\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^{n-1} < 1.$$

Докажем справедливость оценки $\left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) - y^{(n-1)}(t,\varepsilon) \right\|$. Имеем

$$\left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) - y^{(n-1)}(t,\varepsilon) \right\| \le \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^{n} < 1.$$

Построим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(y^{(k)}(t,\varepsilon) - y^{(k-1)}(t,\varepsilon) \right). \qquad (14)$$

Если ряд (14) сходится равномерно, то последовательность $\left\{ y^{(n)}(t,\varepsilon) \right\}$ сходится равномерно.

Докажем равномерную сходимость ряда. Имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(y^{(k)}(t,\varepsilon) - y^{(k-1)}(t,\varepsilon) \right) \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left\| y^{(k)}(t,\varepsilon) - y^{(k-1)}(t,\varepsilon) \right\| = \left\| y^{(1)}(t,\varepsilon) - y^{(0)}(t,\varepsilon) \right\| +$$
$$+ \left\| y^{(2)}(t,\varepsilon) - y^{(1)}(t,\varepsilon) \right\| + \ldots + \left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) - y^{(n-1)}(t,\varepsilon) \right\| + \ldots = \tilde{C}\delta(\varepsilon) + \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^{2} +$$
$$+ \ldots + \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^{n} + \ldots = \tilde{C}\delta(\varepsilon) \times \left(\frac{1 - \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^{n+1}}{1 - \left(C\delta(\varepsilon) \right)} \right).$$

В рассматриваемой области

$$\left\| y^{(n)}(t,\varepsilon) \right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon) \times \left(\frac{1 - \left(\tilde{C}\delta(\varepsilon) \right)^{n+1}}{1 - \tilde{C}\delta(\varepsilon)} \right),$$

и при $n \to \infty$ получим

$$\left\| y(t,\varepsilon) \right\| \le \tilde{C}\delta(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Результаты и обсуждения. Подведя итог, можем сказать, что последовательность $\left\{ y^{(n)}(t,\varepsilon \right\}$ равномерно сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$, которая является решением уравнения (1). Надо отметить что, если $t \in \Omega_4$, то имеем оценку равную $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Это область является уверенной регулярной областью. Если $t \in \Omega_3$, то область является исключаемой регулярной областью и верна оценка (10). В свою очередь при $\varepsilon \to 0$, $\delta(\varepsilon)$

- является бесконечно малой величиной, но $\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$. Поэтому для разных областей, получаем разные оценки.

В работах [1-9] рассмотрена область, которая для собственных значений выполняется условие (5), определяемые области совпадают. В данном случае, тоже требуем выполнение условия (5), но они выражают разные области, имеющие общие границы. Это связано с выбором собственных значений. Если требуем выполнение условия как в работах [1-9], то имеем граничные линии. Граничные линии являются критическими линиями уровня функции $u(t), t \in C$. Тогда в качестве рассматриваемых областей возьмем эти линии.

Заметим, что оценки решения задачи (1), (2) зависит только от особых точек, собственных значений матрицы $D(t)$. Поэтому в качестве рассматриваемой области возьмем всю комплексную плоскость удовлетворяющее условию (5).

Выводы. Решение (1), (2) зависят от выбора собственных значений матрицы $D(t)$ и выбора начальной точки. В работе доказана теорема, которая не требует выполнения условий устойчивости. А также показана зависимость решения задачи только от гармонических функций $u_k(t) \le 0, (k = 1,2)$, $t \in C$. В данной работе областью исследования является вся комплексная плоскость. Следовательно, для оценки решений (1), (2) влияет только пограничные области Ω_3.

Литература

1. Алыбаев К.С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дисс.докт. физ.-мат. наук: 01.02.02. - Жалал-Абад. 2001 - С. 1-376.
2. Акматов А.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае неоднократной смены устойчивости // Вестник ОшГУ. - Ош. 2008 - С. 79-82.
3. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений»

Дисс. … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Ош. 1984. – С.1-260

4. Каримов С., Акматов А. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости. // Естественные и технические науки. – №1. – Москва. 2006 - С. 14.

5. Каримов С., Анарбаева Г. М., Акматов А.А. Более точные оценки решения сингулярно возмущенной задачи // Вестник ОшГУ. – 2015. – С. 133-138.

6. Каримов С., Акматов А.А., Ысакова М. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости (случай, где собственные значения не имеют нулей на границе рассматриваемой области Н) // Естественные и технические науки. – 2006. – №3. Москва. - С. 18-22.

7. Каримов С., Акматов А.А. Поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости II. // Естественные и технические науки. – 2006. – №2. Москва. - С. 14-18.

8. Тампагаров К.Б. Погранслойные линии в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.02.02. - Жалал-Абад. – 2017. – С. 180-280.

9. Турсунов Т.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений. Дисс.докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – 2013. Ош. – С.9-92.

УДК 513.7

ЙОЗЕФ МИКЕШ

ПРОСТРАНСТВА СОЛОДОВНИКОВА $V(K)$ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

При изучении геодезических отображений и проективных преобразований римановых пространств V_n были А.С. Солодовниковым введены в рассмотрение пространства $V(K)$, которые характеризуются специальным строением метрики. Для псевдо-римановых пространств было введено обобщение пространств $V(K)$ – это пространства $V_n(K)$, которые при геодезических отображениях характеризуются условием $\psi = \bar{K}\bar{g} - Kg$. Автором доказано, что пространствами $V_n(K)$ являются, в частности, эйнштеновы, псевдо-симметрические и риччи псевдосимметрические пространства, допускающие геодезические отображения, которые, более того, являются замкнуты относительно этих отображений. Доказано, что только $V_n(K)$ допускают степень подвижности относительно геодезических отображений выше двух. Для голоморфно-проективных отображений келеровых и гиперболически келеровых пространств подобными свойствами обладают пространства $K_n[K]$.

Ключевые слова: *геодезические отображения, пространства Солодовникова* $V(K)$*, пространства* $V_n(K)$*, голоморфно - проективные отображения, пространства* $K_n[K]$.

1. Введение. Диффеоморфизмы и автоморфизмы геометрически обобщенных пространств образуют одно из современных направлений дифференциальной геометрии. Большое число научных работ посвящено *геодезическим и голоморфно-проективным отображениям, преобразованиям* и *деформациям*.

Теория геодезических отображений и преобразований тесно связано с именем *Александра Самуиловича Солодовникова*, который шесть десять пять лет тому назад ввел в рассмотрение *пространства* $V(K)$. Его основные результаты изложены в статьях [1-11]. Отметим, что пространства $V(K)$ имеют специальную метрику Леви-Чивита [12].

Изучению этих пространств посвящены исследования И.Г. Кручковича [13], А.В. Аминовой [14], И.Г. Шандры [15], С.Формеллы [16], Й.Микеша [17,18] и др., см. [19–22].

Обобщением пространств $V(K)$ являются (псевдо-) римановы пространства $V_n(B)$ и (псевдо-) келеровы пространства $K_n[B]$, которые были введеныв 1979 г. В [23] при исследовании специальных (псевдо-) римановых и (псевдо-) келеровых пространств. Эти пространства здесь будем обозначать через $V_n(K)$ и $K_n[K]$, соответственно, чтобы согласовать с обозначениями А.С.Солодовникова.

Результаты о пространствах $V_n(B)$ и $K_n[B]$, полученные в [23] были опубликованы в реферативных статьях [17, 18, 24], а также в монографиях [20–22]. Они являются естественным продолжением работ [25-28] о геодезических и голоморфно-проективных отображениях полусимметрических, обобщенно полусимметрических, эйнштейновых и келеровых пространств.

2. Геодезические отображения.

2.1. Определение и исторические замечания. Диффеоморфизм f (псевдо-) риманова пространства V_n на (псевдо-) риманово пространство $\bar{V}n$ называют *геодезическим отображением*, если f отображает каждую геодезическую линию V_n на геодезическую линию пространства $\bar{V}_n$.

Примером служит проекция евклидовой плоскости на евклидову плоскость, при которой все прямые отображаются напрямые линии. Первая задача о геодезических отображениях связана картографией и с именем Лагранжа, который в начале 19 века показал, что центральная проекция полусферы, т.н. гномоническая проекция, отображает главные полуокружности на прямые линии плоскости. Таким образом, кратчайшие

линии сферы на такой карте могут быть изображены прямыми линиями.

Следующим великим шагом было обнаружение Э. Бельтрами подобных свойств и для пространств постоянной отрицательной кривизны, что послужило в итоге подтверждению и становлению неевклидовых геометрий Н.И. Лобачевского, Я. Больяи и К.Ф. Гаусса.

В конце 19 века Т. Леви-Чивита [12] нашел все метрики римановых пространств, допускающих геодезические отображения и показал возможность применения геодезических отображений при моделировании механических процессов. Вопросы моделирования в последствии развивались в работах А.З. Петрова [29]. В настоящее время эти вопросы затрагиваются, например, Г. Холлом [30], Е.В. Ферапонтовым [31], С.Е. Степановым [32] и др.

Далее в начале 20 века Фубини нашел уравнения проективных преобразований, т.е. таких преобразований, которые сохраняют геодезические линии. Различные вопросы теории ГО в начале 20 века решали H. Weyl [33], T.Y. Thomas [34], J. Thomas [35], L.P. Eisenhart [36], П.А. Широков [37] и др. Позже большой вклад в общую теорию геодезических отображений внесли А.З. Петров [29], А.П. Норден [38], Н.С. Синюков [39], А.В. Аминова [14], Й. Микеш, В.Е. Березовский и др. Эти исследования отражены, например, в обзорных статьях и монографиях [17–22, 40–42].

2.2. Уравнения Леви-Чивита. Отображение V_n на $\bar{V}_n$ является геодезическим тогда и только тогда, когда в общей по отображению системе координат x по отношению отображения выполняются следующие условия [12, 20–23, 29, 33–39]:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j,$$

где $\Gamma_{ij}^h(x)$ и $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ – символы Христоффеля пространств V_n и $\bar{V}_n$, δ_i^h – символы Кристоффеля и ψ_i – градиент $\psi_i = \partial\psi / \partial x^i$.

Если $\psi \not\equiv 0$ то геодезическое отображение называют *нетривиальным*; в обратном случае *тривиальным* или *аффинным*.

При геодезическом отображении тензоры римана, риччи и тензор проективной кривизны Вейля связаны следующими формулами:

$$\bar{R}_{ijk}^h = \bar{R}_{ijk}^h + \delta_k^h \psi ij - \delta_j^h \psi ik;\ \bar{R}_{ij}^h = \bar{R}_{ij}^h + (n-1)\psi ij, \bar{W}_{ijk}^h = \bar{W}_{ijk}^h$$

где $\psi_{ij} \equiv \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j$, запятая обозначает ковариантное дифференцирование в пространстве V_n.

Уравнения (1) равносильны

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_k \bar{g}_{ik}, \tag{2}$$

где $\bar{g}_{ij}$ – метрика $\bar{V}_n$. Условия (1) и (2) называют *уравнениями Леви-Чивита*.

2.3. Уравнения Синюкова. Н.С. Синюковым [39] доказано, что пространство V_n допускает геодезическое отображение на пространство $\bar{V}_n$ тогда и только тогда, когда в V_n имеет решение система линейных дифференциальных уравнений в ковариантных производных относительно неизвестных симметрического невырожденного тензора a_{ij} и ковектора λ_i:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \tag{3}$$

Решения уранений (2) и (3) связаны следующими соотношениями:

$$a_{ij} = e^{2\psi}\ \bar{g}\alpha\beta\ g\alpha i g\beta j, \lambda i = -e\ 2\psi\ g^{-}\alpha\beta\ g\alpha i\psi\beta, \tag{4}$$

где $\bar{g}^{\alpha\beta}$ –компоненты обратной матрицы $\bar{g}_{ij}$. Вектор λi является градиентным. Из (1) и (4) вытекает, что

$$e^{2\psi} = \left|\frac{det\,\bar{g}_{ij}}{det\,g_{ij}}\right|^{\frac{1}{n+1}} = \left|\frac{det\,a_{ij}}{det\,g_{ij}}\right|.$$

3. Пространства Солодовникова V(K). Т. Леви-Чивита [12] нашел все собственно римановы метрики, допускающие нетривиальные геодезические отображения. Анализом метрик Леви-Чивита в 50 годы были А.С. Солодовниковым [1–11] выделены пространства $V(K)$. Эти пространства характеризуются наличием метрики определенного вида:

$$ds^2 = ds_0{}^2 + f_1(x_0)\cdot ds_1{}^2 + \cdots + f_k(x_0)\cdot ds_k^2$$

и присоединенная метрика

$$d\tilde{s}^2 = ds_0{}^2 + f_1(x_0)\cdot d\tau_1{}^2 + \cdots + f_k(x_0)\cdot d\tau_k^2$$

имеет постоянную кривизну K . Здесь $ds_\sigma{}^2$ –метрики римановых пространств, f_σ – функции аргумента $x_0 = \left(x_0^1,...,x_0^m\right)$, где m – размерность пространства с метрикой $ds_0{}^2$.

Исследованию геометрических свойств пространств $V(K)$ было посвящено много исследований, начиная с А.С. Солодовникова. Его статьи носят энциклопедический характер в этой области и в некотором смысле ее исчерпали.

Отметим, что тензорная характеристика пространств $V(K)$ – это уравнения

$$\psi_{ij} = Kg_{ij} - \bar{K}\bar{g}_{ij}, \qquad (5)$$

где K и $\bar{K}$ – постоянные.

При геодезическом отображении пространства $V(K)$ напространство $\bar{V}_n$, пространство $\bar{V}_n$ также является пространством $\bar{V}(K)$.

Особое значение имеют пространства $V(K)$ относительно проективных преобразований. Именно они допускают группы проективных преобразований высоких порядков. В работах А.С. Солодовникова дано полное строение этих групп, которое затем уточнялось в работах Аминовой, Шандры и Микеша.

Уравнения (5) выполняются при геодезических отображениях пространств постоянной кривизны, а также Эйнштейновых пространств, обобщенно полусимметрическихи Риччи обобщенно полусимметрических пространств [17, 18, 27]. Метрики последних были найдены в работе [17].

4. Пространства $V_n(K)$. Уравнения (5) были получены анализом

метрик Леви-Чивита. Метрики псевдо-римановых пространств, допускающих геодезические отображения, как известно, имеют более сложную структуру.

Римановы и псевдоримановы пространства, которые при геодезическом отображении характеризуются уравнениями (5):

$$\psi_{ij} = Kg_{ij} - \bar{K}\bar{g}_{ij}.$$

мы обозначим через $V_n(K)$.

С точностью до переобозначения, это введено в [22], см. [17–21]. При геодезическом отображении пространства $V_n(K)$ на пространство $\bar{V}_n$, пространство $\bar{V}_n$ также является пространством $V_n(K)$ и

$$K = const \Leftrightarrow \bar{K} = const.$$

В работе [22], см. [17–21], доказано, что уравнения (5) равносильны условиям

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} - Kg_{ij}. \qquad (6)$$

где μ $\mu-$ некоторый инвариант, который при $K = const$ по необходимости удовлетворяет условию $\mu,i = -2K\lambda_i$. В совокупности это условие, (3) и (6) представляют собой линейную систему дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно неивестных тензоров a_{ij}, λ_i, μ.

Эти пространства имеют значение относительно проективных отображений. Была установлена связь между степенью подвижности движений, конформных движений, геодезических отображений и порядком проективной группы [17–21, 40].

Естественно, пространства постоянной кривизны являются пространствами $V_n(K)$. Более того, имеет место обобщение теоремы Бельтрами (Й. Микеш [22, 17, 27]): *Если пространство Эйнштейна* V_n *допускает нетривиальное геодезическое отображение напространство* $\bar{V}_n$*, то* $\bar{V}_n$ *является пространством Эйнштейна. Пространства* V_n *и* $\bar{V}_n$

являются $V_n(K)$ *и* $\bar{V}_n(\bar{K})$, *соответственно.*

Подобное свойство было доказано (Микеш [22, 17]) для *обобщенно полусимметрических пространств* и *обобщенно Риччи полусимметрических пространств.*

5. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств.

5.1. Основные уравнения теории ГПО. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств K_n естественным образом обобщают теорию геодезических отображений. Были получены многие схожие результаты, см. [39, 43–45].

Аналитически планарной кривой келерова пространства K_n называется кривая $x^h = x^h(t)$, касательный вектор $\lambda^h = dx^h / dt$ которой при паралельном перенесении остается в площадке образован-ной λ^h и сопряженномему векторе $\bar{\lambda}^h \equiv \lambda^\alpha F_\alpha{}^h$,*i.*e., т.е. выполняются условия

$$\nabla_t \lambda^h \equiv \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = Q_1(t)\lambda^h + Q_2(t)\bar{\lambda}^h$$

где Q_1, Q_2 – функции аргумента t.

Диффеоморфизм K_n на $\bar{K}_n$ называют *голоморфно-проективным отображением* (ГПО), если при нем все аналитически планарные кривые K_n отображаются на аналитически планарные кривые $\bar{K}_n$.

Необходимым и достаточным условием для того чтобы отображение K_n на $\bar{K}_n$ было ГПО является выполнение условий:

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \varphi_{\bar{i}}\delta^h_j + \varphi_{\bar{i}}\delta^h_i + \varphi_i F^h_j + \varphi_j F^h_i \qquad (7)$$

где φ_i – вектор, вектор $\varphi_i \equiv \varphi_a F^a_i$ – по необходимости градиентный. Если $\psi_i \not\equiv 0$, то ГПО *нетривиально*.

Римановы и Риччи тензоры пространств $K_n \pm$ и $\bar{K}_n \pm$ при ГПО

связаны условиями

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^k_k \psi_{ij} - \delta^k_j \psi_{ik} - \delta \frac{h}{k} \psi_{i\bar{j}} + \delta \frac{h}{j} \psi_{i\bar{k}} - 2e\delta \frac{h}{i} \psi_{\bar{j}k}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n+2)\psi_{ij},$$

где $\psi_{ij} \equiv \bar{\varphi}_{i,j} - \bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j + \varphi_i \varphi_j$, иимеет место $\psi_{ij} + e\psi_{\bar{i}\bar{j}} = 0$.

Условие (7) равно сильно:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\bar{\varphi}_k \bar{g}_{ij} + \bar{\varphi}_i \bar{g}_{jk} + \bar{\varphi}_j \bar{g}_{ik} + \varphi_i \bar{F}_{jk} + \varphi_j \bar{F}_{ik}, \qquad (8)$$

где $\bar{F}_{ij} \equiv \bar{g}_{i\alpha} F^a_j$.

5.2. Линейные уравнения теории ГПО. Й. Микешем, В.И. Домашевым [44] и И.Н. Курбатовой [45] доказано, что пространство K_n допускает геодезическое отображение на пространство $\bar{K}_n$ тогда и только тогда, когда в K_n имеет решение система линейных дифференциальных уравнений в ковариантных производных относительно неизвестных симметрического невырожденного тензора a_{ij} и ковектора λ_i:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} - e\lambda_{\bar{i}} g_{\bar{j}k} - e\lambda_{\bar{j}} g_{\bar{i}k} \qquad (9)$$

Решения уранений (8) и (9) связаны следующими соотношениями:

$$a_{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \; \lambda_i = -e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} \psi_\beta, \qquad (10)$$

где $\bar{g}^{\alpha\beta}$ – компоненты обратной матрицы к $\bar{g}_{ij}$. Вектор λ_i является градиентным. Из (7) и (10) вытекает, что

$$e^{2\psi} = \left| \frac{det\, \bar{g}_{ij}}{det\, g_{ij}} \right|^{\frac{1}{n+2}} = \left| \frac{det\, a_{ij}}{det\, g_{ij}} \right|$$

6. Пространства $K_n[K]$. Келеровы и псевдокелеровы пространства, которые при голоморфно-проективном отображении характеризуются уравнениями [22]:

$$\psi_{ij} = Kg_{ij} - \bar{K}\bar{g}_{ij}.$$

Мы обозначили через $K_n[K]$.

В [22] доказано, что они характеризуются уравнениями (6).

Приголоморфно-проективном отображении пространства $K_n[K]$ на пространство $\bar{K}_n$, пространство $\bar{K}_n$ также является пространством $\bar{K}_n[\bar{K}]$, по необходимости K и $\bar{K}$ постоянны.

Эти пространства имеют значение относительно голоморфно-проективных отображений. Была установлена связь между степенью подвижности голоморфно-проективных отображений и порядком голоморфно-проективной группы [40].

Естественно, пространства постоянной голоморфнойк ривизны K являются пространствами $K_n[K]$. Для пространств Эйнштейна не удалось доказать аналог теоремы Бельтрами. Но при ГПО между пространствами Эйнштейна они являются пространствами $K_n[K]$.

Имеет место: *Если пространство квази полусимметрическое* K_n *допускает нетривиальное голоморфно-проективное отображение на пространство* $\bar{K}_n$, *то* $\bar{K}_n$ *является пространством также пространство квази полусимметрическим пространством и* K_n *и* $\bar{K}_n$ *являются* $K_n[K]$ *и* $\bar{K}_n[\bar{K}]$. Подобное свойство было доказано для *риччи квазиполусимметрических пространств.*

Литература

1 Солодовников, А.С. Проективные преобразования римановых пространств // ДАН СССР. – 105.,1955 – С. 419-422.

2 Солодовников, А.С. Геодезические классы пространств V(K) // ДАН СССР. – 111., 1956– С.33-36.

3 Солодовников, А.С. Проективные преобразования римановых пространств // Усп. мат. наук. – 11. – N. 4(70)., 1956 – С. 45-116.

4 Солодовников, А.С. Пространства с соответствующими геодезическими // ДАН СССР. – 108., 1956 – С. 201-203.

5 Солодовников, А.С. Омаксимальном К-разложении // Усп. мат. наук. – 13. – N. 6(84)., 1958 – С. 173-179.

6 Солодовников, А.С. The structure of the centres of universal coverings for non-compact Lie groups // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 129., 1959 - P. 272-275.

7 Солодовников, А.С. Пространства с общими геодезическими // Труды семинар. по вект. и тенз. анализу. – 11., 1961 – С. 43-102.

8 Солодовников, А.С. Модель эллиптических пространств // Труды семинар. повект. и тенз. анализу. – 11., 1961 – С. 293-308.

9 Солодовников, А.С. Геометрическое описание всех представлений римановых метрик в форме Леви-Чивита // ДАН СССР. – 141., 1961 – С. 322-325.

10 Солодовников, А.С. Геометрическое описание всех представлений римановых метрик в форме Леви-Чивита // Труды семинар. повект. и тенз. анализу. – 12., 1966 – С. 131-173.

11 Солодовников, А.С. Вопрос о пространствах V(K)«в целом» // Труды семинар. по вект. и тенз. анализу. – 13., 1966 – С. 303-309.

12 Levi-Civita,T. Sulle transformationi dellee quazioni dinamiche // Ann. Mat. Milano, Ser. 2. – 24., 1886 – P. 255-300.

13 Kruchkovich, G.I. Geodesic correspondence of semireducible Riemannian spaces // Sov. Math., Dokl. – 4., 1963 – P. 1240-1242.

14 Aminova, A.V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds // J. Math. Sci., New York. – 113. – N.3., 2003 – P. 367-470.

15 Shandra, I.G. Geodesic mappings of equidistant spaces and Jordan algebras of spaces $V_n(K)$ // Diff er. Geom. Mnogoobr. Figur. –24., 1993 –P.104-111.

16 Formella, S. Geodesic mappings of pseudo-Riemannian manifolds // Demonstr. Math. –2 7. – N.2., 1994 – P. 449-460.

17 Mikeš, J. Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces // J. Math. Sci., NewYork. – 78. – N. 3., 1996 – P. 311-333.

18 Shandra, I.G. & Mikeš Geodesic mappings of $V_n(K)$ -spaces and concircular vector fields // Mathematics.–7(8), 2019 – P. 692.

19 Mikeš, J. Vanžurová,A. & Hinterleitner, I. Geodesic mappings and some

generalizations. – Olomouc: Palacky University. 2009 – P. 304.

20 Mikeš, J. et al. Diff erential geometry of special mappings. 1st ed. –Olomouc:PalackyUniversity.2015 –P.566.

21 Mikeˇs, J. et al. Diff erential geometry of special mappings. 2nd ed. –Olomouc: Palacky University. 2019 – P.674.

22 Микеш, Й. Геодезические и голоморфно-проективные отображения специальных римановых пространств. Дисс. на соиск. уч. Степени к.ф.-м.н. Одесск. госуниверситет. 1979 – С. 106.

23 Mikeš J. Geodesic mappings of special Riemannian spaces. Topics in diff . geometry, Pap. Colloq., Hajduszoboszl´o/Hung. 1984, Vol.2, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 46, North-Holland, Amsterdam. 1988 – P. 793-813.

24 Mikeš J. Holomorphically projective mappings and their generalizations // J. Math. Sci. (NewYork). – 89:3., 1998 – P. 1334-1353.

25 Mikeš J. Geodesic mappings of semisymmetric Riemannian spaces. Odessk. Univ. Moscow: Archives at VINITI, No. 3924-76, 19p.

26 Mikeš, J. On geodesic mappings of 2- Ricci symmetric Riemannian spaces. Math. Notes. – 28., 1980 – P. 622-624.

27 Mikeš J. On geodesic mappings of Einstein spaces. Math. Notes. – 28., 1980 – P. 922-923.

28 Mikeš J. On Sasaki spaces and equidistant Kähler spaces. Sov. Math. Dokl. – 34., 1987 – P. 428-431.

29 Петров, А.З. Новые методы в теории относительности. М.: Наука. 1966 – С.495.

30 Hall, G.S. & Lonie, D.P. Projective structure and holonomy in general relativity. Classical Quantum Gravity. – 28. – No. 8. – Article ID 083101. 2011 – P. 17.

31 Ferapontov, E.V., Pavlov, M.V. & Vitolo, R.F. Projective-geometric aspects of homogeneous third-order Hamiltonian operators. J. Geom. Phys. – 85., 2014 – P. 16-28.

32 Stepanov, S.E. On a group-theoretic approach to the study of Einstein and Maxwell equations. Theor. Math. Phys. – 111. – No.1., 1997 – P. 419-427.

33 Weyl H. Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projektiven und der konformen Auff assung. Göttinger Nachrichten, 1921. – P. 99 – 112.

34 Thomas T.Y. Note on the projective geometry of paths. Bull. AMS 31, 1925 – P. 318-322.

35 Thomas J.M. Asymmetric displacement of a vector. Trans. AMS 28:4, 1926 – 658-670.

36 Eisenhart, L.P. Riemannian geometry. Princenton Univ. Press. 1926.

37 Shirokov, P.A. Selected investigations on geometry. Kazan Univ. press.

1966.

38 Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука.1976 –С.432.

39 Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука.1979 – С. 256.

40 Mikeš, J. On an order of special transformation of Riemannian spaces. Diff erential geometry and its applications, Proc. Conf., Dubrovnik/Yugosl.1989 – P. 199-208.

41 Mikeš, J. Geodesic mappings onto semisymmetric spaces. Russ. Math. – 38. – 2. 1994 – P. 35-41.

42 Mikeš, J., Berezovski, V.E., Stepanova, E.S. & Chudá, H. Geodesic mappings and their generalizations. J. Math. Sci., New York. – 217. – No. 5. 2016 – P. 607-623.

43 Mikeš, J. Holomorphically projective mappings and their generalizations. J. Math. Sci., NewYork. – 89. – 3. 1998 – P. 1334-1353.

44 Domashev V.V., Mikeš J. Theory of holomorphically projective mappings of Kählerianspaces. Math. Notes. – 23. 1978 – P. 160-163.

45 Kurbatova I.N. HP-mappings of H-spaces. Ukr. Geom. Sb. – 27., 1984– P. 75-83.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2021. №1

УДК: 517.932

Т.К. НАРЫМБЕТОВ

АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ

Проведен анализ результатов авторов, исследовавших сингулярно возмущенные уравнения в некоторых областях комплексной плоскости. Исследование условно разделено на три части. Ранние исследователи рассматривали задачу разложения решений линейных сингулярно возмущенных уравнений по малому параметру. Разложения рассматриваются в окрестностях обыкновенных точек или точек поворота уравнения, а затем и во всей комплексной плоскости. Топология областей иллюстрируются линиями Стокса. Вторым этапом анализа стал явление «затягивание потери устойчивости» и приведены результаты работы в этому направлении. Принципом отображения пространства в себе доказана теорема затягивание потери устойчивости. Уравнения исследованные без привлечения условия устойчивости, составили следующий этап анализа. Анализ проведен с использованием понятий: погранслойные линии, регулярные и сингулярные области, а также доказана теорема об их существовании. На основе теоремы сформулированы условия, когда имеет место, «затягивание потери устойчивости». Также проанализированы результаты исследования уравнений вырожденные уравнения которых имеют несколько решений. Во всех случаях отмечено, линии разделяющие рассматриваемые области являются стоксообразными.

Ключевые слова: *анализ, сингулярное возмущение, комплексная область, асимптотика, аналитическая функция, гармоническая функция, линии уровня, пути интегрирования, устойчивость, оператор, отображение, сходимость, оценка, погранслойная линия, регулярные и сингулярные области, область притяжения, разделяющие линии, связь областей притяжений.*

1. Часть первая. Результаты ранних работ асимптотического разложения решений по параметру линейных дифференциальных уравнений достаточно полна изложена в монографии В. Вазова [1]. При этом автор рассматривает в основном задачи локального характера, то есть исследует асимптотику решений по параметру в окрестности обычной точки уравнения или точки поворота.

В работах М.В. Федорюка [1] исследованы асимптотика решений по параметру линейных уравнений второго порядка с аналитическими (целыми) коэффициентами в целом то есть во всей комплексной плоскости независимого переменного. Исследования в этом направлении также проведены в работах Олвера, Хединга и других [1].

Для описания топологии рассматриваемых областей использованы линии Стокса.

2. Часть вторая. Новым толчком исследования асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений послужила работа [2]. В данной работе рассматривается система

$$\begin{aligned}
&\varepsilon x_1'(t,\varepsilon) = y x_1(t,\varepsilon) - x_2(t,\varepsilon) + \gamma x_1(t,\varepsilon)\left(x_1^2(t,\varepsilon) + x_2^2(t,\varepsilon)\right) + \varepsilon \\
&\varepsilon x_2'(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + y x_2(t,\varepsilon) + \gamma x_2(t,\varepsilon)\left(x_1^2(t,\varepsilon) + x_2^2(t,\varepsilon+\varepsilon)\right) \qquad (1) \\
&y'(t,\varepsilon) = 1
\end{aligned}$$

с начальным условием

$$x_1(-1,\varepsilon) = x_{10}, x_2(-1,\varepsilon) = x_{20}, \quad y(-1,\varepsilon) = -1 \quad . \qquad (2)$$

Здесь и далее $0 < \varepsilon$ - малый вещественный параметр. Система (1) в плоскости «быстрых движений» (x_1, x_2) в точке $(0;0)$ имеет положение равновесия и предельный цикл. Положение равновесия устойчива для значений $y < 0$ и неустойчива для значений $y > 0$, то есть при переходе значения $y = 0$ устойчивость положение равновесия нарушается. Доказано решение задачи (1)-(2) не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесия, а в течении конечного времени остается вблизи нее. Таким образом в теории сингулярно возмущенных уравнений было обнаружено новое явление, которая впоследствии была названа «затягивание потери устойчивости».

В работах [3-6] это явление обобщена на более широкий класс уравнений.

К.С. Алыбаев [5] с привлечением топологического подхода разработал метод исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении устойчивости точки покоя присоединенного уравнения (по терминологии А.Н. Тихонова [7]).

Суть этого метода заключается в следующем. Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon b(t) + f\left(t, z(t,\varepsilon)\right), \tag{3}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon), \left|z^0(\varepsilon)\right| \le M_0\varepsilon \tag{4}$$

где $t \in D \subset C$ - множество комплексных чисел,

D – односвязная область; t_0 - внутренняя точка области

D; $0 < M_0$ – постоянная не зависящая от ε.

Предположим выполнимость следующих условий:

U.1. $a(t), b(t) \in Q(D)$ – пространство аналитических функций в области D и $\forall t \in D\left(a(t) \ne 0\right)$

U.2. $[t_0, T]$ - отрезок действительной оси и $[t_0, T] \subset D$,

причем $(t = t_1 + it_2, t_1, t_2$ – (действительные переменные) $Rea(t_1 + i0) < 0$,

$t_0 \le t_1 < T_0$; $Rea(T_0 + i0) = 0$; $Rea(t_1 + i0) > 0$, $T_0 < t_1 \le T$.

U.3. $\forall t \in D\left(f(t,0) \equiv 0\right)$;

$f(t,z) \in Q(H = \{(t,z), t \in D, |z| \le \delta$ - положительная постоянная не зависящая от $\varepsilon\}$;

$$\forall\left((t,\tilde{z}) \in H, \left(t,\tilde{\tilde{z}}\right) \in H\right)\left(\left|f(t,\tilde{z}) - f\left(t,\tilde{\tilde{z}}\right)\right| \le M\left|\tilde{z} - \tilde{\tilde{z}}\right| * \max\left\{|\tilde{z}|, \left|\tilde{\tilde{z}}\right|\right\}\right.$$

Здесь и далее все постоянные не зависящие от ε будем обозначат $M, M_0, M_1, \ldots$

Определим функцию $A(t)=\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$. Согласно U.1. $A(t)\in Q(D)$. Возьмем функции $ReA(t)$, $ImA(t)$, которые являются гармоническими.

Определение. Множество $(K)=\{t\in D,\ ReA(t)=K-const\}$ назовем линией уровня функции $ReA(t)$.

Аналогично определятся линия уровня (P) функции $ImA(t)$.

Линии уровня (K) и (P) являются ортогональными в точках пересечения [8].

Область D полностью покрывается сетью взаимно-ортогональных линий уровней (K) и (P).

$A(t_0)=0$, тогда существует линия уровня $(K_0)=\{t\in D, ReA(t)=0\}$ проходящая через точку t_0.

U.4. Пусть (K_0) соединяет точки $(t_0;0)$ и $(T;0)$.

Вырожденное уравнение соответствующее (3), имеет решение $\xi(t)\equiv 0$, которая является точкой покоя присоединенного уравнения

$\frac{du(\tau)}{d\tau}=a(t)u(\tau)+f(t,u(\tau))$, $\tau\geq 0$ и согласно U.2. она устойчива для $t\in[t_0,T_0)$ и неустойчива для $t\in(T_0,T]$.

Ограниченности решения задачи (3) - (4) на всем отрезке $[t_0,T]$ результатами работ А.Н. Тихонова [7] не решается.

Асимптотическое поведение решения задачи (3) - (4) на всем отрезке $[t_0,T]$ определяется следующей теоремой.

Теорема (О затягивание потери устойчивости). Пусть выполняются условия U.1.– U.4. Тогда:

1. Существует область $D_0 \subset D$ и $[t_0, T] \subset D_0$.

2. $\forall t \in D_0$ существует $z(t,\varepsilon)$ - решение задачи (3) - (4) и $z(t,\varepsilon) \in Q(D_0)$.

3. $\forall t \in D_0 \left(|z(t,\varepsilon)| < M_1 \varepsilon \right)$.

Доказательство:

1. Область ограниченную кривой (K_0) и отрезком $[t_0, T]$ - действительной оси возьмем за D_0. Область D_0 полностью покрывается множеством $\{(K)\}$. Справедливость этого утверждения доказана в [5].

2. Докажем вторую часть теоремы. Задачу (3) - (4) заменим следующим (аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$z = z^0 \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \left[\varepsilon b(\tau) + f(\tau, z) \right] \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau \qquad (5)$$

(5) запишем в операторной форме

$$z = Iz. \qquad (6)$$

Класс $z(t,\varepsilon)$ – аналитических функций определенных в D_0 и удовлетворяющих неравенству $\forall t \in D_0 (|z| < M_1 \varepsilon)$ обозначим $Q(D_0)$.

Определим условия, когда оператор I отображает $Q(D_0)$ в себе, то есть если $z \in Q(D_0)$, то $z^* = Iz \in Q(D_0)$.

Пусть

$$z \in Q(D_0) \text{ и } z^* = Iz. \qquad (7)$$

Рассмотрим следующие случаи: a) $t \in (K_0)$, b) $t \in D_0 \setminus (K_0)$.

a) $t \in (K_0)$. Для этого случая путь интегрирования в (7) состоит из части (K_0) соединяющего точки τ_0 и t. Кривая (K_0) порождаемая

гармонической функцией $ReA(t)$ является аналитической кривой. Следовательно уравнение кривой (K_0) параметрически можно представить в виде $\tau_1 = \tau_1(s),\ \tau_2 = \tau_2(s)$, где s длина кривой (K_0) от точки t_0 до точки t и $0 \le s \le s_0$.

С учетом выбранного пути интегрирования (7) в развернутом виде записывается в виде

$$\tilde{z}^* = z^0 \exp\frac{A(s)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \left[\varepsilon b(\tilde{s}) + f(\tilde{s},z)\right]\left(\tau_1'(\tilde{s}) + i\tau_2'(\tilde{s})\right)\exp\frac{A(s)-A(\tilde{s})}{\varepsilon}d\tilde{s}, \quad (8)$$

где $A\tau s) \equiv A(t(s))$, $b(s) \equiv b(\tau(s))$, $f(s,z) \equiv f\left(\tau(s), z\left(\tau(s),\varepsilon\right)\right)$. При оценке (8), надо учесть

$$\left|z^0 \exp\frac{A(s)}{\varepsilon}\right| = \left|z^0\right| \ , \left|\int_0^{\varepsilon} b(\tilde{s})\exp\frac{A(s)-A(\tilde{s})}{\varepsilon}\left(\tau_1'(\tilde{s}) + i\tau_2'(\tilde{s})\right)d\tilde{s}\right| \le M_2\varepsilon .$$

В (8) переходя к модулю и учитывая сказанное и условие U.З. получим

$$\left|\tilde{z}^*\right| \le \left|z^0\right| + M_2\varepsilon + M_3\varepsilon s \le \left(M_0 + M_2 + M_3 s\right)\varepsilon \le \left(M_0 + M_2 + M_3 s_0\right)\varepsilon .$$

При условии $M_0 + M_2 + M_3 s_0 \le M_{10} < M_1$ или

$$s_0 \le \frac{M_{10} - M_0 - M_2}{M_3}(M_{10} > M_0 + M_2), \quad (9)$$

$$\left|\tilde{z}^*\right| > M_1\varepsilon . \quad (10)$$

Не ограничивая общности будем считать условие (9) выполняется для (K_0). Таким образом при условии (9), (7) осуществляется отображение $Q((K_0))$ в $Q((K_0))$.

b) $t \in D_0 \setminus (K_0)$. Путь интегрирования состоит из части (K_0) ,

соединяющего точки t_0 и $\tilde{t} \in (K_0)$; части линии уровня $(p) = \{t \in D_0, ImA(t) = p - const\}$, соединяющее точки $\tilde{t}$ и t.

Отметим, что через любую точку кривой (K_0) проходит единственная линия (p) и множество $\{(p)\}$ полностью покрывает область D_0.

Кривая (p) также является аналитической и ее можно представить параметрическим в виде $\tau_1 = \tau_1(\sigma)$, $\tau_2 = \tau_2(\sigma)$, $0 \le \sigma \le \sigma_0$ (7), учитывая выбранные пути интегрирования и параметрическое представление кривой (p) представим в виде

$$z^* = \tilde{z}^* \exp\frac{A(\sigma) - A(\tilde{s})}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma}\left[\varepsilon b(\tilde{\sigma}) + f(\tilde{\sigma}, z)\right]* \\ *\left(\tau'(\tilde{\sigma}) + i\tau_2'(\tilde{\sigma})\right)\exp\frac{A(\sigma) - A(\tilde{\sigma})}{\varepsilon} d\tilde{\sigma} \qquad (11)$$

где $A(\sigma) \equiv A(t(\sigma))$, $b(\sigma) \equiv b(\tau(\tilde{\sigma}))$, $f(\tilde{\sigma}, z) \equiv f(\tau(\tilde{\sigma}), z)$.

Для $\tilde{z}^*$ справедлива оценка (10). При оценке надо учесть, что

$$ReA(\sigma) \le 0, \left|\int_0^{\sigma} b(\tilde{\sigma})\left(\tau_1'(\tilde{\sigma}) + i\tau_2'(\tilde{\sigma})\right)\exp\frac{A(\sigma) - A(\tilde{\sigma})}{\varepsilon} d\tilde{\sigma}\right| \le M_2\varepsilon.$$

$\left|\int_0^{\sigma} \exp\frac{A(\sigma) - A(\tilde{\sigma})}{\varepsilon} d\tilde{\sigma}\right| \le M_4\varepsilon$. (Строгая монотонность функции $ReA(\sigma)$ по кривой (p) [8]).

В (11) переходя к модулю получим

$$\left|z^*\right| \le M_1\varepsilon exp\frac{ReA(\sigma)}{\varepsilon} + M_2\varepsilon + M_5\varepsilon^2 \qquad (12)$$

В D_0 выделим полосу $D_{0\varepsilon}$ ограниченную частями кривой (K_0) и $(K_{0\varepsilon}) = \{t \in D_0, ReA(t) = \varepsilon ln\varepsilon\}$, причем будем считать $(K_{0\varepsilon}) \not\in D_{0\varepsilon}$.

При таком условии, если $t \in D_{0\varepsilon}$, то из (12) имеем

$$\left|z^*\right| \le M_{10}\varepsilon + M_2\varepsilon + M_5\varepsilon^2 \le \left(M_{10} + M_2 + \varepsilon M_5\right)\varepsilon < M_1\varepsilon .$$

Для достаточно малых значений ε имеем $\left|z^*\right| < M_1\varepsilon$.

Пусть $t \in D_{01} = D_0 \setminus D_{0\varepsilon}$. Тогда $\exp\frac{ReA(\sigma)}{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, следовательно $\left|z^*\right| \le \left(M_2 + M_5\varepsilon\right)\varepsilon$.

При достаточно малых ε будем иметь $\left|z^*\right| < M_1\varepsilon$.

Подведя итог можем сказать при малых ε и условии (9), (7) осуществляет отображение $Q(D_0)$ в $Q(D_0)$.

Вернемся к уравнению (6). К (6) применим метод последовательных приближений, которые определим так

$$z_m = Iz_{m-1},\ z_0 \equiv 0,\ m = 1,2,\ldots \qquad (13)$$

На основе вышеизложенного

$$\forall m \in N\left(z_m \in Q(D_0)\right). \qquad (14)$$

Для доказательства сходимости последовательных приближений (13) оценим $\left|z_m - z_{m-1}\right|\left(m = 1,2,\ldots\right)$.

Как и в предыдущем случае рассмотрим случаи $a)$ и $b)$.

а) $t \in (K_0)$. Тогда

$$\left|z_m - z_{m-1}\right| \le \left|Iz_{m-1} - Iz_{m-2}\right| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \left| f\left(\tilde{s}, z_{m-1}\right) - f\left(\tilde{s}, z_{m-2}\right)\right| \left|\tau_1'\left(\tilde{s}\right) + i\tau_2'\left(\tilde{s}\right)\right| d\tilde{s} \le$$

$$\le \frac{M_3}{\varepsilon}\int_0^s \left|z_{m-1} - z_{m-2}\right| \max\left\{\left|z_{m-1}\right|, \left|z_{m-2}\right|\right\} d\tilde{s} \le M_1 M_3 \int_0^s \left|z_{m-1} - z_{m-2}\right| d\tilde{s},$$

$$\left|z_m - z_{m-1}\right| \le M_1 M_3 \int_0^s \left|z_{m-1} - z_{m-2}\right| d\tilde{s} \quad .$$

Отсюд имеем оценку $\left|z_m - z_{m-1}\right| \le M_1^m M_3^{m-1} \varepsilon \frac{s^{m-1}}{(m-1)!} = M_1 \frac{(M_1 M_3 s)^{m-1}}{(m-1)!}.$

Из полученной оценки вытекает равномерная сходимость последовательности (13) $\forall t \in (K_0)$ при ограничении (9), к некоторой функции $\tilde{z}(t, \varepsilon)$, которая является решением задачи (3) – (4) на (K_0) и для этого решения справедлива оценка

$$\left|\tilde{z}(t, \varepsilon)\right| \le M_1 * \varepsilon \qquad (15)$$

b) $t \in D_0 \setminus (K_0)$. Для этого случая решение задачи (3) - (4) представляется в форме (11), только вместе z^* надо написать z, a вместе $\tilde{z}^*$ надо написать $\tilde{z}$.

Справедлива оценка

$$\left|z_m - z_{m-1}\right| \le M_6 * (M_7 \varepsilon)^m \quad . \qquad (16)$$

При условии $M_7 \varepsilon < 1$ последовательность (11) равномерно сходится к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$, которая является решением задачи (3) - (4) на $D_0 \setminus (K_0)$. Для этого решения справедлива оценке

$$\left|z(t, \varepsilon)\right| \le M_1 \varepsilon \qquad (17)$$

Объединив оценки (16) - (17) получим

$$\left|z(t,\varepsilon)\right| \le M_1\varepsilon \ , \forall t \in D_0 \ . \qquad (18)$$

Теорема доказана. Если оценку (18) рассмотрим для $t \in [t_0, T)$, то получим явление «затягивание потери устойчивости».

3. Часть третья. В работах [9-11] введены новые понятия погранслойная линия, регулярные и сингулярные области.

Для линейного и слабо нелинейного сингулярно возмущенных уравнений доказано существование погранслойных линий, регулярных и сингулярных областей.

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + b(t), \qquad (19)$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \qquad (20)$$

где $t \in D$ – односвязная, ограниченная область плоскости C, $t_0 \in D$ и ее внутренняя точка.

Пусть выполняется условие

U.5. $\forall t \in D\left(a(t) \in Q(D), b(t) \in Q(D) \wedge a(t) \neq 0\right)$

Справедлива

Теорема (существование погранслойной линии, регулярной и сингулярной области). Пусть выполняется условие U.5. Тогда в области D для решения задачи (19) - (20) существуют погранслойная линия, регулярная и сингулярная области.

Доказательство. Сначала опишем топологию области D в терминах линии уровня гармонических функций. Введем функцию

$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$ и рассмотрим гармонические функции $ReA(t)$, $ImA(t)$ и линии уровня $(P) = \{t \in D, ReA(t) = Pconst\}$.

$(q) = \{t \in D, ImA(t) = q - const\}$.

По определению $A(t_0)=0$. Тогда существует линия уровня

$(P_0)=\{t\in D, ReA(t)=0\}$ проходящая через точку t_0. При этом (P_0) область D делит на две части D_1 , D_2.

Возьмем произвольную линию (q). Вдоль (q) функция $ReA(t)$ строго монотонна [8]. В точке пересечения (q) и (P_0) функция $ReA(t)=0$. Тогда справедливы соотношения

$$\forall t\in D_1\left(ReA(t)<0\vee ReA(t)>0\right),$$

$$\forall t\in D_2(ReA(t)>0\vee ReA(t)<0).$$

Поскольку всевозможные случаи равнозначны, то возьмем

$$\forall t\in D_1(ReA(t)<0),\forall t\in D_2(ReA(t)>0).$$

Переходим к доказательству теоремы. Задачу (19) - (20) заменим на следующее

$$z(t,\varepsilon)=z^0\exp\frac{A(t)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau \qquad (21)$$

В (21) определим путь интегрирования соединяющая точки t_0 и t. Путь состоит из: части (P_0) соединяющее точки $t_0 u\tilde{t}_0\in(K_0)$, части (q) соединяющее точки $\tilde{t}$ и $t\in D_1$ или $t\in D_2$.

1. Пусть $t\in(P_0)$. Линия (P_0), порождаемая гармонической функцией $ReA(t)$, является аналитической кривой и ее можно представить параметрически в виде $\tau_1=\tau_1(\tilde{s})$, $\tau_2=\tau_2(\tilde{s})$, где $\tilde{s}$ длина (P_0), отсчитываемая от точки t_0 до точки t.

Теперь (21) можно переписать в виде

$$z(s,\varepsilon)=z^0\exp\frac{A(s)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s b(\tilde{s})\exp\frac{A(s)-A(\tilde{s})}{\varepsilon}*\left(\tau_1'(\tilde{s})+i\tau_2'(\tilde{s})\right)d\tilde{s} \qquad (22)$$

В (22) $\mathrm{ReA}(s)=0$, $\mathrm{ReA}(\tilde{s})=0$ при $0\le\tilde{s}\le s$, причем $\mathrm{ReA}(\tilde{s})\neq 0$.

К интегралу в (22) применяя интегрирования по частям (область D – односвязная и ограниченная) получим

$$z(s,\varepsilon)=z^0\exp\frac{A(s)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s b(\tilde{s})\frac{-\varepsilon}{a(\tilde{s})}d\exp\frac{A(s)-A(\tilde{s})}{\varepsilon}=z^0\exp\frac{A(s)}{\varepsilon}-$$

$$-\left(b(s)/a(s)\right)+\left(\frac{b(0)}{a(0)}\right)\exp\frac{A(s)-A(0)}{\varepsilon}+\int_0^s\left[\frac{b(\tilde{s})}{a(\tilde{s})}\right]'\exp\frac{A(s)-A(\tilde{s})}{\varepsilon}d\tilde{s}.$$

В полученном выражении последний интеграл имеет порядок ε. В этом легко можно убедится, проинтегрировать этот интеграл по частям.

Тогда $z(s,\varepsilon)\sim z^0\exp\frac{A(s)}{\varepsilon}-\frac{b(s)}{a(s)}$. Отсюда вытекает, предел $\lim_{\varepsilon\to 0}z(s,\varepsilon)$ не существует, но $\left|z(s,\varepsilon)\right|$ – ограничена. Линия (P_0) является прообразом прямолинейного отрезка и согласного принятого определения является погранслойной линией.

2. Пусть $t\in D\setminus(P_0)$. Параметрически линию (q) представим в виде $t_1=t_1(\sigma)$, $t_2=t_2(\sigma)$, где σ - длина части (q) от точки $\tilde{t}$ до t.

С учетом выбранного пути интегрирования и параметрическое представление линии (q), из (21) имеем

$$(t,\varepsilon)=z^0\exp\frac{A(t)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau+\int_{\tilde{t}}^t b(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau=$$

$$=\exp\frac{A(\sigma)-A(s)}{\varepsilon}\left[z^0\exp\frac{A(s)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s b(s)\exp\frac{A(s)-A(\tilde{s})}{\varepsilon}\left(\tau_1'(\tilde{s})+i\tau_2'(\tilde{s})\right)d\tilde{s}\right]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma} b(\tilde{\sigma})\exp\frac{A(\sigma)-A(\tilde{\sigma})}{\varepsilon}\left(\tau_1'(\tilde{\sigma})+i\tau_2'(\tilde{\sigma})\right)d\tilde{\sigma}$$ (Выражение, содержащееся в квадратной скобке […], дает функцию $z(\tilde{t},\varepsilon)$),

$$\tilde{t}\in(P_0))=z(\tilde{t},\varepsilon)\exp\frac{A(\sigma)-A(s)}{\varepsilon}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma} b(\tilde{\sigma})\left(\tau_1'(\tilde{\sigma})+i\tau_2'(\tilde{\sigma})\right)\exp\frac{A(\sigma)-A(\tilde{\sigma})}{\varepsilon}d\tilde{\sigma}$$

$$z(t,\varepsilon)=z(\tilde{t},\varepsilon)\exp\frac{A(\sigma)-A(s)}{\varepsilon}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma} b(\tilde{\sigma})\left(\tau_1'(\tilde{\sigma})+i\tau_2'(\tilde{\sigma})\right)\exp\frac{A(\sigma)-A(\tilde{\sigma})}{\varepsilon}d\tilde{\sigma} \qquad (23)$$

Сначала рассмотрим случай $t\in D_1\setminus(P_0)$.

Определим линию $\left(P_0^{-\varepsilon}\right)=\left\{t\in D_1, ReA(t)=\varepsilon ln\varepsilon\right\}$. Область, ограниченную (P_0) и $\left(P_0^{-\varepsilon}\right)$, обозначим $D_{1\varepsilon}$, $D_{1\varepsilon}\subset D_1$. Будем считать, что $\left(P_0^{-\varepsilon}\right)$ не входит в $D_{1\varepsilon}$. Тогда $\forall t\in D_{1\varepsilon}\left(ReA(\sigma)<0\right)$, следовательно для этого случая

$\left|\exp\frac{A(\sigma)-A(s)}{\varepsilon}\right|<1$. В (23) интеграл проинтегрировав частям получим

$$\left(ReA(\sigma))'\neq 0\right)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma} b(\tilde{\sigma})\left(\tau_1'(\tilde{\sigma})+i\tau_2'(\tilde{\sigma})\right)\exp\frac{A(\sigma)-A(\tilde{\sigma})}{\varepsilon}d\tilde{\sigma}\sim-\frac{b(\sigma)}{a(\sigma)}.$$

Таким образом в рассматриваемом случае $z(t,\varepsilon)\sim z(\tilde{t},\varepsilon)\exp\frac{A(\sigma)-A(s)}{\varepsilon}-\frac{b(\sigma)}{a(\sigma)}$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} z(t,\varepsilon)$ не существует.

Пусть $t\in D_1\setminus D_{0\varepsilon}$, тогда $\exp\frac{A(\sigma)}{\varepsilon}\to 0$ и $z(t,\varepsilon)\sim-\frac{b(\sigma)}{a(\sigma)}\equiv-\frac{b(t)}{a(t)}$.

Решение задачи (19)-(20) при $\varepsilon\to 0$ стремится к решению

вырожденного уравнения, то есть область $\left(D_1 \setminus D_{0\varepsilon}\right)$ - регулярная. Пусть $t \in D_2$. Определим линию $\left(P_0^{\varepsilon}\right) = \left\{t \in D_2, ReA(t) = -\varepsilon ln\varepsilon\right\}$. Область ограниченную линиями $\left(P_0^{\varepsilon}\right)$, $\left(P_0\right)$ обозначим $D_{2\varepsilon}$, $P_0^{\varepsilon} \notin D_{2\varepsilon}$. Для $t \in D_{2\varepsilon}$ функция $z(t,\varepsilon)$ не имеет предела по ε но ограничена.

Если $t \in D_2 \setminus D_{2\varepsilon}$, то

$$z(t,\varepsilon) = \exp\frac{A(\sigma)}{\varepsilon}\left[z(\tilde{t},\varepsilon)\exp\frac{-A(s)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma} b(\tilde{\sigma})\left(\tau_1'(\tilde{\sigma}) + \tau_2'(\tilde{\sigma})\right) * exp\frac{-A(\tilde{\sigma})}{\varepsilon} d\tilde{\sigma} \right].$$

$\forall t \in D_2 \setminus D_{2\varepsilon}(ReA(\sigma) > 0\left(ReA(\sigma)\right)' \neq 0)$, а выражение $z(\tilde{t},\varepsilon)\exp\frac{-A(s)}{\varepsilon}$ ограничена по модулю. Следовательно, выражение, содержащееся в квадратной скобке […], ограничена по модулю и $\exp\frac{ReA(\sigma)}{\varepsilon} \to +\infty$.

Таким образом $\lim_{\varepsilon \to 0} z(t,\varepsilon) = \infty$. Согласно принятого определения область $\left(D_2 \setminus D_{2\varepsilon}\right)$ – сингулярная. Теорема доказана.

Следствие. Из доказанной теоремы вытекает, если D_1 содержит отрезок $[t_0, T]$ действительной оси и выполняются условия $\text{U.1.} - \text{U.2.}$, то происходит явление «затягивание потери устойчивости». Существование погранслойных линий, регулярных и сингулярных областей является более общим явлением.

В работах [12-15] исследованы асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений, когда вырожденные уравнения имеют несколько решений.

В [12-14] рассмотрены: сингулярно возмущенные уравнения типа Бернулли и Риккати вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + b(t)z^2(t,\varepsilon),$$

$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + b(t)z^2(t,\varepsilon) + \varepsilon c(t),$ с начальными условиями

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon).$$

Предполагается выполнение условий:

$U.6.$ $\forall t \in D(a(t), b(t), c(t) \in Q(D)$ и $a(t) \neq 0, b(t) \neq 0);$

уравнение первого порядка $\varepsilon z'(t,\varepsilon) = f(t, z(t,\varepsilon))$, с начальным условием $z(t_0,\varepsilon) = z^0(\varepsilon)$. В предположении $U.6.$ $\forall (t,x) \in H(f(t,z) \in Q(H))$, где H - некоторая область переменных (t,z) и вырожденное уравнение имеет несколько решений; система состоящее из двух уравнений первого порядка вида

$$\varepsilon z_j'(t,\varepsilon) = a_j(t)z_j(t,\varepsilon) + z_j^2(t,\varepsilon) + \varepsilon f_j(t, z_1, z_2), \quad j = 1,2;$$

с начальным условием $z_j(t_0,\varepsilon) = z_j^0(\varepsilon)$.

Пусть $\xi_k(t)$ одно из решений вырожденного уравнения или системы.

Определение. Если существует область $D_k \subset D$, решение $z(t,\varepsilon)$ рассматриваемых задач определенных в D_k и $\forall t \in D_k (z(t,\varepsilon) \to \xi_k(\text{t})$ по $\varepsilon)$, то D_k называется областью притяжения решения $\xi_k(t)$.

Согласно принятого определения доказаны существование областей притяжений. При этом задача о взаимосвязи областей притяжений не исследованы, на линии разделяющие области притяжения особое внимание не обращено.

В [15] доказано, что области притяжения существуют не для всех решений вырожденной системы. Причины такого явления до конца не выяснены. Следует отметить в перечисленных работах для описании топологии рассматриваемых областей использованы линии уровня различных гармонических функций и они названы погранслойные линии,

разделяющие линии областей притяжений. Есть основания считать что все эти линии по происхождению являются стоксообразными. Сказанное и другие положения связанные с такими линиями требуют дальнейших уточнений.

Литература

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вазов. – Москва: Мир, 1968. – 462 с.
2. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных [Текст] / М.А.Шишкова // Доклады АН СССР. – 1973. - Т. 209, № 3. – С. 576-579.
3. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» [Текст]: дисс.д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / С. Каримов. – Ош, 1983. – 260 с.
4. Анарбаева Г.М. Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости положения равновесия [Текст]: дисс.канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Г.М. Анарбаева. – Бишкек, 1993. – 120 с.
5. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С.190-200.
6. Турсунов Д.А. Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют *n*– кратный полюс [Текст]: дисс. … канд.физ.-мат.наук: 01.01.02 / Д.А.Турсунов. - Ош, 2005. – 110 с.
7. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Москва: Наука, 1973. – 272 с.
8. Федорюк М.В. Метод перевала [Текст] / М.В.Федорюк. – Москва: Наука, 1977. - 368 с.
9. Алыбаев К.С. Метод погранслойных линий построения регулярно и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVII международной научно-практической конференции. № 10 (45). Россия, Новосибирск: СиБАК, 2016. - С.59-66.

10. Алыбаев К.С. Существование погранслойных линий для линейных сингулярно-возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К.С.Алыбаев, К.Б.Тампагаров // Актуальные проблемы, теории управления, топологии и операторных уравнений: Материалы II-й международной конференции, посвященной 20-летию КРСУ и 100-летию профессора Я.В.Быкова. - Бишкек, 2013. - С. 83-88.

11. Алыбаев К.С. Условия существования погранслойной линии линейного обыкновенного сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения с аналитическими функциями. [Текст] /К.С.Алыбаев, К.Б.Тампагаров // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Тезисы докладов II международной научной конференции, посвященной 20-летию образования КРСУ и 100-летию Я.В.Быкова. – Бишкек, 2013. - С. 70-71.

12. Алыбаев К.С. Построение областей притяжения при вырождении сингулярно возмущенных уравнений[Текст] / К.С. Алыбаев, А.Б. Мурзабаева // Международный научно-исследовательский журнал. № 9 (75). Екатеринбург, 2018. - С. 7-11.

13. Алыбаев К.С. Сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении [Текст] /К.С.Алыбаев, А.Б. Мурзабаева // Итоги науки в теории и практике 2017: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XXXIV международной научной конференции. № 12 (34). Москва, 2017. - С. 15-20.

14. Мурзабаева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения при нарушении единственности решений вырожденного уравнения и условия устойчивости [Текст] / А.Б. Мурзабаева // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLIX международной научно-практической конференции. № 12 (47). - Новосибирск: СиБАК, 2016. - С. 77-85.

15. Alybaev K.S. Asymptotic analysis of solutions of systems of three singularally perturbed first-order equations. [Text] / K.S. Alybaev, T.K. Narymbetov. - P.46-55. // Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR №1, Bishkek 2020 - P.46-55.

УДК 517.928.2

Г.А. ОМАРАЛИЕВА, Д.А. ТУРСУНОВ, М.И. МАМАТБУВАЕВА, Ш.А. РАМАНКУЛОВА

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА С ДВОЙНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Исследуется асимптотическое поведение решения двух точечной краевой задачи на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Существенные особенности задачи – существование двухслойного (двух зонного) пограничного слоя и не гладкость решения соответствующей невозмущенной задачи. Асимптотическое разложение исследуемой задачи построено обобщенным и классическим методами погранфункций и с помощью принципа максимума получена оценка для остаточного члена разложения. Построенное асимптотическое разложение решения двух точечной краевой задачи является асимптотическим в смысле Эрдей.

Ключевые слова: *асимптотическое решение, малый параметр, двух зонная задача, бисингулярная задача, двухточечная краевая задача, обыкновенное дифференциальное уравнение с малым параметром, двойной погранслой, асимптотика.*

Постановка задачи. Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\varepsilon^3 y_\varepsilon''(x) + x^4 y_\varepsilon'(x) + (x^4 - \varepsilon) y_\varepsilon(x) = f(x),\ x \in [0,1], \qquad (1)$$

$$y_\varepsilon(0) = a,\ y_\varepsilon(1) = b, \qquad (2)$$

где $0 < \varepsilon << 1$, a, b – известные постоянные, $f \in C^\infty[0,1]$, а $y_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Уравнение (1) описывает два тесно связанные между собой

процессы. Один – это стационарное распределение тепла в движущейся среде, зависящее от одной переменной x. Малый параметр ε – это малая теплопроводность, а коэффициент $p(x)=x^4$ связан со скоростью среды. Другая интерпретация связана со случайным блужданием частицы на отрезке при условии, что $p(x)=x^4$ определяет среднюю скорость движения, а параметр ε – малую дисперсию [1].

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение решения двухточечной краевой задачи (1)-(2) на отрезке [0,1], когда малый параметр стремится к нулю.

В окрестность особой точки $x=0$ введем преобразование растяжения $x=\varepsilon^{\alpha}t$, $\alpha>0$, [2]-[4], тогда $dx=\varepsilon^{\alpha}dt$ и $dx^2=\varepsilon^{2\alpha}dt^2$ и уравнение (1) перепишется в виде:

$$\varepsilon^{3-2\alpha}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{3\alpha}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+(\varepsilon^{4\alpha}t^4-\varepsilon)y_\varepsilon(t)=f_\varepsilon(t),\ t\in[0,\varepsilon^{-\alpha}], \qquad (3)$$

Отсюда, имеем

$$\varepsilon^{3-2\alpha}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{3\alpha}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t).$$

«Уравновешивая» двух любых членов (3) имеем соответствующие характерные пределы, возможны случаи:

1) $3-2\alpha=3\alpha \Rightarrow \alpha=3/5$; 2) $3-2\alpha=1 \Rightarrow \alpha=1$; 3) $3\alpha=1 \Rightarrow \alpha=1/3$.

Если $\alpha=3/5$, то получим уравнение

$$\varepsilon^{9/5}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{9/5}t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$$

и в главной части $\varepsilon y_\varepsilon(t)$ отсутствует производная. Поэтому случай $\alpha=3/5$ не будем рассматривать.

Если $\alpha=1$, то получим уравнение

$$\varepsilon\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^3t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$$

в главной части $\varepsilon\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$ присутствует производная второго порядка. Поэтому этот случай $\alpha=1$ будем рассматривать.

Если $\alpha=1/3$, то получим уравнение

$$\varepsilon^{7/3}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$$

в главной части $\varepsilon t^4\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon y_\varepsilon(t)$ присутствует производная первого порядка. Поэтому и этот случай $\alpha=1/3$ будем рассматривать.

Отметим, что в работах [5]-[8] исследованы асимптотики решения второй и третей краевых задач с иррегулярной особенностью.

Формальное асимптотическое приближение решения задачи (1)-(2) будем искать в виде ряда [9]-[12]:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-3}^{\infty}\mu^k w_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi_k(\tau), \qquad (4)$$

где $t=x/\mu,\ \mu=\sqrt[3]{\varepsilon},\ \tau=x/\varepsilon$.

Подставляя (4) в (1) и (2) получим задачи:

$$\varepsilon^3\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v''_k(x)+x^4\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v'_k(x)+(x^4-\varepsilon)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)=f(x)-g_\varepsilon(x),\ x\in[0,1], \qquad (5)$$

$$v_0(1)=b,\ v_k(1)=0,\ k\in N; \qquad (6)$$

$$\mu^4\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k w''_{k-3}(t)+t^4\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k w'_{k-3}(t)+(\mu t^4-1)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k w_{k-3}(x)=g_\mu(t),\ t\in[0,\mu^{-1}], \qquad (7)$$

$$w_k(\mu^{-1})=0,\ k\in N_0; \qquad (8)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi''_k(\tau)+\varepsilon^2\tau^4\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi'_k(\tau)+(\varepsilon^3\tau^4-1)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi_k(\tau)=0,\ \tau\in[0,\varepsilon^{-1}], \qquad (9)$$

$$\pi_0(0)=a-\tilde{\pi}_0(0),\ \pi_k(0)=-\tilde{\pi}_k(0),\ \pi_{k-1}(\varepsilon^{-1})=0,\ k\in N; \qquad (10)$$

где $\tilde{\pi}_0(0)=v_0(0)+\mu^{-3}w_{-3}(0)+\mu^{-2}w_{-2}(0)+\mu^{-1}w_{-1}(0)+w_0(0)+\mu w_1(0)+\mu^2 w_2(0)$,

$\tilde{\pi}_k(0)=v_k(0)+w_{3k}(0)+\mu w_{3k+1}(0)+\mu^2 w_{3k+2}(0)$, $g_\varepsilon(x)$ – пока неизвестная функция.

Пусть $g_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(g_{k,0}+g_{k,1}x+g_{k,2}x^2+g_{k,3}x^3),\ g_{k,j}-const$. Тогда

равенство (5) можно записать в виде:

$$x^4(v'_0(x)+v_0(x))=f(x)-g_{0,0}-g_{0,1}x-g_{0,2}x^2-g_{0,3}x^3,\ v_0(1)=b,$$

$$x^4(v'_k(x)+v_k(x))=v_{k-1}(x)-v''_{k-3}(x)-g_{k,0}+g_{k,1}x+g_{k,2}x^2+g_{k,3}x^3,\ k\in N, \quad (11)$$

$$v_k(1)=0,\ k\in N;$$

где $v_s(x)\equiv 0, s<0.$

Отсюда

$$\left(v_0(x)e^x\right)'=\frac{f(x)-g_{0,0}-g_{0,1}x-g_{0,2}x^2-g_{0,3}x^3}{x^4}e^x,\ v_0(1)=b,$$

или

$$v_0(x)=be^{1-x}+e^{-x}\int_1^x\frac{f(s)-g_{0,0}-g_{0,1}s-g_{0,2}s^2-g_{0,3}s^3}{s^4}e^s ds.$$

Если $g_{0,0}=f(0),\ g_{0,1}=f'(0),\ g_{0,2}=f''(0)/2,\ g_{0,3}=f'''(0)/6$, то

$$v_0(x)=be^{1-x}+e^{-x}\int_1^x\tilde{f}(s)e^s ds,$$

где $\tilde{f}(x)=\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x-\dfrac{f''(0)}{2}x^2-\dfrac{f'''(0)}{6}x^3}{x^4}$, $\tilde{f}(0)=\dfrac{f^{IV}(0)}{24}$ и

$v_0\in C^\infty[0,1].$

Аналогично, задачу (11) запишем в виде

$$\left(v_k(x)e^x\right)'=\frac{F_k(x)-g_{k,0}-g_{k,1}x-g_{k,2}x^2-g_{k,3}x^3}{x^4}e^x,\ v_k(1)=0,$$

где $F_k(x)=v_{k-1}(x)-v''_{k-3}(x),\ k\in N$.

После интегрирования получаем

$$v_k(x)=e^{-x}\int_1^x\frac{F_k(s)-g_{k,0}-g_{k,1}s-g_{k,2}s^2-g_{k,3}s^3}{s^4}e^s ds.$$

Пусть

$$g_{k,0}=F_k(0),\ g_{k,1}=F'_k(0),\ g_{k,2}=F''_k(0)/2,\ g_{k,3}=F'''_k(0)/6,$$

тогда $v_k \in C^{\infty}[0,1]$.

Перейдем теперь к задаче (7)-(8). Правую часть уравнения (7) запишем в виде $g_{\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k}(g_{k,0} + g_{k,1}\mu t + g_{k,2}(\mu t)^2 + g_{k,3}(\mu t)^3)$. При k=0 имеем задачу:

$$t^4 w'_{-3}(t) - w_{-3}(t) = g_{0,0} + g_{0,1}\mu t + g_{0,2}(\mu t)^2 + g_{0,3}(\mu t)^3, \ t \in [0, \mu^{-1}], \ w_{-3}(\mu^{-1}) = 0,$$

или

$$w'_{-3}(t) - t^{-4} w_{-3}(t) = t^{-4}\left(g_{0,0} + g_{0,1}\mu t + g_{0,2}(\mu t)^2 + g_{0,3}(\mu t)^3\right),$$

отсюда

$$\left(w_{-3}(t) e^{\frac{1}{3t^3}}\right)' = t^{-4} e^{\frac{1}{3t^3}}\left(g_{0,0} + g_{0,1}\mu t + g_{0,2}(\mu t)^2 + g_{0,3}(\mu t)^3\right).$$

Интегрируя находим:

$$w_{-3}(t) = e^{-\frac{1}{3t^3}} \int_{\mu^{-1}}^{t} s^{-4} e^{\frac{1}{3s^3}}\left(g_{0,0} + g_{0,1}\mu s + g_{0,2}(\mu s)^2 + g_{0,3}(\mu s)^3\right) ds.$$

Аналогично при k=1,2,… получим задачи:

$$t^4 w'_{-2}(t) - w_{-2}(t) = -t^4 w'_{-3}(t), \ t \in [0, \mu^{-1}], \ w_{-2}(\mu^{-1}) = 0,$$

$$t^4 w'_{-1}(t) - w_{-1}(t) = -t^4 w'_{-2}(t), \ t \in [0, \mu^{-1}], \ w_{-1}(\mu^{-1}) = 0,$$

$$t^4 w'_{3k-3}(t) - w_{3k-3}(t) = -t^4 w'_{3k-4}(t) - w''_{3k-7}(t) + g_{k,0} + g_{k,1}\mu t +$$
$$+ g_{k,2}(\mu t)^2 + g_{k,3}(\mu t)^3, \ t \in [0, \mu^{-1}], \qquad w_{3k-3}(\mu^{-1}) = 0, \ k \in N,$$

$$t^4 w'_{3k-2}(t) - w_{3k-2}(t) = -t^4 w'_{3k-3}(t) - w''_{3k-6}(t), \ t \in [0, \mu^{-1}], \ \ w_{3k-2}(\mu^{-1}) = 0, \ k \in N,$$

$$t^4 w'_{3k-1}(t) - w_{3k-1}(t) = -t^4 w'_{3k-2}(t) - w''_{3k-5}(t), \ t \in [0, \mu^{-1}], \ \ w_{3k-1}(\mu^{-1}) = 0, \ k \in N,$$

Решения этих задач существуют единственны и $w_k \in C^{\infty}[0, \mu^{-1}]$, [2]. Следует отметить, что функций $w_k(t)$ являются функциями пограничного слоя, но эти функций убывают вне пограничного слоя степенным характером.

Известно, что решения задач (9)-(10) существуют, единственны и

экспоненциально убывают вне пограничного слоя [9]-[12].

Докажем, что ряд (4) является асимптотическим.

Оценка остаточного члена. Пусть

$$y_{n,\varepsilon}(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-3}^{3n+3}\mu^k w_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\pi_k(\tau) \quad \text{и} \quad y_\varepsilon(x)=y_{n,\varepsilon}(x)+R_{n,\varepsilon}(x),$$

где $R_{n,\varepsilon}(x)$ – остаточный член разложения.

Тогда относительно $R_{n,\varepsilon}(x)$ получим задачу

$$\varepsilon^3 R''_{n,\varepsilon}(x)+x^4 R'_{n,\varepsilon}(x)+(x^4-\varepsilon)R_{n,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{n+1/3}),\ x\in[0,1], \qquad (12)$$

$$R_{n,\varepsilon}(0)=0,\ R_{n,\varepsilon}(1)=O(e^{-1/\varepsilon}),\ \varepsilon\to 0. \qquad (13)$$

Пусть $R_{n,\varepsilon}(x)=e^{-x}r_{n,\varepsilon}(x)$ тогда задача (12)-(13) примет вид:

$$\varepsilon^3 r''_{n,\varepsilon}(x)+(x^4-2\varepsilon^3)r'_{n,\varepsilon}(x)-\varepsilon(1-\varepsilon^2)r_{n,\varepsilon}(x)=O(\varepsilon^{n+1/3}),\ x\in[0,1],$$

$$r_{n,\varepsilon}(0)=0,\ r_{n,\varepsilon}(1)=O(e^{-1/\varepsilon}),\ \varepsilon\to 0.$$

Для этой задачи применяя теорему [1, с. 116], получаем:

$$|r_{n,\varepsilon}(x)|\le\varepsilon^{n-2/3}c\Rightarrow|R_{n,\varepsilon}(x)|\le\varepsilon^{n-2/3}c,\ 0<c-const.$$

Вывод. Для решения задачи (1) и (2) на отрезке $x\in[0,1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-3}^{3n+3}\varepsilon^{k/3}w_k(x\mu^{-1})+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\pi_k(x\varepsilon^{-1})+O(\varepsilon^{n-2/3}),\ \varepsilon\to 0.$$

Литература

1. Ильин, А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009– 248 с.

2. Tursunov, D.A. (2018) Asymptotic Solution of Linear Bisingular Problems With Additional Boundary Layer. Russian Mathematics. Vol. 62, No. 3, 2018 – P. 60–6. DOI: 10.3103/S1066369X18030088

3. Tursunov, D.A. (2017) The Asymptotic Solution of the Three-Band Bisingularly Problem. Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 38, No. 3,

2017-P. 542–546. DOI: 10.1134/S1995080217030258

4. Nayfeh, A. H. Introduction to Perturbation Techniques. New York, Toronto. 1981.

5. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Робена с иррегулярной особенностью // Вестник ОшГУ. – № 3. 2019 – С. 19-23.

6. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения второй краевой задачи с иррегулярной особенностью // Вестник ОшГУ. – 2019. – № 3. – С. 14-19.

7. Kozhobekov K.G., Erkebaev U.Z., Tursunov D.A. Asymptotics of the Solution to the Boundary-value Problems when Limited Equation Has Singular Point Lobachevskii Journal of Mathematics. V. 41. No 1. 2020 – P. 96-101.

8. Кожобеков, К.Г., Турсунов, Д.А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – Т.29. – Вып. 3. 2019 – С.332–340.

9. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 54. 2018 – С.46–57 DOI: 10.17223/19988621/54/4.

10. Турсунов Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем // Изв. вузов. Математика. № 3. 2018 – С.70–78. DOI: 10.3103/S1066369X18030088.

11. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена // Сиб. электрон. матем. изв. – Т.14. – С.10–21. DOI 10.17377/semi. 2017.14.002

12. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. – Т. 22. № 1. С.271–281.

УДК 514.75

Т.М. ПАПИЕВА, М.Х. АБДУЛАЗИЗОВА, Б.Т. АДИЕВА,
Э.М. ИСАКОВА, МАКСАТБЕК К Б.

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИДВОЙНОЙ ЛИНИИ ПАРЫ $\left(f_1^5,\Delta_3\right)$ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_5

В области $\Omega\subset E_5$ рассмотрено семейство гладких линий так, что через каждую точку $X\in\Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной репер $\Re=\left(X,\vec{e}_i\right)\left(i,j,k=\overline{1,5}\right)$ является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Σ_5 Френе. На касательной линии ω^1 сети Σ_5 инвариантным образом определяется точка F_1^5. Когда точка X смещается в области Ω, псевдофокус F_1^5 описывает свою область Ω_1^5. Этим определяется частичное отображение $f_1^5:\Omega\to\Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X)=F_1^5$. Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5,\Delta_3\right)$, где $\Delta_3=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_4,\vec{e}_5\right)$ – трехмерное распределение.

Ключевые слова: *евклидово пространство, репер Френе, сеть Френе, частичное отображение, распределение.*

1. Введение. В области Ω евклидова пространства E_5, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X\in\Omega$ проходит

одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i \right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4,5 \right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k . \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0 . \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_5 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_5, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j . \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i . \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3) получим:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j .$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j .$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^{k} - \Lambda_{i\ell}^{k}\omega_{j}^{\ell} - \Lambda_{\ell j}^{k}\omega_{i}^{\ell} = \Lambda_{ijm}^{k}\omega^{m}$$

или

$$d\Lambda_{ij}^{\ k} = \left(\Lambda_{ijm}^{\ k} + \Lambda_{il}^{\ k}\Lambda_{\ jm}^{l} + \Lambda_{lj}^{\ k}\Lambda_{\ im}^{l}\right)\omega^{m}. \qquad (5)$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^{k}, \Lambda_{ijm}^{k}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^{1} заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2, \qquad d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^{1}\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^{3}\vec{e}_3,$$

$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^{2}\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^{4}\vec{e}_4, \qquad d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^{\ 3}\vec{e}_3 + \Lambda_{41}^{5}\vec{e}_5,$$

$$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^{\ 4}\vec{e}_4,$$

и $$\Lambda_{11}^{\ 3} = -\Lambda_{11}^{\ 3} = 0, \ \Lambda_{11}^{\ 4} = -\Lambda_{41}^{\ 1} = 0, \Lambda_{11}^{\ 5} = -\Lambda_{51}^{\ 1} = 0, \qquad (6)$$

$$\Lambda_{21}^{\ 5} = -\Lambda_{51}^{\ 2} = 0, \ \Lambda_{21}^{\ 4} = -\Lambda_{41}^{\ 2} = 0, \Lambda_{31}^{\ 5} = -\Lambda_{51}^{\ 3} = 0. \qquad (7)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^{2}$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^{3}$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^{4}$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^{\ 5} = -\Lambda_{51}^{\ 4}$ - первая, вторая, третья и четвертая кривизны линии ω^{1} соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^{1}).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^{i} сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\ j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

На каждой касательной $\left(X, \vec{e}_i\right)$ существуют по четыре псевдофокуса. На прямой $\left(X, \vec{e}_1\right)$ существуют псевдофокусы $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5$, на прямой $\left(X, \vec{e}_2\right)$ – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5$, на прямой $\left(X, \vec{e}_3\right)$

– $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5$, на прямой $(X, \vec{e}_4)$ – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5$, на прямой $(X, \vec{e}_5)$ – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4$.

Сеть Σ_5 в $\Omega \subset E_5$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$, $\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\Re_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5 сети Σ_5 одновременно.

Пусть сеть Σ_5 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_5$. Псевдофокус $F_1^5 \in (X, \vec{e}_i)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^5 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1. \qquad (9)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_5$, псевдофокус F_1^5 описывает свою область $\Omega_1^5 \subset E_5$. Определяется частичное отображение $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.

2. Материалы и методы исследования. Метод внешних форм Картана и подвижного репера. Продифференцируем обычным образом (9) и учитываем деривационные формулы:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1\right) = d\vec{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}d\vec{e}_1 = \omega^i\vec{e}_1 - \frac{d\Lambda_{15}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Учитывая равенство (3), (5)отсюда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^{\ell} + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^{\ell}\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i .$$

Введем обозначение:

$$B_{15m}^5 = \Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^{\ell} + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^{\ell}.$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B^5_{15m}\omega^m}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{1m}\omega^m}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i$$

или $d_1\overrightarrow{F_1^5} = \left[\vec{e}_1 + \frac{B^5_{151}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{11}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B^5_{152}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B^5_{153}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B^5_{154}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e}_5 + \frac{B^5_{155}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^5.$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B^5_{151}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{11}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i; \qquad \vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B^5_{152}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B^5_{153}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i; \qquad \vec{b}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B^5_{154}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_5 = \vec{e}_5 + \frac{B^5_{155}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i.$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^1\vec{b}_1 + \omega^2\vec{b}_2 + \omega^3\vec{b}_3 + \omega^4\vec{b}_4 + \omega^5\vec{b}_5.$$

Так как заданная сеть Σ_5 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B^5_{151}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2; \; \vec{b}_2 = \frac{B^5_{152}}{\left(\Lambda^5_{15}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^5_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^{5}_{153}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{2}_{13}}{\Lambda^{5}_{15}}\vec{e}_2 + \overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda^{5}_{13}}{\Lambda^{5}_{15}}\vec{e}_5; \qquad (10)$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^{5}_{154}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{2}_{14}}{\Lambda^{5}_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda^{5}_{14}}{\Lambda^{5}_{15}}\vec{e}_5; \qquad \vec{b}_5 = \frac{B^{5}_{155}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{2}_{15}}{\Lambda^{5}_{15}}\vec{e}_2.$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

Линии $\omega^i,\ g(\omega^i)=\bar{\omega}^i$ называют двойными линиями отображения g, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ пересекаются, либо параллельны [6].

Линии $\omega^i,\ g(\omega^i)=\bar{\omega}^i$ в E_5 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные к ним взятые в соответствующих точках X, $g(X)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_5.

3. Основные результаты исследования.

$\Delta_{(125)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_5),\ \vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^5\vec{e}_5,\ \ \vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{b}_1 + \gamma^2\vec{b}_2 + \gamma^5\vec{b}_5$

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\left(b^1_1\vec{e}_1 + b^2_1\vec{e}_2\right) + \gamma^2\left(b^1_2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b^5_2\vec{e}_5\right) + \gamma^5\left(b^1_5\vec{e}_1 + b^2_5\vec{e}_2\right),$$

$$\vec{\bar{\gamma}} = \left(\gamma^1 b^1_1 + \gamma^2 b^1_2 + \gamma^5 b^1_5\right)\vec{e}_1 + \left(\gamma^1 b^2_1 + \gamma^2 + \gamma^5 b^2_5\right)\vec{e}_2 + \gamma^2 b^5_2\vec{e}_5.$$

Очевидно что $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF^5_1} \in \Delta_{(125)}$, следовательно линия $\gamma \in \Delta_{(125)}$ всегда является квазидвойной линией отображения F^5_1.

Рассмотрим линию β, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(145)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$. Её направляющий вектор имеет вид $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^4\vec{e}_4 + \beta^5\vec{e}_5$. Направляющий вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f^5_1(\beta)$ имеет вид:

$$\vec{\vec{\beta}} = \beta^1 \vec{b}_1 + \beta^4 \vec{b}_4 + \beta^5 \vec{b}_5.$$

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\vec{\vec{\beta}} = \beta^1 \left(b_1^1 \vec{e}_1 + b_1^2 \vec{e}_2 \right) + \beta^4 \left(b_4^1 \vec{e}_1 + b_4^2 \vec{e}_2 + \vec{e}_4 + b_4^5 \vec{e}_5 \right) + \beta^5 \left(b_5^1 \vec{e}_1 + b_5^2 \vec{e}_2 \right)$$

или

$$\vec{\vec{\beta}} = \left(\beta^1 b_1^1 + \beta^4 b_4^1 + \beta^5 b_5^1 \right) \vec{e}_1 + \left(\beta^1 b_1^2 + \beta^4 b_4^2 + \beta^5 b_5^2 \right) \vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4 + \beta^4 b_4^5 \vec{e}_5.$$

Из условия $\vec{\beta},\ \vec{\vec{\beta}},\ \overrightarrow{XF_1^5} \in \Delta_{(145)}$ имеем:

$$\beta^1 b_1^2 + \beta^4 b_4^2 + \beta^5 b_5^2 = 0.$$

Учитывая формул (10) отсюда получим:

$$\beta^1 \left[1 + \frac{\beta_{151}^5}{\left(\Lambda_{15}^5 \right)^2} \right] - \beta^4 \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{15}^5} - \beta^5 \frac{\Lambda_{15}^2}{\Lambda_{15}^5} = 0,$$

или

$$\left[\left(\Lambda_{15}^5 \right)^2 + \beta_{151}^5 \right] \beta^1 - \Lambda_{14}^2 \Lambda_{15}^5 \beta^4 - \Lambda_{15}^2 \Lambda_{15}^5 \beta^5 = 0, \qquad (11)$$

где $\beta_{151}^5 = d_1 \Lambda_{15}^5 = d_1 \left(\vec{\Lambda}_{15} \vec{e}_5 \right),\ \vec{\Lambda}_{15} = d_1 \vec{e}_5.$

Верно и обратное, т.е. если имеет место (11), то линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5.

4. Выводы. Таким образом доказана

Теорема. Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(145)}$, является квазидвойной линией отображения f_1^5 тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора $\vec{\beta}$ удовлетворяют условию (11).

Литература

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст]/ П.К.Рашевский// Москва. Наука.1967.-С.481-482.

2. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст]/ И.А.Схоутен,Д.Дж.Стройк. // Москва. ИЛ.1948.Т.II-348.

3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст]/ С.П. Фиников // М-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432.

4. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст]/ В.Т Базылев // Литовский математический сборник. – 1966. – VI. – №4. – С.475-491.

5. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г.Матиева // Монография. Ош, 2003. – С.212-219.

6. Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [Текст] / В.Т Базылев // Изв. ВУЗов Математика. – 1967. – С.3-11.

Математика, физика, техника. 2021. №1

УДК 517.956.6

А. СОПУЕВ, З.М. БЕКМАМАТОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИЙ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

Методом интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка.

Ключевые слова: *краевые условия, функция Грина, задача Гурса, функция Римана, уравнения Фредгольма и Вольтера.*

1. Постановка задачи. Пусть D – прямоугольник ограниченный линиями $AA_1: x=0,\quad A_1B_1: y=h,\quad BB_1: x=\ell$ $(\ell, h>0)$ и отрезками прямых $AC: y=-x,\quad BC: y=x-\ell,$ где $C\left(\frac{\ell}{2};-\frac{\ell}{2}\right)$ – точка пересечения прямых, $D_1=D\cap(y>0),\quad D_2=D\cap(y<0)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}(D_1)\cup$ $\cup C^{4+0}(D_2)\cup C^{2+2}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$u_{xxxx}+u_{xxyy}=0 \tag{1}$$

и краевым условиям:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\ u_{xx}(\ell,y)=\varphi_4(y),\ \ 0\le y\le h, \tag{3}$$

$$u(x,h)=\varphi(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{4}$$

а также удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$u_{xxxx} - u_{xxyy} = 0 \tag{5}$$

и краевым условиям:

$$u\big|_{AC} = \psi_1(y), \tag{6}$$

$$u_x\big|_{AC} = \psi_2(y), \tag{7}$$

$$u_{xx}\big|_{AC} = \psi_3(y), \quad -\frac{\ell}{2} \le y \le 0, \tag{8}$$

где $\varphi(x),\ \varphi_i(y),\ \psi_j(x),\ (i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,3})$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования

$$\begin{gathered}\varphi_i(y) \in C^3[0,h],\ (i=1,2),\ \varphi_k(y) \in C^2[0,h],\ (k=3,4),\\ \varphi(x) \in C^3[0,\ell],\ \psi_1(y) \in C^3[-\frac{\ell}{2},0],\ \psi_2(y) \in C^2[-\frac{\ell}{2},0], \psi_3(y) \in C^1[-\frac{\ell}{2},0],\end{gathered} \tag{9}$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0),\ \varphi_1'(0) = \psi_2(0),\ \varphi_3(0) = \psi_3(0),\ \varphi(0) = \varphi_1(h),\ \varphi_2(h) = \varphi(\ell). \tag{10}$$

Из постановки задачи 1, как следствие, вытекают следующие условия сопряжения:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x),\ u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = \mu(x),\ \ 0 \le x \le \ell, \tag{11}$$

где $\tau(x)$ и $\mu(x)$ – пока неизвестные функции.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y) \in C^2(\bar{D}_1) \cap \left[C^{4+0}(D_1) \cup C^{2+2}(D_1)\right]$ удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1), краевым условиям (2)–(4) и условию

$$u(x,+0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{12}$$

Задача 3. Найти функцию $u(x,y) \in C^3(\bar{D}_2) \cap \left[C^{4+0}(D_2) \cup C^{2+2}(D_2)\right]$, удовлетворяющую в области D_2 уравнению (5), краевым условиям (6) – (8) и условию

$$u(x,-0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell. \tag{13}$$

Исследования краевых задач для уравнений смешанного и смешанно-составного типов рассмотрены в работах [1] - [7].

2. Соотношение, полученное из области D_1. Обозначив

$$u_{xx} + u_{yy} = z(x, y), \quad (x, y) \in D_1, \tag{14}$$

где $z(x, y)$ – новая неизвестная функция, из уравнения (1) для функции $z(x, y)$ получаем уравнение

$$z_{xx}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D_1,$$

общее решение, которого имеет вид:

$$z(x, y) = \omega_1(y)x + \omega_2(y), \tag{15}$$

где $\omega_1(y)$ и $\omega_2(y)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Из краевых условий (2), (3) и в силу (14), нетрудно получить следующие условия:

$$z(0, y) = \varphi_3(y) + \varphi_1''(y), \quad z(\ell, y) = \varphi_4(y) + \varphi_2''(y), \quad 0 \le y \le h.$$

Используя эти условия из (14) найдем неизвестные функции

$$\begin{aligned} &\omega_2(y) = \varphi_3(y) + \varphi_1''(y), \quad 0 \le y \le h, \\ &\omega_1(y) = \frac{1}{\ell}\left[\varphi_4(y) + \varphi_2''(y) - \varphi_3(y) - \varphi_1''(y)\right], \quad 0 \le y \le h. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя эти значения в (15) найдем

$$z(x, y) = \omega_1(y)x + \omega_2(y) \equiv z_0(x, y),$$

где $z_0(x, y)$ – уже известная функция и является правой частью уравнения (14). Таким образом, уравнение (14) перепишем в виде

$$u_{xx} + u_{yy} = z_0(x, y), \ (x, y) \in D_1 \tag{17}$$

Переходя в (17) к пределу при $y \to +0$ имеем соотношение, полученное из области D_1:

$$\tau''(x) + \mu(x) = z_0(x, 0), \ 0 \le x \le \ell. \tag{18}$$

Решая уравнение (18) относительно $\tau(x)$, при краевых условиях

$\tau(0)=\varphi_1(0)$, $\tau(\ell)=\varphi_2(0)$, будем иметь

$$\tau(x)=\alpha(x)+\int_0^{\ell} G(x,t)\mu(t)dt, \tag{19}$$

где

$$\alpha(x)=\varphi_1(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]+\int_0^{\ell} G(x,t)z_0(t,0)dt,$$

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(t-\ell)}{\ell}, & 0\le x<t,\\ \dfrac{t(x-\ell)}{\ell}, & t\le x\le \ell,\end{cases}$$ – функция Грина.

3. Представление решения аналога задачи Дарбу. Рассмотрим задачу Дарбу, заключающая в определении решения уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6) – (8) и условию:

$$u(x,-0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell. \tag{20}$$

Общее решение уравнения (5) может быть выражено

$$u(x,y)=xg_1(y)+g_2(y)+\Phi(x+y)+\Psi(x-y), \tag{21}$$

где $g_1(y)$, $g_2(y)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции в $\left(-\frac{\ell}{2},0\right)$; $\Phi(x+y)$ и $\Psi(x-y)$ – произвольные четырежды непрерывно дифференцируемые функции.

Используя условия (6) – (8) из (21) получим

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\psi_1(y)+(x+y)\psi_2(y)-2(x+y)\int_y^0\psi_3(t)dt-4\int_y^0(y-t)^2\psi_3(t)dt-\\&-(x-y)\Psi'(0)-(x+y)\Phi'(0)-2xy\Phi''(0)+F_1(x+y)+F_2(x-y),\end{aligned} \tag{22}$$

где $F_1(x+y)=\Phi(x+y)-\Phi(0)$, $F_2(x-y)=\Psi(x-y)-\Psi(0)$,

$$\Psi(x-y)=4\int_{\frac{y-x}{2}}^0\left(\frac{y-x}{2}-t\right)^2\psi_3(t)dt-\frac{1}{2}(y-x)^2\Phi''(0)-(y-x)\Psi'(0)+\Psi(0).$$

Далее, подставляя (22) в (13) будем определять функции $\Phi(x+y)$, т.е.

$$\Phi(x+y)=\tau(x+y)+(x+y)\left(\Psi'(0)+\Phi'(0)-\psi_2(0)\right)+F_2(x+y)+\Phi(0)-\Psi_1(0) \qquad (23)$$

или

$$F_1(x+y)=\tau(x+y)-\psi_1(0)+F_2(x+y)+(x+y)\left(\Psi'(0)+\Phi'(0)-\psi_2(0)\right).$$

Теперь, исключая $F_2(x+y)$ из (22) и (23), получим

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\Psi_1(y)+(x+y)\left(\psi_2(y)-\psi_2(0)\right)-2\int_y^0\left(x+y+2\left(y-t\right)^2\right)\psi_3(t)+\\ &+\tau(x+y)+F_2(x+y)+F_2(x-y)+2y\Psi'(0)-2xy\Phi''(0), \end{aligned} \qquad (24)$$

где $\Psi_1(y)=\psi_1(y)-\psi_1(0),\ \Psi_2(y)=\psi_2(y)-\psi_2(0),$ причем $\tau(0)=\psi_1(0),\ \tau'(0)=\psi_2(0),$ $\tau''(0)=\psi_3(0).$

4. Соотношение, полученное из области D_2. Введем обозначение

$$u_{xx}-u_{yy}=\vartheta(x,y),\ (x,y)\in D_2, \qquad (25)$$

где $\vartheta(x,y)$ – новая неизвестная функция. Тогда, из уравнения (5) для функции $\vartheta(x,y)$ получаем уравнение

$$\vartheta_{xx}=0,\ (x,y)\in D_2,$$

общее решение которого имеет вид

$$\vartheta(x,y)=x\lambda(y)+\rho(y), \qquad (26)$$

где $\lambda(y)$ и $\rho(y)$ – произвольные непрерывные функции.

Из краевых условий (6) – (8), в силу обозначения (25), нетрудно получить следующие условия:

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,y)\big|_{AC}=-\psi_1''(y)-2\psi_2'(y),\ -\frac{\ell}{2}\le y\le 0,\\ &\vartheta_x(x,y)\big|_{AC}=-\psi_2''(y)-2\psi_3'(y),\ -\frac{\ell}{2}\le y\le 0. \end{aligned} \qquad (27)$$

Используя эти условия из (26) найдем неизвестные функции

$$\begin{aligned} &\lambda(y)=-\psi_2''(y)-2\psi_3'(y),\ -\frac{\ell}{2}<y<0,\\ &\rho(y)=-\psi_1''(y)-2\psi_2'(y)-y[\psi_2''(y)+2\psi_3'(y)],\quad -\frac{\ell}{2}<y<0. \end{aligned} \qquad (28)$$

Подставляя эти значения в (26) найдем

$$\vartheta(x,y) = -\psi_1''(y) - 2\psi_2'(y) - (x+y)[\psi_2''(y) + 2\psi_3'(y)] \equiv \vartheta_0(x,y), \tag{29}$$

где $\vartheta_0(x,y)$ – уже известная функция и представляет собой правую часть уравнения (25). Следовательно, уравнение (25) перепишем в виде

$$u_{xx} - u_{yy} = \vartheta_0(x,y),\ (x,y) \in D_2. \tag{30}$$

Отсюда переходя к пределу при $y \to 0$ имеем соотношение, полученное из области D_2:

$$\tau''(x) - \mu(x) = \vartheta_0(x,0),\ 0 \le x \le \ell. \tag{31}$$

Исключив $\tau''(x)$ из (18) и (31), найдем

$$\mu(x) = \frac{1}{2}[z_0(x,0) - \vartheta_0(x,0)],\ 0 \le x \le \ell. \tag{32}$$

Определив $\mu(x)$ по формуле (32) и подставляя её значение в (19) будем знать $\tau(x),$ и тем самым решение задачи 3.

5. Решение задачи 1 в области D_1. После определения $\tau(x)$ решение задачи 1 в области $D_1,$ определяется как решение задачи 2. В пункте 2 показано, что из уравнения (1) после двукратного интегрирования с учетом условий (3) получено уравнение (17). Следовательно, решение задачи 2 эквивалентно сводится к решению задачи Дирихле для уравнения (17) с краевыми условиями (2), (4) и $u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell,$ решение которой представимо в виде [8]

$$u(x,y) = \int_0^\ell G_\eta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi - \int_0^\ell G_\eta(x,y;\xi,h)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^h G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta -$$
$$-\int_0^h G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d(\eta) - \int_0^\ell d\xi \int_0^h G(x,y;\xi,\eta)z_0(\xi,\eta)d\eta, \tag{33}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4\ell h}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h^2n^2+\ell^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{h}y\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\ell}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi m}{h}\eta\right)\ -$$

функция Грина.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Если выполняются условия (9), (10) то решение задачи 1 существует, оно единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (33) и (24) соответственно.

Литература

1. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

3. Салахитдинов, М.С. К спектральной теории уравнений смешанного типа [Текст] / М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов // Ташкент: MUMTOZ SO'Z, 2010. – 356 с.

4. Смирнов, М.М. Первая краевая задача для одного гиперболического уравнения 4-го порядка [Текст] / М.М. Смирнов // Вестник ЛГУ. – Серия мат., мех. и астрон. – 1958. – №19. – Вып. 4. – С. 55 – 57.

5. Смирнов, М.М. Модельное уравнение смешанного типа четвертого порядка [Текст] / М.М. Смирнов // Ленинград: Изд-во ЛГУ. – 1972. – 123 с.

6. Бобылёва, Л.А. Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа четвёртого порядка [Текст] / Л.А. Бобылёва, М.М. Смирнов // Известия Вузов. Математика. – 1972. – №5 (120). – С. 15 – 11.

7. Sopuev, A. Revisiting the Mixed Problem for Equations of Compound and Hyperbolic Types of Order Four / A. Sopuev, S. Babaev, Z.M. Bekmamatov Revisiting the mixed problem for equations of compound end hyperbolic types of order four // Growth poles of the global economy: emergence, changes and future perspectives. Lecture notes in networks and system. – 2020. – 73. – V.1. – P.725-736.

8. Полянин, А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин - М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

УДК 517.955.8

З.М. СУЛАЙМАНОВ, У.З. ЭРКЕБАЕВ, Г.З. АБАСОВА,
Д.А. ТУРСУНОВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Рассматривается неоднородная первая краевая задача, т. е. задача Дирихле в кольце для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, содержащего малый параметр перед лапласианом. Потенциал уравнения является гладкой функцией в исследуемой области, но обращается в нуль внутри кольца. Решение исследуемой первой краевой задачи существует и единственно. Явное решение первой краевой задачи построить невозможно. Поэтому требуется построить асимптотическое решение первой краевой задачи в кольце. Исследуемая задача имеет две сингулярности (бисингулярная задача): присутствие малого параметра перед лапласианом и решение соответствующего невозмущенного уравнения не является гладкой функцией в рассматриваемой области. Для построения асимптотического решения применяем модифицированный метод пограничных функций, так как классический метод пограничных функций применить невозможно. Для начала строим формальное асимптотическое решение по малому параметру, а потом оцениваем остаточный член асимптотического разложения.

Ключевые слова: *задача Дирихле для кольца, бисингулярная задача, асимптотика, оператор Лапласа, малый параметр, возмущенная задача, уравнение эллиптического типа, сингулярная задача.*

Рассмотрим краевую задачу Дирихле

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right)-(\rho-\rho_0)^2 u_\varepsilon(\rho,\varphi)=f_\varepsilon(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D, \quad (1)$$

$$u_\varepsilon(a,\varphi)=\psi_1(\varphi),\ \ u_\varepsilon(b,\varphi)=\psi_2(\varphi),\ \ \varphi\in[0,2\pi], \qquad (2)$$

где $0<\varepsilon<<1$, $f_0(\rho_0,\varphi)\neq 0$, $\rho_0\in(a,b)$, $f_\varepsilon(\rho,\varphi)\in C^\infty(\bar{D})$, a, b, ρ_0 – известные постоянные, $\psi_1(\varphi)$ и $\psi_2(\varphi)$ достаточно гладкие известные функции, $u_\varepsilon(\rho,\varphi)$ – искомая функция, область D представляет кольцо: $D=\{(\rho,\varphi)\mid a<\rho<b,\ 0\le\varphi<2\pi\}$.

Различные бисингулярные задачи исследованы в работах [1-11].

1) Пусть асимптотическое приближение решения задачи (1) и (2) имеет вид:

$$u_\varepsilon(\rho,\varphi)=Z_\varepsilon(\rho,\varphi)+P_\lambda(\xi,\varphi)+Q_\lambda(\eta,\varphi)+\chi(\rho)W_\mu(\tau,\varphi), \qquad (3)$$

где $Z_\varepsilon(\rho,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\rho,\varphi)$, $W_\mu(\tau,\varphi)=\sum_{k=-2}^{\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$, $\tau=(\rho-\rho_0)/\mu$, $\mu=\sqrt[4]{\varepsilon}$,

$P_\lambda(\xi,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k p_k(\xi,\varphi)$, $\xi=(b-\rho)/\lambda$, $\lambda=\sqrt{\varepsilon}$,

$Q_\lambda(\eta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)$, $\eta=(\rho-a)/\lambda$, $\chi(\rho)$ – функция сглаживания

(иногда называют функцией срезки):

$\chi(\rho)\in[a,b]$, $\chi\in C^\infty[a,b]$, $\chi(\rho)\equiv 1$ при $|\rho-\rho_0|\le\delta/3$, и $\chi(\rho)\equiv 0$ при $2\delta/3\le|\rho-\rho_0|$, $0<\delta$ – достаточно малое число, независящее от ε.

Дифференциальное уравнение (1) можно записать в виде

$$\varepsilon\Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi)-(\rho-\rho_0)^2u_\varepsilon(\rho,\varphi)=f_\varepsilon(\rho,\varphi)-\chi(\rho)h_\varepsilon(\rho,\varphi)+\chi(\rho)h_\varepsilon(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D, \qquad (4)$$

где $\Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi)=\dfrac{\partial^2u_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2u_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}$..

Подставляя формальный ряд (3) в дифференциальное уравнение (4) получим

$$\varepsilon\Delta Z_\varepsilon(\rho,\varphi)+\varepsilon\tilde{Z}_\varepsilon(\rho,\varphi)-(\rho-\rho_0)^2Z_\varepsilon(\rho,\varphi)=f_\varepsilon(\rho,\varphi)-\chi(\rho)h_\varepsilon(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D, \qquad (5)$$

$$\mu^2\left(\frac{\partial^2 W_\mu(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}+\mu\tilde{\rho}_0\frac{\partial W_\mu(\tau,\varphi)}{\partial\tau}+(\mu\tilde{\rho}_0)^2\frac{\partial^2 W_\mu(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right)-(\mu\tau)^2 W_\mu(\tau,\varphi)= \tag{6}$$

$$=h\left(\rho_0+\tau\mu,\varphi,\mu^4\right),\ (\tau,\varphi)\in D_\tau,$$

$$\frac{\partial^2 Q_\lambda(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}+\lambda a_0\frac{\partial Q_\lambda(\eta,\varphi)}{\partial\eta}+(\lambda a_0)^2\frac{\partial^2 Q_\lambda(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}-\left(a_1+\eta\lambda\right)^2 Q_\lambda(\eta,\varphi)=0,\ (\eta,\varphi)\in D_\eta, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 P_\lambda(\xi,\varphi)}{\partial\xi^2}-\lambda b_0\frac{\partial P_\lambda(\xi,\varphi)}{\partial\xi}+(\lambda b_0)^2\frac{\partial^2 P_\lambda(\xi,\varphi)}{\partial\varphi^2}-\left(b_1+\xi\lambda\right)^2 P_\lambda(\xi,\varphi)=0,\quad (\xi,\varphi)\in D_\xi \tag{8}$$

где $\tilde{Z}_\varepsilon(\rho,\varphi)=\chi''(\rho)W_\mu(\rho,\varphi)+\chi'(\rho)\left(2\frac{\partial W_\mu(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+\frac{W_\mu(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{z}_k(\rho,\varphi)$,

$\frac{1}{\rho_0+\tau\mu}=\tilde{\rho}_0$, $\frac{1}{a+\eta\lambda}=a_0$, $\frac{1}{b-\xi\lambda}=b_0$, $\tilde{\rho}_0,a_0,b_0\in\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$,

$b_1=\tilde{\rho}_0-b,\ a_1=\tilde{\rho}_0-a,$ $D_\tau=\{(\tau,\varphi)\,|\,\tau\in R,\ 0\le\varphi<2\pi\}$,

$D_\eta=\{(\eta,\varphi)\,|\,0<\eta<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\}$, $D_\xi=\{(\xi,\varphi)\,|\,0<\xi<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\}$.

Из (5), приравнивая коэффициентные-функции при одинаковых степенях малого параметра, однозначно определяем функции $z_k(\rho,\varphi)$:

$$z_0(\rho,\varphi)=-\frac{f_0(\rho,\varphi)-\chi(\rho)h_0(\rho,\varphi)}{(\rho-\rho_0)^2}\ ,$$

$$z_k(\rho,\varphi)=-\frac{f_k(\rho,\varphi)-\Delta z_{k-1}(\rho,\varphi)-\chi(\rho)h_k(\rho,\varphi)}{(\rho-\rho_0)^2}+\frac{\tilde{z}_{k-1}(\rho,\varphi)}{(\rho-\rho_0)^2},\quad k\in\mathbf{N}.$$

Введем обозначение:

$$g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta z_{k-1}(\rho,\varphi),\ k\in N_0,\ v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0.$$

И здесь неизвестные функций $h_k(\rho,\varphi)$ подберем так чтобы функций $z_k(\rho,\varphi)$ были $z_k\in C^\infty\left(\bar{D}\right)$, $k\in\mathbf{N_0}$:

$$h_k(\rho,\varphi)=g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(\rho-\rho_0)+\sum_{j=2}^{\infty}h_{k,j}(\varphi)(\rho-\rho_0)^j\ ,\ k\in\mathbf{N_0},$$

где $g_{k,0}(\varphi) = g_k(\rho_0, \varphi)$, $g_{k,1}(\varphi) = \dfrac{\partial g_k(\rho_0, \varphi)}{\partial \rho}$, $h_{k,j}(\varphi)$ – пока неизвестные функции, они конкретизируются при построении ряда $W_\mu(\tau, \varphi) = \sum_{k=-2}^{\infty} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} w_{k-2}(\tau, \varphi) = 0,\ k \in N_0.$$

Таким образом, построено гладкое внешнее решение $Z_\varepsilon(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\rho, \varphi)$, $z_k \in C^\infty(\bar{D})$.

Перейдем к исследованию уравнения (6).

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\frac{\partial^2 w_{k-2}(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^2 w_{k-2}(\tau, \varphi) \right) =$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \left(\tilde{\rho}_0 \frac{\partial w_k(\tau, \varphi)}{\partial \tau} + \mu \tilde{\rho}_0^2 \frac{\partial^2 w_k(\tau, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} \left(g_{k,0}(\varphi) + g_{k,1}(\varphi) \mu \tau \right).$$

Отсюда, собирая коэффициенты при одинаковых степенях μ, имеем:

$$Lw_{-2} \equiv \frac{\partial^2 w_{-2}(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^2 w_{-2}(\tau, \varphi) = g_{0,0}(\varphi),\ (\tau, \varphi) \in D_\tau,\ \lim_{\tau \to \pm\infty} w_{-2}(\tau, \varphi) = 0 \qquad (9)$$

$$Lw_{-1} = g_{0,1}(\varphi)\tau - \frac{\partial w_{-2}(\tau, \varphi)}{\partial \tau},\ (\tau, \varphi) \in D_\tau,\ \lim_{\tau \to \pm\infty} w_{-1}(\tau, \varphi) = 0 \qquad (10)$$

$$Lw_{4k+m} = -\frac{\partial^2 w_{4k+m-2}(\tau, \varphi)}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w_{4k+m-1}(\tau, \varphi)}{\partial \tau},\ (\tau, \varphi) \in D_\tau,\ m = 0,1,\ \lim_{\tau \to \pm\infty} w_{4k+m}(\tau, \varphi) = 0 \qquad (11)$$

$$Lw_{4k+m+2} = -\frac{\partial^2 w_{4k+m}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w_{4k+m+1}}{\partial \tau} + g_{k+1,m}(\varphi)\tau^m,\ (\tau, \varphi) \in D_\tau,\ m = 0,1,\ \lim_{\tau \to \pm\infty} w_{4k+m+2}(\tau, \varphi) = 0 \qquad (12)$$

Теорема 1. Задача

$$\frac{\partial^2 v(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^2 v(\tau, \varphi) = \alpha_0(\varphi) + \tau \alpha_1(\varphi),\ (\tau, \varphi) \in D_\tau,\ \lim_{\tau \to \pm\infty} v(\tau, \varphi) = 0 \qquad (13)$$

имеет единственное решение, где $\alpha_1(\varphi), \alpha_2(\varphi) \in C^\infty[0, 2\pi]$.

Доказательство. Пусть $\tau = \sqrt{2}t$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 v(t,\varphi)}{\partial t^2} - 4t^2 v(t,\varphi) = 2\alpha_0(\varphi) + 2\sqrt{2}t\alpha_1(\varphi).$$

Соответствующее однородное уравнение имеет два независимых решения: $\{U_4(t), U_4(-t)\}$, где $U_4(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K_{1/4}(t^2), t > 0$, $K_{1/4}$ – функция Макдональда.

С помощью $\{U_4(t), U_4(-t)\}$ запишем явное решение задачи (13):

$$v(t,\varphi) = 4\sqrt{2}U_4(t)\int_{-\infty}^{t} U_4(-s)F(s,\varphi)ds + 4\sqrt{2}U_4(-t)\int_{t}^{+\infty} U_4(s)F(s,\varphi)ds,$$

где $F(s,\varphi) = 2\alpha_0(\varphi) + 2\sqrt{2}s\alpha_1(\varphi).$

Так как при $|t|\to+\infty$: $F(t,\varphi) = O(t)$, то учитывая асимптотические поведения функций $\{U_4(t), U_4(-t)\}$ при $|t|\to+\infty$ имеем $v(t,\varphi)=O(1/t)$, а если $F(t,\varphi) = O(1)$, то $v(t,\varphi)=O(1/t^2)$. Теорема 1 доказана.

С помощью этой теоремы доказывается существование, единственность и ограниченность решений задач (9)-(12).

Перейдем к рассмотрению уравнений (7) и (8). Из граничных условий (2) имеем:

$$\psi_1(\varphi) = Z_\varepsilon(a,\varphi) + P_\lambda((b-a)/\lambda,\varphi) + Q_\lambda(0,\varphi) + \chi(a)W_\mu((a-\rho_0)/\mu,\varphi),$$

так как $\chi(a) \equiv 0$ и $\lim\limits_{\xi\to\infty} P_\lambda(\xi,\varphi) = 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ \lambda\to 0,$ то отсюда имеем:

$$Q_\lambda(0,\varphi) = \psi_1(\varphi) - Z_\varepsilon(a,\varphi),\ \lim_{\eta\to\infty} Q_\lambda(\eta,\varphi) = 0,\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Аналогично, для $P_\lambda(\xi,\varphi)$ получим условия:

$$P_\lambda(0,\varphi) = \psi_2(\varphi) - Z_\varepsilon(b,\varphi),\ \lim_{\xi\to\infty} P_\lambda(\xi,\varphi) = 0,\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Функций $p_k(\xi,\varphi)$ и $q_k(\eta,\varphi)$ являются классическими пограничными функциями Вишика-Люстерника [5]-[7]. Достаточно исследовать один из них, второе уравнение исследуется аналогичным

образом. Дифференциальное уравнение (7) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 q_k(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2} - a_1^2 q_k(\eta,\varphi) = -a_0 \frac{\partial q_{k-1}(\eta,\varphi)}{\partial\eta} + (a_0)^2 \frac{\partial^2 q_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2} - 2a_1\eta q_{k-1}(\eta,\varphi) - \eta^2 q_{k-2}(\eta,\varphi),$$

с краевыми условиями

$$q_0(0,\varphi) = \psi_1(\varphi) - z_0(a,\varphi),\ q_{2k}(0,\varphi) = -z_k(a,\varphi),$$
$$q_{2k-1}(0,\varphi) = 0,\ \lim_{\eta\to\infty} q_{k-1}(\eta,\varphi) = 0,\ k \in N,\ \varphi \in [0,2\pi].$$

Отсюда

$$lq_0 \equiv \frac{\partial^2 q_0(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2} - a_1^2 q_0(\eta,\varphi) = 0, \quad q_0(0,\varphi) = \psi_1(\varphi) - z_0(a,\varphi),$$

$$\lim_{\eta\to\infty} q_0(\eta,\varphi) = 0,\ \varphi \in [0,2\pi]; \tag{14}$$

$$lq_k = -a_0 \frac{\partial q_{k-1}(\eta,\varphi)}{\partial\eta} + (a_0)^2 \frac{\partial^2 q_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2} - 2a_1\eta q_{k-1}(\eta,\varphi) - \eta^2 q_{k-2}(\eta,\varphi), \tag{15}$$

$$q_k(0,\varphi) = \begin{cases} -z_m(a,\varphi), \text{ при } k = 2m, \\ 0, \qquad \text{при } k = 2m+1,\ m \in \mathrm{N}. \end{cases} \tag{16}$$

Решения задач (14), (15)-(16) существуют, единственны и экспоненциально убывают вне пограничного слоя.

2) Пусть $u_\varepsilon(\rho,\varphi) = u_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi) + R_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi)$, где $R_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi)$ – остаточная функция,

$$u_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k z_k(\rho,\varphi) + \sum_{k=0}^{2n+1} \lambda^k \left(q_k(\eta,\varphi) + p_k(\xi,\varphi)\right) + \chi(\rho) \sum_{k=-2}^{4n+1} \mu^k w_k(\tau,\varphi).$$

Тогда для остаточной функций $R_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi)$ получим краевую задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 R_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 R_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right) - (\rho-\rho_0)^2 R_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi) = O(\varepsilon^{n+1}),\ (\rho,\varphi) \in \mathrm{D},$$

$$R_{\varepsilon,n}(a,\varphi) = 0, \quad R_{\varepsilon,n}(b,\varphi) = 0, \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

Применяя результаты работ [10, 11], получим:

$$R_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi) = \mathrm{O}(\varepsilon^n),\ \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. Для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение (3).

Литература

1. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 332–340. DOI:10.20537/vm190304

2. Kozhobekov, K.G. Asymptotics of the Solution to the Boundary-value Problems when Limited Equation Has Singular Point [Text] / K.G. Kozhobekov, U.Z. Erkebaev, D.A. Tursunov // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. No 1. P. 96-101. DOI: 10.1134/S1995080220010138

3. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука. – 1989. – 334 с.

4. Erkebaev, U.Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities [Text] / D.A. Tursunov, U.Z. Erkebaev // Ufa Mathematical Journal. 2016. Т. 8. № 1. С. 97-107.

5. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ТомГУ. Математика и механика. – 2016. – № 1(39). – С. 42-52.

6. Вишик, М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН, 1957. 12, № 4. – С. 3-122.

7. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота [Текст] / Д.А. Турсунов // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 271–281.

8. Треногин, В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика [Текст] / В.А. Треногин // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. Вып. 4. – С. 123–156.

9. Volevich, L. R. The Vishik–Lyusternik method in elliptic problems with a small parameter [Text] / L.R. Volevich // Trans. Moscow math. Soc. –2006. Vol. 67. – P. 87–125.

10. Турсунов, Д.А. Обоснование формальных асимптотических разложений решения бисингулярно возмущенных задач [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2015. – № 4. вып. 4. – С.

72–75.

11. Tursunov, D.A. Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer [Text] / D.A. Tursunov // Russian Mathematics. – 2018. 62(3). pp 60–67. DOI: 10.3103/S1066369X18030088

Математика, физика, техника. 2021. №1 (1)

УДК 514.75

Г.А. ШАМШИЕВА, Э.М. ИСАКОВА, МАКСАТБЕК к Б.,
Б.У. КУЛМАТОВА

СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИДВОЙНОЙ ЛИНИИ ПАРЫ $\left(f_1^5,\Delta_4\right)$ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_6

В области $\Omega\subset E_6$ рассмотрено семейство гладких линий так, что через каждую точку $X\in\Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной репер $\Re=\left(X,\vec{e}_i\right)\left(i,j,k=\overline{1,6}\right)$ является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Σ_6 Френе. На касательной линии ω^1 сети Σ_6 инвариантным образом определяется точка $F_1^5\in\left(X,\vec{e}_1\right)$. Когда точка X смещается в области Ω, псевдофокус F_1^5 описывает свою область Ω_1^5. Этим определяется частичное отображение $f_1^5:\Omega\to\Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X)=F_1^5$.

Доказаны необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_1^5,\Delta_4\right)$, где $\Delta_4=\left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_3,\vec{e}_5,\vec{e}_6\right)$ – четырехмерное распределение.

Ключевые слова: *евклидово пространство, репер Френе, сеть Френе, частичное отображение, распределение.*

1. Введение. В области Ω евклидова пространства E_6, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X\in\Omega$ проходит

одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re=\left(X,\vec{e}_i\right)$ $\left(i,j,k=1,2,3,4,5,6\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^k\vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i,ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i,\ D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k,\ \omega_i^j+\omega_j^i=0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_6 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_5, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k=\Lambda_{ij}^k\omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k=-\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3) получим:

$$D\omega_i^k=d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j+\Lambda_{ij}^kD\omega^j.$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j\wedge\omega_j^k=d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j+\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^\ell\wedge\omega_\ell^j.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j\wedge\Lambda_{j\ell}^k\omega^\ell=d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j-\Lambda_{ij}^k\omega_\ell^j\wedge\omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k\omega_i^j\wedge\omega^\ell=d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j-\Lambda_{ij}^k\wedge\omega_\ell^j\wedge\omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k\wedge\omega^j-\Lambda_{i\ell}^k\omega_j^\ell\wedge\omega^j-\Lambda_{j\ell}^k\omega_i^j\wedge\omega^\ell=0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k-\Lambda_{i\ell}^k\omega_j^\ell-\Lambda_{\ell j}^k\omega_i^\ell\right)\wedge\omega^j=0.$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^{k} - \Lambda_{i\ell}^{k}\omega_{j}^{\ell} - \Lambda_{\ell j}^{k}\omega_{i}^{\ell} = \Lambda_{ijm}^{k}\omega^{m}$$

или

$$d\Lambda_{ij}^{k} = \left(\Lambda_{ijm}^{k} + \Lambda_{il}^{k}\Lambda_{jm}^{l} + \Lambda_{lj}^{k}\Lambda_{im}^{l}\right)\omega^{m}. \qquad (5)$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^{k}, \Lambda_{ijm}^{k}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^{1} заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2, \qquad d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^{1}\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^{3}\vec{e}_3,$$

$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^{2}\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^{4}\vec{e}_4, \qquad d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^{3}\vec{e}_3 + \Lambda_{41}^{5}\vec{e}_5,$$

$$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^{4}\vec{e}_4 + \Lambda_{51}^{6}\vec{e}_6, \qquad d_1\vec{e}_6 = \Lambda_{61}^{5}\vec{e}_5,$$

и $\Lambda_{11}^{3} = -\Lambda_{11}^{3} = 0, \Lambda_{11}^{4} = -\Lambda_{41}^{1} = 0, \Lambda_{11}^{5} = -\Lambda_{51}^{1} = 0, \Lambda_{11}^{6} = -\Lambda_{61}^{1} = 0,$ (6)

$\Lambda_{21}^{5} = -\Lambda_{51}^{2} = 0, \Lambda_{21}^{4} = -\Lambda_{41}^{2} = 0, \Lambda_{31}^{5} = -\Lambda_{51}^{3} = 0, \Lambda_{61}^{4} = -\Lambda_{41}^{6} = 0.$ (7)

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^{2}$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^{3}$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^{4}$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^{5} = -\Lambda_{51}^{4}$, $\Lambda_{51}^{6} = -\Lambda_{61}^{5} = 0$ – первая, вторая, третья, четвертая и пятая кривизны линии ω^{1} соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^{1}).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^{i} сети Σ_5 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

На каждой касательной $\left(X, \vec{e}_i\right)$ существуют по пять псевдофокуса. На прямой $\left(X, \vec{e}_1\right)$ существуют псевдофокусы $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5, F_1^6$, на прямой $\left(X, \vec{e}_2\right)$ – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5, F_2^6$, на прямой $\left(X, \vec{e}_3\right)$

$-F_3^1,F_3^2,F_3^4,F_3^5,F_3^6$, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – $F_4^1,F_4^2,F_4^3,F_4^5,F_4^6$, на прямой $(X,\vec{e}_5)$ – $F_5^1,F_5^2,F_5^3,F_5^4,F_5^6$.

Сеть Σ_6 в $\Omega\subset E_6$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1=(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6)$, $\Re_2=(X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1)$, $\Re_3=(X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Re_4=(X,\vec{e}_4,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $\Re_5=(X,\vec{e}_5,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\Re_6=(X,\vec{e}_6,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5, ω^6 сети Σ_6 одновременно.

Пусть сеть Σ_6 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_6$. Псевдофокус $F_1^5\in(X,\vec{e}_i)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^5=\vec{X}-\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1=\vec{X}+\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1. \qquad (9)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega\subset E_6$, псевдофокус F_1^5 описывает свою область $\Omega_1^5\subset E_6$. Определяется частичное отображение $f_1^5:\Omega\to\Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X)=F_1^5$.

2. Материалы и методы исследования. Метод внешних форм Картана и подвижного репера.

Продифференцируем обычным образом (9) и учитываем деривационные формулы:

$$d\overrightarrow{F_1^5}=d\left(\vec{X}-\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1\right)=d\vec{X}+d\left(\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\right)\vec{e}_1-\frac{1}{\Lambda_{15}^5}d\vec{e}_1=\omega^i\vec{e}_1-\frac{d\Lambda_{15}^5}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1+\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i.$$

Учитывая равенство (3), (5)отсюда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5}=\omega^i\vec{e}_i+\frac{\left(\Lambda_{15m}^5+\Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^{\ell}+\Lambda_{\ell5}^5\Lambda_{1m}^{\ell}\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{15}^5\right)^2}\vec{e}_1-\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega_1^i\vec{e}_i\ .$$

Введем обозначение:

$$B^5_{15m} = \Lambda^{\ 5}_{15m} + \Lambda^{\ 5}_{1\ell}\Lambda^{\ \ell}_{5m} + \Lambda^{\ 5}_{\ell 5}\Lambda^{\ \ell}_{1m}.$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B^5_{15m}\omega^m}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{1m}\omega^m}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i$$

или $d_1\overrightarrow{F_1^5} = \left[\vec{e}_1 + \frac{B^5_{151}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{11}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B^{\ 5}_{152}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{12}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^2 +$

$$+\left[\vec{e}_3 + \frac{B^{\ 5}_{153}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{13}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B^{\ 5}_{154}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_5 - \frac{\Lambda^{\ i}_{14}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^4 +$$

$$+\left[\vec{e}_5 + \frac{B^{\ 5}_{155}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{15}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^5 + \left[\vec{e}_6 + \frac{B^{\ 5}_{156}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^{\ i}_{16}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i\right]\omega^6.$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B^{\ 5}_{151}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{11}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i; \qquad \vec{b}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B^{\ 5}_{152}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{12}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B^{\ 5}_{153}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{13}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i; \qquad \vec{b}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B^{\ 5}_{154}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{14}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_5 = \vec{e}_5 + \frac{B^{\ 5}_{155}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{15}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i; \ \vec{b}_6 = \vec{e}_6 + \frac{B^{\ 5}_{156}}{\left(\Lambda^{\ 5}_{15}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{\ i}_{16}}{\Lambda^{\ 5}_{15}}\vec{e}_i.$$

Тогда имеем:

$$d\overrightarrow{F_1^5} = \omega^1\vec{b}_1 + \omega^2\vec{b}_2 + \omega^3\vec{b}_3 + \omega^4\vec{b}_4 + \omega^5\vec{b}_5 + \omega^6\vec{b}_6.$$

Так как заданная сеть Σ_6 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B^{5}_{151}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2} \right] \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{2}_{11}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_2;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B^{5}_{152}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^{5}_{12}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^{5}_{153}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{2}_{13}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{\Lambda^{5}_{13}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_5; \qquad (10)$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^{5}_{154}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{2}_{14}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda^{5}_{14}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_5;$$

$$\vec{b}_5 = \frac{B^{5}_{155}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{2}_{15}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^{6}_{15}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_6;$$

$$\vec{b}_6 = \frac{B^{5}_{156}}{\left(\Lambda^{5}_{15}\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^{2}_{16}}{\Lambda^{5}_{15}} \vec{e}_2 + \left[1 + \frac{\Lambda^{6}_{16}}{\Lambda^{5}_{15}} \right] \vec{e}_6.$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

Линии ω^i, $g(\omega^i) = \bar{\omega}^i$ называют двойными линиями отображения g, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ пересекаются, либо параллельны [6].

Линии ω^i, $g(\omega^i) = \bar{\omega}^i$ в E_5 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные к ним взятые в соответствующих точках X, $g(X)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству $\Delta_p(X)$ пространства $E_6 (2 < p < 6)$.

3. Основные результаты исследования. Рассмотрим линию γ, принадлежащую четырёхмерному распределению $\Delta_{(1356)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$. Её направляющий вектор имеет вид:

$\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e}_1 + \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^5\vec{e}_5 + \gamma^6\vec{e}_6$. Направляющий вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $f_1^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ имеет вид: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{b}_1 + \gamma^3\vec{b}_3 + \gamma^5\vec{b}_5 + \gamma^6\vec{b}_6$. учитывая (10) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\left(b_1^1\vec{e}_1 + b_2^1\vec{e}_2\right) + \gamma^3\left(b_3^1\vec{e}_3 + b_3^1\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b_3^5\vec{e}_5\right) +$$
$$+\gamma^5\left(b_5^1\vec{e}_1 + b_5^2\vec{e}_2 + b_5^6\vec{e}_6\right) + \gamma^6\left(b_6^1\vec{e}_1 + b_6^2\vec{e}_2 + b_6^6\vec{e}_6\right)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = \left(\gamma^1 b_1^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^5 b_5^1 + \gamma^6 b_6^1\right)\vec{e}_1 + \left(\gamma^1 b_1^2 + \gamma^3 b_3^2 + \gamma^5 b_5^2 + \gamma^6 b_6^2\right)\vec{e}_2 +$$
$$+\gamma^3 b_3^5\vec{e}_5 + \left(\gamma^5 b_5^6 + \gamma^6 b_6^6\right)$$

где $b_i^j - j -$ тая координата вектора $\vec{b}_i$. Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, XF_1^5 \in \Delta_{(1356)}$ имеем:

$$\gamma^1 b_1^2 + \gamma^3 b_3^2 + \gamma^5 b_5^2 + \gamma^6 b_6^2 = 0$$

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\Lambda_{11}^2\gamma^1 + \Lambda_{13}^2\gamma^3 + \Lambda_{15}^2\gamma^5 + \Lambda_{16}^2\gamma^6 = 0. \qquad (11)$$

Обратно, если имеет место (11), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(1356)}$ является квазидвоной линией отображения F_1^5.

4. Выводы. Таким образом доказана

Теорема. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(1356)}$, является квазидвоной линией отображения F_1^5 тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворятся условию (11).

Геометрический смысл равенства (11) заключается в следующем.

Рассмотрим вектор $\vec{\Lambda}$ с координатами: $\left\{\Lambda_{11}^2, \Lambda_{13}^2, \Lambda_{15}^2, \Lambda_{16}^2\right\}$, где

$\Lambda_{11}^2 = \vec{e}_2 d_1\vec{e}_1;\quad \Lambda_{13}^2 = \vec{e}_2 d_3\vec{e}_1;\quad \Lambda_{15}^2 = \vec{e}_2 d_5\vec{e}_1;\ \Lambda_{16}^2 = \vec{e}_2 d_6\vec{e}_1.$

Равенство (11) означает, что вектору $\vec{\Lambda}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Литература

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст]/ П.К.Рашевский// Москва. Наука.1967.-С.481-482.

2. Схоутен И.А. Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст]/ И.А.Схоутен,Д.Дж.Стройк. // Москва. ИЛ.1948.Т.II-348.

3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст]/ С.П. Фиников // М-Л.: Госттехиздат,.1948.- 432.

4. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст]/ В.Т Базылев // Литовский математический сборник,1966.VI.№4.-С.475-491.

5. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст]/ Г.Матиева // Монография. Ош,2003.-С.212-219.

6. Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [Текст]/ В.Т Базылев // Изв.ВУЗов Математика

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2021. №1 (1)

ФИЗИКА

УДК 541.13

Т.К. ИБРАИМОВ, Н.А. ЭРКИНБАЕВА, Ы. ТАШПОЛОТОВ, Э. САДЫКОВ

СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТА ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКОЙ ИОНИЗАЦИИ

Установлено низкоэнергетическое преобразования химических элементов на основе электрофизической ионизации воды. Установлено, что количества твердого осадка в виде порошка зависит от разности потенциалов между электродами, материала и площади электродов и времени ионизации. Показано, что в процессе электрофизической ионизации наблюдается образование в пробах таких элементов, как Bk, Tb, Hf, Ho, Pu, Os, Zn, Te, Cu, Se, Pm, W и др. Особенно заметное образование проявляется для Bk, что подтверждается и другими методами исследования и все эти элементы (Bk, Tb, Hf, Ho, Pu, Os, Zn, Te, Cu, Se, Pm, W) в пробах являются элементами образующиеся в процессе низкоэнергетической трансмутации.

Ключевые слова: *преобразования химических элементов, самоорганизация, обработка воды, электролиз, электрофизическая ионизация, трансмутация.*

В [1] нами установлены преобразования одних химических элементов в другие под действием высокоэнергетического электродугового разряда. Имеется огромное количество сообщений об экспериментально установленных трансмутациях (преобразованиях). Примером последних значимых сообщений следует отметить преобразование изотопа 129J с периодом полураспада 15,7 млн лет в изотоп 128J с периодом полураспада 27 мин [2]. Преобразование осуществлено импульсным 360 джоулевым лазером с длительностью импульса 0,7 пс. По оценкам авторов плотность мощности в пучке составила 1020 Вт/см^2. Поскольку каждый лазерный импульс производит

$3 \cdot 10^6$ ядер 128J, то можно предположить, что лазерная трансмутация может стать относительно недорогим и достаточно эффективным методом утилизации ядерных отходов путем преобразования долгоживущих изотопов в изотопы с малым периодом полураспада.

Вачаев А.В. и др. в работе [3] установили условия возникновения автономного плазменного образования в воде в процессе электрического разряда. Полученное плазменное образование, во-первых, возбуждал в воде самоподдерживающуюся реакцию синтеза элементов и, во-вторых, реакция сопровождалась электромагнитным излучением частотой десятки мегагерц и мощностью до десятков киловатт. Наряду с этим, в ходе синтеза образовывались свободные электроны, которые необходимо было отводить на внешнюю нагрузку. Поэтому после запуска и стабилизации процесса установка отключалась от электрической сети, и она работала сутками. В экспериментах были синтезированы более ста килограмм порошка и одновременно выработаны сотни киловатт-часов электроэнергии. В экспериментах [3] водопроводная вода служила сырьем, продуктом реакции были стабильные изотопы элементов от гелия до висмута.

Синтез элементов в электрическом разряде был зарегистрирован также в работах [4] и [5]. В работе [4] эти величины составляли соответственно 50 кДж, 150 мкс и 330 МВт. В работе [5] энергия импульса достигала 2,5 кДж, а мощность в данном случае составляла 83 ГВт.

Можно предположить, что первым условием, механизма преобразования, вероятно, заключается в том, что при входе молекулярно-кластерной массы рабочей среды в поток возбужденных электронов, находящихся под определенным потенциалом тока стабилизации, практически мгновенно возникает процесс фазовых их превращений. По-видимому, в процессе самоорганизации материи, например, воды, молекула водяного пара, попадая под воздействия мощной энергии внешних силовых полей, вынужденно диссоциируют на молекулярные и атомарные составляющие с разными спиновыми числами. При осуществлении процесса самоорганизации, по-видимому, возникает дефект массы (протонов и электронов), удовлетворяемый за счет распада ядер кислорода с образованием его изотопов и ростом их возбуждения до ионной температуры. Повышение ионной температуры, а также увеличение концентрации активных частиц имеют следствием возникновения тепломассопереноса. В результате внешнего воздействия ядро кислорода распадается. Неустойчивость ядра кислорода доказывается также расчетами потенциала энергии взаимодействия Рида для

структурных элементов в химических веществах [6]. Так, для ядра атома кислорода он оказался равным 13,618, почти таким же, как для водорода (13,518 кэВ), но большим, чем для углерода (11,534 кэВ), и значительно меньше, чем для He (24,584 кэВ). В то же время потенциал Рида для кластера O=O оказывается меньше, чем у водорода H(77,41264,492). Для сольватированного иона кислорода O_2^- потенциал Рида оказывается максимальным (739,315 кэВ), не встречающимся ни у одного из элементов Земли. Самым близким к кислороду по этой характеристике являются азот N (667,030), бор B (648,5), бериллий Be (522,51), гелий He (442,51). Все это дает основание считать о том, что кислород O и водород H основными элементами, ядра которых наименее устойчивы и поэтому являются источником тех протонно-нейтронных пар, без которых невозможен механизм образования новых элементов. Так как кислород в связанном состоянии и особенно в виде воды или льда можно встретить повсюду, то, следовательно, там, где есть вода и ее пары, там всегда существует вероятность возникновения процесса образования новых элементов.

Вторым условием возникновения процесса преобразования вещества является создание вакуума, по крайней мере, в зоне взаимодействия. Самым простым способом, реализуемым в природе, является разрыв сплошности в потоке воды или водяного пара. Поэтому внешняя обработка воды с помощью различных способов (тепловое, электромагнитное, лазерное, электронное и др.) является в некотором смысле основным решающим моментом.

Известно, что под действием внешних факторов (γ-излучение, электронное облучение) на физической стадии процесса за время 10^{-16} - 10^{-11} с происходит ионизация молекулы воды. Энергия ионизации порядка 14 эВ. На физико-химической стадии за время 10^{-13}-10^{-9} с происходят диссоциация молекулы или иона, внутренние превращения в молекуле или ионе, ионно- молекулярные реакции и перенос заряда. После этих двух стадий образуются электрон (e^-) и свободные радикалы H^+, OH^- [7, 8]. Далее за время 10^{-10}-10^{-7} с происходят реакции между радикалами и реакции радикалов с растворенными веществами.

В конце процесса из воды образуется комплекс химических элементов и частиц

$$H_2O \rightarrow e^-, H_2, H_2O_2, H^+, OH^-.$$

В малых количествах образуется также атомарный кислород. В конечном итоге в воде образуется среда с высоким содержанием e^-, H_2, H^+ (протон), ^{16}O.

Из продуктов распада возможен процесс синтеза в виде нескольких

ветвей. Одна из ветвей может начаться с кислорода и могут идти следующие реакции:

$$^{16}O + {}^{16}O \rightarrow {}^{31}S + n + 1{,}45\ МэВ, \quad (1)$$

или

$$^{16}O + {}^{16}O \rightarrow {}^{32}S + \gamma + 16{,}54\ МэВ. \quad (2)$$

либо реакции:

$$^{16}O + {}^{16}O \rightarrow {}^{24}Mg + {}^{4}He + {}^{4}He - 0{,}39\ МэВ; \quad (3)$$

$$^{16}O + {}^{16}O \rightarrow {}^{27}Al + {}^{4}He + {}^{1}H - 1{,}99\ МэВ. \quad (4)$$

Из кислорода в конечном итоге возможно образование бериллия:

$$^{4}He + {}^{4}He \rightarrow {}^{8}Be - 0{,}09\ МэВ; \quad (5)$$

Далее образование углерода может идти по реакции:

$$^{8}Be + {}^{4}He \rightarrow {}^{12}C^{*} - 0{,}29\ МэВ; \quad (6)$$

Из углерода возможно образование натрия:

$$^{12}C + {}^{12}C \rightarrow {}^{23}Na + {}^{1}H + 2{,}24\ МэВ. \quad (7)$$

Образование некоторых элементов возможно происходит согласно следующих реакций:

$$\begin{aligned} &32\ {}^{16}S + 4\ {}^{2}He \leftrightarrow 36\ {}^{18}Ar + \gamma; \\ &36\ {}^{18}Ar + 4\ {}^{2}He \leftrightarrow 40\ {}^{20}Ca + \gamma; \\ &40\ {}^{20}Ca + 4\ {}^{2}He \leftrightarrow 44\ {}^{22}Ti + \gamma; \\ &44\ {}^{22}Ti + 4\ {}^{2}He \leftrightarrow 48\ {}^{24}Cr + \gamma; \\ &48\ {}^{24}Cr + 4\ {}^{2}He \leftrightarrow 52\ {}^{26}Fe + \gamma; \\ &52\ {}^{26}Fe + 4\ {}^{2}He \leftrightarrow 56\ {}^{28}Ni + \gamma, \\ &56\ {}^{28}Ni + 4\ {}^{2}He \leftrightarrow 60\ {}^{30}Zn + \gamma; \end{aligned} \quad (8)$$

и т. д.

Явление электрохимической активации воды (ЭХАВ) было открыто в 1975 г. [7]. ЭХАВ это совокупность электрохимического и электрофизического воздействия на воду в двойном электрическом слое (ДЭС) электрода электрохимической системы при неравновесном переносе заряда через ДЭС электронами и в условиях интенсивного диспергирования в жидкости образующихся газообразных продуктов электрохимических реакций. В результате электрохимической активации вода переходит в метастабильное состояние, которое характеризуется аномальными значениями активности электронов и других физико-химических параметров [7]. Если через воду протекает постоянный электрический ток, то поступление в воду у катода, также, как и удаление электронов из воды у анода, сопровождается серией электрохимических реакций на поверхности катода и анода. В результате образуются новые вещества, изменяется система межмолекулярных взаимодействий, состав воды, в том числе структура воды как раствора.

В упрощенной форме основные процессы при электроактивации, происходящие в электролизере, можно представить следующим образом:

1) окисление воды на аноде:

$2H_2O - 4e = 4H^+ + O_2$;

2) восстановление воды на катоде:

$2H_2O + 2e = H2 + 2OH^-$;

3) образование на аноде газообразного хлора в хлоридных растворах:

$2Cl^- - 2e = Cl_2$;

4) образование в анодной камере высокоактивных окислителей:

Cl_2 O, ClO_2, ClO^- , HClO, Cl^- , O_2^- , O_3 , HO_2 , OH^- ;

5) образование в катодной камере высокоактивных восстановителей:

OH^- ,H_3^- O_2^- , H_2, HO_2^- , HO_2^- , O_2^- .

Преобразования вещества под действием внешних полей установлено и в процессе электрофизической ионизации воды [9].

В [9] показано, что количество твердого осадка в виде порошка зависит от разности потенциалов между электродами, материала и площади электродов и времени ионизации.

Экспериментальные данные, полученные нами при электрофизической ионизации воды представлены в таблице 1.

Таблица 1.

№, п/п	Разность потенциалов между электродами, (В)	Объем воды в реакторе, (мл)	Химический элемент	Количество атомов ионизованные в 1 секунду, 10^{12}	Относительная масса химич. элементов, получен. при электрофизической ионизации воды, (л /мг)
1.	5,1	100	Na	7,80	122,13
2.	5,4	100	Pr	1,04	99,75
3.	5,55	100	Pm	1,48	146,08
4.	5,7	100	Pu	2,08	345,63
5.	5,85	100	Tb	5,20	563,05
6.	6,0	200	Ho	3,47	389,66
7.	6,3	200	Bk	13,87	2332,65
8.	6,75	200	Cr	1,89	66,87
9.	7.05	200	Mo	1,06	69,73
10.	7.2	200	Bi	2,08	59,4

11.	7,35	300	Ru	0,78	53,62
12.	7,5	300	Hf,	3,90	473,91
13.	7,65	300	Cu	5,20	224,92
14.	7,8	300	Fe	2,60	98,81
15.	7,95	300	W	0,74	125,17
16.	8,1	300	Si	0,92	17,54
17.	8,25	300	B	1,74	12,75
18.	8,4	300	Po	0.83	118,08
19.	8,5	300	Os	2,13	275,84
20.	9,0	300	Te	2,60	225,86
21.	9,3	400	Be	2,97	18,12
22.	9,45	400	Zn	6,24	277,81
23.	9,75	400	Se	2,84	152,64
24.	10,2	400	S	4,46	97,25

Анализ полученных данных показывает, что во всех фазах (твердой, жидкой) появляются элементы, совершенно отсутствовавшие в исходном сырье, причем количество последних не всегда зависит от степени разбавления стоков водой и других параметров. При этом оказывается, что обработка стоков с растворенными и взвешенными неорганическими соединениями дает, как правило, твердую фазу в виде частиц чистых металлов, а стоки с органическими соединениями в виде гидратов и гидридов.

Основные выводы:

1. В процессе электрофизической ионизации наблюдается образование в пробах таких элементов, как Bk, Tb, Hf, Ho, Pu, Os, Zn, Te, Cu, Se, Pm, W и др. Особенно заметное образование проявляется для Bk, что подтверждается и другими методами исследования.

2. Все эти элементы (Bk, Tb, Hf, Ho, Pu, Os, Zn, Te, Cu, Se, Pm, W) в пробах являются элементами образующиеся в процессе низкоэнергетической трансмутации.

Литература

1. Ташполотов Ы., Садыков Э. Трансформация химических элементов в электродуговом разряде на примере базальтового расплава // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.econf.rae.ru / article /

2. http://optics.org/articles/news/9/8/12/1, 14 August, 2003.

3. Вачаев А.В., Иванов Н.И. Энергетика и технология структурных

переходов: Учебное пособие. Магнитогорск: МГМА, 1994. – 190 с.

4. Уруцкоев Л.И., Ликсонов В.И., Циноев В.Г. Экспериментальное обнаружение «странного» излучения и трансформация химических элементов. «Журнал радиоэлектроники», №3, 2000. – 20 с. http://jre.cplire.ru/jre/mar00/4/text.html.

5. Адаменко С.В. Концепция искусственно инициируемого коллапса вещества и основные результаты первого этапа ее экспериментальной реализации. Препринт лаб. Электродинамических исследований предприятия «Протон-21», Киев: Академпериодика, 2004. - 36 с., http://proton21.org.ua/articles.html.

6. Крымский В.В., Балакирев В.Ф. Воздействие наносекундных электромагнитных импульсов на свойства веществ// Доклады Российской академии наук. – 2002. – Т. 385. – №6. – С. 786–787.

7. Прилуцкий В.И., Бахир В.М. Электохимически активированная вода: аномальные свойства, механизм биологического действия. – М., 1995. – 175 с.

8. Стехин А.А., Яковлева Г.В. Структурированная вода: Нелинейные эффекты. – 2008. – 320 с.

9. Акматов Б.Ж. Исследование и разработка технологии очистки питьевой воды на основе электрофизической ионизации//Афтореферат диссертации на соискание уч. степ. кандидата тех. н. – Ош, 2011. – 20 с.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2021. №1

УДК 536.2.02

М.Ж. КАЛБЕКОВА, А.Т. КАЛМУРЗАЕВА, МАРС к Т., ОРМОШ к А.

МУЛЬТИФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Демонстрируются возможности применения пакета мультифизического моделирования Comsol Multiphysics при изучении процесса теплопроводности в курсе общей физики. Рассмотрены тестовые задачи одномерного стационарного радиационного теплопереноса и двумерного стационарного конвективного теплопереноса. Приведены способы мультифизического моделирования стационарного процесса теплопроводности, с граничными условиями, учитывающими заданную температуру, тепловой поток, конвективное охлаждение и радиационное излучение. В результате выполнения данной работы продемонстрирована возможности пакета Comsol Multiphysics, показано, что от студентов не требуется глубокие знания в области численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих тот или иной физический процесс. Фактически они могут построить многие модели реальных явлений с помощью введения физических величин, не прибегая к написанию сложных дифференциальных уравнений. Показано, что изучение этих моделей Comsol Multiphysics также является дополнительным методом для понимания физической сути реальных явлений.

Ключевые слова. *Моделирование, теплопроводность, теплообмен, тепловой поток, мультифизическое моделирование, Comsol Multiphysics.*

Введение. С 1970-х годов энергетический кризис был включен в пятерку самых важных проблем в мире, а к остальным четырем проблемам относятся соответственно рост численности населения, еда, окружающая среда и ресурс. В этой ситуации энергосбережение становится более важным, чем когда-либо.

Процесс теплопереноса широко используется в наши дни. Поэтому важно для инженера иметь соответствующие знания по теплопередаче. Здания представляют собой сложные структуры со многими привязками из-за сложной геометрии и переменных граничных условий. На внутреннюю температуру воздуха влияют изменения внешних условий, таких как температура, солнечная радиация или пасмурное небо. Помимо прочего, температура в окружающей среде оказывает незначительное влияние на конечную температуру. Другими важными параметрами являются общий коэффициент теплопередачи в стенах, внутренние приросты или потери тепла, вызванные такими устройствами, как освещение, занятость и т. д. В последние годы заметна тенденция снижения потребления энергии в зданиях. Многие статьи, связанные с этой темой, посвящены накоплению энергии с использованием воска с низкой температурой плавления в качестве среды для накопления тепла [1, 2].

В то же время, применение вычислительной техники в решении такого класса инженерных задач является актуальным [3, 4].

Целью данной работы является демонстрация возможностей применения пакета мультифизического моделирования Comsol Multiphysics[5] при изучении процесса теплопроводности в курсе общей физики. Для этой цели рассмотрены стационарные модели процесса теплопроводности, с граничными условиями, учитывающими заданную температуру, тепловой поток, конвективное охлаждение и радиационное излучение [4, 6].

Тестовая задача №1. Одномерный стационарный радиационный теплоперенос. Постановка задачи. В данном случае рассматривается однородный стальной стержень длиной 0,1м, на левом конце которого поддерживается постоянная температура 1000 К. Правый конец стержня теряет тепло вследствие радиационного излучения в окружающую среду с температурой 300 К. Для модели радиационного излучения излучательная способность принята равной ε = 0,98, а коэффициент Стефана-Больцмана $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м \cdot К^4}$. Сам материал стержня имеет следующие физические свойства: плотность $\rho = 7870 \frac{кг}{м^3}$, теплоемкость $Ср = 440 \frac{Дж}{кг \cdot {}^0C}$, коэффициент теплопроводности $k = 76{,}2 \frac{Вт}{м \cdot {}^0C}$.

Мультифизическое моделирование тестовой задачи №1.

Навигатор моделей. В ниспадающем листе ***Space dimension*** диалогового окна ***Model Navigator*** выбираем рассматриваемый 1D

одномерный случай (см. рис. 1). Далее, из представленных областей применения пакета, последовательно выбираем ***Heat Transfer*** → ***Conduction*** → ***Steady-state analysis.*** Нажатием кнопки ОК закроем это окно.

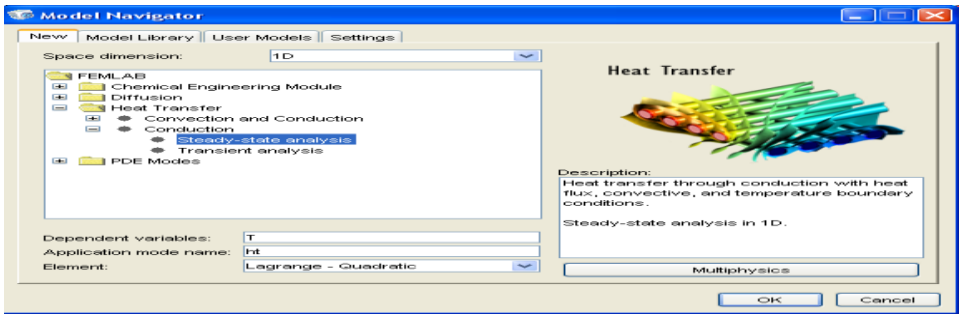

Рис.1. Выбор модели пакета.

Геометрическое моделирование. В ниспадающем окне главного меню ***Draw*** выбираем ***Specify Objects,*** затем ***Line***. В разделе ***Coordinates*** окна ***Line*** введем координаты начала 0 и конца 0,1 стержня (Рис. 2). Далее нажимаем на кнопку ОК и выбираем ***Zoom Extents.***

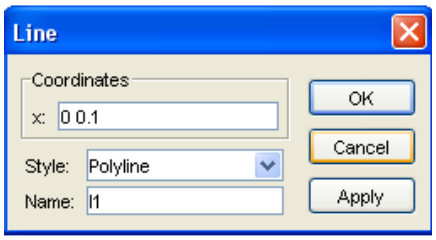

Рис. 2. Задание координат линии.

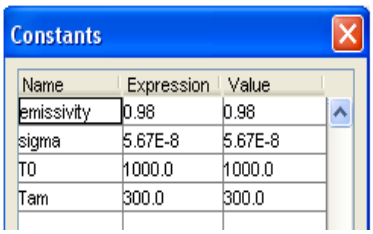

Рис. 3. Определение физических постоянных.

Определение характерных величин задачи. В главном меню ***Options*** выбираем ***Constants*** и введем константы задачи (Рис. 3).

Физическое моделирование. Установка граничных условий.

В ниспадающем меню ***Physics*** выбираем **Boundary *Settings*.** В разделе ***Boundary selection*** этого окна сначала необходимо выбрать границу 1. Так как на левом конце стержня задана температура T0, в качестве ***Boundary condition*** укажем ***Temperature***, а величину **Quantity** определим, как **T0.** Аналогично для второго конца стержня выбираем границу 2. Для этой границы задана убыль теплового потока из-за радиационного излучения. Поэтому из раздела ***Boundary condition*** выбираем ***Heat flux,*** а в редактируемых полях ***Problem-dependent constant*** запишем ***emissivity·sigma,*** а для ***Ambient temperature*** - **Tam.** Закроем окно ***Boundary settings*** нажатием на кнопку **ОК.**

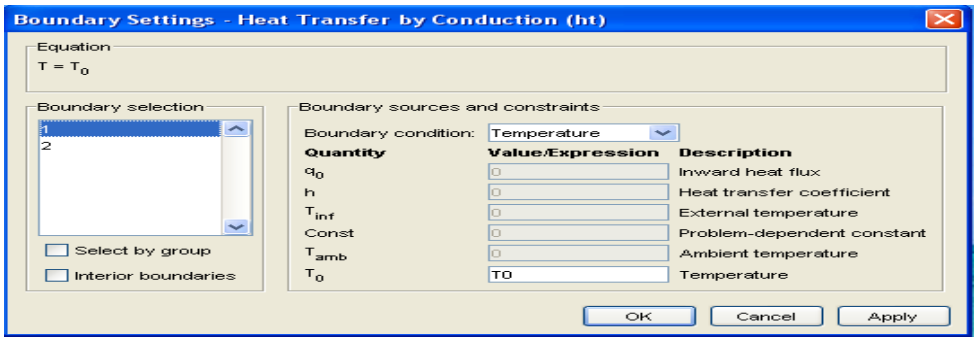

Рис. 4а. Задание граничного условия для левого конца стрежня.

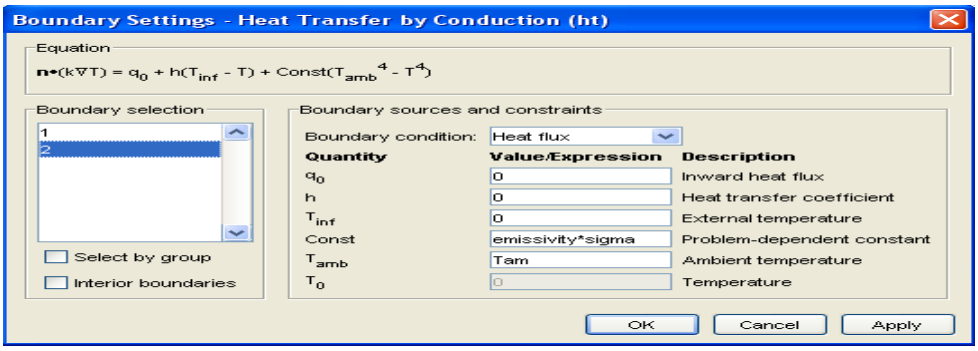

Рис. 4б. Задание граничного условия для правого конца стрежня.

Определение физических свойств. Далее, используя встроенную библиотеку материалов ***Material Library***, нам необходимо задать физические свойства материала стержня. Для этого в ниспадающем меню ***Physics*** выбираем ***Subdomain settings***. Из раздела ***Subdomain selection*** активизируем область 1. Далее, в разделе ***Physics*** напротив ***Use library material*** нажмем кнопку ***Load*** и в появившемся ниспадающим списке, выбираем материал ***iron (***см. Рис. 5.). Закроем это окно и откроем окно для задания физических характеристик материала стержня (см. Рис. 6).

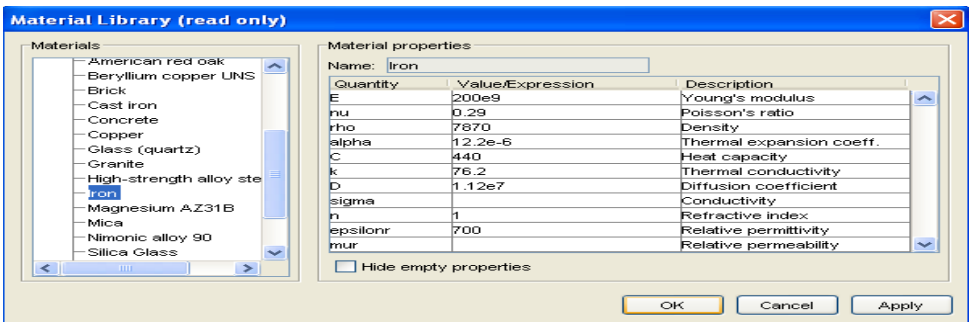

Рис. 5. Выбор свойств материала из Material ***Library.***

Задание начального условия. Для расчета необходимо задать начальное приближение поле температуры. С этой целью переходим на закладку ***Init*** и редактируемом поле ***Temperature,*** введем температуру T0.

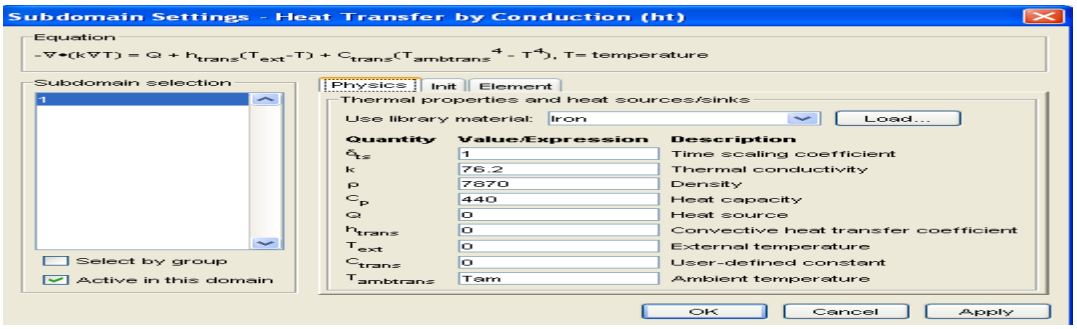

Рис. 6. Задание физических свойств расчетной области.

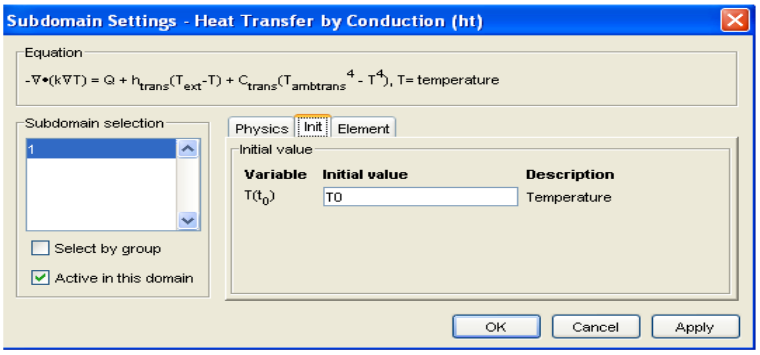

Рис. 7. Задание начального приближения температурного поля.

Построение расчетной сетки. Эта процедура реализуется при нажатии нужной пиктограммы под основным меню или выполнением следующих команд ***Mesh→Initialize Mesh***.

Численное решение задачи. Для решения задачи достаточно нажать на кнопку ***Solve Problem*** в виде знака равенства на панели инструментов. В итоге появляется численное решение линейного распределения температуры вдоль длины стержня (см. рис. 8).

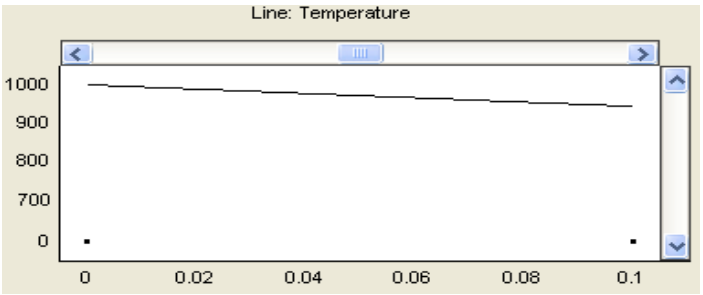

Рис. 8. Финальное распределение температуры вдоль стержня.

Тестовая задача №2. Двумерный стационарный конвективный теплоперенос. Постановка задачи. В качестве второго примера рассмотрим процесс распространения тепла в бесконечно длинном стальном стрежне прямоугольного сечения размером 50см на 100см. Левая граница является теплоизолированной**,** а нижняя граница поддерживается при постоянной температуре 100 ^0C . На верхней и правой границах поддерживается конвективный теплообмен с окружающей средой,

имеющей нулевую температуру. При этом Сам материал стержня имеет следующие физические свойства: плотность

$\rho = 7870 \frac{кг}{м^3}$, теплоемкость $Cp = 440 \frac{Дж}{кг \cdot {}^0C}$, коэффициент теплопроводности $k = 76{,}2 \frac{Вт}{м \cdot {}^0C}$, коэффициент теплоотдачи $h = 750 \frac{Вт}{м^2 \cdot {}^0C}$.

Мультифизическое моделирование тестовой задачи №2.

Этапы моделирования этой задачи будет аналогично первой задаче.

Навигатор моделей. В ниспадающем листе ***Space dimension*** диалогового окна ***Model Navigator*** выбираем рассматриваемый 2D одномерный случай. Далее, из представленных областей применения пакета, последовательно выбираем ***Heat Transfer → Conduction→ Steady-state analysis.*** Нажиманием ОК закроем это окно и переходим к заданию геометрии задачи.

Геометрическое моделирование. Как и предыдущей задаче, в ниспадающем окне главного меню ***Draw*** выбираем ***Specify Objects***, затем ***Rectangle.*** Далее, вводим размеры прямоугольника согласно рис. 9.

Определение характерных величин задачи. Последовательностью команд ***Options → Constants*** и введем константы, показанные на рис. 10.

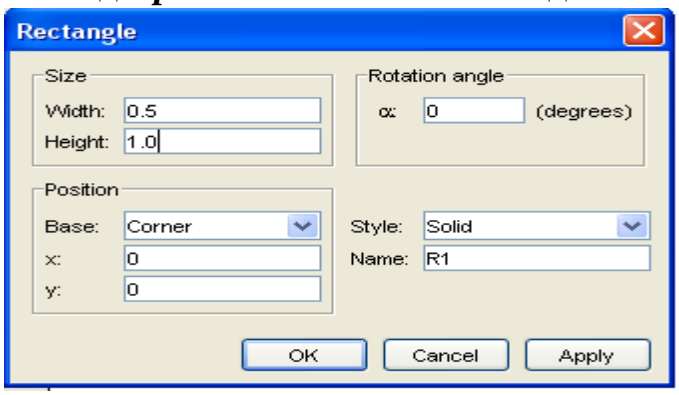

Рис. 9. Размеров прямоугольной области.

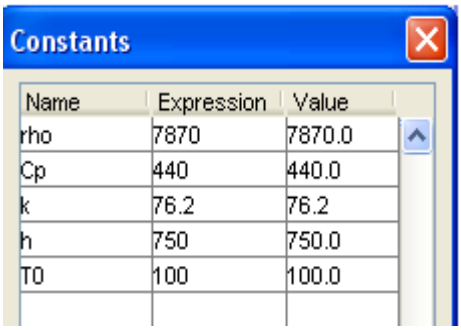

Рис. 10. Задание физических величин

Физическое моделирование. Установка граничных условий. Как и первом примере, выполняем последовательность команд ***Physics→ Boundary Settings.*** В проявившем окне ***Boundary selection*** последовательно выбираем каждую границу расчетной области. По условии задачи, мы имеем 4 границы, для которых необходимо задание граничного условия того или иного вида. Левая граница 1, по условии задачи является теплоизолированной. Поэтому граничным условием ***(Boundary condition)*** должно быть ***Thermal insulation.*** Температура нижней границы 2 равна $T0 = 100\,^0C$, поэтому в качестве ***Boundary condition*** необходимо указать ***Temperature*** . Через границы 3 и 4 осуществляется конвективное

охлаждение стержня с соответствующей теплоотдачей. При этом, граничное условие должно быть указано в виде ***Heat flux*** с коэффициентом теплоотдачи h. Пример задания граничного условия для границы 4 показана на рис. 11.

Определения физических свойств расчетной области. Следующим этапом является определение физических параметров в расчетной области. Из меню ***Physics*** выбираем ***Subdomain Settings***. В окне ***Subdomain Settings*** выделяем единственную область 1 и переходим к закладке ***Physics,*** где указываем необходимые величины согласно рис. 12.

Генерация расчетной сетки. Создание расчетной сетки осуществляется аналогично предыдущей задаче**.**

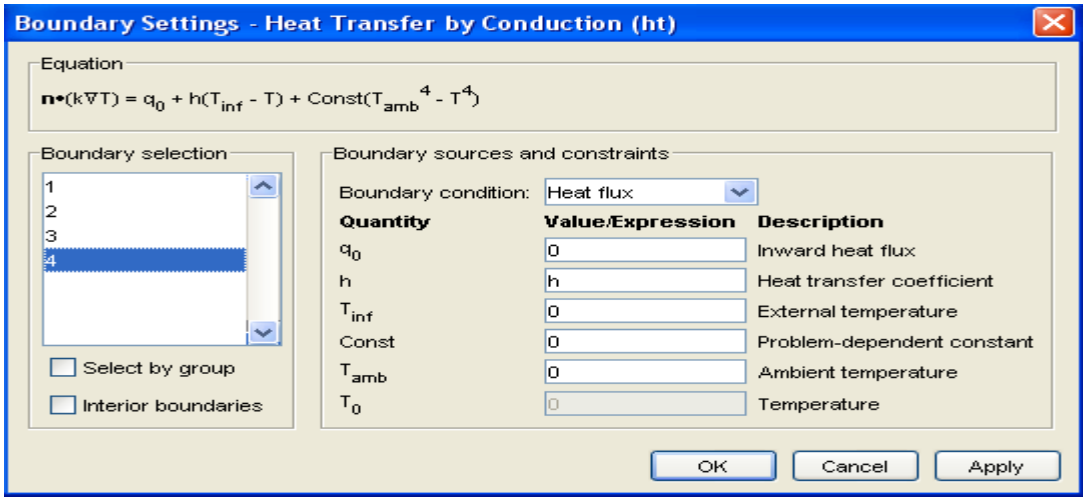

Рис. 11. Задание граничных условий.

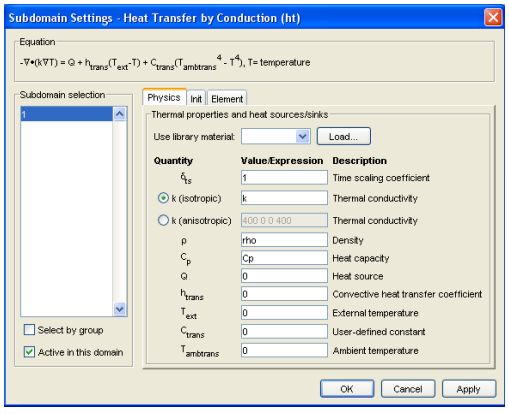

Рис. 12. Задание физических характеристик расчетной области.

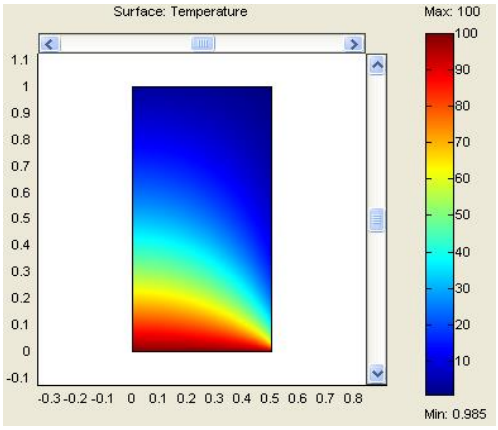

Рис. 13. Распределение поля температуры в поперечном сечении стержня.

Численное решение задачи. Для решения задачи достаточно нажать на кнопку ***Solve Problem*** в виде знака равенства на панели инструментов и полученное поле численного решения температуры приведено на рис. 13.

Обсуждение результатов мультифизического моделирования. Рассмотренные способы моделирования одномерного и двумерного радиационного и конвективного теплопереноса наглядно иллюстрируют возможности пакета Comsol Multiphysics. Через использование графического интерфейса пакета Comsol Multiphysics показаны все этапы моделирования такие, как геометрическое моделирование (см. Рис. 2, Рис. 9), задание физических параметров задачи (см. Рис. 3, Рис. 10), использование библиотеки материалов пакета (см. Рис. 5), задание граничных условий (см. Рис. 4, Рис.11), задание физических характеристик расчетной области (см. Рис. 6 , Рис. 12), построение расчетной сетки, численное решение и визуализация полученных численных результатов (см. Рис. 8, Рис. 13).

Выводы. Таким образом, при использовании данного пакета, от студентов не требуется глубокие знания в области численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих тот или иной физический процесс. Фактически они могут построить многие модели реальных явлений с помощью введения физических величин, не прибегая к написанию сложных дифференциальных уравнений. Изучение этих моделей Comsol Multiphysics также является прекрасным дополнительным методом для понимания физической сути реальных явлений.

Литература

1. Мельник А. П. Моделирование процессов теплопереноса через ограждающие конструкции зданий и системы вентиляции. автореферат диссертации по информатике, вычислительной технике и управлению, 2011, 05.13.18, Москва.
2. Тарасова В.В. Математическое моделирование нестационарных тепловых процессов в ограждающих конструкциях зданий. Современные наукоемкие технологии. – 2016. –№ 8 (часть 2) – С. 265-269. URL: http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=36141 (дата обращения: 05.06.2019).
3. Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И. СПб, Изд-во «Судостроение», 2005, 392с.
4. Рашиков В. И., Рошаль А. С. Численные методы решения физических задач. Изд-во Лань. СПб., 2005, 208 стр.
5. www.comsol.com. Femlab Modeling Guide. (дата обращения: 05.06.2019).
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд-во Дрофа, М., 2003, 840 стр.

УДК: 532.517.2:621.1.016.4

А.Т. КАЛМУРЗАЕВА, З.Н. АБДИМУТАЛИПОВА,
А.Ы. КУРБАНАЛИЕВ, МАРС к Т.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЛАМИНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДР

Численно исследованы динамические характеристики полей давления и скорости нестационарных несжимаемых ламинарных волн за круглым цилиндром. Основные уравнения, записанные через скорость и давления, решены с помощью двумерного метода конечных объемов в рамках открытого пакета OpenFOAM7. В результате численных расчетов показан начальный механизм вихревого режима течения и дана оценка нестационарных сил тела. Полученные численными расчетами частоты колебаний сопротивления и подъемной силы хорошо согласуются с экспериментальными результатами. Благодаря более быстрой сходимости двумерный метод конечных объемов оказывается очень перспективным для численного моделирования ламинарного течения.

Ключевые слова: *Обтекание цилиндра, вихревые дорожки, метод конечных объёмов, OpenFOAM*

1. Введение. Обтекание круглого цилиндра-это фундаментальная задача механики жидкости, имеющая практическое значение. Он имеет потенциальное значение для большого числа практических приложений, таких как подводные лодки, морские сооружения, опоры мостов, трубопроводы и т.д., когда мы сталкиваемся с процессом обтекания цилиндрических сооружений потоком вязкой жидкости. Образование вихревых дорожек и связанные с ними неустойчивость поток является важным явлением, возникающим при обтекании этих типов структур в широком диапазоне чисел Рейнольдса. При проектировании этих конструкций важную роль играют частота вихревого изменения и анализ вихревых индуцированных колебаний.

Ламинарное и турбулентное нестационарное вязкое течение за круглым цилиндром было предметом многочисленных экспериментальных

и численных исследований, особенно с точки зрения гидродинамики. Согласно [1-3] поле течения над круговым цилиндром симметрично при малых значениях числа Рейнольдса. По мере увеличения числа Рейнольдса поток начинает разделяться за цилиндром, вызывающим вихревое образование, которое является неустойчивым явлением. Для чисел Рейнольдса, удовлетворяющих условие $40 < Re < 200$ существует ламинарный вихрь вслед за цилиндром.

В большинстве экспериментальных исследований изучалось устойчивое и нестационарное поведение чередующихся вихрей в кильватере [4-6]. Следует упомянуть, что эти численные исследования имеют некоторые общие характеристики: они решают нестационарное уравнение Навье-Стокса в двумерной формулировке через завихренности и функцию тока; они описывают соответствующее течение глобальными параметрами, такими как число Струхаля как основной признак нестационарного следа, коэффициенты сопротивления и подъемной силы в области стенки цилиндра; тем не менее, в данное время существующий определенной пробел в анализе характеристик течения в ближнем следе указывает на актуальности исследования данного класса задач.

Следовательно, основная цель настоящего исследования состоит в том, чтобы визуализировать ламинарное нестационарное поле течения, вычислить коэффициентов сопротивления вдоль поверхностей цилиндра и построение контуров функции потока, векторов скорости и статического давления для визуализации вихревого течения в разное время. Численные результаты, полученные при помощи открытого пакета программ OpenFOAM7 [7], сравниваются с экспериментальными измерениями и другими численными результатами, и согласие является удовлетворительными.

2. Физическая модель. Поле течения воздуха вокруг цилиндра моделируется в рамках двумерного приближения, с осью цилиндра, перпендикулярной направлению набегающего на цилиндр потока. Цилиндр моделируется в виде круга, и вокруг него создается прямоугольная область потока. Рассматривается течение слева направо с цилиндром радиуса R, погруженным в несжимаемую среду. Расчетная область состоит из входящей части длиной 23-кратного радиуса и выходной части длиной 40-кратного радиуса, а ширина области составляет 50-кратный радиус цилиндра.

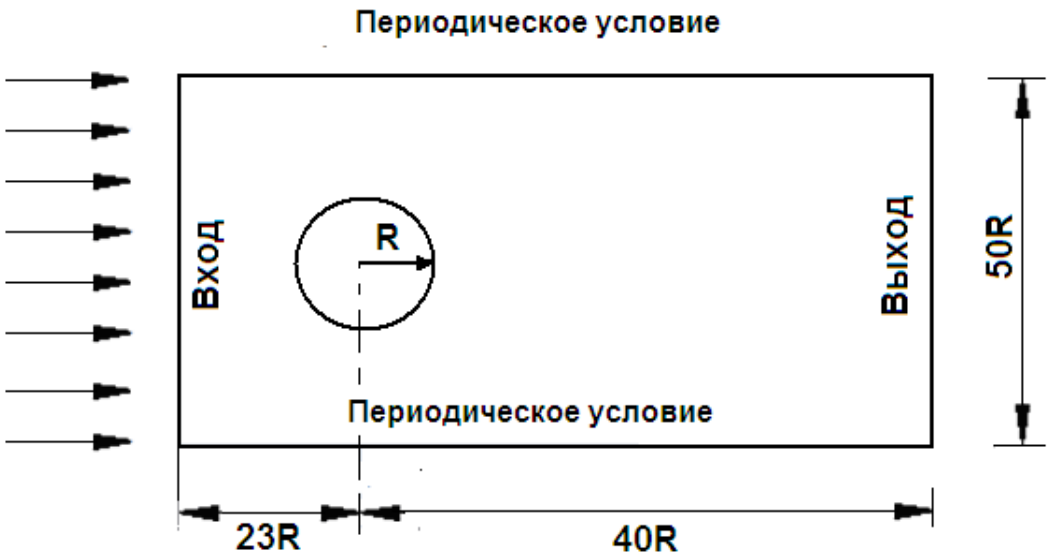

Рис. 1. Геометрия задачи и расчетная область.

Геометрия рассматриваемой задачи и граничные условия показаны рис. 1.

3. Математическая модель. Основными уравнениями нестационарного течения несжимаемой вязкой жидкости около круглого цилиндра являются классические уравнения непрерывности и Навье-Стокса следующего вида [8]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i, j - 1,2,3,$$

где x_i - i-я координата, t - время, u_i - i-й компонент вектора скорости, p - давление, f_i - i-й компонент объемной силы, ρ - плотность жидкости, ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Дискретная форма этих уравнений получается на основе метода конечных объемов, в котором, расчетная область разделяется на ряд контрольных объемов или ячеек [8-12].

Типичная прямоугольная сетка, используемая для моделирования этого исследования создана с помощью утилити blockMesh пакета OpenFOAM7.

Созданная расчетная сетка (см. рис. 2) имеет 29636 узлов, 58378 грани и 14520 четырехугольных ячеек со значительной концентрацией сетки как вокруг цилиндра, так и в следе за цилиндром.

Сгушение расчетной сетки проведено около поверхности цилиндра (см. Рис 3).

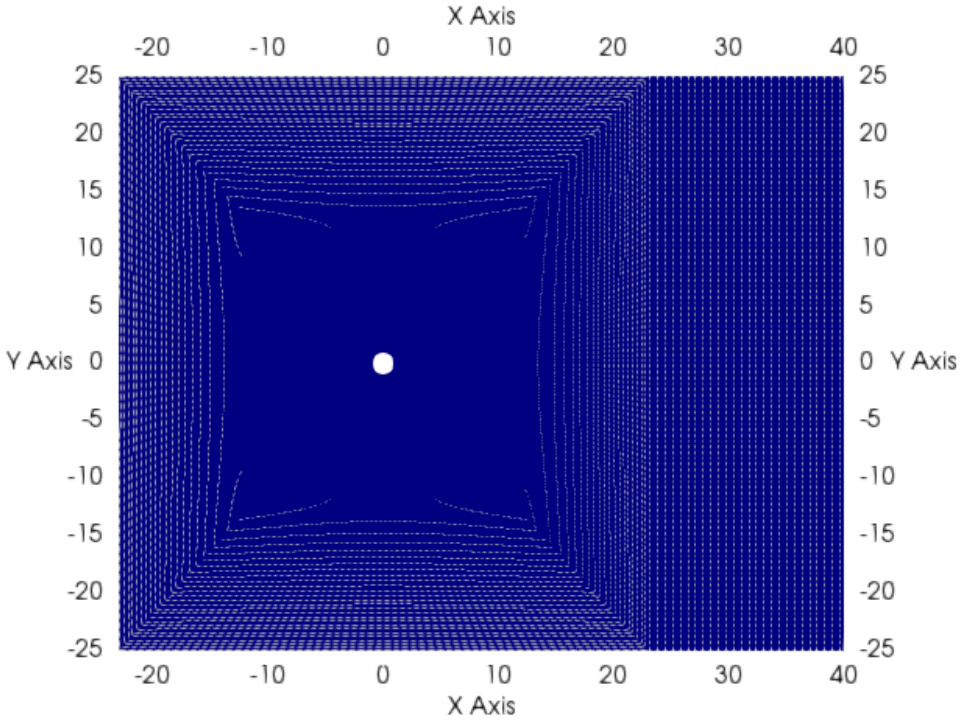

Рис. 2. Расчетная сетка.

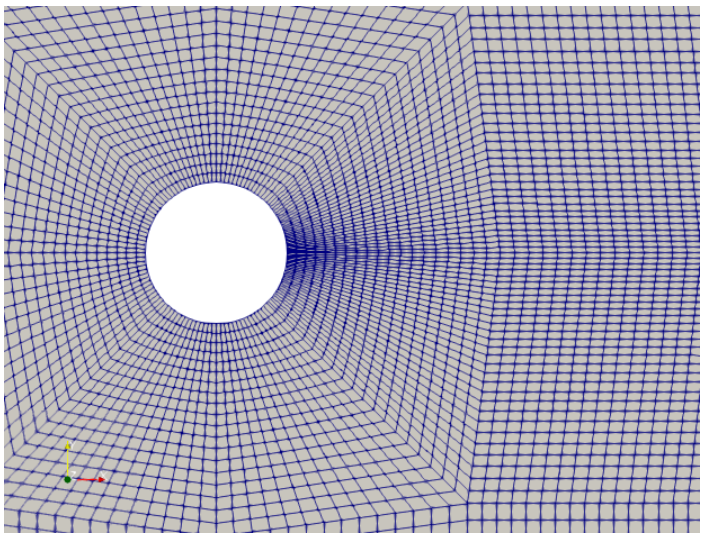

Рис. 3. Вид расчетной сетки вблизи цилиндра.

Для контрольных объемов, примыкающих к границам области, общее уравнение модифицируется с учетом граничных условий. Полученная система линейных алгебраических уравнений затем решается для получения распределения скорости и давления в каждой узловой точке.

Метод контрольного объема состоит из интегрирования основных уравнений относительно каждого контрольного объема с получением дискретных уравнений, которые сохраняют каждую величину в центре контрольного объема. Решение связанных через давления и скорость

нелинейных уравнений осуществляется с помощью алгоритма PISO [8-10].

В качестве граничных условий для твердых стенок взяты условия непроницаемости и прилипания, т.е. u = 0, v = 0. На входной границе применяются однородные условия свободного течения со скоростью U_∞ =1,0 м/с. Периодическое условие рассматривается на боковых границах. Кроме того, на выходе расчетной области рассматривается нулевой градиент давления (см. рис. 1).

4. Результаты и обсуждение. Экспериментальные измерения показывают, что при числе Рейнольдса менее 40 течение вокруг кругового цилиндра достигает стационарного состояния в течение 15 секунд, и за цилиндром образуются два симметричных вихря. Когда число Рейнольдса становится больше 40, происходит потеря симметрии течения в следе, и там образуются и конвектируются чередующиеся вихри. Это порождает попеременное разделение вихрей, которые конвектируются и рассеиваются вдали от цилиндра, образуя хорошо известные вихревые дорожки Кармана. Число Струхаля равно 0.164 для Re=100. Этот результат хорошо согласуется с экспериментальным значением (0,164~0,165), полученным Триттоном [4].

Результаты нестационарного ламинарного течения при Re = 100 представлены на рис. 4-6. Мгновенные линии потока для Re = 100 показаны на рис. 4 в различные моменты времени.

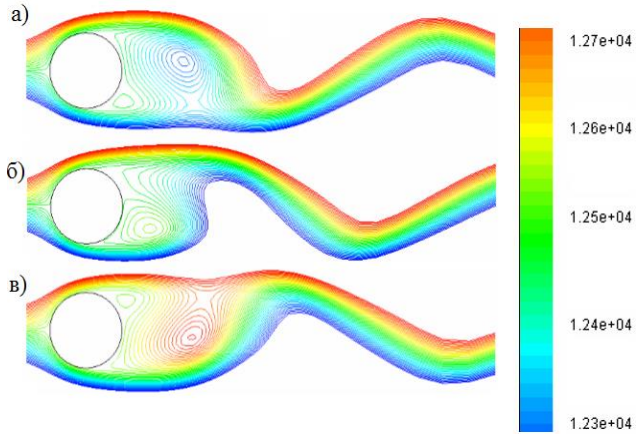

Рис 4. Изолинии функции тока для моментов времени, а) 48с, б) 51с и в) 54с.

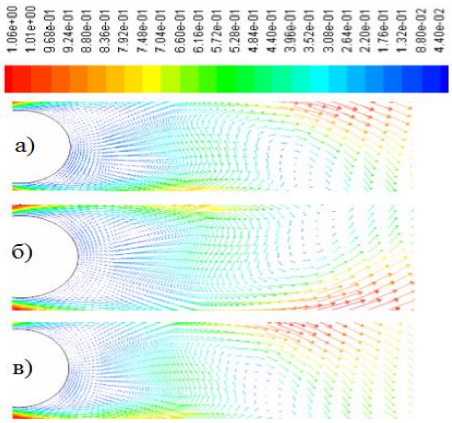

Рис 5. Поле вектора скорости для моментов времени, а) 48с, б) 51с и в) 54с.

На рис. 5 представлено поле вектора скорости для разных моментов времени. Из этих рисунков явно видны чередующиеся процессы

образования, конвекции и диффузии вихрей. Так как начальное значение скорости было постоянным и равным входной скорости, то потоку требуется некоторое время, чтобы получилось развитое течение вокруг цилиндра. И по истечению определенного времени присходит отрыв потока от поверхности цилиндра и образование вихревых дорожек. Периодический отрыв вихрей в ближнем следе приводит к колебательнию подъемной силы и силы сопротивления на цилиндре (см. Рис. 6), где приведены графики временной зависимости коэффициентов Cd и Cl.

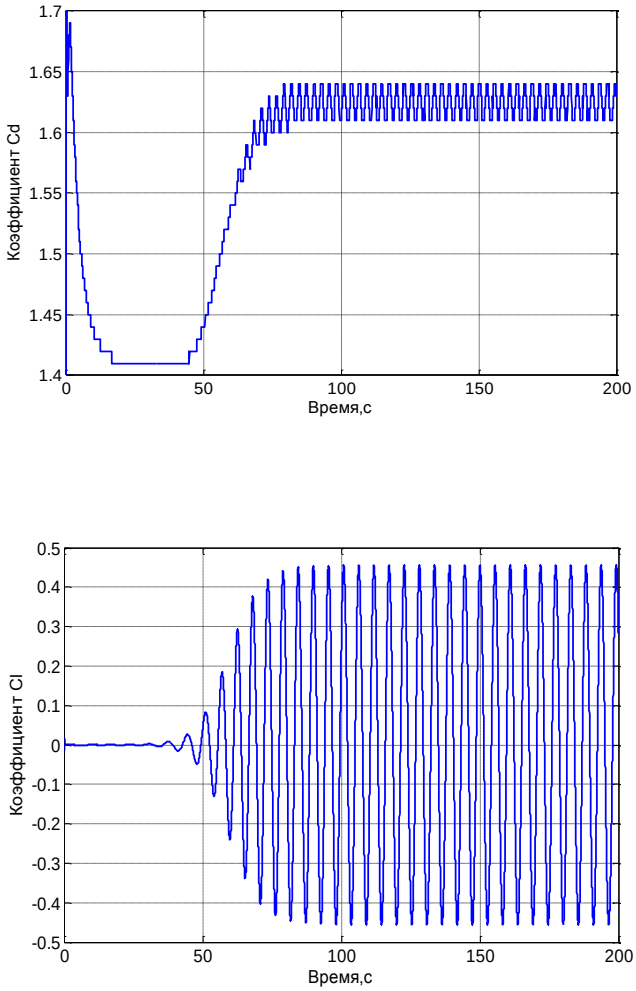

Рис. 6. Коэффициенты Cd (слева) и Cl (справа).

Изменение коэффициентов подъемной силы и сопротивления во времени видно на рис. 6. С появлением вихревого характера течения и по мере развития потока вокруг цилиндра коэффициент сопротивления начинает колебаться около среднего значения 1.625, а амплитуда коэффициента подъемной силы составляет 0.42.

5. Выводы. Численно исследована **к**омплексная задача о нестационарном ламинарном обтекании кругового цилиндра вязким потоком воздуха при числе Рейнольдса 100 методом конечных объемов в

двуменом приближении. Численное моделирование данного класса задач преведено на базе пакета OpenFOAM7. Использована более точная численная схема второго порядка точности, основанная на формулировке скорости-давления и консервативных схемах. Из результатов расчетов с использованием решателя pimpleFoam открытого пакета OpenFOAM7 следует, что двумерный метод конечных объемов хорошо вычисляет гидродинамические силы и улавливает вихревое дорожки Кармана.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. – 736 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа,2003. –840 с.
3. Sumer, B. M. Hydrodynamics Around Cylindrical Structures, World Scientific, Singapore 1997.
4. Tritton, D.J. Experiments on the Flow Around a Circular Cylinder at Low Reynolds Number, J. Fluid Mech. 6, 547, 1959.
5. Lourenco, L. M. & Shih, C. Characteristics of the Plane Turbulent Near Wake of a Circular Cylinder. A Particle Image Velocimetry Study, Private Communication.1993.
6. Anderson, J.D. Fundamentals of Aerodynamics, 4th Ed., Mc Grow-Hill, Columbus, USA. 2005.
7. http://www.openfoam.org. OpenFOAM 7.0 User Guide. Дата обращения 25.01.2021.
8. Versteeg,H.K & Malalasekera, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Longman Scientific & Technical, England, 1995.
9. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с. англ. –М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
10. Ferziger J. H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer Verlag, 2002, 423.
11. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, California, USA, 2000. – 537p.
12. Patankar S. V. A Calculation Procedure for Two Dimensional Elliptic Situations.// Numerical Heat Transfer. –1981. –Vol. 4. – P. 409–425.

ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика, физика, техника. 2021. №1

УДК 536.2.02

Р.К. САГЫНДЫКОВА, М.Ж. КАЛБЕКОВА, А.Ы. КУРБАНАЛИЕВ,
ОРМОШ к А.

МУЛЬТИФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Проведено численное моделирование двумерной стационарной конвекции в квадратной области с пористой средой, ограниченной вертикальными стенками и изотермическими горизонтальными стенками с разной температурой. Температура левой стенки изменяется плавно от одной температуры до другой. Большая часть правой стенки является изотермической, тогда как нижняя, малая часть имеет переменную температуру. Основу математической модели задачи составляется уравнения переноса импульса в пористой среде в форме Брикчмана с учетом эффекта плавучести в приближении Буссинеска. Численное моделирование выполнено на базе пакета мультифизического моделирования Comsol Multiphysics5.4. Показан способ построения стационарной модели свободной конвекции с граничными условиями, учитывающими заданную переменную или постоянную температуру.

Ключевые слова. *Моделирование, свободная конвекция, приближение Буссинеска, теплообмен,пористость, уравнение Брикмана, мультифизическое моделирование, Comsol Multiphysics.*

Введение. С 1970-х годов энергетический кризис был включен в пятерку самых важных проблем в мире, а к остальным четырем проблемам относятся соответственно рост численности населения, еда, окружающая среда и ресурс. В этой ситуации энергосбережение становится более важным, чем когда-либо.

Рассматриваемая здесь задача связана с моделированием подземного стационарного течения в пористой среде [1, 2], с учетом изменения плотности, возникающим в результате переменной температуры среды. Тестовый пример данной задачи взят из [3] и моделирование выполнено на базе мултифизического пакета COMSOL Multiphysics 5.4 [4]. При

мультифизическом моделировании использован интерфейс COMSOL Multiphysics 5.4 — интерфейс уравнений Бринкмана и интерфейс теплопередачи в пористых средах.

Произведенное сравнение результатов мультифизического моделирования с данными других работ свидетельствует о адекватности использованной модели.

Целью данной работы является демонстрация возможностей применения пакета мультифизического моделирования Comsol Multiphysics5.4 при исследовании процесса естественной конвекции в пористой среде.

Постановка задачи. Геометрия рассматриваемой задачи и соответствующие граничные условия, используемые в данной работе приведены на рис. 1. Линейный размер расчетной области L=0.1м.

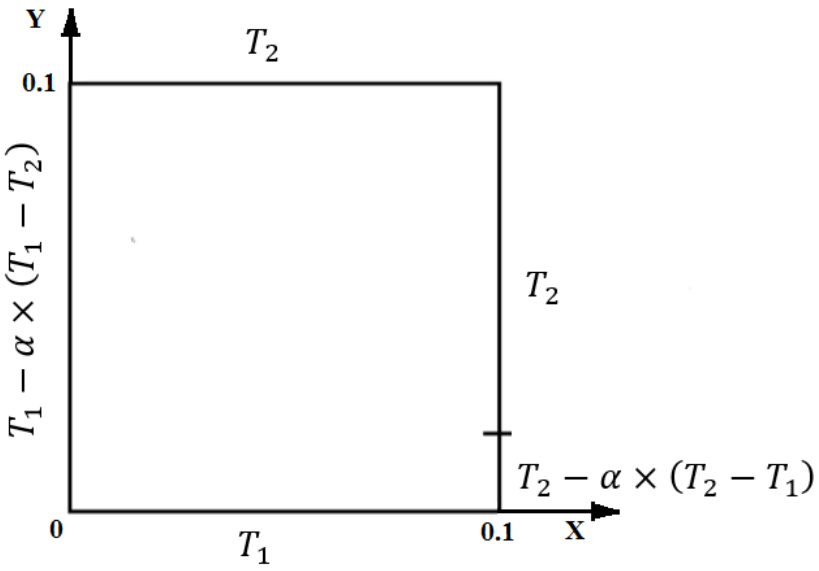

Рис. 1. Геометрия задачи и граничные условия.

Согласно условиям задачи, воды двигается внутри расчетной области, но не выходит из нее. В момент времени t = 0с вода покоилась, температура пористой среды по краям расчетной области меняется от наибольшего значения T_1 до наименьшего значения T_2. Значение коэффициента α меняется от 0 до 1 и применяется для согласования граничных условий для температурного поля. Вода приходит в движение из-за эффекта плавучести, который возникает вследствие переменной температуры.

Математическая модель задачи. Основу математической модели задачи составляется уравнения переноса импульса в пористой среде в форме Брикнмана с учетом эффекта плавучести в приближении Буссинеска в следующей форме [5]:

$$\frac{\mu}{k}u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i \beta (T - T_0) \qquad (1)$$

где k - коэффициент теплопроводности воды, μ — коэффициент динамической вязкости воды, ε — пористость среды, u_i – компоненты скорости течения воды, T – температура среды, g_i – ускорение свободного падения, β – коэффициент объемного расширения среды.

Система уравнений (1) необходимо дополнить следующими уравнениями неразрывности и переноса тепла соответственно:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (2)$$

$$\rho C_p u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{eq}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad (3)$$

где C_p – теплоемкость воды при постоянной температуре, а k_{eq} – эффективный коэффициент теплопроводности смеси вода-грунт.

В табл. 1. Приведены значения коэффициентов, входящие в уравнения (1-3).

Таблица 1. Физические свойства среды и воды

1.	Обозначение	Физический смысл	Численное значение
2.	ρ	Плотность воды	1000 $^{кг}/_{м^3}$
3.	μ	Коэффициент динамической вязкости воды	1.0×10^{-3}Па·с

4.	β	Коэффициент объемного расширения воды	$1.0 \times 10^{-6}\ K^{-1}$
5.	k	Коэффициент теплопроводности воды	$6\ \frac{W}{\text{м} \times K}$
6.	C_p	Теплоемкость воды при постоянной температуре	$4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \times K}$
7.	ε	Пористость среды	0.4
8.	κ	Коэффициент проницаемости	$1.0 \times 10^{-3}\ \text{м}^2$
9.	p_0	Атмосферное давление	1.0133×10^5 Па
10.	T_0	Температура	$293.15\ K$
11.	T_1	Высокая температура	$315.15\ K$
12.	T_2	Низкая температура	$293.15\ K$

Расчетная сетка сгушена вблизки границ расчетной области (см. Рис. 2).

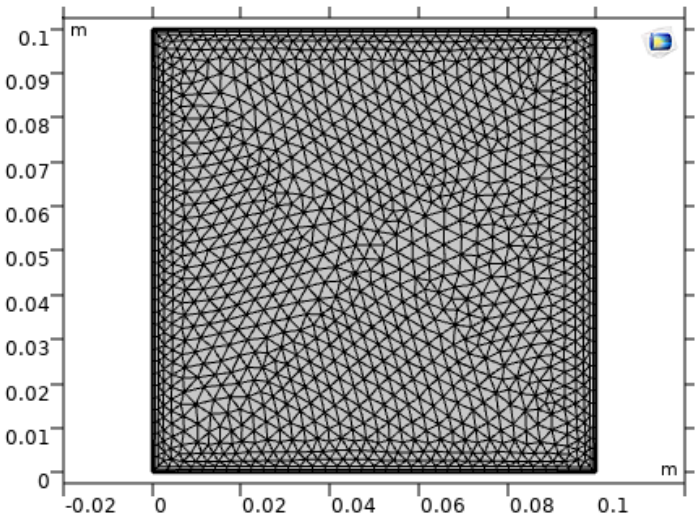

Рис. 2. Расчетная сетка.

Начальные и граничные условия. В начальный момент времени t = 0с задаются начальные значения полей скорости, температуры и давления. При моделировании стационарных течений обычно не задаются начальные распределения вышеуказанных искомых величин. Однако,

удачное задание начальных условий может значительно сократить общее время вычислений.

На границах расчетной области для скорости задаются условия прилипания и непротекания. Для температуры задается постоянные или переменные значения температуры границ (см. рис. 1).

Численный метод решения. Уравнения (1-3) представляют собой взаимосвязанную через давление нелинейную систему. Для получения сходящегося решения этой системы коэффициент объемного расширения β жидкости изменяется от нуля до своего значения постепенно. При $\beta = 0$ уравнения (1) и (2) не связаны между собой и итерационный процесс быстро сходится. Полученные при этом значения скорости и давления используются в качестве начальных приближений для некоторого малого значения β. Эта процедура повторяется до тех пор пока числа Рэлея не достигнет своего значения 1.0×10^5. Более подробную информацию о методе параметрического решения взаимосвязанных через давление нелинейных уравнений (1-3) можно найти в руководстве пользователя пакета COMSOL Multiphysics [4].

Результаты численных расчетов и обсуждение. Результаты численных расчетов приведены на рис. 3-6. На рис. 3 представлены изолинии температуры, а на рис. 4 приведена изоповерхность поля температуры.

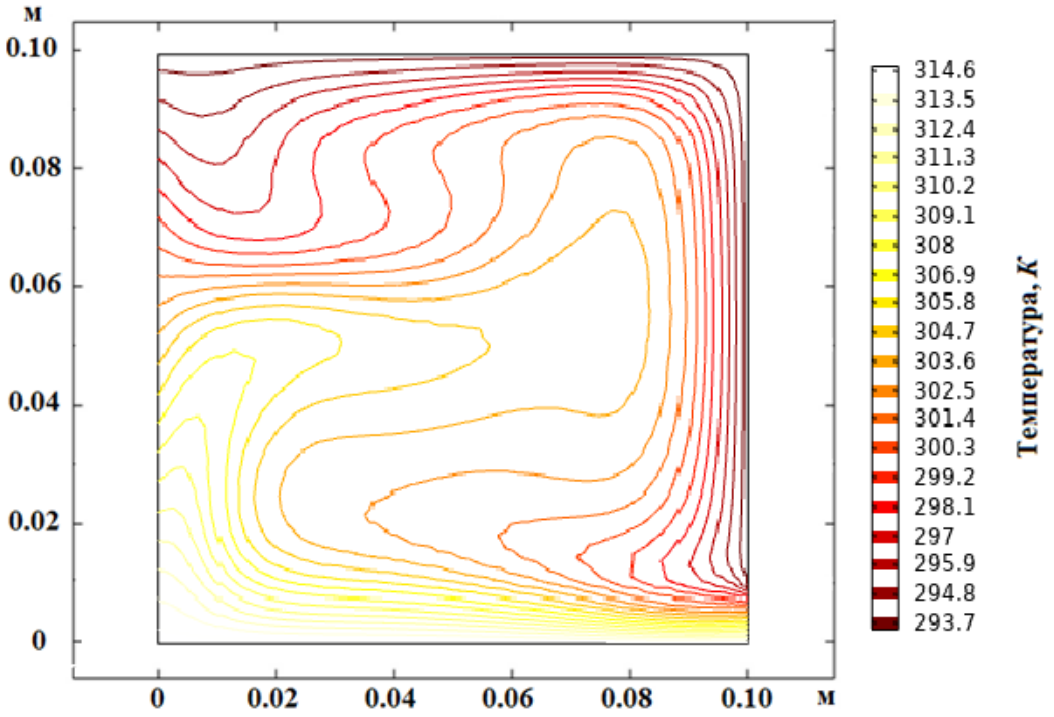

Рис. 3. Изолинии температуры.

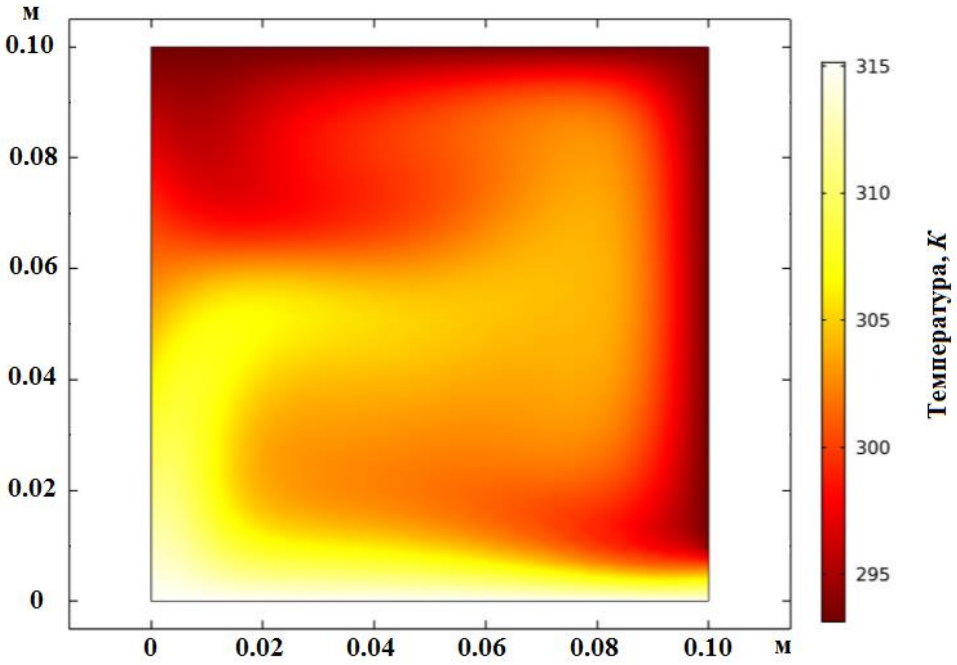

Рис. 4. Изоповерхность температуры.

Из рис. 5, где представлено изоповерхность и поле вектора скорости видно, что поток около правой стенки направлен вниз. После ударения об нижнюю горизонтальную стенку, далее поток двигается к левой стенке. По мере движения температура потока повышается, и около левой стенки, нагретый поток поднимается вверх из-за конвекции. Ближе к середине

высоты расчетной области восходящий горячий поток жидкости смешивается с нисходящим потоком холодной воды и общее течение направляется в сторону правой стенки.

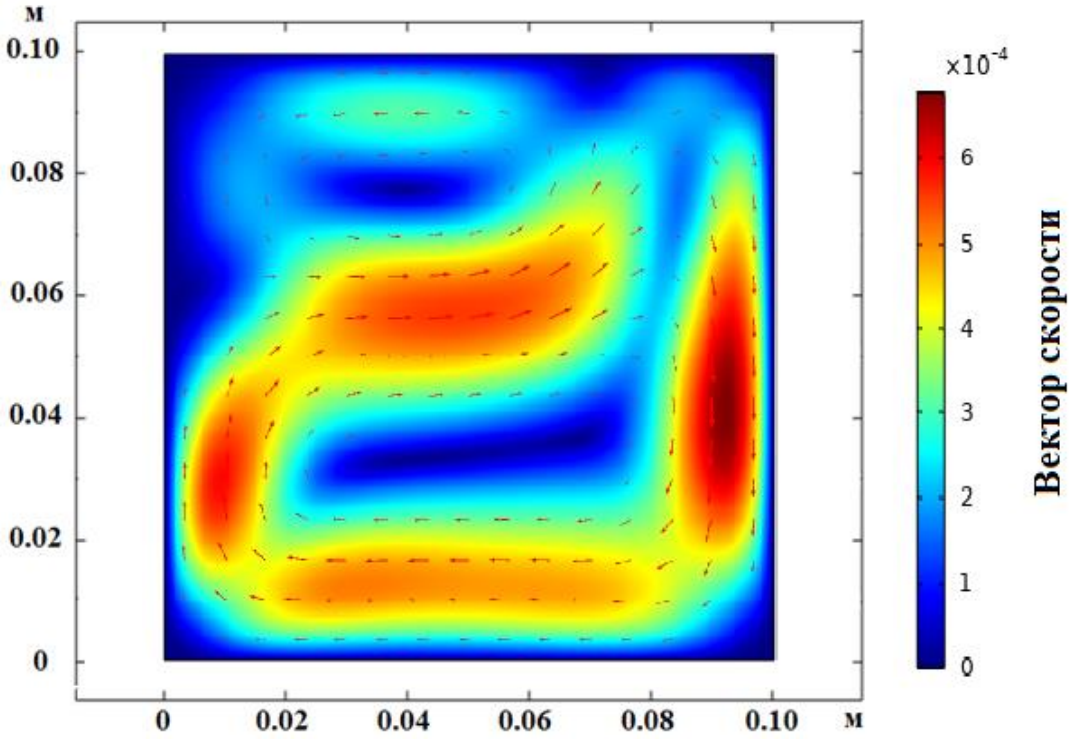

Рис. 5. Изоповерхность и поле вектора скорости.

Далее этот поток разделяется на два поток – один идущий вдоль правой стенки вниз, а второй, более холодный (см. Рис. 5) текущий верх, в сторону правого верхнего угла расчетной области. Затем это холодный поток идет в сторону левой стенки, потом вдоль левой стенки вниз, пока не встретится в восходящим горячим потоком жидкости. Наименьшие значения температуры наблюдаются вдоль правой и верхней горизонтальной стенок.

На рис. 6 представлены изолинии давления. Видно, что отрицательные значения давления расположены около нижней части расчетной области, ближе левого нижнего угла.

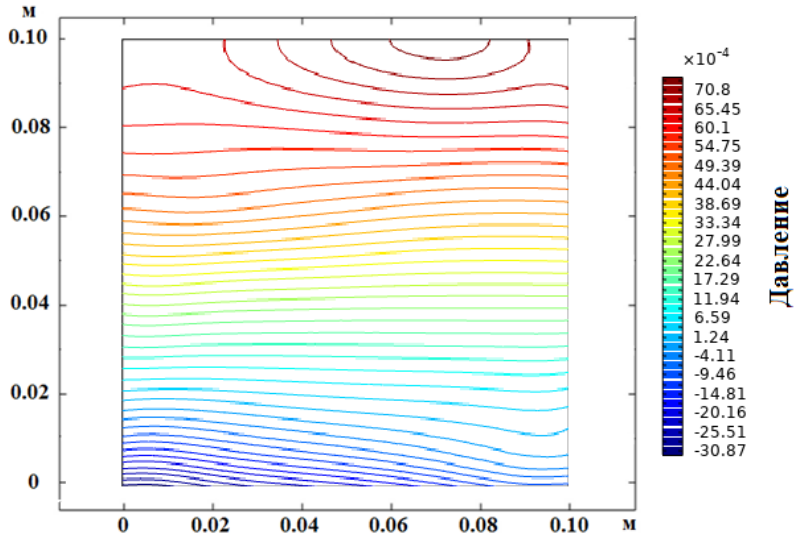

Рис. 6. Изолинии давления.

Выводы. В данной работе проведено численное моделирование двумерной стационарной конвекции в квадратной области с пористой средой, ограниченной вертикальными стенками и изотермическими горизонтальными стенками с разной температурой. Основу математической модели задачи составляется уравнения переноса импульса в пористой среде в форме Брикмана с учетом эффекта плавучести в приближении Буссинеска. Численное моделирование выполнено на базе пакета мультифизического моделирования Comsol Multiphysics5.4. Показан способ построения стационарной модели свободной конвекции с граничными условиями, учитывающими заданную переменную или постоянную температуру.

Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд-во Дрофа, М., 2003. – 840 с.

2. Рашиков В. И., Рошаль А. С. Численные методы решения физических задач. Изд-во Лань. СПб., 2005. – 208 с.

3. Hossain, M.A. and Wilson, M. Natural Convection Flow in a Fluid-Saturated Porous Medium Enclosed by Non-Isothermal Walls with Heat Generation. International Journal of Thermal Sciences, 2002, 44, 447-454.

4. Comsol Multiphysics User Guide. https://www.comsol.ru/heat-transfer-module. (дата обращения: 01.02.2021).

5. Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. – 736 с.

РЕФЕРАТТАР

МАТЕМАТИКА

УДК 517.928

Алымкулов К., Кожобеков К.Г., Азимов Б.А. Секирик окуясы үчүн моделдик теңдеме жана анын жалпыланышы. Алардын чечимин параметрлештирүү жана асимптотикасы // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 5-10 б.

Рейс теңдемесинин асимптотикасын тургузуу үчүн жаңы параметлештирүү теңдемеси сунушталды жана анын жардамы менен ал теңдеменин чечиминин ас имптотикасы эсептелди.

Библиогр. 10.

УДК 517.968.74

Абдирайимова Н.А. Экинчи тартиптеги толук эмес ядролуу сызыктуу сымал вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштарынын жарым октогу турумдуулугунун жетиштүү шарттары // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 11-18 б.

Толук эмес ядролуу сызыктуу сымал Вольтерра тибиндеги экинчи тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштарынын жана алардын биринчи туундуларынын жарым октогу чектелгендигинин, б.а. турумдуулугунун жетиштүү шарттары табылат. С. Искандаровдун (1998) кошумча ядролор методу өнүктүрүлөт. Иллюстративдик мисалдар тургузулат.

Библиогр. 9.

УДК 517.956.6

Абдумиталип у К. Өзгөрмөлүү коэффициенттүү төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболалык теңдеме үчүн чек аралык маселе // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 19-30 б.

Өзгөрмөлүү коэффициенттүү төртүнчү тартиптеги аралаш парабола-гиперболалык оператор экинчи тартиптеги *y* боюнча алынган дифференциалдык операторго колдонгон

учурдагы чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденген/

Библиогр. 8.

УДК 517.928

Алымкулов К., Кожобеков К.Г., Азимов Б.А., Султанова Н.З. Экинчи тартиптеги сингулярдуу козголгон экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн бир чектик маселе жөнүндө // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 31-38 б.

Экинчи тартиптеги сингулярдуу козголгон экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн бир чектик маселе каралат жана ал классикалык кичине параметр методу менен кайталануу жолу менен каралган аралыкта тургузулат.

Библиогр. 9.

УДК 517.956.6

Бекмаматов З.М. Тегиздиктеги төртүнчү тартиптеги аралаш-курама типтеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселелери жөнүндө // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 39-47 б.

Макалада тегиздиктеги төртүнчү тартиптеги аралаш-курама түрдөгү теңдеме үчүн жалгаштыруу маселеси иликтенген. Мүнөздөмөлөрдүн теңдемеси $y > 0$ болгондо эки эселүү жана комплекстик-түйүндөш тамырларга, ал эми $y < 0$ болгондо эки башка эки эселенген чыныгы тамырларга ээ болот. Жалгаштыруу сызыгы $y = 0$ болгон тик бурчтуу областтагы жалгаштыруу маселесинин бир маанилүү чечилүүсү далилденген.

Библиогр. 6.

УДК 517.968.74

Искандаров С., Абдирайимова Н.А. Кошумча ядролор методу жана төртүнчү тартиптеги сызыктуу сымал вольтерра тибиндеги толук эмес ядролуу интегро-дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштарынын турумдуулугу // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 48-36 б.

Төртүнчү тартиптеги сызыктуу сымал Вольтерра тибиндеги толук эмес ядролуу интегро-дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштарынын жана алардын биринчи, экинчи, үчүнчү туундуларынын жарым окто чектелгендигинин, б.а. чыгарылыштарынын турумдуулугунун жетиштүү шарттары табылат. Бул максатта кошумча ядролор методу, теңдемени системага стандарттык эмес келтирүү методу, В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу, кесүүчү функциялар методу, интегралдык барабарсыздыктар методу колдонулат жана өнүктүрүлөт.

Иллюстративдик мисал тургузулат.

Библиогр. 7.

УДК 517.928

Каримов С., Акматов А.А. Матрицанын өздүк маанилери жорума бөлүккө ээ болгон учурда сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер системасынын чечимин изилдөө // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 57-64 б.

Жумушта сызыктуу эмес сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимин өздүк маанилер жорума бөлүккө ээ болгон учурда изилдөө жараяны каралган. Буга дейре жасалган жумуштардан өзгөчөлүгү болуп, туруктуулук шарты сакталуучу аралык чыныгы сандар талаасында жок болгондугу. Мына ошол себептүү чечим комплекстүү сандар талаасында изилденген. Чечимдин асимптотикасын алуу үчүн удаалаш жакындашуу усулу колдонулган. Каралуучу маселенин чечими бүткүл комплекстүү тегиздикте каралат. Комплекстүү тегиздик биринчи тартиптеги ийрилер менен өздүк маанилердин тандалуусуна жараша чектүү сандагы аймакчаларга бөлүнөт. Өздүк маанилер аналитикалык функциялар болгондугуна байланыштуу анын чыныгы жана жорума бөлүктөрүн деңгээл сызыктарын колдонуп комплекстик тегиздикти толук кандуу каптоого болору келип чыгат. Чечимди изилдөө үчүн интегралдоо жолдору тандалып, ал жолдор боюнча баалоолор алынган. Жыйынтыгында маселенин чечиминин бир калыпта жыйналуучулугу, чечимдин жалгыздыгы далилденген.
Библиогр. 9.

УДК 513.7

Микеш Йозеф. Солодовниковдун $V(K)$ мейкиндиги жана анын жалпыланышы // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 57-64 б.

Геодезиялык чагылтууларды жана проективдик өзгөртүүлөрдү Риман мейкиндиктеринде изилдөөдө А.С. Солодов $V(K)$ мейкиндигин кийирген. Ал мейкиндик метриканын атайын түзүлүшү менен аныкталат. Псевдориман мейкиндиги үчүн, $V(K)$ мейкиндиги үчүн да жалпылоо кийирилген, ал $V_n(K)$ мейкиндиги болуп эсептелет. Бул мейкиндикте геодезиялык чагылтуулар: $\psi = \bar{K}\,\bar{g} - K\,g$ шарты менен мүнөздөлөт. Бул мейкиндик $V_n(K)$ Эйнштендик, псевдо-симметриялуу жана Риччи псевдосимметриялуу геодезиялык чагылтууларга карата туюк экендигин автор

далилдеди. Ошондой эле бир гана геодезиялык чагылтууларга карата кыймылдоо касиетине ээ болот. Голоморфтуу-проективдүү келер жана гиперболалык келер мейкиндиктер үчүн бул касиет менен жалаң $K_n[K]$ мейкиндиги ээ.

Библиогр. 9.

УДК 517.932

Нарымбетов Т.К. Комплекстик областарда сингулярдуу козголгон теңдемелерди изилдөөлөрдүн анализи// ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 80-97 б.

Бул жумушта сингулярдык козголгон теңдемелерди комплекстик тегиздиктин кандайдыр бир областарында изилдөө жүргүзүшкөн авторлордун алган жыйынтыктарына анализ жүргүзүлдү. Изилдөөлөр шартуу түрдө үч бөлүккө бөлүндү. Алгачкы изилдөөчүлөр негизинен сызыктуу сингулярдык козголгон теңдемелердин чечимдерин кичине параметр боюнча ажыратуу маселесин карашкан. Ажырамалар теңдеменин кадимки же бурулуу чекиттеринин чекебелинде, кийинчирек бүткүл комплекстик тегиздикте каралган. Областтардын топологиясыСтокс сызыктарын колдонуу аркылуу суреттөлгөн. Анализ жүргүзүүнүн экинчи этабы катары “туруктуулуктун бузулушунун узартылышы” кубулушу каралды жана бул багыттагы жумуштардын жыйынтыктары келтирилди. Туруктуулуктун бузулушунун узартылышы жөнүндөгү теорема мейкиндикти өзүнө-өзүн чагылдыруу принцибин колдонуу менен жүргүзүлдү. Туруктуулуктун шартын алып таштоо менен изилденген теңдемелер анализдөөнүн кийинки этабын түздү. Анализдөө процессинде чектик катмар сызыктары, регулярдык, сингулярдык областтар түшүнүктөр каралып, алардын жашашы жөнүндөгү теорема далилденди. Теореманын натыйжасы катары кандай шартта “туруктуулуктун бузулушунун узартылышы” орун алары көрсөтүлдү. Ошондой эле кубулган теңдемеси бир нече чечимдерге ээ болгон теңдемелер боюнча алынган жыйынтыктар каралды. Бардык учурларда областтарды бөлгөн сызыктардын Стокс сызыктары менен окшоштугу белгиленди.

Библиогр. 15.

УДК 517.928.2

Омаралиева Г.А., Турсунов Д.А., Маматбуваева М.И., Раманкулова Ш.А. Кош чектик катмарга ээ болгон сингулярдык козголгон маселе // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 98-105 б.

Жогорку тартиптеги туундунун астында кичине параметрди кармаган экинчи тартиптеги сызыктуу бир текүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн эки

чекиттүү чектик маселенин чыгарылышынын асимптотикалык абалы изилденет. Маселенин өзгөчөлүктөрү: кош чектик катмардын жашашы жана тийиштүү козголбогон маселенин чыгарылышынын жылма эместиги. Изилденип жаткан маселенин асимптотикалык ажыралмасы жалпыланган чектик функциялар жана классикалык чектик функциялар методдору менен тургузулган жана ажыралманын калдык мүчөсү максимум принцибинин жардамы менен бааланган. Эки чекиттик чектик маселенин катар көрүнүшүндө алынган ажыралмасы Эрдейдин маанисинде асимптотикалык катар болот.

Библиогр. 12.

УДК 514.75

Папиева Т.М., Абдулазизова М.Х., Адиева Б.Т., Исакова Э.М., Максатбек к Б. E_5 евклиддик мейкиндигинде $\left(f_1^5, \Delta_3\right)$ түгөйүнүн квази-кошмок сызыгынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 98-105 б.

$\Omega \subset E_5$ аймагында ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген торчонун бир сызыгы өтө тургандай жылма сызыктардын классы берилген. $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right) \left(i, j, k = \overline{1,5}\right)$ кыймылдуу репери бул торчонун ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери боло тургандай тандалып алынган. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары Σ_5 Френенин торчосун түзүшөт. Σ_5 торчосунун ω^1 сызыгынын жанымасында инварианттык түрдө F_1^5 чекити аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_1^5 псевдофокусу өзүнүн Ω_1^5 аймагын сызып чыгат. Мындан $f_1^5(X) = F_1^5$ боло тургандай $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ чагылтуусуна ээ болобуз. $\left(f_1^5, \Delta_3\right)$ түгөйүнүн квази-кошмок сызыгынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары далилденди.

Библиогр. 6.

УДК 517.956.6

Сопуев А., Бекмаматов З.М. Эллипстик-гиперболалык операторду камтыган төртүнчү тартиптеги аралаш-курама теңдеме үчүн чек ара маселелер // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 106-113 б.

Интегралдык теңдемелер методу менен эллипстик-гиперболалык операторду

камтыган, төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтердеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселелеринин бир маанилуу чечилиши далилденген.

Библиогр. 7.

УДК 517.955.8

Сулайманов З.М., Эркебаев У.З., Абасова Г.З., Турсунов Д.А. Ички катмарга ээ болгон сингулярдык маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 114-121 б.

Бир тектүү эмес биринчи түрдөгү чек аралык маселе башкача айтканда, лапласиан алдында кичине параметрди кармаган эки көз карандысыз өзгөрүлмөлүү сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эллиптикалык теңдеме үчүн алкакта Дирихленин маселеси каралган. Бул теңдеменин потенциалы изилденип жаткан аймакта жылма, бирок алкактын ичинде нөлгө айланат. Биринчи түрдөгү чек аралык маселенин чечими жашайт жана жалгыз. Чек аралык маселенин айкын чечимин тургузууга мүмкүн эмес. Ошондукан, алкакта биринчи түрдөгү чек аралык маселенин асимптотикалык чечимин тургузуу талап кылынат. Изилделип жаткан маселенин эки өзгөчөлүгү бар (бисингулярдык маселе): кичине параметрдин лапласиандын астында катышышы жана тиешелүү козголбогон теңдеменин чечими каралып жаткан аймакта жылмакай функция эмес. Асимптотикалык чечимди тургузуу үчүн чек аралык функцияларынын модификацияланган ыкмасын колдонобуз, анткени классикалык чек аралык функциялар ыкмасын колдонууга болбойт. Алгач, кичине параметрге карата формалдуу асимптотикалык чечимди тургузабыз, андан соң асимптотикалык ажыралманын калдык мүчөсүн баалайбыз.

Библиогр. 11.

УДК 514.75

Шамшиева Г.А., Исакова Э.М., Максатбек к Б., Кулматова Б.У. E_6 евклиддик мейкиндигинде $\left(f_1^5, \Delta_4 \right)$ түгөйүнүн квази-кошмок сызыгынын жашашы // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 122-129 б.

$\Omega \subset E_6$ аймагында ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген торчонун бир сызыгы өтө тургандай жылма сызыктардын классы берилген. $\Re = \left(X, \vec{e}_i \right) \left(i, j, k = \overline{1,6} \right)$ кыймылдуу репери бул торчонун ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери боло тургандай тандалып алынган. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары Σ_6 Френенин торчосун түзүшөт. Σ_6

торчосунун ω^1 *сызыгынын жанымасында инварианттык түрдө* $F_1^5 \in (X, \vec{e}_1)$ *чекити аныкталат.* X *чекити* Ω *аймагында кыймылга келгенде* F_1^5 *псевдофокусу өзүнүн* Ω_1^5 *аймагын сызып чыгат. Мындан* $f_1^5(X) = F_1^5$ *боло тургандай* $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ *чагылтуусуна ээ болобуз.* (f_1^5, Δ_4) *түгөйүнүн квази-кошмок сызыгынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары далилденди, мында* $\Delta_4 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ *– төрт ченемдүү бөлүштүрүү.*

Библиогр. 6.

ФИЗИКА

УДК 541.13

Ибраимов Т.К., Эркинбаева Н.А., Ташполотов Ы., Садыков Э. Электрофизикалык иондоштуруунун таасирине негизделген химиялык элементтерди трансформациялоо ыкмасы // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 138-146 б.

Бул жумушта суунун электрофизикалык иондошуусунун негизинде химиялык элементтердин төмөнкү энергия шартындагы өзгөрүүлөрү (трансмутациясы) аныкталды. Порошок түрүндөгү катуу чөкмөнүн көлөмү электроддордун потенциалдар айырмасына, электроддордун материалы жана аянты жана иондошуу убактысынан көз каранды экендиги тастыкталды. Электрофизикалык иондошуу процессинде Bk, Tb, Hf, Ho, Pu, Os, Zn, Te, Cu, Se, Pm, W ж.б. сыяктуу элементтердин пайда болушу байкалат жана бул элементтердин бардыгы (Bk, Tb, Hf, Ho, Pu, Os, Zn, Te, Cu, Se, Pm, W) төмөнкү энергиялуу трансмутация процессинде пайда болгон элементтер.

Библиогр. 9.

УДК 536.2.02

Калбекова М.Ж., Калмурзаева А.Т., Марс к Т., Ормош к А. Жылуулук өткөрүмдүүлүк кубулушун мультифизикалык моделдөө // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 147-156 б.

Жалпы физика курсундагы жылуулук өткөрүмдүүлүк кубулуштарын окуп үйрөнүү үчүн Comsol Multifhysics мультифизикалык пакетин моделдөө мүмкүнчүлүктөрүн

колдонуу көрсөтүлөт. Бир өлчөмдүү стационардык нурдануу аркылуу жылуулук өткөрүүнүн жана эки өлчөмдүү стационардык конвекциялык жылуулук өткөрүүнүн тесттик маселерели каралган. Радиациялык нурдануу, конвекциялык муздоону, жылуулук агымын жана берилген температураны эске алган чек ара шарттары бар стационардык жылуулук өткөрүмдүүлүк кубулушун мультифизикалык моделдештирүү ыкмалары келтирилген. Бул ишти аткаруунун натыйжасында Comsol Multiphysics пакетинин мүмкүнчүлүгү айгинеленген, тиги же бул физикалык кубулуштарга тиешелүү болгон жекече туундулары бар дифференциалдык теңдемелерди чечүүнүн сандык усулдары боюнча терең билим студенттерден талап кылынбагандыгы көрсөтүлгөн. Чындыгында алар татаал дифференциалдык теңдемелерди жазбастан эле физикалык чоңдуктарды кийирүү аркылуу көптөгөн реалдуу кубулуштардын моделин түзө алышат. Comsol Multiphysics пакетинин моделдерин окуп үйрөнүү реалдуу кубулуштардын физикалык маңызын түшүнүү кошумча ыкма болору көрсөтүлдү.

Библиогр. 6.

УДК 532.517.2:621.1.016.4

Калмурзаева А.Т., Абдимуталипова З.Н., Курбаналиев А.Ы., Марс к Т. Тегерек цилиндрдин айланасындагы стационардык эмес ламинардык кубулушту сандык моделдештирүү // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 157-165 б.

Тегерек цилиндрдин айланасындагы стационардуу эмес кысылбоочу ламинардык толкундардын ылдамдык жана басым талааларынын динамикалык мүнөздөмөлөрү сандык ыкма түрүндө изилденди. Ылдамдык жана басым аркылуу жазылган негизги теңдемелер эки өлчөмдүү чектүү көлөмдөр ыкмасы менен OpenFOAM7 ачык пакетинин жардамында чечилди. Сандык эсептөөлөрдүн натыйжасында агымдын куюндуу режиминин баштапкы механизми көрсөтүлдү жана нерсенин стационардык эмес күчтөрүнө баа берилди. Сандык эсептөөлөр аркылуу алынган каршылык жана көтөрүү күчтөрүнүн термелүү жыштыктары эксперименталдык жыйынтыктар менен жакшы дал келишет. Тез жыйналучуулукка байланыштуу эки өлчөмдүү чектүү көлөмдөр ыкмасы ламинардык агымды сандык моделдеширүүдө ыңгайлуу деп табылды.

Библиогр. 12.

УДК 536.2.02

Сагындыкова Р.К., Калбекова М.Ж., Курбаналиев А.Ы., Ормош к А. Көзөнөктүү чөйрөдөгү эркин конвекция кубулушун мультифизикалык моделдештирүү // ОшМУнун жарчысы. Математика, физика, техника сериясы. – 2021. № 1. – 166-174 б.

Квадрат түрүндөгү көзөнөкчөлөрү бар, тик өйдө багыталган дубалдары жана изотермикалык ар башка температурадагы горизонталдуу дубалдары бар областагы стационардык конвекция кубулушту сандык моделдештирүү келтирилди. Сол дубалдын температурасы бир мааниден экинчи мааниге үзгүлтүксүз өзгөрөт. Оң дубалдын көпчүлүк бөлүгү изотермикалык болсо, төмөнкү кичине бөлүгү өзгөрүлмөлүү температурага ээ. Маселенин математикалык моделин көзөнөктүү чөйрөдөгү импульстун таралуу теңдемесинин Биркман формасында түрү түзөт. Сандык моделдештирүү Comsol Multiphysics5.4 мультифизикалык моделдештирүү пакетинде аткарылды. Берилген туракту же өзгөрүлмө температураны эске алуучу чек ара шарттары бар эркин конвекциянын стационардуу моделин түзүү ыкмасы көрсөтүлдү.

Библиогр. 5.

ABSTRACTS

MATHEMATICS

УДК 517.928

Alymkulov K., Kozhobekov K.G., Azimov B.A. About the model equation for the jump an phenomenon and its generalization. Paramtrization and asymptotics // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 5-10.

Here, for the Reiss equation, a new equation is proposed for the parametric representation of its solution. And on the basis of this representation, a new asymptotic representation of the solution is obtained. A new generalized Reiss equation for the jump phenomenon is also proposed.

Bibliogr. 10.

УДК 517.968.74

Abdiraiimova N.A. Sufficient signs of stability of solutions of a weakly nonlinear volterra second-order integro-differential equation with incomplete kernels on the semi-axis // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 11-18.

Sufficient conditions are established for the boundedness of all solutions and their first derivatives on the semiaxis, i.e., for the stability of solutions of a weakly non-linear second-order integro-differential equation of the Volterra type with incomplete kernels. The method of auxiliary kernels is being developed. S. Iskandarov (1998). Illustrative examples are given.

Bibliogr. 9.

УДК 517.956.6

Abdumitalip u K. Boundary-value problem for the equation of a mixed parabolo-hyperbolic equation of the fourth order with variable coefficients // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 19-30.

The theorem of existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem is proved for a fourth-order equation, when a mixed parabolo-hyperbolic operator with

variable coefficients is applied to a second-order differential operator by y.

Bibliogr. 8.

УДК 517.928

Alymkulov K., Kozhobekov K.G., Azimov B.A., Sultanvoa N.Z. On a singularly perturbed boundary value problem for a second-order differential equation // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 31-38.

Here we consider one singularly perturbed boundary value problem for a second-order differential equation. The problem is solved by repeated application of the small parameter method.

Bibliogr. 9.

УДК 517.956.6

Bekmamatov Z.M. On the conjugation problem for equations of mixed-composite type of fourth order on a plane // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 39-47.

The paper investigates the problem of conjugation for an equation of mixed-compound type of the fourth order on the plane. When the equation of characteristics has two multiple real and complex-conjugate characteristics, and when it has two different double real roots. The unique solvability of the conjugation problem in a rectangular domain with a conjugation line is proved.

Bibliogr. 6.

УДК 517.968.74

Iskandarov S., Abdiraiimova N.A. Auxiliary kernels method and stability of solutions of weakly nonlinear volterra integro-differential equation of the fourth order with incomplete kernels // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 48-56.

Sufficient conditions are established for the boundedness on the semi-axis of all solutions and their first, second and third derivatives i.e., for the stability of solutions to a weakly non-linear fourth-order integro-differential equation of the Volterra type. For this purpose the method of auxiliary kernels, the non-standard method of reduction to a system, the method of transformation of V. Volterra equations, the method of cutting functions and the method of integral inequalities are used and developed. An illustrative example is constructed.

Bibliogr. 7.

УДК 517.928

Karimov S., Akmatov A.A. Investigation of solutions of a system of singularly perturbed differential equations when the eigenvalues of the matrix have imaginary parts // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 57-64.

In this work, we investigated the solutions of nonlinear singularly perturbed differential equations when the eigenvalues of the matrix have purely imaginary values. Earlier, work in this direction was also carried out. But then the eigenvalues had a stable interval in the real area. Here, the eigenvalues do not have the stability condition in the real region, although in other works this condition is satisfied. Therefore, the solution is being investigated in a complex area. The method of successive approximations was used to obtain the asymptotic of the solutions. The solution to the problem is considered in the complex plane. The complex plane is divided by curves of the first order into regions of a finite number. This is also related to the choice of eigenvalues. The eigenvalues are analytical functions, therefore, using the level lines, both parts of the analytical functions can be covered with lines of the considered area. To investigate the solution, an integration path was chosen and an appropriate estimate was obtained. As a result, the uniqueness and uniform convergence of solutions is proved.

Bibliogr. 9.

УДК 513.7

Josef Mikeŝ. Solodovnikov $V(K)$ – spaces and its generalizations // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 65-79.

Studying the geodesic mapping and projective transformations of Riemannian spaces V_n A.S. Solodovnikov implemented the therm $V(K)$ spaces which are characterized by the special form of a metric. For the pseudo-Riemannian spaces was implemented a therm $V(K)$ spaces. They are $V_n(K)$ spaces, which are characterized by geodesic mappings by the conditions $\psi = \bar{K}\,\bar{g} - K\,g$. The author proved that $V_n(K)$ spaces are for example Einstein, pseudo-symmetric, and Ricci pseudosymmetric spaces, which admit geodesic mapping. These spaces are closed respective geodesic mappings. It was proved that only $V_n(K)$ spaces admit a degree of mobility respective mappings are greather than two. For the holomorphically projective mappings of Kähler and hyperbolical Kähler spaces the $K_n[K]$ spaces have similar properties.

Bibliogr. 45.

УДК 517.932

Narymbetov T.K. Analysis of studies of singularly performed equations in complex domains // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 80-97.

This article analyzes the results of the authors who investigated singularly perturbed equations in some regions of the complex plane. The study was conventionally divided into three parts. Early researchers considered the problem of differentiating solutions of linear singularly perturbed equations with respect to a small parameter. Differences are considered in the vicinity of ordinary points or inflection points of the equation, and then in the entire complex plane. The topology of the regions is illustrated by Stokes lines. The second stage of the analysis was the phenomenon of "prolongation of the violation of stability" and the results of work in this direction were summed up. With the exception of the stability condition, the equations under study constituted the next stage of the analysis. During the analysis, the concepts of boundary layer lines, regular and singular regions were considered and a theorem on their existence was proved. As a result of the theorem, conditions are shown under which conditions "prolongation of the stability violation" takes place. The results of equations with degenerate equations with several solutions were also consider. In all cases, it was noted that the lines separating the regions are similar to the Stokes lines.

Bibliogr. 15.

УДК 517.928.2

Omaralieva G.A., Tursunov D.A., Mamatbuvaeva M.I., Ramankulova S.A. Singularly perturbed problem with double boundary layer // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 98-105.

The article investigates the asymptotic behavior of the solution of a two point boundary value problem on an interval for a linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order with a small parameter at the highest derivative. The essential features of the problem are the existence of a two-layer (two-zone) boundary layer and the non-smoothness of the solution of the corresponding unperturbed problem. The asymptotic expansion of the problem under study is constructed by generalized and classical methods of boundary functions and an estimate for the remainder of the expansion is obtained using the maximum principle. The constructed asymptotic expansion of the solution to the two point boundary value problem is asymptotic in the sense of Erdei.

Bibliogr. 12.

УДК 514.75

Papieva T.M., AbdulazizovaM.X., Adieva B.T., Isakova E.M., Maksatbek k B.

Necessary and sufficient conditions for existence of a quasio-double line of a pair $\left(f_1^5,\Delta_3\right)$ in euclidean space E_5 // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 98-105.

It is considered a set of smooth lines such that through a point $X\in\Omega$ passed one line of given set in domain $\Omega\subset E_5$. The moving frame $\Re=\left(X,\vec{e}_i\right)\left(i,j,k=\overline{1,5}\right)$ is frame of Frenet for the line ω^1 of the given set. Integral lines of the vector fields $\vec{e}_i$ are formed net Σ_5 of Frenet. There exists a point F_1^5 on the tangent of the line ω^1. When a point X is shifted in the domain Ω, the point F_1^5 describes it's domain Ω_1^5 in E_5. It is defined the partial mapping $f_1^5:\Omega\to\Omega_1^5$, such that $f_1^5(X)=F_1^5$. Necessary and sufficient conditions of existence of a quasio-double line of a pair $\left(f_1^5,\Delta_3\right)$ are proved.

Bibliogr. 6.

УДК 517.956.6

Sopuev A., Bekmamatov Z.M. Boundary value problems for a fourth-order mixed-composite equation containing an elliptic-hyperbolic operator // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 106-113.

By the method of integral equations, the unique solvability of the conjugation problem for an equation of composite and hyperbolic types of the fourth order, containing the elliptic-hyperbolic operator

Bibliogr. 7.

УДК 517.955.8

Sulaimanov Z.M., Erkebaev U.Z., Abasova G.Z., Tursunov D.A. Asymptotics of the solution of the singularly problem with inner layer // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 114-121.

In this paper, we consider the first boundary value problem, that is the Dirichlet problem in a ring for a linear inhomogeneous second-order elliptic equation with two independent variables containing a small parameter in front of the Laplacian. The equation potential is a smooth function but vanishes inside the ring in the field under study. There exists a unique solution of the first boundary value problem under consideration. It is impossible to construct an obvious solution of the first boundary value problem. That is why

we need to construct an asymptotic solution of the first boundary value problem in a ring. The problem under consideration has two singularities (a bisingular problem): presence of a small parameter in front of the Laplacian, and solution of a relevant unperturbed equation is not a smooth function in the field under study. To construct an asymptotic solution, we use a modified method of boundary functions since it is impossible to use a classical method of boundary functions. To begin with, we construct a formal asymptotic solution as per the small parameter, and then we evaluate the remainder term of the asymptotic expansion.

Bibliogr. 11.

УДК 514.75

Shamshieva G.A., Isakova E.M., Maksatbek k B., Kulmatova B.U. Existence of a quasio-double line of a pair $\left(f_1^5,\Delta_4\right)$ in euclidean space E_6 // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 122-129.

It is considered a set of smooth lines such that through a point $X\in\Omega$ passed one line of given set in domain $\Omega\subset E_6$. The moving frame $\Re=\left(X,\vec{e}_i\right)\left(i,j,k=\overline{1,6}\right)$ is frame of Frenet for the line ω^1 of the given set. Integral lines of the vector fields $\vec{e}_i$ are formed net Σ_6 of Frenet. There exists a point $F_1^5\in\left(X,\vec{e}_1\right)$ on the tangent of the line ω^1. When a point X is shifted in the domain Ω, the point F_1^5 describes it's domain Ω_1^5 in E_5. It is defined the partial mapping $f_1^5:\Omega\to\Omega_1^5$, such that $f_1^5(X)=F_1^5$. Necessary and sufficient conditions of existence of a quasio-double line of a pair $\left(f_1^5,\Delta_4\right)$ are proved.

Bibliogr. 6.

PHYSICS

УДК 541.13

Ibraimov T.K., Erkinbaeva N.A., Tashpolotov Y., Sadykov E. Method of transformation of chemical elements based on the effect of electrophysical ionization // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 138-146.

The work established low-energy transformations of chemical elements based on electrophysical ionization of water. It was found that the amount of solid precipitate in the form of a powder depends on the potential difference between the electrodes, the material and area of the electrodes, and the ionization time. It was shown that in the process of electrophysical ionization, the formation of such elements as Bk, Tb, Hf, Ho, Pu, Os, Zn, Te,

Cu, Se, Pm, W, etc. is observed. Other research methods and all these elements (Bk, Tb, Hf, Ho, Pu, Os, Zn, Te, Cu, Se, Pm, W) in the samples are elements formed in the process of low-energy transmutation.

Bibliogr. 9.

УДК 536.2.02

Kalbekova M.J., Kalmursaeva A.T., Mars k T., Ormosh k A. Multiphisical modelling of heat conductivity // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 147-156.

This article demonstrates the possibilities of using the Comsol Multiphysics multiphysical modeling package when studying the thermal conductivity process in a general physics course. The test problems of one-dimensional stationary radiative heat transfer and two-dimensional stationary convective heat transfer are considered. Methods of multiphysical modeling of the stationary process of thermal conductivity, with boundary conditions that take into account a given temperature, heat flow, convective cooling radiation are presented. As a result of this work, the capabilities of the Comsol Multiphysics package are demonstrated and it is shown that students do not need deep knowledge in the field of numerical methods for solving partial differential equations describing a particular physical process. In fact, they can construct many models of real phenomena by introducing physical quantities without having to write complex differential equations. Studying these Comsol Multiphysics models is also an excellent additional method for understanding the physical nature of real phenomena.

Bibliogr. 6.

УДК 532.517.2:621.1.016.4

Kalmursaeva A.T., Abdimutalipova Z.K., Kurbanaliev A.Y., Mars k T. Numerical investigation of unsteady flow past a circular cylinder // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 157-165.

The dynamic characteristics of the pressure and velocity fields of unsteady incompressible laminar wakes behind a circular cylinder are investigated numerically. The governing equations, written in the velocity pressure formulation are solved using 2D finite volume method in the frame of OpenFOAM7. The initial mechanism for vortex shedding is demonstrated and unsteady body forces are evaluated. The frequencies of the drag and lift oscillations obtained by the numerical simulations well agree with the experimental results. Due to faster convergence, 2D finite volume method is found very much prospective for numerical modelling of laminar flow.

Bibliogr. 12.

УДК 536.2.02

Sagyndykova R.K., Kalbekova M.J., Kurbanaliev A.Y., Ormosh k A. Multiphisical modelling of free convection in porous media // Journal of mathematics, physics, technics. Osh State University. – 2021. N 1. – P. 166-174.

In this article, a numerical simulation of two-dimensional stationary convection in a square region with a porous medium bounded by vertical walls and isothermal horizontal walls with different temperatures is performed. The temperature of the left wall changes smoothly from one temperature to another. The most part of the right wall is isothermal, while the lower, small part has a variable temperature. The mathematical model of the problem is based on the equation of momentum transfer in a porous medium in the Bricknmann form, taking into account the buoyancy effect in the Boussinesq approximation. The numerical simulation is based on the multiphysical modeling package Comsol Multiphysics 5.4. A method for constructing a stationary model of free convection with boundary conditions that take into account a given variable or constant temperature is shown.

Bibliogr. 5.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АБДИМУТАЛИПОВА Зейнура Каныбековна - преподаватель Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: 1986zeinura@gmail.com

АБДИРАЙИМОВА Назигай Абдинабиевна - старший преподаватель кафедры «Информационные системы и программирование» Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: nazik.abdiraimova@gmail.com

АБДУМИТАЛИП уулу Кубатбек - преподаватель кафедры «Информационные системы и программирование» Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: kubatbek-90@mail.ru

АЗИМОВ Бектур Абдырахманович - кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой Прикладной математики, информатики и графического дизайна Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: azimov@oshsu.kg

АКМАТОВ Абдилазиз Алиевич - старший преподаватель кафедры Математического анализа Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: abdilaziz_akmatov@mail.ru

АЛЫМКУЛОВ Келдибай - доктор физико-математических наук, профессор кафедры Алгебры и геометрии Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: keldibay@mail.ru

БЕКМАМАТОВ Замирбек Молдошович - старший преподаватель кафедры естественных наук и математики Баткенского государственного университета (Кыргызстан, г. Баткен). E-mail: zbekmamatov@mail.ru

ИБРАИМОВ Таалайбек Каилбекович – аспирант Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: t.kailbekovich@mail.ru

ИСКАНДАРОВ Самандар - доктор физико-математических наук, профессор, зав. лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений Институт математики НАН Кыргызской Республики (Кыргызстан, г. Бишкек), E-mail: mrmacintosh@ list.ru

КАЛБЕКОВА Махбурат Жамшитбековна - преподаватель Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: mkalbekova@list.ru

КАЛМУРЗАЕВА Анипа Ташбаевна – преподаватель Баткенского государственного университета (Кыргызстан, г. Баткен). E-mail: anipa.kalmurzaeva.80@mail.ru

КАРИМОВ Салы - доктор физико-математических наук, профессор кафедры Математического анализа Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

КОЖОБЕКОВ Кудайберди Гапаралиевич - доктор физико-математических наук,, профессор кафедры «Информационные системы и программирование» Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: kudayberdi.kojobekov@oshsu.kg

КУРБАНАЛИЕВ Абдикерим Ырысбаевич - доктор физико-математических наук, профессор Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: kurbanaliev@rambler.ru

МАРС кызы ТАТТЫБҮБҮ - преподаватель Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: tatu_1995@list.ru

ЙОЗЕФ Микеш - доктор физико-математических наук, профессор университета им. Полоцкого Оломоуц (Чехия). E-mail: Josef.Mikes@upol.cz

НАРЫМБЕТОВ Талантбек Канатбекович - старший преподователь Научно-исследовательского медико-социального института (Кыргызская, г. Жалал-Абад). E-mail: talant83@mail.ru

ОМАРАЛИЕВА Гулбайра Абдималиковна - аспирант Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: Gulya@oshsu.kg

ПАПИЕВА Толкун Маматаевна - кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой Алгебры и геометрии Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: tpapka73@mail.ru

САГЫНДЫКОВА Рахат Кайыпбековна – преподаватель Кыргызского Национального аграрного университета им. К.И. Скрябина (Кыргызстан, г. Бишкек). E-mail: rahat_82s@mail.ru

САДЫКОВ Эркин - кандидат технических наук, доцент кафедры Экспериментальной и теоретической физики Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: sadykov.erkinbai@mail.ru

СОПУЕВ Адахимжан - доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные системы и программирование» Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: asopuev@oshsu.kg, sopuev@mail.ru

СУЛАЙМАНОВ Завур Мамадалиевич - аспирант Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: E-mail: zsulaymanov@oshsu.kg

СУЛТАНОВА Насипа Зулпукаровна - преподаватель Ошского гуманитарно-педагогический института (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: nasiipa@mail.ru

ТАШПОЛОТОВ Ысламидин - доктор физико-математических наук, профессор кафедры Экспериментальной и теоретической физики Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: itashpolotov@mail.ru

ТУРСУНОВ Дилмурат Абдиллажанович - доктор физико-математических наук, профессор Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: dtursunov@oshsu.kg

ШАМШИЕВА Гүлмира Асилидиновна - старший преподаватель Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: gshamshieva@oshsu.kg

ЭРКЕБАЕВ Улукбек Зайирбекович - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Прикладной информатики и информационной безопасности Ошского

государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: E-mail: uerkebaev@oshsu.kg

ЭРКИНБАЕВА Назгуль Абдыкаимовна – преподаватель Ошского технологического университета

МАГИСТРАНТЫ

АБАСОВА Гулсина Занкибаевна - магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

АБДУЛАЗИЗОВА Мунаввархон Хасанбаевна – магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

АДИЕВА Бактыгул Таалайбековна – магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

ИСАКОВА Элиза Муратбековна – магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

КУЛМАТОВА Бурулсун Улканбаевна – магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

МАКСАТБЕК кызы Бактыгул – магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

МАМАТБУВАЕВА Махфузахон Ибрахимжановна - магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

ОРМОШ кызы Акбермет – магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош). E-mail: akbermet_ormosh@mail.ru

РАМАНКУЛОВА Шахзадахан Адылжановна - магистр Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош).

«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ»
МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА
ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ

Журналды чыгарууга
жооптуу редактор: ***Абдуллаева Ж.Д.***

Корректорлор: ***Орус тили боюнча***
Англис тили боюнча ***Салиева А.А.***

Техникалык редактор: ***Убайдиллаева Ж.А.***

ОшМУнун “Билим” редакциялык-басма бөлүмүндө даярдалып,
басмадан чыгарылды.

Биздин дарегибиз: 723500, Ош шаары, Ленин көчөсү, 331.
Байланыш телефондору: (+9963222) 72273
Факс: (+9963222) 70915
Электрондук дарегибиз: E-mail: nauka-oshsu@mail.ru
Сайт: www.oshsu.kg

Негиздөөчүсү – Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги
Ош мамлекеттик университети