

Ош мамлекеттик университетинин ЖАРЧЫСЫ



№3 — 2014 5-чыгарылыш

ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ISSN 1694-7452



КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ

ОшМУ жарчысы

ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ

Журнал жылына 4 жолу чыгарылат

Илимий журнал Кыргыз мамлекеттик китеп палатасынан 2000-жылдын 28-декабрынан каттоодон өткөн

> 2014-жыл, №3, 5-чыгарылыш ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР

> > Om - 2014



Башкы редактор, ф.и.д., профессор

Исаков К.А.

Башкы редактордун орун басары, б.и.д., профессор

Жумабаева Т.Т.

РЕДАКЦИЯЛЫК КОЛЛЕГИЯ:

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ:

- 1. Алымкулов К.А. ф.-м.и.д., проф. чл-корр. КР УИАнын мүчө-корр.
- 2. Каримов С.К. ф.-м.и.д., проф.
- 3. Сопуев А.С. ф.-м.и.д., проф.

ФИЗИКА ИЛИМДЕРИ

- 1. Арапов Б.А. ф.-м.и.д., проф.
- 2. Ташполотов Ы.Т. ф.-м.и.д., проф.
- 3. Саипбекова А. М. ф.-м.и.д., проф.

ИНЖЕНЕРДИК-ТЕХНИКАЛЫК ИЛИМДЕРИ:

- 1. Кенжаев И.Г. тех.и.д., проф.
- 2. Обозов А. тех.и.д., проф.
- 3. Абдуллаева М.Д. тех.и.д., проф.

ОшМУнун редакциялык-басма кеңешинин чечими менен басууга сунушталды *Берилген материалдардын сабаттуулук деңгээлине, илимий мазмунуна, жаңылыгына, автор, сунуштаган кафедра жана рецензиялаган окумуштуу жооптуу



мазмуну

1.	К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров. Развитие асимптотических методов для сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия
	устойчивости
2.	К. Алымкулов, Б. Азимов. О построении асимптотику решения краевой задачи бисингулярного уравнения Коула со слабой особенностью методом
•	погранфункций
3.	К. Алымкулов, Б. Азимов, А. Халматов. Метод продолжения параметров для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой
4.	Н.К. Аркабаев. Краевые задачи для уравнения третьего порядка с
	интегральными условиями
5.	А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева, Исследование решений операторно-
	дифференциального уравнения гиперболического типа
6.	С.К. Каримов. Равномерные приближения решения сингулярно-
0.	возмущенной системы дифференциальных уравнений в критическом
	случае
7.	С.К. Каримов, М.А. Азимбаев. Поведение решений сингулярно-
возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо	возмушенной системы лифференциальных уравнений в особо
	критическом случае
8.	С.К. Каримов, П.С. Панков, М.А. Азимбаев. Об одном обобщении
0.	принципа максимума для гармонических функций на неограниченных
	областях
9.	А.Ж. Кудуев. Бешинчи даражадагы көп мүчөлүү, ортогоналдуу жаңы
٦.	типтеги мультивейвлеттер
10.	у.А. Сопуев. Задачи со смещением для смешанного псевдопараболо-
10.	
11.	гиперболического уравнения третьего порядка
	А.А. Талиев. Нелинейные сингулярно возмущенные уравнения второго
10	порядка с разрывными правыми частями
12.	К.Б. Тампагаров. Метод характеризующих функций определения
	пограничных линий регулярных и сингулярных областей для
12	сингулярно возмущенных уравнений
13.	Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев. Асимптотическое разложение решения
1 /	сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с точками поворота
14.	Э.А. Турсунов. Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы
	дифференциальных уравнений с четырьмя периодическими точками
15	перевала.
15.	С.М. Чоюбеков, Т.О. Бекешов, А. Асанов. Об одном классе
1.6	неклассического интегрального уравнения вольтерра I рода
16.	У.З. Эркебаев. Асимптотическое поведение решения бисингулярно
17	возмущенного эллиптического уравнения с граничной особой точкой
17.	Б. Арапов, А. Садыкбекова. Жарым өткөргүчтөрдөгү иондук процесстер
1.0	жана дефектердин радиациялык-стимулдаштырылган диффузиясы
18.	Б. Арапов, А. Садыкбекова, Т. Мирзамахмудов. Исследование
1.0	фотоэлектретное состояние в пленках CdTe
19.	Б.А. Каденова. Моделирование процессов радиационных дефектов в ЩГК
20.	Т.С. Шамииев. Исследование записи голограмм цифровой и аналоговой
0.1	информации на вращающийся диск
21.	3.Н. Юсупов. Некоторые особенности развития трещины в адгезионном

ОшМУ жарчысы №3, 5-чыгарылыш



	контакте кожа-десмокол-кожа.	109
22.	У.К. Абдалиев, Ж.А. Арзиев, Ы. Ташполотов. Физико-технические	
	основы получения водоэмульсионного топлива	113
23.	М.Д. Абдуллаева, Н.С. Аматова, А.С. Каримов. Исследование	
	минералогического состава нефелинового сиенита Зардалинского	
	месторождения (уч. Молодость)	117
24.	А.М. Жороев. Анализ водных ресурсов Кыргызстана и перспектива	
	использования малых водотоков для выработки электроэнергии на малых и микроГЭС	122
25.	3.И. Иманкулов. Двухволновый He-Ne лазер с поперечным СВЧ разрядом	
	в магнитном поле	126
26.	И.Г. Кенжаев, З.Ш. Айдарбеков, К.С. Исакова, Ж.А. Жумакулов.	
	Изучение водных потенциалов Кыргызстана	132
27.	И.Г. Кенжаев, З.Ш. Айдарбеков, А.М. Жороев. Опыт внедрения	
	микроГЭСов для отдаленных потребителей и методика расчета их	
	технико-экономических показателей.	135
28.	<i>И.Г. Кенжаев, Ж.Ж. Турсунбаев, Б.Э. Кудайбердиев.</i> Анализ процессов	
	утилизации биогаза в качестве топлива и характеристика процесса горения	140
29.	И.Г. Кенжаев, З.Ш. Айдарбеков, А.М. Жороев. Технико-экономический	
2.0	анализ микро ГЭС	144
30.	И.Г. Кенжаев, Ж.Ж. Турсунбаев, Э. Бекбутаев, Д.А. Мендибаев,	1.40
2.1	Устройство для заполнения тепловой трубы теплоносителем	148
31.	А.Б. Сатыбалдыев, Т.К. Матисаков, А.К. Аттокуров. Анализ	
	возможности использования стационарных стандартов по натурным	
	испытаниям солнечных коллекторов для климатических условий города	1.50
22	Ош	150
32.	Ж. Турдубаева, Э.М. Ысманов, Ы. Ташполотов, Э. Садыков.	151
	Исследование барита Туя-Моюнского месторождения Кыргызстана	154



Университетибиз – биздин сыймыгыбыз!

Кыргызстандагы жогорку билим берүүнүн алдыңкы сабында болуп, бүгүнкү өзүнүн ишмердүүлүгүндө интеграция, инвестиция, интеллект, изденүү, ишеним, ийгилик деген ураанды туу тутуп жигердүү иштеп келе жаткан Ош мамлекеттик университетинин түзүлгөндүгүнүн 75 жылдык мааракеси белгиленип жатат.

75 жылдык мааракесин белгилеп жаткан Билимдин, Илимдин, Маданияттын улуу ордосу болгон Ош мамлекеттик университетинин башаты 1939-жылы ачылган Ош мугалимдер институтунан башталат. Ошол кездеги мугалим адистеринин таңкыстыгы, зарылдыгы, жетишпестиги жаңы типтеги окуу жайлардын ачылышын-мугалимдер институттарынын түзүлүүсүн шарттаган. 1939-жылдын аягында Советтер Союзунда 200гө жакын мугалимдер институту ачылып иштей баштаган.

Кыргызстан КП(б) БКнын 1939-жылдын 22-25-февралында болгон III сьездинде кабыл алынган резолюцияда Ош мугалимдер институтун ачуу белгиленген.

Кыргызстан Эл Комиссарлар Советинин 1939-жылдын 10-августундагы жыйынынын №1142 Токтому менен Ош мугалимдер институту ачылып, студенттик контингентти толуктоо үчүн Фрунзе мугалимдер институтунан 50 студентти которуу көрсөтүлгөн. Ош мугалимдер институтунда окуу мөөнөтү 2 жылды түзүп, анда билим алууга педагогикалык окуу жайларды бүткөндөр укуктуу болушкан.

Институтта алгач тарых, физика-математика, орус тили жана адабияты, кыргыз тили жана адабияты адистиктери, бир жылдан кийин табият таануу адистиктери ачылган.

1942-жылдын 20-сентябрында Ростов мамлекеттик университети менен Ростов мамлекеттик педагогикалык институту Ош мугалимдер институтуна көчүрүлүп, шартка ылайык бир окуу жайга бириктирилген. Ростовдон Оштогу окуу жайга 9 профессор, 25 доцент, 25 окутуучу, 4 ассистент келип эмгектене баштаган.

Алар 1944-жылга чейин 27 жолу илимий экспедицияларга чыгышып Түштүк Кыргызстандагы кен байлыктарды, айыл чарбасын изилдешип бир топ өндүрүштүк проблемаларды чечишкен жана эл чарбасынын өнүгүшүнө бараандуу салымдарын кошушкан.

Ошондой эле пахта, тамеки, жүгөрү чарбасын өнүктүрүүнү, темир жана көмүр байлыктарын өндүрүүнү колго алышып, Ош шаарын таза суу менен камсыз кылуу максатында канализация системасын түзүүнү башташкан.

Башкача айтканда, Ростовдон келген окумуштуулар Ош мугалимдер институтунун илимий потенциалынын өнүгүшүнө жагымдуу таасирин тийгизген. Анткени өз кезегинде Ростов университетинин тарыхы Варшава университетинен башталган. Варшава университетинен Ростов университетине оошкон Европалык илим, билим, маданият Ош мугалимдер институтунун түптөлүшүнө, өнүгүшүнө чоң түрткү берген.

Ростов университетинин жамааты 1944-жылдын 2-майында кайра мекенине көчүп кеткен. Алардын ичинен бир топ илимпоздор Ошто калып эмгектенүүсүн уланткан.

Бирок Ош мугалимдер институту андан кийин да өз ишин уланта берген.

СССР Министрлер Советинин 1951-жылдын 12-майындагы №1759 Токтому менен Ош мугалимдер институту-Ош педагогикалык институту болуп кайра түзүлгөн.

Ош мамлекеттик педагогикалык институту кезинде билим берүү, илим, тарбиялоо боюнча окуу жай СССРдеги эң мыкты 10 педагогикалык институттун катарына кирген.

Өлкөбүз эгемендүүлүк алгандан кийин 1992-жылдын 17-июнундагы Кыргыз Республикасынын Президентинин Указы менен Ош мамлекеттик педагогикалык институту – Ош мамлекеттик университети болуп кайра түзүлгөн.

ОшМУ – Кыргызстандын жогорку билим берүүсүндө өзүнүн изденүүсү, умтулуусу менен заманбап талаптарга ылайык тез өнүгүп, өсүп бара жаткан университет болуп калды деп сыймыктануу менен айта алабыз.



ОшМУ – бүгүн эл аралык билим берүүдөгү эң алдыңкы тажрыйбаларды, инновацияларды өздөштүрүп, билим берүү технологияларын жана шарттарын өнүктүрүп жатат.

Университет бул маарекесин татыктуу тосуп алуу үчүн бүгүнкү мезгилдин ургалдуу талаптарына карата университеттин бардык структураларын модернизациялап, эл аралык билим берүү мейкиндигинин критерийлерине ылайык трансформациялоого аракеттенип, ийгиликтүү университеттин заманбап моделин түзгөнгө күчүбүздү үрөп жатабыз.

Университеттин бардык окуу корпустары, кафедралары, аудиториялар жана лабораториялар, спорт комплекстери жаңы мазмунга өзгөртүлүп, инфраструктурасы жаңыланды жана университет жаңы обликке ээ болууда.

24-октябрда 250 орунга ылайыкташтырылган 4500 м 2 аянтка ээ 4 кабаттуу заманбап Медициналык клиниканы өз күчүбүз менен куруп бүтүп, пайдаланууга бердик. Ушундай эле 1000 м 2 аянтка ээ Стоматологиялык клиникабыздын да курулуш иши аяктап, ачууга даяр.

Учурда университетте студенттер үчүн сапаттуу билим алууга бардык шарттар түзүлгөн. Билим берүүнүн электрондук башкаруу системасы, окутуунун классикалык формасы жана инновациялык технологиялары кеңири колдонулат. ОшМУ өзүн коомчулуктун көзөмөлүндө турган ачык университет катары көрсөтүп келе жатат.

Бүтүрүүчүлөрдүн арасында Эл мугалимдери, Эл артисттери, академиктер, мамлекеттик жана коомдук ишмерлер, министрлер, депутаттар, элчилер, акимдер, саясатчылар, көрүнүктүү мугалимдер, дарыгерлер, юристтер, генералдар, чыгаан журналисттер ж. б. тармактардын белгилүү өкүлдөрү бар.

Алдыңкы бүтүрүүчүлөрүбүз Кыргызстандын, андан сырткары Американын, Европанын, Азиянын, белгилүү мекемелеринде, абройлуу уюмдарында башкалардан профессионалдык, интеллектуалдык деңгээли төмөн эмес экендигин далилдеп ийгиликтүү эмгектенишүүдө.

Бүгүн ОшМУда 72 багыт боюнча 28 000ден ашуун студенттер, анын ичинде 27 мамлекеттен келген 1700дөн ашуун чет өлкөлүк студенттер билим алышат.

1500 дөн ашуун окутуучулук—профессордук курам, 1700 дөн ашуун кызматкерлер иштешет. Окутуучулардын ичинде 62 илимдин докторлору, профессорлор, 365тен ашуун илимдин кандидаттары, доценттер, 30дан ашуун Кыргыз Республикасынын илимине, билим берүүсүнө, саламаттыкты сактоосуна, маданиятына, спортуна эмгек сиңирген ишмерлер, 3 Эл артисти, 1 Эл сүрөтчүсү, 2 Кыргыз Улуттук Илимдер академиясынын академиги, 2 Улуттук академиянын мүчө-корреспонденттери эмгектенишет.

Учурда ОшМУда 15 факультет, 3 билим берүү институту, 3 колледж, 2 лицей, 1 бала бакча, аспирантура жана ординатура, магистратура бөлүмдөрү, 21 окуу корпусу, 8 жатакана, 2 медициналык клиника, 7 клиникалык база, чет өлкөлүк окутуучулар үчүн мейманкана, 5 эс алуу борбору, Ысык-Көлдө пансионаты бар.

ОшМУ – түзүлгөндөн бери Кыргызстандын адам потенциалынын өнүгүшүнө, интеллектуалдык-профессионалдык ресурсунун бекемделүүсүнө, өлкөбүздөгү стабилдүүлүктүн, туруктуулуктун камсыз болушуна эбегейсиз кызмат кылып келди жана кызматын уланта бермекчи.

75 жыл аралыгында Ош мамлекеттик университети да эли-журтубуз менен кошо кээде өсүп-өнүгүүдө болсо, кээде өсүүсү басаңдап, кээде өнүгүүнүн бийиктигине чыккан жылдары болду.

Бирок кандай кырдаал болсо да ынтымактуу жамаатыбыз университетти сактап, чыңдап, бекемдеп өнүктүрүп, өсүүсүнө өздөрүнүн тиешелүү салымдарын кошуп келүүдө.

Келечекке ишенимдүү караган улан-кыздар, жаштар ОшМУнун студенти болууну самашат. Бизге мындан өткөн коомдук жоопкерчилик жок.



Акыркы үч жылда өзгөчө тышкы жана ички инвесторлор менен биргелешип иштөө аркылуу жалпы суммасы 150 млн. сомдук долбоорлор, иш-аракеттер турмушка ашты. Инвестициялык климатты жакшыртуу багытында иштерибиз бир топ өркүндөдү.

Бүгүн ОшМУда физика, математика, экономика багыттары боюнча, ал эми юридика, химия, география багыттарында ведомстволор аралык кандидаттык диссертацияларды коргоочу Адистештирилген Кеңештер, энергетика багыты боюнча докторлук жана кандидаттык диссертацияларды коргоочу Адистештирилген Кеңеш ийгиликтүү иш алып барышууда. Кандидаттык, докторлук диссертациялардын үстүнөн иштегендерге материалдык жана моралдык колдоолор сезилерлик берилет.

Биз азыр сапаттуу билим берүү, илим аркылуу өлкөбүздүн туруктуу өнүгүүсүн камсыз кылууга аракеттене баштадык. Учурда университетте илимий ойлоп табууларга патенттерди алуу, колдонмо илимге өтүү, эл чарбасынын проблемаларын илимий жана инновациялык жолдор менен чечүү жакшы жолго коюлуп бара жатат.

Билим берүү экспортун өнүктүрүп жатабыз. Айрым багыттарыбыз, эл аралык акредитациялардан өтүүдө. Университетте таза, изденген, бизди эл аралык таанымга ээ кыла ала турган структуралар ачылууда.

Университетти модернизациялоо аркылуу жаңыча ой жүгүрткөн, ыйманы жана аң сезими таза окутуучулардын жана студенттердин жаңы типтеги образын түзүп жатабыз.

ОшМУ – эли журтубузга, мамлекетибизге өзүнүн гумандуу нурун чачкан билим бешиги болуп жашап келүүдө.

75 жылдык курагың кут болсун алтын уям университетим!

Урматым менен

Каныбек Исаков ОшМУнун ректору, профессор



УДК: 517.928

Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., ЖаГУ alybaevkurmanbek@rambler.ru tampagarovkak@mail.ru

Развитие асимптотических методов для сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости

Туруктуулук шарты аткарылбаган учурдагы сингулярдык козголгон теңдемелер үчүн асимптотикалык усулдардын өнүгүүсүнө анализ жүргүзүлдү. Айрыкча чектик сызык, сингулярдык жана регулярдык аймактарга көңүл бурулду.

Ачкыч сөздөр: сингулярдык козголгон теңдемелер, кубулган теңдеме, бириктирилген система, тең салмактуу чекит, туруктуулук, чек аралык катмар, чектик сызык, сингулярдык жана регулярдык аймактар.

Проведен анализ развития асимптотических методов для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости. Особое внимание уделено на понятия пограничных линий сингулярной и регулярной област.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, вырожденное уравнение, присоединенная система, точка покоя, устойчивость, пограничный слой, пограничные линии, сингулярные и регулярные области.

The analysis of development asymptotic of methods for singularly of the indignant equations is carried out(spent) at loss of stability. The special attention is given on concepts boundary lines, singularly and regulary domain.

Key words: singulary perturbed equations, degenerate equalization, added system, point of rest, stability, boundary layer, boundary lines, singulary and regulary domain.

1. Введение.

В данной работе речь пойдет только об обыкновенных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях.

Пусть рассматривается задача

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = f(t,x(t,\varepsilon)), \qquad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ малый параметр, $t_0 \le t \le T$, $x_0 - const$, $x = colon(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Уравнения вида (1) называются сингулярно возмущенными.

При
$$\varepsilon = 0$$
 из (1) получим уравнения
$$f(t, \widetilde{x}(t)) = 0 \tag{3}$$

Уравнения (3) называются вырожденными по отношению к (1).

Пусть (3) имеет изолированное решение

$$\widetilde{x}(t) = \varphi(t) \tag{4}$$

определенное при $t_0 \le t \le T$ [1].

Пусть $x(t,\varepsilon)$ – решение задачи (1) - (2).



2. Постановка задачи и обсуждение проблем.

Поставим задачу о близости $x(t,\varepsilon)$ и $\widetilde{x}(t)$ на отрезке $\left[t_0,T\right]$ по норме $\left\|x(t,\varepsilon)-\widetilde{x}(t)\right\|=\max_{l\leq k\leq n}\left|x_k(t,\varepsilon)-\widetilde{x}_l(t)\right|, t\in\left[t_0,T\right].$ Так как уравнения (1) являются дифференциальными, а (4) алгебраическое, то поставленный вопрос не всегда решается положительно хотя бы в окрестности точки $t=t_0$.

Поставленная задача для систем гораздо более общего вида решена в [1]. Об этом и других задачах можно ознакомиться в [2].

В [1] данная задача решена в терминах "присоединенная система".

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = f(t, z(\tau)),\tag{5}$$

где $0 \le \tau < +\infty$, t- рассматривается как параметр. (5) называется присоединенной системой для (1). $\varphi(t)$ является точкой покоя системы (5).

Для положительного решения поставленной задачи требуется устойчивость точки покоя для любого t из $\left[t_{0},T\right]$

В [1] от правых частей уравнения (1) требуется выполнения ряд требований.

При выполнении ряд ограничений выполняется

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = \varphi(t) \tag{6}$$

Предельный переход не является равномерным на всем отрезке $[t_0,T]$. В достаточно малой окрестности точки $t=t_0$ наблюдается сильное отличие $x(t,\varepsilon)$ и $\varphi(t)$.

В работах [2] эта окрестность получила название пограничный слой.

Для устранения пограничного слоя в [2] применен метод пограничных функций. В [2] условия устойчивости точки покоя заменены на более «сильные» т.е. требуется асимптотическая устойчивость.

В [3] применением метода пограничных функций проведено асимптотическое разложение решений интегро-дифференциальных уравнений. Показана особенность применения метода пограничных функций для интегро-дифференциальных уравнений по сравнению с дифференциальными уравнениями.

Далее для сингулярно возмущенных уравнений ставились различные задачи.

В работах [4],[5] обнаружены ряд новых явлений для сингулярно возмущенных уравнений.

Впервые в [6] рассмотрен пример сингулярно возмущенных уравнений, для которой не выполняется условие устойчивости точки покоя.

Рассматривается задача

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon b + \gamma(x_1^2(t,\varepsilon) + x_2^2(t,\varepsilon)) \cdot x(t,\varepsilon),$$
(7)

$$x(-1,\varepsilon) = x^{0}, ||x^{0}|| = c \cdot \varepsilon, \quad c - const$$
 (8)

где
$$A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$
; $b = colon(1,0), \ x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon)), \ \gamma$ - произвольная



постоянная, $t \in [-1,1]$.

Матрица A(t) имеет собственные значения $\lambda_k(t) = t \pm i, (k = 1, 2)$.

 $\operatorname{Re} \lambda_k(t) < 0$ при $-1 \le t < 0$; $\operatorname{Re} \lambda_k(t) = 0$ при t = 0; $\operatorname{Re} \lambda_k(t) > 0$ при $0 < t \le 1$.

Присоединенная система, системы (7) имеет точку покоя $\widetilde{x}(t) = 0$, которая является фокусом.

Таким образом, при t=0 устойчивость точки покоя нарушается, а для значений $0 < t \le 1$ точка покоя неустойчива.

Доказано, что на всем промежутке [1, 1] имеет место предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = 0 \tag{9}$$

Доказательство соотношения (9) проведено аналитическим продолжением системы (7) в некоторую область комплексной плоскости.

Затем в [7] результаты данной работы обобщены на более широкий класс систем.

Работа [8] посвящена изучению автономных систем сингулярно возмущенных уравнений в случае, когда в пространстве быстрых движений матрица при линейных неизвестных функциях имеет различные собственные значения. При этом одна пара комплексно-сопряженных собственных значений мнимую ось пересекает с нулевой скоростью. Доказано, что происходит затягивание потери устойчивости положения равновесия.

В [9] с привлечением топологического подхода, для получения более обширных результатов, разработан метод линии уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости.

В [10], [11] применением метода линии уровня исследованы некоторые классы сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости.

В первой работе [10] обнаружена зависимость длины промежутка затягивание потери устойчивости от начальных условий.

Доказано, что в одном случае начальное значение на действительной оси можно двигать «налево, в результате промежуток» затягивание потери устойчивости расширяется «направо»; в другом случае начальное значение можно «двигать» налево только до определенной точки, при этом правый конец промежутка потери устойчивости стремится к $(+\infty)$.

В [11] исследованы сингулярно возмущенные уравнения, когда собственные значения являются периодическими функциями. Особенностью рассматриваемых случаев заключается в том, что области в комплексной плоскости являются неограниченными.

Далее в [12] обнаружено явление простирающегося пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости.

Доказано, что для уравнений первого порядка границей пограничного слоя (пограничная линия) является некоторая кусочно гладкая кривая. Для уравнений второго порядка (в случае когда собственные значения являются комплексно сопряженными) так же существуют пограничные слои, которые симметричны относительно действительной оси. В этом случае пограничная линия имеет форму «петли».

В [13] введены понятия: пограничная линия, сингулярные и регулярные области, и доказано, что для линейных сингулярно возмущенных уравнений в комплексной плоскости всегда существуют ($\Pi\Lambda, CO, PO$). При доказательстве требуется только аналитичность правых частей рассматриваемых уравнений. Отметим, что исследования задач на $\Pi\Lambda, CO, PO$ предстоит еще продолжить. Не решен вопрос взаимосвязи затягивания потери устойчивости и $\Pi\Lambda, CO, PO$.



Так же предстоит решить задачи связанные с топологией $\Pi\Lambda$, CO, PO (с геометрической точки зрения).

Следующие примеры показывают всю сложность вышеперечисленных задач и невозможность решить задачи в общем случае требуя только аналитичность правых частей. Требуется знание определенного общема информации, в частности о функциях

$$\operatorname{Re}\int_{t}^{t} \lambda_{k}(s)ds$$
 (характеризующие функции).

Как было сказано в [14] задачи на $\Pi\Lambda$, CO, PO можно решить при помощи характеризующих функций. В следующих примерах используем только характеризующие функции.

Пример 1. Пусть задана функция $\lambda(t) = t, t \in C$ - комплексная плоскость. Составим функцию

$$F(t)=\int\limits_{t_0}^t\lambda\ (S)dS=rac{t^2-t_0^2}{2}\,, \quad t_0\in C\wedge t_0$$
 - фиксированное число.

Полагая $t=t_1+it_2,\ t_0=t_{10}+it_{20},$ определим характеризующую функцию

$$F_1(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} t^2 = \frac{1}{2} (t_1^2 - t_2^2)$$

Задачи на $\Pi\Lambda$, CО, PО будем решать в терминах линии уровня характеризующих функций.

Заметим, что устойчивость (ограниченность) решений сингулярно возмущенных уравнений зависит от свойств характеризующих функций.

Для ограниченности решений в некоторой односвязной области **Ω** достаточно выполнения условия:

U. $\forall t \in \Omega$ существуют ориентированные кривые соединяющие точки t_0 и t вдоль которых функция $F_1(t_1,t_2)$ - не возрастает.

Рассмотрим функцию
$$F_1(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)$$

Вся плоскость прямыми $t_1-t_2=0 \wedge t_1+t_2=0$ разбивается на четыре сектора. В каждой из этих секторов $F_1(t_1,t_2)\geq 0$ или $F_1(t_1,t_2)\leq 0$ причем равенство имеет место только на границах этих секторов. Границами секторов являются прямые $t_1-t_2=0 \wedge t_1+t_2=0$.

Сектор, содержащий отрицательную часть действительной оси обозначим Ω_1 , далее против часовой стрелки сектора обозначим $\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$. $\Pi\Lambda,CO,PO$ зависят от t_0 . К примеру. I. $t_0\in\Omega_1$ $t_0\notin \big\{\!(t_1,t_2)\big|t_1+t_2=0\lor t_1-t_2=0\,\big\}$.

Рассмотрим линию уровня $F_1(t_1, t_2) = F_1(t_{10}, t_{20})$



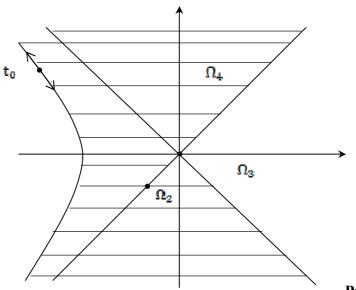


Рис.1

На основе условия U можно сделать следующие заключения:

1.
$$\forall (t_1, t_2) \in \{((t_1, t_2)) | F_1(t_1, t_2) = F_1(t_{10}, t_{20}) \} \Rightarrow \{(t_1, t_2) | F_1(t_1, t_2) = F_1(t_{10}, t_{20}) \} - (\Pi.\Lambda)$$

- 2. Заштрихованная часть плоскости является (РО), не заштрихованная часть (СО).
- 3. Границы сектора (полупрямые) Ω_3 также являются (ПЛ) (рис.1.)

II.
$$t_0 \in \{(t_1, t_2) | t_1 + t_2 = 0 \lor t_1 - t_2 = 0\}$$

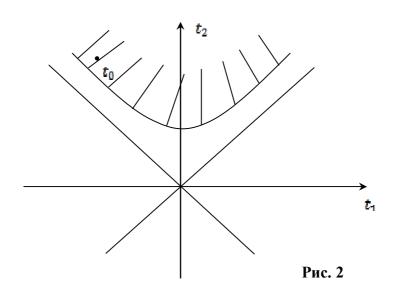
Для этого случая прямые $t_1+t_2=0,\ t_1-t_2=0$ являются (ПЛ) . $\Omega_1 \bigcup \Omega_4 - (\mathrm{PO}),\ \Omega_1 \bigcup \Omega_3 - (C\mathrm{O})$.

III. $t_0 \in \Omega_4$ и t_0 – внутренняя точка Ω_4 .

Введем в рассмотрение линию уровня $\{(t_1,t_2)|F_1(t_1,t_2)=F_1(t_{10},t_{20})\}$

Данная линия уровня является $(\Pi\Lambda)$.

На рисунке заштрихованная часть Ω_4 будет - (PO), а оставшаяся часть плоскости - (CO) (рис. 2.)





Литература

- 1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31 (73), №3. С. 575-586.
- 2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений // Москва: Высшая школа, 1978. С. 106.
- 3. Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем // Фрунзе: Илим, 1972. С. 356.
- 4. Иманалиев М.И., Панков П.С. Явление вращающегося пограничного слоя в теории сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Доклады АН СССР. 1986. Т. 289, №3. С. 356-361.
- 5. Иманалиев М.И., Панков П.С. Явление всплеска для скалярных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка// Изв. АН Кирг.ССР, сер.физ-мат. и тех.наук. 1987. №3. С. 45-51.
- 6. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады АН СССР. 1973. Т. 209, №3. С. 576-579.
- 7. Каримов С.К. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Дис.... докт.физ.-мат.наук: 01.01.02. Ош, 1983. С. 260.
- 8. Нейштадт А.И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось //Успехи мат.наук. 985. Т. 40. Вып.5. С. 300-301.
- 9. Алыбаев К.С. Метод линии уровня исследование сингулярно возмущенных уровнении при нарушении условия устойчивости. // Вестник КГНУ. Сер. 3. Вып. 6. Бишкек, 2001. С. 190-200.
- 10. Турсунов Д.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют п-кратный полюс// Дис....канд.физ.-мат.наук: 01.01.02. Ош, 2005. С. 110.
- 11. Азимбаев М.А. Устойчивость решений начальной задачи линейных сингулярно возмущенных уравнений // Дис.... канд.физ.-мат.наук: 01.01.02. Бишкек, 2010. С. 116.
- 12. Алыбаев К.С., Нарбаев М.Р. Явление простиращегося симметричного пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости // Вестник ЖАГУ. Жалал-Абад, 2008. №1. С. 122-126.
- 13. Панков, Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно-возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник ОшГУ. Ош, 2013. С. 227-231.
- 14. Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Характеризующие функции и топология комплексных областей // Материалы V конгресса тюркского мира. Бишкек, 2014. С. 65.



УДК: 517.928

Алымкулов К., д.ф.-м.н., профессор, Азимов Б., ст.преп., ОшГУ

О построении асимптотику решения краевой задачи бисингулярного уравнения Коула со слабой особенностью методом погранфункций

Мында чек аралык функция методу менен бисингулярдуу козголгон Коулдун теңдемеси үчүн чек ара маселесинин бир калыптагы чечиминин асимптотикасы тургузулду.

Ачкыч сөздөр: бисингулярдуу козголгон теңдеме, алсыз өзгөчө чекит, асимптотика, чек аралык функция методу.

Здесь строится асимптотика равномерно пригодное решения краевой задачи для бисингулярного уравнения Коула методом погранфункций.

Ключевые слова: бисингулярно возмущенное уравнение, слабая особенная точка, асимптотика, метод погранфункций.

Here by method of the boundary function constructed the uniformly asymptotical solution bisingularly perturbed Koul's model equation.

Key words: bisingularly perturbed, a weak singular point, asymptotic, the method of boundary function.

1. Постановка задачи. В [1] решение уравнения

$$\varepsilon \, \dot{o}''(\tilde{o}) + \sqrt{\tilde{o}} \, \dot{o}'(\tilde{o}) - \dot{o} = 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, y(1) = y^0,$$
 (2)

где $0 < \varepsilon < 1$ - малый параметр решалась методом сращивания и получена асимтотика решения порядка ε , причем оценка остаточного члена отсутствует и $f(\tilde{o}) = 0$. В [2] неоднородное уравнение (1) решалась методом структурного сращивания и получена оценка остаточного члена по малому параметру.

Здесь методом погранфункций [3-5] строится асимптотика равномерно пригодного решения краевой задачи (1)-(2).

2. Метод классического малого параметра.

Решение задачи (1)-(2) удовлетворяющее начальному условию в точке x=1 ищется в виде

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$
 (3)

Подставляя (3) в (1) для определения неизвестных функций $y_{\kappa}(x)$, имеем следующие уравнения:

$$Ly_0 = \sqrt{x}y_0'(x) - y_0 = f(x), \quad y_0(1) = y^{(0)},$$
 (4.0)



$$Ly_1 = -y_0''(x), \quad y_1(1) = 0,$$
 (4.1)

$$Ly_2 = -y_1''(x), y_2(1) = 0,$$
 (4.2)

$$Ly_n = -y''_{n-1}$$
 $y_n(1) = 0$, (4.n)

Последовательно из этих уравнений единственным образом определяются все функции y_0, y_1, \dots

Из (4/0) имеем

$$\dot{\phi}_0(\tilde{o}) = \mathring{a}^{2\sqrt{\tilde{o}}} \left[\dot{o}^{(0)} \mathring{a}^{-2} + \int_1^{\tilde{o}} \mathring{a}^{-2\sqrt{s}} s^{-1/2} f(s) ds \right] := \mathring{a}^{(0,0,0)}(\xi), \tag{5}$$

где $\xi = \sqrt{\tilde{o}}$. Здесь и далее, все функции $\hat{a}^{(i,j,k)}(\xi) \in C^{\infty}[0,1]$ и потому разлагаются в ряд Тейлора.

Вторую производную $y_0''(x)$ можно представить в виде

$$y_0''(x) = p(\xi)\tilde{o}^{-3/2}, \quad (p(\xi) \in \tilde{N}^{(\infty)}[0, 1]).$$
 (6.0)

Подставляя (6.0) в правую часть (4.1) имеем

$$\dot{o}_1(\tilde{o}) = -\mathring{a}^{2\sqrt{\tilde{o}}} \int_{1}^{\tilde{o}} p(\sqrt{s}) s^{-2} e^{-2\sqrt{s}} ds.$$

Отсюда выделяя главную часть асимптотики $y_1(x)$ при $x \to 0$, его можем представить в виде

или

$$y_1(x) = \xi^{-2} [a^{(1,0,0)}(\xi) + \xi^2 \ln x a^{(1,2,1)}(\xi)].$$

Дифференцируя это выражение один и два раза, получим

$$y_1'(x) = x^{-2}a_0(\xi) + x^{-1/2} \ln x \, a_1(\xi),$$

$$y_1''(x) = x^{-3}a_2(\zeta) + x^{-3/2} \ln x a_3(\zeta),$$

где $a_k(\zeta) \in C^{(\infty)}, \quad \zeta \to 0$. Учитывая $y_1''(x)$ из (4_2) имеем

$$y_2(x) = -e^{2\sqrt{x}} \int_1^x e^{-2\sqrt{s}} \left[s^{-7/2} a_2(\zeta(s)) - s^{-2} \ln s a_3(\zeta(s)) \right] d\zeta.$$



Отсюда

$$y_2(x) = x^{-5/2} a_4(\zeta) + x^{-1} \ln x a_5(\zeta) + \ln^2 x a_6(\zeta), \quad x \to 0,$$
 (6.2)

где $a_k(\xi) \in C^{(\infty)}, \ \xi \to 0$.

или это выражение перепишем в виде

$$y_2(x) = \xi^{-5} [a^{(2,0,0)}(\xi) + \xi^3 \ln x a^{(2,3,1)}(\xi) + \xi^5 \ln^2 x a^{(2,5,2)}(\xi)], \quad x \to 0.$$

Отсюда

$$y_2'(x) = x^{-7/2} a_0(\xi) + x^{-2} \ln x \, a_1(\xi) + x^{-1/2} \ln^2 x \, a_2(\xi),$$

$$y_2''(x) = x^{-9/2} a_3(\xi) + x^{-3} \ln x \, a_4(\xi) + x^{-3/2} \ln^2 x \, a_5(\xi).$$

Поэтому из (42) получим

$$y_3(x) = -e^{-2\sqrt{x}} \int_1^x e^{-2\sqrt{s}} \left[s^{-5} a_3(\tau) - s^{-7/2} \ln s a_4(\tau) + s^{-2} \ln^2 s a_5(\tau) \right] ds.$$

Выделяя главную часть, имеем

$$v_3(x) = x^{-4}a_0(\xi) + x^{-5/2}\ln x \, a_1(\xi) + x^{-1}\ln^2 x \, a_2(\xi) + \ln^3 x \, a_3(\xi), \quad x \to 0$$
 (6.3)

или ее представим в виде

$$v_{3}(x) = \zeta^{-8} \left[a^{(3,0,0)}(\xi) + \xi^{3} \ln x \, a^{(3,2,1)}(\xi) + \xi^{6} \ln^{2} x \, a^{(3,3,2)}(\xi) + \xi^{8} \ln^{3} x a^{(3,4,3)}(\xi) \right].$$

Отметим, что здесь и ниже в $a^{(i,j,k)}(\zeta)$ индекс i означает номер функции, j - степень x, k - степень $\ln x$.

Предположим, что верна следующая структура функции $y_n(x)$ при $x \to 0$.

$$\begin{aligned} y_n(x) &= x^{-(3n-1)/2} a_0(\xi) + x^{-(3(n-1)-1)/2} \ln x a_1(\xi) + x^{-(3(n-1)-1)/2} \ln^2 x a_2(\xi) + \dots + \\ &+ x^{-(3(n-k)-1)/2} \ln^k x a_k(\xi) + \dots + x^{-5/2} \ln^{n-2} x a_{n-2}(\xi) + x^{-1} \ln^{n-1} x a_{n-1}(\xi) + \ln^n x a_n(\xi), \ x \to 0 \end{aligned} \tag{6.n}$$

Докажем, что эта формула верна для $y_{n+1}(x)$. Дифференцируя эту формулу один и два раза, имеем:

$$\begin{split} y_n'(x) &= x^{-(3n+1)/2} a_0(\xi) + x^{(-3n+2)/2} \ln x a_1(\xi) + x^{-(3n+5)/2} \ln^2 x a_2(\xi) + \ldots + \\ &+ x^{-(3(n-k)+1)/2} \ln^k x a_k(\xi) + \ldots + x^{-7/2} \ln^{n-2} x a_{n-2}(\xi) + x^{-2} \ln^{n-1} x a_{n-1}(\xi) + x^{-1/2} \ln^n x a_n(\xi), \\ y_n''(x) &= x^{-(3n+3)/2} a_0(\xi) + x^{-3n/2} \ln x a_1(\xi) + x^{-(3n+3)/2} \ln^2 x a_2(\xi) + \ldots + \\ &+ x^{-(3(n-k)+3)/2} \ln^k x a_k(\xi) + \ldots + x^{-9/2} \ln^{n-2} x a_{n-2}(\xi) + x^{-3} \ln^{n-1} x a_{n-1}(\xi) + x^{-3/2} \ln^n x a_n(\xi) \end{split} \label{eq:special_equation_equation}$$

Учитывая это выражение для $y_n''(x)$ из уравнения (4_{n+1}) получим



$$\begin{split} y_{n+1}(x) &= -e^{-2\sqrt{x}} \int_{1}^{x} e^{-2\sqrt{s}} \left[s^{-(3n+4)/2} a_0(\xi) - s^{-(3n+1)/2} \ln s a_1(\xi) + s^{-(3n+2)/2} \ln^2 s a_2(\xi) + \ldots + s^{-(3(n-k)+1)/2} \ln^k s a_k(\xi) + \ldots + s^{-5} \ln^{n-2} s a_{n-2}(\xi) + s^{-7/2} \ln^{n-1} s a_{n-1}(\xi) + s^{-2} \ln^n s a_n(\xi) \right] ds \end{split} .$$

Отсюда

$$y_{n+1}(x) = x^{-(3n+2)/2} a_0(\xi) + x^{-(3n-1)/2} \ln x a_1(\xi) + x^{-(3n-4)/2} \ln^2 x a_2(\xi) + \dots + (6.n+1)$$

$$+ x^{-[3(n+k)+2]/2} \ln^k x a_k(\xi) + \dots + x^{-5/2} \ln^{n-1} x a_{n-1}(\xi) + x^{-1} \ln^n x a_n(\xi) + \ln^{n+1} x a_{n+1}(\xi). \quad \blacksquare$$

Формулу (6.n) удобно записать в виде

$$\begin{split} y_n(x) &= \xi^{-(3n-1)} [a^{(n,0,0)}(\xi) + \xi^3 \ln x a^{(n,3,1)}(\xi) + \xi^6 \ln^2 x a^{(n,6,2)}(\xi) + \dots + \\ &+ \xi^{3k} \ln^k x a^{(n,3k,k)}(\xi) + \dots + \xi^{3n-6} \ln^{n-2} x a^{(n,3n-6,n-2)}(\xi) + \xi^{3n-3} \ln^{n-1} x a^{(n,3n-3,n-1)}(\xi) + \\ &+ \xi^{3n-1} \ln^n x a^{(n,3n-1,n)}(\xi)], \quad x \to 0, \quad (n = 2,3,\dots) \end{split}$$

Очевидно

$$y_n(x) \sim x^{-\frac{3n-1}{2}} a^{(n,0,0)}(0), \quad x \to 0.$$

Таким образом, внешнее решение представляется в виде:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon x^{-1} \{ a^{(1,0,0)}(\xi) + x \quad \ln \quad x \quad a^{(1,1,1)}(\xi) + \varepsilon x^{-3/2} [a^{(2,0,0)}(\xi) + x^{3/2} \ln x \quad a^{(2,3,1)}(\xi) + x^{5/2} \ln^2 x \quad a^{(2,5,2)}(\xi)] + (\varepsilon x^{-3/2})^2 \quad [a^{(3,0,0)}(\xi) + x^{3/2} \quad \ln x \quad a^{(3,3,1)}(\xi) + x^{2\cdot3/2} \quad \ln^2 x \quad a^{(3,6,2)}(\xi) + x^{4} \quad \ln^3 x \quad a^{(3,4,3)}(\xi)] + \dots + (\varepsilon x^{-3/2})^{n-1} [a^{(n,0,0)}(\xi) + x^{3/2} \quad \ln x \quad a^{(n,3,1)}(\xi) + x^{2\cdot3/2} \quad \ln^2 x \quad a^{(n,6,2)}(\xi) + x^{4} \quad \ln^2 x \quad a^{(n,3,1)}(\xi) + x^{2\cdot3/2} \quad \ln^2 x \quad a^{(n,3,2)}(\xi) + x$$

или в виде

$$\begin{split} y\left(x\right) &= y_{0}\left(x\right) + \varepsilon x^{-1} \left\{ a^{(1,0,0)}\left(\xi\right) + \xi^{2} \ln x a^{(1,1,1)}\left(\xi\right) + \varepsilon \xi^{-3} \left[a^{(2,0,0)}\left(\xi\right) + \xi^{3} \ln x a^{(2,3,1)}\left(\xi\right) + \right. \right. \\ &+ \xi^{5} \ln^{2} x a^{(2,5,2)}\left(\xi\right) \right] + \left(\varepsilon \xi^{-3}\right)^{2} \left[a^{(3,0,0)}\left(\xi\right) + \xi^{3} \ln x a^{(3,3,1)}\left(\xi\right) + \xi^{6} \ln^{2} x a^{(3,6,2)}\left(\xi\right) + \right. \\ &+ \xi^{8} \ln^{3} x a^{(3,8,3)}\left(\xi\right) \right] + \dots + \left(\varepsilon \xi^{-3}\right)^{n-1} \left[a^{(n,0,0)}\left(\xi\right) + \xi^{3} \ln x a^{(n,3,1)}\left(\xi\right) + \xi^{6} \ln^{2} x a^{(n,6,2)}\left(\xi\right) + \dots + \right. \\ &+ \xi^{3k} \ln^{k} x a^{(n,3k,k)}\left(\xi\right) + \dots + \xi^{3n-6} \ln^{n-2} x a^{(n,3n-6,n-2)}\left(\xi\right) + \xi^{3n-3} \ln^{n-1} x a^{(n,3n-3,n-1)}\left(\xi\right) + \\ &+ \xi^{3n-1} \ln^{n} x a^{(n,3n-1,n)}\left(\xi\right) \right] + \dots \right\} \;, \quad \xi = \sqrt{\tilde{o}} \;. \end{split}$$

Записав только главные члены в этом ряде, получим

$$y(x,\varepsilon) \sim y_0(x) + \varepsilon x^{-1} \left[a^{(1,0,0)}(0) + \varepsilon x^{-3/2} a^{(2,0,0)}(0) + \dots + \left(\varepsilon x^{-3/2} \right)^{n-1} a^{(n,0,0)}(0) + \dots \right], \quad x \to 0$$
(8)



Очевидно, что ряд (8) или (7) является асимптотическим рядом на отрезке $\Omega(\varepsilon) = [\varepsilon^{\beta}, 1]$, где $\beta < 2/3$. Таким образом, получим формальное доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$. Тогда внешнее решение (3) задачи (1)-(2) представляется в виде асимптотического ряда (7) на отрезке $\Omega(\varepsilon)$, т.е.

$$|y(x,\varepsilon) - A_{3nx}y(x,\varepsilon)| \le M\varepsilon x^{-1} \left(\varepsilon x^{-3/2}\right)^n \le M\varepsilon^{1/3}\varepsilon^{3\alpha n/2},\tag{9}$$

где

$$A_{3nx}y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x), \quad \alpha + \beta = 2/3.$$

Из (8) видно , что ряд теряет асимптотический характер в точке $x_0 = \varepsilon^{2/3}$, поэтому решение задачи (1)-(2) построим методом погранфункций.

3. Метод погранфункций.

Решение задачи (1)-(2) ищем в виде

$$y(x) = \pi_0(t) + u_0(x) + (\pi_1(t) + u_1(x))\mu + \dots + (\pi_n(t) + u_n(x))\mu^n + \dots,$$
(10)

где $t=x/\mu^2$, $\varepsilon=\mu^3$, $u_k(x)\in C^2[0,1]$, $\pi_k(t)\in C^2[0,\tilde{\mu}]$, $\tilde{\mu}=\mu^{-2}$. Отметим, что $\pi_k(t)=\pi_k(t,\mu)$, т.е. $\pi_k(t)$ зависит также от μ , но эту зависимость мы для краткости не пишем.

Начальные условия для функций берем в виде:

$$\pi_0(\tilde{\mu}) = y^0 - u_0(\tilde{\mu}), \quad \pi_k(\tilde{\mu}) = -u_k(\tilde{\mu}), \quad \pi_k(0) = -u_k(0) (k = 0, 1, 2, ...)$$

Поставляя (10) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим следующие уравнения:

$$M\pi_0(t) := \pi_0''(t) + \sqrt{t} \,\pi_0(t) = 0 \tag{11.0}$$

$$M \pi_1(t) - \pi_0(t) + \sqrt{x} u_0'(x) - u_0(x) = 0$$
(11.1)

$$M \pi_2(t) - \pi_1(t) + \sqrt{x} u_1'(x) - u_1(x) = 0$$
(11.2)

$$M \,\pi_3(t) - \pi_2(t) + \sqrt{x} \,u_2'(x) - u_2(x) + u_0''(x) = 0 \tag{8.3}$$

$$M \,\pi_{3k+1}(t) - \pi_{3k}(t) + \sqrt{x} \,u_{3k}'(x) - u_{3k}(x) = 0 , \qquad (11.3\kappa + 1)$$

$$M \,\pi_{3k+2}(t) - \pi_{3k+1}(t) + \sqrt{x} \,u_{3k+1}'(x) - u_{3k+1}(x) = 0 \quad , \tag{11.3}$$



$$M \,\pi_{3k+3}(t) - \pi_{3k+2}(t) + \sqrt{x} \,u_{3k+2}'(x) - u_{3k+2}(x) + u_{3k}''(x) = 0 , \qquad (11.3\kappa+3)$$

.....

Уравнение (11.0) имеет два линейно независимые решения

$$X_1(t) = 1, \ X(t) = b \int_t^{\tilde{\mu}} \exp\{-\frac{2}{3}s^{3/2}\} ds \ (b = [\int_0^{\tilde{\mu}} \exp\{-\frac{2}{3}s^{3/2}\} ds]^{-1}).$$

Решение задачи (110) примет вид

$$\pi_0(t) = \beta - \alpha X(t), \ \beta = y^0 - u_0(\tilde{\mu}), \ \alpha = y^0 + u_0(0) - u_0(\tilde{\mu}).$$

В дальнейшем нам нужна следующая

Лемма. Краевая задача

$$Mz(t) = f(t), \quad z(0) = z(\tilde{\mu}) = 0$$

где $f(t) \in C^2[0, \tilde{\mu}]$ имеет единственное решение представимое в виде

$$z(t) = \int_0^{\tilde{\mu}} \exp\{\frac{2}{3}s^{3/2}\}G(t,s)f(s)ds$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} -Y(t)X(s), \ 0 \le t \le s \\ -Y(s)X(t), \ s \le t \le \tilde{\mu} \end{cases}$$

Чтобы уравнение для $\pi_1(t)$ имело ограниченное решение на отрезке $J=[0,\tilde{\mu}],$ уравнение для определения $u_0(x)$ определяем из уравнения

$$\sqrt{x} u_0'(x) - u_0(x) = -1 - 2x + 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}x^{3/2}, u_0(1) = y^0.$$

Отсюда, имеем

$$u_0(x) = (\frac{10}{3} + y^0)e^{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{3/2}$$
.

Тогда уравнение для определения $\pi_1(t)$ имеет вид

$$M \pi_1(t) - \pi_0(t) - 1 - 2\mu^2 t + 2\mu \sqrt{t} + \frac{4}{3}\mu^3 t^{3/2} = 0$$

Оценивая решение этого уравнения в силу Леммы имеем $\pi_1(t)$ является ограниченной функцией. Аналогично, мы можем определять все функции $\pi_k(t), y_{k-1}(x) (k=2,3,...)$.

Таким образом нами доказана



Теорема 2. Решение задачи (1)-(2) можно представить в виде
$$y(x) = \pi_0(t) + u_0(x) + (\pi_1(t) + u_1(x))\mu + ... + (\pi_n(t) + u_n(x))\mu^n + \mu^{n+1}R(x,\mu),$$
 $\|R(x,\mu)\| \le l = const$

Литература

- 1. Коул Дж. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1972. С. 276.
- 2. Зулпукаров А.З. Метод структурного сращивания для решения краевых задач сингулярно возмущенных уравнений второго порядка. Автореферат канд. дисс., Ош, 2009.
- 3. Алымкулов К., Халматов А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Матем. заметки, т. 92, вып. 6, 2012. С. 819-824.
- 4. Alymkulov K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point. American J. Math. & Statistics, 2013, v. 3, n.1. C. 53-61.
- 5. Алымкулов К., Асылбеков Т.В., Долбеева. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно-возмущенного дифференциального уравнения второго порядка. Матем. заметки, т. 94, вып. 4, 2013. С. 451-454.

УДК: 517.928

Алымкулов К., д.ф.-м.н., профессор, Азимов Б., ст.преп., ОшГУ, Халматов А., ОшГСУ

Метод продолжения параметров для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой

Мында, өзгөчө козголгон биринчи тартиптеги Лайтхиллдин теңдемесинин чечиминин асимптотикасы параметр боюнча жайылтуу методу менен тургузулду.

Ачкыч сөздөр: өзгөчө козголгон теңдеме, Лайтхилл теңдемеси, асимптотика, параметр боюнча жайылтуу методу.

Здесь методом продолжения по малому параметру построена асимптотика решения сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, уравнение Лайтхилла, асимптотика, метод продолжения по малому параметру.

Here it is considered method of the continuation by parameter for singularly perturbed differential equation of the Lighthill equation the first order with the regular singular point.

Key words: Singulary perturbed equation, Lighthill'sequation, asymptotic, method of the continuation by parameter.

1. Введение. Рассматривается задача Лайтхилла

$$\left(x + \varepsilon u(x)\right) \frac{du}{dx} + q(x)u(x) = r(x), \quad u(1) = a \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ -малый параметр, $x \in [0,1]$ независимая переменная, $q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$, u(x)-неизвестная функция. Будем предполагать, что $q_0 = q(0) = 2$.



Надо построить асимптотику решения данной задачи. Она изучена многими авторами различными методами: методом Лайтхилла [1], методом униформизации [2], методом погранфункций [5], методом структурного сращивания [3], методом продолжения по малому параметру [2].

Здесь мы более полно исследуем вопрос построения асимптотики решения задачи (1) методом продолжения по малому параметру.

2. Построение внешнего решения.

Определение 1. Переменная x называется внешней переменной, а решение уравнения (1) зависящая от нее называется внешним решение задачи (1)

Решение невозмущенного ($\varepsilon = 0$) уравнения

$$Lu_0(x) := x \frac{du_0(x)}{dx} + q(x)u_0(x) = r(x), \quad u_0(1) = a$$
 (2)

можно представить в виде

$$u_0(x) = x^{-1}p(x)\{a + \int_1^x p^{-1}(s)r(s)ds\} = x^{-1}p(x)w_0 + x^{-1}p(x)\int_0^x p^{-1}(s)r(s)ds$$

или

$$u_0(x) = x^{-2}p(x)b + g(x)$$
(3.0)

где

$$p(x) = \exp\{+\int_{1}^{x} \frac{2 - q(s)}{s} ds\} \in C^{(\infty)}[0, 1],$$

$$g(x) = x^{-1}p(x)\int_{0}^{x} p^{-1}(s)r(s) ds \in C^{(\infty)}[0, 1],$$

$$b = u^{0} - \int_{0}^{1} p^{-1}(s)r(s) ds$$

из (3) следует, что решение невозмущенного уравнения (2) является бесконечно дифференцируемой, если только b=0.

Далее, мы будем предполагать, что b>0,тогда

$$u_0(x) \sim bx^{-2}, x \to 0$$
 (3.0.0)

Решение задачи (1) будем искать в виде

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots + \varepsilon^n u_n(x) + \dots$$
 (4)

Подставляя (4) в (1), для $u_j(x)$ (j=1,2,3,...) получаем следующие уравнения

$$Lu_1(x) = -u_0(x)\frac{du_0}{dx}, \quad u_1(1) = 0,$$
 (5.1)

$$Lu_2(x) = -u_0(x)\frac{du_1}{dx} - u_1(x)\frac{du_0}{dx}, \quad u_2(1) = 0,$$
 (5.2)

$$Lu_n(x) = -\sum_{i+j=n-1} u_i(x) \frac{du_j(x)}{dx}, \quad u_n(1) = 0,$$
 (5.n)

Vyyygy yngg (2,0,0) yg (5,1) yg (9,1)

Учитывая (3.0.0) из (5.1) имеем



$$Lu_1(x) \sim b^2 x^{-5}$$
, $x \to 0$

Отсюла

$$u_1(x) \sim -\frac{6b^2}{7} x^{-5}, \qquad x \to 0$$
 (3.1)

Теперь для $u_2(x)$ имеем уравнение

$$Lu_2(x) \sim -c_2 x^{-9}, \qquad x \to 0$$

Отсюда

$$u_2(x) \sim a_2 x^{-8}, \qquad x \to 0$$
 (3.2)

Здесь и далее через a_n, b_n, c_n обозначим положительные постоянные. Методом индукции докажем, что

$$u_n(x) \sim (-1)^n a_n x^{-(2n+2)}, \qquad (n = 0,1,2,...)$$
 (3.n)

Учитывая (3.n) для $u_{n+1}(x)$ имеем уравнение

$$Lu_{n+1}(x) = -u_0(x)\frac{du_n(x)}{dx} - u_1(x)\frac{du_{n-1}(x)}{dx} - -\frac{du_1(x)}{dx}u_{n-1}(x) - \frac{du_0(x)}{dx}u_n(x) \sim (-1)^n c_n x^{-3n-5}, \qquad x \to 0$$

Отсюда, получим (3.n).

Если в формуле (4) оставить только главные члены в слагаемых, то она примет вид:

$$u(x) \sim x^{-2} \{ a_0 - a_1 \varepsilon x^{-3} + a_2 (\varepsilon x^{-3})^2 + (-1)^n a_n (\varepsilon x^{-3})^n + 1 \}$$
 (6)

т.е. (4) является знакочередующимся рядом. Очевидно, что он является асимптотическим рядом на отрезке $I(\varepsilon) = (\sqrt[3]{\varepsilon}, 1]$. Если бы мы могли доказать, что a_n -убывая стремится к нулю, то этот ряд сходился бы в точке $\mathfrak{T} = \sqrt[3]{\varepsilon}$, т.е. ряд суммируем и в точке $\sqrt[3]{\varepsilon}$ мы докажем этот факт другим способом.

3. Внутреннее решение.

В (1) сделаем постановку

$$x = \mu t, \ \varepsilon = \mu^3, u(x) = \frac{1}{\mu^2} z(t) \tag{7}$$

Тогда оно примет вид

$$(t+z(t))\frac{dz(t)}{dt}+q(\mu t)z(t)=\mu z(\mu t)$$
(8)

Определение 2. Переменная t называется внутренней переменной, а решение задачи (1) зависящее от нее внутренним решением.

Внутреннее решение задачи (8) опять ищем по целым степеням малого параметра $\ ^{\mu}$:

$$z(t) = z_0(t) + \mu z_1(t) + \mu^2 z_2(t) + \dots + \mu^n z_n(t) + \dots,$$
(9)

Подставляя (9) в (8) для определения $z_{j}\left(t\right)\left(j=1,2,...\right)$ имеем уравнения:



$$(t+z_0(t))\frac{dz_0(t)}{dt} + 2z_0(t) = 0, (10.0)$$

$$Mz_1 := (t + z_0(t)) \frac{dz_1(t)}{dt} + (2 + \frac{dz_0(t)}{dt}) z_1(t) = -tz_0(t) + r_0,$$
 (10.1)

$$Mz_2 := -q_2 t^2 z_0(t) - q_1 t z_1(t) + r_1 t,$$
 (10.2)

$$Mz_n := -\sum_{i+i=n} q_i t^j z_j(t) + r_n t^n, \tag{10.n}$$

где
$$q_{j} = \frac{d^{j}q(x)}{dx^{j}}\Big|_{x=0}$$
, $r_{j} = \frac{d^{j}r(x)}{dx^{j}}$, $(j = 0, 1, 2, ...)$.

Чтобы решить уравнение (8.0) его перепишем в виде

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{2z}t - \frac{1}{2}$$

Решая это уравнение имеем

$$t = C_0 z^{-\frac{1}{2}} - \frac{z}{3} \tag{9}$$

Так как $t = x/\mu$, то главная асимптотика из (9) будет иметь вид:

Таким образом, мы доказали что ряд (6) сходится в точке $x = \mu$. Поэтому мы можем рассматривать уравнение (8) на отрезке $[0,\mu]$

Ряд (4) мы запишем в виде

$$u(x)\Big|_{x=\mu} = \frac{1}{\mu} [z_0(1) + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \dots + \mu^n A_n + \dots],$$

где $^{A_{j}}$ - известные числа. Тогда для уравнений (8.j) (j=1,2,...) начальная задача ставится следующим образом:



$$z_{j}(1) = A_{j}, (j = 1, 2, ...)$$
 (11)

Функция $z_o\left(t\right)$ - определена на отрезке $\left[0,\frac{1}{\mu}\right]$, и не только на $\left[0,1\right]$, а также является положительной ограниченной функцией и $z\left(0\right)=\sqrt{2b}$.

Поэтому остальные функции $z_{j}\left(t\right)\left(j=1,2,...\right)$ определяются единственным образом на отрезке [0,1].

Действительно, из (10.1) имеем

$$z_{1}(t) = \frac{\sqrt{1+2b}}{(t+z_{0}(t))} [A_{1} + \int_{1}^{t} [-sz_{0}(s) + r_{0}] ds],$$

$$z_{n}(t) = \frac{\sqrt{1+2b}}{(t+z_{0}(t))} [A_{n} + \int_{1}^{t} [-\sum_{i+j=n} q_{j} s^{j} z_{j}(s) + r_{n} s^{n}] ds],$$

.....

т.о. нами доказана

Теорема 1. Пусть

 $q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$, 2) $q_0 = 2$. Тогда решение задачи (1) представляется в виде (4) на отрезке $\begin{bmatrix} 0, \mu \end{bmatrix}$ и в виде (9) на отрезке $\begin{bmatrix} 0, \mu \end{bmatrix}$.

Теперь, чтобы получить равномерно пригодное разложение задачи (1) мы составляем следующий ряд:

$$X(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)\varepsilon^i + \frac{1}{\mu^2} \sum_{i=0}^{\infty} z_i(t) \Big|_{x=\mu i} \mu^i - \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\mu)\varepsilon^i$$
(12)

Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда ряд (14) является равномерным асимптотическим приближением решения задачи (1)-(2) на отрезке [0,1], т.е.

$$|u(x,\varepsilon)-X_{3n}(x,\varepsilon)| \leq O(\mu^{3n+1}), \forall x \in [0,1],$$

где

$$X_{3n}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} (u_i(x) - u_i(\mu)) \mu^{3i} + \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{3n} z_i(t) \Big|_{x=\mu t} \mu^{3i}.$$

Заключение

Таким образом, более аккуратно изучена внешнее решение у модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет полюс второго порядка в особой точке. Далее показано, что асимптотический ряд сходится, где она теряет асимптотический характер. Этот факт позволяет построить внутреннее решение на конечном отрезке изменения внутреннего переменного.



Литература

- 1. M.G. Lighthill. A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid, Phil. Mag., 40 (1949), 1179-1201.
- 2. К. Алымкулов. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. Илим, Бишкек, 1992.
- 3. К. Алымкулов, Ж. Жээнтаева. Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Мат. заметки, 79:5 2006, С. 643-652.
- 4. К. Алымкулов, Ж. Жээнтаева. Метод структурного сращивания для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой Доклады АН, Т. 398, №4, 2004. С. 862-864.
- 5. К. Алымкулов, А. Халматов. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Мат. заметки, т. 92, вып. 6, 2012. С. 819-824.

УДК: 517.956

Аркабаев Н.К., ОшГУ

Краевые задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями

Үчүнчү тартиптеги теңдеме үчүн интегралдык шарттары бар чектик маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденди.

Доказано существование и единственность решения краевой задачи для уравнения третьего порядка с интегральными условиями.

We prove the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for third-order equation with integral conditions.

Ключевые слова: сопряжения, псевдо параболические уравнения, краевые условия, функции Римана, формула Грина, интегральные уравнения.

1. Постановка задачи.

Математическая постановка ряда прикладных задач, где измеряются некоторые усредненные (интегральные) характеристики величин, сводятся к задачам для уравнений в частных производных [1-4].

В работе в области $D = \{(x, y) : 0 < x < \chi(y), 0 < y < h\}$ (Рис.1) рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} - y^p u_y + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0,$$
 (1)

где $a(x,y),b(x,y),c(x,y),\chi(y)$ — заданные функции, причем потребуем выполнения следующих условий:

$$\chi(h) = x_0 > 0, \chi(0) = \ell > 0, p > 0,
\forall y \in [0, h]: x_0 \le \chi(y) \le \ell, \chi'(y) \le 0.$$
(2)



Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих непрерывные производные вида $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s \ (r=0,1,...,n; s=0,1,...,m) \ .$

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{2+1}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и следующим условиям:

$$u(0,y) + \int_{0}^{\chi(y)} P(x,y)u(x,y) dx = \varphi_1(y), \ 0 \le y \le h,$$
(3)

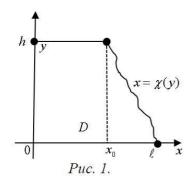
$$u(\chi(y), y) + \int_{0}^{\chi(y)} Q(x, y) u(x, y) dx = \varphi_2(y), \ 0 \le y \le h,$$
 (4)

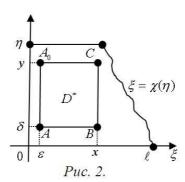
$$u(x,0) = \tau(x), \ 0 \le x \le \ell \,, \tag{5}$$

где $P(x,y), Q(x,y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x)$ –заданные функции, причем

$$\tau(0) + \int_{0}^{\ell} P(x,0)\tau(x) dx = \varphi_{1}(0), \ 0 \le x \le \ell.$$
 (6)

При $P(x,y) \equiv Q(x,y) \equiv 0$ задача 1 сводится к первой краевой задаче для уравнения (1). Отметим, что из условия (2) следует, что кривая $x = \chi(y)$ является монотонно не возрастающей функцией по y.





2. Построение функции Римана и представление решение задачи Гурса. Сначала рассмотрим задачу Гурса для уравнения

$$L[u] \equiv u_{xxy} - y^p u_y = f(x, y), (x, y) \in D$$
 (7)

с условиями

$$u(0, y) = g_1(y), \ u_x(0, y) = g_2(y), \ 0 \le y \le h,$$
 (8)



$$u(x,0) = \tau(x), \ 0 \le x \le \ell, \tag{9}$$

где $g_1(y), g_2(y)$ — функции из класса $C^1[0,h]$, причем $\tau(0) = g_1(0), \tau'(0) = g_2(0)$.

Пусть $D^* = \{(\xi, \eta): 0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}$. В области D^* рассмотрим сопряженную задачу Гурса:

$$L^*[\mathcal{S}] \equiv \mathcal{O}_{\xi\xi\eta} + (\eta^p \mathcal{S})_n = 0, (x, y) \in D, (\xi, \eta) \in D, (\xi, \eta) \in D^*, \tag{10}$$

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \vartheta(x, y; x, \eta) = 0, (x, y) \in D, \eta \in [0, y],$$
 (11)

$$\left. g_{\xi}(x, y; \xi, \eta) \right|_{\xi = x} = g_{\xi}(x, y; x, \eta) = 1, (x, y) \in D, \eta \in [0, y],$$
 (12)

$$\left. \vartheta(x, y; \xi, \eta) \right|_{n=v} = \omega(x, y; \xi), (x, y) \in D, \xi \in [0, x].$$
 (13)

Функцию $\omega(x,y;\xi)$ определим как решение задачи Коши с данными вдоль линии $\eta=y$:

$$\begin{cases}
\theta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y) - y^{p}\theta(x,y;\xi,y) = 0, & 0 < \xi < x, \\
\theta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = \theta(x,y;x,y) = 0, \\
\theta_{\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = \theta_{\xi}(x,y;x,y) = 1.
\end{cases}$$
(14)

Решение задачи (14) имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = y^{-p/2} sh[y^{p/2}(\xi - x)] \equiv \omega(x, y; \xi). \tag{15}$$

Тогда решение сопряженной задачи Гурса (10)-(13) имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = \eta^{-p/2} sh[\eta^{p/2}(\xi - x)], \tag{16}$$

который назовем функцией Римана.

Отметим некоторые свойства функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$:

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, 0) = \xi - x , \ \mathcal{G}(x, 0; 0, 0) = -x , \ \mathcal{G}_{\eta}(x, y; x, \eta) = 0 , \ \mathcal{G}_{\xi\eta}(x, y; x, \eta) = 0 , \ 0 < \eta \le h .$$

Пусть $D_{\varepsilon\delta}^*$ означает квадрат с вершинами $A(\varepsilon,\delta)$, $B(x,\delta)$, C(x,y) $A_0(\varepsilon,y)$ где C(x,y) произвольная точка области D (Рис.2). Выберем произвольную функцию $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ из класса $C^{2+1}(D)$.

Интегрируя тождество

$$\mathcal{G}L(u) - uL^*(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}u_{\xi\eta} + \mathcal{G}_{\xi\eta}u)_{\xi} - (\mathcal{G}_{\xi}u_{\xi} + \eta^p \mathcal{G}u)_{\eta}$$



по области $D_{arepsilon\delta}^*$ и учитывая формулу Грина, будем иметь

$$\iint_{D_{\varepsilon\delta}^*} [\vartheta L(u) - uL(\vartheta)] d\xi d\eta = \int_{\partial D_{\varepsilon\delta}^*} (\vartheta_{\xi} u_{\xi} + \eta^p \vartheta u) d\xi + (\vartheta u_{\xi\eta} + \vartheta_{\xi\eta} u) d\eta.$$
(17)

Осуществляя интегрирование по границам области $D_{arepsilon\delta}^*$, получим

$$u(x,y) = \vartheta_{\xi}(x,y;\varepsilon,y)u(\varepsilon,y) - \vartheta(x,y;\varepsilon,y)u(\varepsilon,y) + \vartheta(x,y;\varepsilon,\delta)u_{\xi}(\xi,\delta) + \vartheta_{\xi}(x,y;x,\delta)u(x,\delta) - \vartheta_{\xi}(x,y;\varepsilon,\delta)u(\varepsilon,\delta) - \int_{\delta}^{y} \left[\vartheta_{\eta}(x,y;x,\eta)u_{\xi}(x,y) - \vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)u(x,\eta)\right]d\eta + + \int_{\delta}^{y} \left[\vartheta_{\eta}(x,y;\varepsilon,\eta)u_{\xi}(\varepsilon,\eta) - \vartheta_{\xi\eta}(x,y;\varepsilon,\eta)u(\varepsilon,\eta)\right]d\eta - \int_{\delta}^{x} d\xi \int_{\delta}^{y} \vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta.$$

Далее, устремляя δ и ε к нулю и учитывая условия (8), (9), придем к представлению задачи Гурса:

$$u(x,y) = \tau(x) + \vartheta_{\xi}(x,y;0,y)g_{1}(y) - \vartheta(x,y;0,y)g_{2}(y) - \tau(0) + x\tau'(0) - \int_{\delta}^{y} \left[\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)g_{1}(\eta) - \vartheta_{\eta}(x,y;0,\eta)g_{2}(\eta) \right] d\eta - \int_{\delta}^{x} d\xi \int_{0}^{y} \vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta,$$
(18)

где $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана.

3. Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Полагая $f(x,y) \equiv -a(x,y)u_x - b(x,y)u_y - c(x,y)u$ из (18), будем иметь:

$$u(x,y) = u_0(x,y) + A_1(x,y)g_1(y) + B_1(x,y)g_2(y) + \int_{\delta}^{x} C_1(x,y;\xi)u(\xi,\eta)d\xi + \int_{0}^{y} \left[A_2(x,y;\eta)g_1(\eta) + B_2(x,y;\eta)g_2(\eta)\right]d\eta + \int_{\delta}^{x} d\xi \int_{0}^{y} C_2(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta,$$
(19)

где

$$u_0(x,y) = \tau(x) - \int_0^x b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi - \tau(0) - x\tau'(0),$$

$$A_1(x,y) = \vartheta_{\xi}(x,y;0,y), B_1(x,y) = -\vartheta(x,y;0,y),$$

$$A_2(x,y;\eta) = -\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta) - a(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta),$$



$$B_2(x, y; \eta) = \theta_n(x, y; 0, \eta), C_1(x, y; \xi) = b(\xi, \eta)\theta(x, y; \xi, y),$$

$$\begin{split} &C_2(x,y;\xi,\eta) = -a(\xi,\eta)\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta) - b(\xi,\eta)\vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta) + \\ &+ \Big[c(\xi,\eta) - a_\xi(\xi,\eta) - b_\eta(\xi,\eta)\Big]\vartheta(x,y;\xi,\tau). \end{split}$$

Воспользовавшись условиями (3) и (4) из (19), получим:

$$H_{i1}(y)g_{1}(y) + H_{i2}(y)g_{2}(y) = \Phi_{i}(y) + \int_{0}^{y} [H_{i3}(y,\eta)g_{1}(\eta) + H_{i4}(y,\eta)g_{2}(\eta)]d\eta + \int_{0}^{\chi(y)} H_{i5}(y,\xi)u(\xi,y)d\xi + \int_{0}^{\chi(y)} d\xi \int_{0}^{y} H_{i6}(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, i = 1,2,$$
(20)

где

$$H_{11}(y) = 1 + \int_{0}^{\chi(y)} P(x, y) A_1(x, y) dx, \ H_{12}(y) = \int_{0}^{\chi(y)} P(x, y) B_1(x, y) dx,$$

$$H_{13}(y,\eta) = -\int_{0}^{\chi(y)} P(x,y)A_{2}(x,y;\eta)dx, H_{14}(y,\eta) = -\int_{0}^{\chi(y)} P(x,y)B_{2}(x,y;\eta)dx,$$

$$H_{15}(y,\xi;\eta) = -\int_{\xi}^{\chi(y)} P(x,y)C_1(x,y;\xi)dx, H_{16}(y,\xi;\eta) = -\int_{\xi}^{\chi(y)} P(x,y)C_2(x,y;\xi,\eta)dx,$$

$$H_{21}(y) = A_1(\chi(y), y) + \int_0^{\chi(y)} Q(x, y) A_1(x, y) dx, H_{22}(y) = B_1(\chi(y), y) + \int_0^{\chi(y)} Q(x, y) B_1(x, y) dx,$$

$$H_{23}(y) = -A_2(\chi(y), y) - \int_0^{\chi(y)} Q(x, y) A_2(x, y; \eta) dx, H_{24}(y) = -B_2(\chi(y), y) - \int_0^{\chi(y)} Q(x, y) B_2(x, y; \eta) dx,$$

$$H_{25}(y,\xi) = -C_1(\chi(y),y) - \int_{\xi}^{\chi(y)} Q(x,y)C_1(x,y;\xi)dx,$$

$$H_{26}(y,\xi,\eta) = -C_2(\chi(y),y;\xi,\eta) - \int_{\xi}^{\chi(y)} Q(x,y)C_2(x,y;\xi,\eta)dx,$$

$$\Phi_1(y) = \varphi_1(y) - \int_0^{\chi(y)} P(x, y) u_0(x, y) dx, \quad \Phi_2(y) = \varphi_2(y) - u_0(\chi(y), y) - \int_0^{\chi(y)} Q(x, y) u_0(x, y) dx.$$

4. Разрешимость задачи 1. Отметим, что система уравнений (19), (20) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно функций $u(x, y), g_1(y), g_2(y)$. Если выполняется условие



$$\Delta = \begin{vmatrix} H_{11}(y) & H_{12}(y) \\ H_{21}(y) & H_{22}(y) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{21}$$

то система (19), (20) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающей единственное решение.

В частности, при P(x,y) = Q(x,y) = 0 имеем $\Delta = B_I(\chi(y),y) = -\vartheta(\chi(y),y;0,y)$. Так как $\forall y \in [0,h]: 0 < x_0 \le \chi(y) \le \ell$, то $\vartheta(\chi(y),y;0,y) > 0$. Следовательно, $\Delta \ne 0$. Таким образом, имеет место

Теорема. Если выполнены условия (2), (6) и (21), то решение задачи 1 существует и единственно.

Литература

- 1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Apple. Math. 1963. V.21. P. 155-160.
- 2. Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2003. Т. 74. Вып. 3. С. 435-435.
- 3. Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. №2 (61). С. 22-28.
- 4. Бейлина Н.В. О разрешимости обратной задачи для гиперболического уранения с интегральным условием переопределения // Вестник СамГУ. Серия физ.-мат. наук. 2011. № 2 (23). С. 34-39.

УДК: 517.968

Аширбаева А.Ж., к.ф.-м.н. доцент, Мамазияева Э.А., ст.преп., ОшТУ

Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа

Гипрболикалык типтеги оператордуу дифференциалдык теңдемени кошумча аргумент кийирүү усулу менен интегралдык теңдемелер системасына келтирүү каралган.

Рассмотрено приведение операторно-дифференциального уравнения к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента.

The operator-differential equation is considered to a system of integral equations by an additional argument.

Ключевые слова: операторно-дифференциальные уравнение, метод дополнительного аргумента, нелинейное уравнение системы.

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение гиперболического типа вида:

$$u_{tt} - a^{2}(t, x)u_{xx} = b(t, x, u)u_{t} + c(t, x, u)u_{x} + F(t, x; u),$$
(1)

$$(t,x) \in G_2(T) = \{0 \le t \le T, x \in R\},\$$



с начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R.$$
 (2)

где F(t,x;u) - оператор, содержащий неизвестную функцию в целом и под знаком интеграла.

 $C_b^{\ (k)}$ — класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до κ -го порядка.

Пусть

$$u_k(x) \in C_b^{(2-k)}(R)$$
, $k=0,1$, $a(t,x) \in C_b^{(2)}(G_2(T))$, $b(t,x,u),c(t,x,u) \in C_b^{(2)}(G_2(T) \times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица.

В [1] рассмотрено уравнение (1) в случае, когда коэффициенты при частных производных первого порядка не зависят от неизвестной функции.

Введем следующие обозначения:

$$D[a] = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathcal{G}(t,x) = D[-a]u, \quad \omega(t,x) = D[a]u, \tag{3}$$

$$f(t,x,u) = \frac{1}{a(t,x)}(c(t,x,u) - a_t(t,x) - a(t,x)a_x(t,x)),$$

$$g(t,x,u) = \frac{1}{a(t,x)}(c(t,x,u) + a_t(t,x) - a(t,x)a_x(t,x)),$$

$$\beta_1(t, x; u) = b(t, x; u) + f(t, x; u), \beta_2(t, x; u) = b(t, x; u) - f(t, x; u), \beta_3(t, x; u) = D[a]\beta_1(t, x; u),$$

$$\alpha_1(t,x;u) = b(t,x;u) + g(t,x;u), \alpha_2(t,x;u) = b(t,x;u) - g(t,x;u), \alpha_3(t,x;u) = D[-a]\alpha_2(t,x,u), \alpha_3(t,x;u) = b(t,x;u) + g(t,x;u), \alpha_3(t,x;u) = b(t,x;u), \alpha_3(t,x;u), \alpha$$

$$\beta_4(t,x;u) = \frac{\partial \beta_1(t,x,u)}{\partial u}, \quad \alpha_4(t,x;u) = \frac{\partial \alpha_2(t,x,u)}{\partial u}.$$

Лемма. Задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\mathcal{G}(t,x) = \frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}\beta_1(t,x,u)u + \frac{1}{2}\int_0^t \beta_2(s,q,u(s,q))\mathcal{G}(s,q)ds - \frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}\beta_1(t,x,u)u + \frac{1}{2}\int_0^t \beta_2(s,q,u(s,q))\mathcal{G}(s,q)ds - \frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}\beta_1(t,x,u)u + \frac{1}{2}\int_0^t \beta_2(s,q,u(s,q))\mathcal{G}(s,q)ds - \frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x))u +$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\beta_{3}(s,q,u(s,q))u(s,q)ds - \frac{1}{2}\int_{0}^{t}\beta_{4}(s,q,u(s,q))u(s,q)\omega(s,q)ds + \int_{0}^{t}F(s,q;u(s,q))ds$$
 (4)

$$\omega(t,x) = \frac{1}{2}\psi(p(0,t,x)) + \frac{1}{2}\alpha_2(t,x,u)u + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_1(s,p,u(s,p))\omega(s,p)ds - \frac{1}{2}\omega_2(t,x,u)u + \frac{1}{2}\omega_2(t,x,u$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\alpha_{3}(s,p,u(s,p))u(s,p)ds - \frac{1}{2}\int_{0}^{t}\alpha_{4}(s,p,u(s,p))u(s,p)\vartheta(s,p)ds + \int_{0}^{t}F(s,p;u(s,p))ds, \quad (5)$$



где функция u (t, x) определяется из обозначений (3),

$$[2\vartheta - \beta_1(t, x, u)u]_{t=0} = \varphi(x),$$

$$[2\omega - \alpha_2(t, x, u)u]_{t=0} = \psi(x)$$

p(s,t,x), q(s,t,x) — соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p(s,t,x) = x + \int_{s}^{t} a(\tau, p(\tau,t,x))d\tau, \quad 0 \le s \le t \le T$$
 (7)

$$q(s,t,x) = x - \int_{s}^{t} a(\tau, q(\tau,t,x)) d\tau, \quad 0 \le s \le t \le T,$$
(8)

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}(t,x)$, $\omega(t,x)$ — решение системы интегральных уравнений (4)-(6). Непосредственным дифференцированием из (5) и (6) имеем:

$$\begin{split} & \mathcal{G}_{t}(t,x) + a(t,x)\mathcal{G}_{x}(t,x) = \frac{1}{2}\beta_{1}(t,x,u)\omega(t,x) + \frac{1}{2}\beta_{2}(t,x,u)\mathcal{G}(t,x) + F(t,x,u) \\ & \omega_{t}(t,x) - a(t,x)\omega_{x}(t,x) = \frac{1}{2}\alpha_{2}(t,x,u)\mathcal{G}(t,x) + \frac{1}{2}\alpha_{1}(t,x,u)\omega(t,x) + F(t,x,u). \end{split}$$

Принимая во внимания обозначения (3) получаем справедливость уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, система уравнений (3)-(4) удовлетворяет уравнению (1). Система уравнений (3)-(4) удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что решение задачи (1)-(2) является решением системы интегральных уравнений (3)-(4), т.е. решение задачи (1)-(2) сводим к решению системы интегральных уравнений (3)-(4). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D(2\vartheta(t,x) - \beta_1(t,x,u))u) = \beta_2(t,x,u)\vartheta(t,x) - \beta_3(t,x,u)u - \beta_4(t,x,u)u(t,x)\omega(t,x) + (9) + 2F(t,x,u)$$

Действительно из (9) имеем:

$$2\left[\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial x}\right] - \beta_4(t,x,u)\omega(t,x)u(t,x) - \beta_3(t,x,u)u(t,x) - \beta_1(t,x,u)\omega(t,x) = 0$$

$$= \beta_2(t, x, u) \vartheta(t, x) - \beta_3(t, x, u) u(t, x) - \beta_4(t, x, u) \omega(t, x) u(t, x) + 2F(t, x; u)$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial \mathcal{G}(t,x)}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial \mathcal{G}(t,x)}{\partial x}\right] = \beta_1(t,x,u)\omega(t,x) + \beta_2(t,x,u)\mathcal{G}(t,x) + 2F(t,x,u) \tag{10}$$

Для (10) принимая во внимание обозначения (3), получаем:



$$2\left[\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t^{2}} - a^{2}(t,x)\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial x^{2}} - \frac{\partial a(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = \left(b(t,x,u) + f(t,x,u)\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t}\right) + \frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t}\right) + \frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t}$$

$$+ a(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \left(b(t,x,u) - f(t,x,u)\right) \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) + 2F(t,x,u)$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t^{2}} - a^{2}(t,x)\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial x^{2}} - \frac{\partial a(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = 2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + 2(c(t,x,u) - \frac{\partial a(t,x)}{\partial t} - a(t,x,u)\frac{\partial a(t,x)}{\partial x})\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + 2F(t,x,u)$$

Таким образом, мы показали, что из (9) получается уравнение (1).

Решение задачи (9)-(2) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению (3).

Теперь запишем уравнение (1) в виде

$$\overline{D}(2\omega(t,x) - \alpha_2(t,x,u))u) = \alpha_1(t,x,u)\omega(t,x) - \alpha_3(t,x,u)u - \alpha_4(t,x,u)u(t,x)\vartheta(t,x) + 2F(t,x,u)$$
(11)

Действительно из (11) имеем

$$2\left[\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial x}\right] - \alpha_4(t,x,u)u(t,x)\mathcal{G}(t,x) - \alpha_3(t,x,u)u(t,x) - \alpha_2(t,x,u)\mathcal{G}(t,x) = 0$$

$$= \alpha_{1}(t, x, u)\omega(t, x) - \alpha_{3}(t, x, u)u(t, x) - \alpha_{4}(t, x, u)u(t, x)\vartheta(t, x) + 2F(t, x; u)$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial x}\right] = \alpha_2(t,x,u)\vartheta(t,x) + \alpha_1(t,x,u)\omega(t,x) + 2F(t,x,u) \quad (12)$$

Для (12), используя обозначения (3) получаем:

$$2\left[\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t^{2}} - a^{2}(t,x)\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial a(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - g(t,x,u))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - a(t,x))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - a(t,x))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x,u) - a(t,x))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right] = (b(t,x) - a(t,x))\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right]$$



$$-a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg] + \Big(b(t,x,u) + g(t,x,u)\Big)\bigg[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg] + 2F(t,x,u)$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial t^{2}} - a^{2}(t,x)\frac{\partial^{2} u(t,x)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial a(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right] = 2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + 2(c(t,x,u) + \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial x}\right] \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$$

$$(13)$$

Действительно из (13) получается уравнение (1).

Решение задачи (11)-(2) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению (5).

Таким образом, доказали, что задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений.

Проверим эквивалентность на примере. Рассмотрим уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \tag{14}$$

с начальными условиями (2)

Для задачи решения интегральных уравнений (7), (8) имеют вид:

$$p(s,t,x) = x + at - as,$$

$$q(s,t,x) = x - at + as$$

Для (14)-(2) из (4) имеем

$$\mathcal{G}(t,x) = \frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x)),$$

где

$$\varphi(x) = 2(u_t - au_x)|_{t=0} = 2(u_1(x) - au_0^{-1}(x)).$$

Следовательно

$$\mathcal{G} = u_1(x - at) - au_0^{\prime}(x - at).$$

Из обозначения $\mathcal{G}(t,x) = D[-a]u$ имеем



$$u(t,x) = u_0(x+at) + \int_0^t u_1(x+at-2as)ds - a\int_0^t u_0'(x+at-2as)ds =$$

$$= u_0(x+at) + \int_0^t u_1(x+at-2as)ds +$$

$$+ \frac{1}{2}u_0(x+at-2as)|_0^t = u_0(x+at) + \frac{1}{2}u_0(x-at) - \frac{1}{2}u_0(x+at) + \int_0^t u_1(x+at-2as)ds =$$

$$\begin{vmatrix} x+at-2as = \tau \\ ds = -\frac{d\tau}{2a} \\ s = 0 \quad \tau = x+at \\ s = t \quad \tau = x-at \end{vmatrix} = \frac{u_0(a-xt) + u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\tau)d\tau =$$

Следовательно, получаем формулу Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{u_0(a-xt) + u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\tau) d\tau$$

Литература

1. Аширбаева А.Ж., Мамазияева Э.А. Новый способ приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению // Вестник ОшГУ. 2013, № 1. – Спец. выпуск. – С. 87-90.

УДК: 517.928

Каримов С.К., д.ф.-м.н., профессор, ОшГУ

Равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений в критическом случае

Бул жумушта сингулярдык козголгон дифференциалдык тендемелер системасынын чечиминин бир калыпта жакындашуусу каалаган тактыкта өзгөчө учурда тургузулган.

В данной работе построены равномерные приблежения решения сингулярно — возмущенной системы дефференциальных уравнений с любой степенью точности в особо критическим случае.

In this paper uniform approximations are constructed for solving singularly-perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case.

Рассмотрим систему

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \varepsilon [g(t) + B_1(t)y],$$
 (a)



где $\varepsilon > 0$ - малый параметр; y, g(t) - n -мерные вектор-функции;

 $A(t), B_1(t) - (n \times n)$ -матрицы. Пусть $\det A(t) \equiv 0$ при $t_0 \le t < T_0$. Тогда хотя бы одно собственное значение матрицы A(t) обращается тождественно в нуль на $\begin{bmatrix} t_0, T_0 \end{bmatrix}$.

- **I.** Пусть $A(t), B_1(t), g(t)$ непрерывны на $\begin{bmatrix} t_0, T_0 \end{bmatrix}$ и при $t_0 \le t \le T_0$. Выполнены условия: $\lambda_1(t) \equiv 0 (j = \overline{1,k}, k < n);$ $\operatorname{Re} \lambda_1(t) \le -\alpha, \alpha > 0 const(j = \overline{k+1,n}).$
- II. Пусть все элементарные делители матрицы A(t), соответствующие собственным значением $\lambda_j(t) \equiv 0$ при каждом $t \in [t_0, T_0]$ простые. Тогда систему (а) можно записать в виде

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = D(t)y + \varepsilon [f(t) + B(t)x], \tag{1}$$

где D(t) - жорданова форма матрицы A(t).

Определим решение системы (1) начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon) = colon(x_1^0(\varepsilon), x_2^0(\varepsilon), ..., x_n^0(\varepsilon)), \tag{2}$$

$$|x_{j}^{0}(\varepsilon)| \le c - const(j = \overline{1,k}); |x_{j}^{0}(\varepsilon)| = O(\varepsilon)(j = \overline{k+1,n}).$$

Далее постоянные, величины которых в рассуждениях существенной роли не играют, обозначим одной и той же буквой c. Справедлива **теорема.** Пусть при $t \in [t_0, T_0] \| \mathbf{B}(T) \| \le c, \| f(t) \| \le c$ и выполнены I, II. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно на $[t_0, T_0]$ и представимо в виде

$$x(t,\varepsilon) = x^{(1)}(t,\varepsilon) + x^{(2)}(t,\varepsilon) + \cdots, \tilde{a}\ddot{a}dE(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds\right);$$
(3)

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \mathrm{E}(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau;$$

 $x^{-(m+1)}(t,\varepsilon)=\int\limits_{t_0}^t E(t,\tau,\varepsilon)\mathrm{B}(\tau)x^{(m)}(\tau,\varepsilon)d\tau (m=1,2\cdots,); \text{причем при }t\in \left[t_0,T_0\right] \text{ имеют место }$ оценки

$$\left|x_{i}^{(m+1)}(t,\varepsilon)\right| \leq c \cdot \alpha_{m}(t)(j=1,k); \left|x_{j}^{(m+1)}(t,\varepsilon)\right| \leq \frac{cc\varepsilon}{\alpha} \cdot \alpha_{m-1}(t)(j=\overline{k+1,n}); \tag{4}$$



$$\alpha_m(t) = \frac{\left[c(t-t_0)\right]^m}{m!}.$$

В самом деле, имеем:

$$\varepsilon \dot{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = D(t)x^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t);$$

$$\varepsilon \dot{x}^{(m+1)}(t,\varepsilon) = D(t)x^{m+1}(t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)x^{(m)}(t,\varepsilon)(m=1,2,\cdots)$$

Следовательно

$$\varepsilon \dot{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon \dot{x}^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \dot{x}^{(m+1)}(t,\varepsilon) = D(t) \sum_{m=1}^{\infty} x^{(m)}(t,\varepsilon) + \varepsilon \left[f(t) + B(t) \sum_{m=1}^{\infty} x^{(m)}(t,\varepsilon) \right] = 0$$

$$= D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon [f(t) + B(t)x(t,\varepsilon)]$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) представимо в виде (3)

Теперь покажем справедливость оценки (4)

Пусть
$$j = \overline{1,k}, k < n;$$
 $B(t) = (b_{js}(t))^n$. Тогда

$$x_j^{(1)}(t,\varepsilon)=x_j^{(0)}(\varepsilon)+\int_{t_0}^t f_j(\tau)d\tau;$$

$$x_{j}^{(m+1)}(t,\varepsilon) = \int_{t_{0}}^{t} \left[b_{j1}(\tau)x_{1}^{(m)}(\tau,\varepsilon) + b_{j2}(\tau)x_{2}^{(m)}(\tau,\varepsilon) + \dots + b_{jn}(\tau)x_{n}^{(m)}(\tau,\varepsilon) \right] d\tau \quad (m=1,2,\dots).$$

Следовательно
$$\left|x_{j}^{(m+1)}(t,\varepsilon)\right| \leq c \cdot \alpha_{m}(t)$$
, где $\alpha_{m}(t) = \frac{\left[c(t-t_{0})\right]^{m}}{m!}(m=0,1,\cdots)$.

Для $j=\overline{1,k}(k < n)$ оценки (4) доказаны и для этих координат решения сходящий мажорантный ряд имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} c\alpha_m(t) = c\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[c(t-t_0)^m\right]^m}{m!} = ce^{c(t-t_0)}.$$

Пусть теперь $j = \overline{k+1,n}$, тогда

$$x_{j}^{(i)}(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon^{t_0}} \hat{\lambda}_{j}(s)ds} \cdot x_{j}^{0}(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon^{\tau}} \hat{\lambda}_{j}(s)ds} f_{j}(\tau)d\tau;$$

$$x_{j}^{(m+1)}(t,\varepsilon) = \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon^{\tau}} \lambda_{j}(s)ds} \left[b_{j1}(\tau) x^{(m)} (\tau,\varepsilon) + b_{j2}(\tau) x_{2}^{(m)}(\tau,\varepsilon) + \dots + b_{jn}(\tau) x_{n}^{(m)}(\tau,\varepsilon) \right] d\tau$$

Следовательно



$$\left|x_{j}^{(1)}(t,\varepsilon)\right| \leq c \cdot \varepsilon \ (j=\overline{k+1,n});$$

$$\left|x_{j}^{(m+1)}(t,\varepsilon)\right| \leq \frac{c^{2}\varepsilon}{\alpha}\alpha_{m-1}(t)(j=k+1,n;m=1,2,\cdots).$$

Справедливость оценки (4) для $j = \overline{k+1,n}$ доказаны и сходящий мажорантный ряд для этих координат решения имеет вид:

$$\tilde{n}\varepsilon + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c^2 \varepsilon}{\alpha} \alpha_{m-1}(t) = c\varepsilon + \frac{c^2 \varepsilon}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[c(t-t_0)\right]^{m-1}}{(m-1)!} = c\varepsilon + \frac{c^2 \varepsilon}{\alpha} e^{c(t-t_0)} = c\varepsilon \left[1 + \frac{c}{\alpha} e^{c(t-t_0)}\right].$$

Если для всех $R \in \lambda_j(t) \le -\alpha, \alpha > 0$ $(t_0 \le t \le T_0; j = \overline{1,n})$, то имеют место оценки

$$\left|x_{j}^{(m)}(t,\varepsilon)\right| \leq \left(\frac{c}{\alpha}\varepsilon\right)^{m} (j=\overline{1,n}; m=1,2,\cdots).$$

Однородный Марковский процесс с конечным числом п состояний и непрерывным временем описывается системой

$$\frac{dP}{d\tau} = AP, P(0) = P^0, \tag{5}$$

где $P(\tau) = colon(p_1(\tau), p_2(\tau), \cdots, p_n(\tau), p_j(\tau)$ вероятность j-го состояния в момент τ ; $A = (a_{ik})_1^n$ — постоянная матрица, причем $\sum_{t=1}^n a_{ik} = 0$.

Тогда матрица A имеет собственное значение $\lambda = 0$ с кратностью k < n. Остальные собственные значения удовлетворяют условию

$$\mathrm{Re}\lambda_{_{J}}(\tau)$$
 < 0 (правильная цепь).

При изучении цепей Маркова представляет интерес

$$\lim_{\tau\to+\infty}P(\tau)=?$$

Если $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, то задача (5) имеет вид:

$$\varepsilon \frac{dP}{dt} = AP, P(O, \varepsilon) = P^{0}. \tag{6}$$

Тогда $\lim_{\tau \to +\infty} P(\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} P(t,\varepsilon) = \overline{P}^0(t)$; при любом $t \neq 0$. Тогда задача (6) имеет вид

$$\varepsilon \frac{dQ}{dt} = DQ, \ Q(o, \varepsilon) = K^{-1}P^{0}, \tag{7}$$



где
$$Q(t,\varepsilon) = K^{-1}P(t,\varepsilon)$$
.

Задача (7) имеет решение:

$$Q(t,\varepsilon) = \exp(\frac{1}{\varepsilon} \int_{0}^{t} D(s) ds \cdot Q^{0}(\varepsilon)),$$

$$Q^{0}(\varepsilon) = Q(o,\varepsilon) = K^{-1}P^{0}$$
.

Причем элементарные делители матрицы A соответствующие собственным значением $\lambda=0$ простые.

Литература

1. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов «Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях», Изв. МГУ, 1978. – С. 1-106.

УДК: 517.928

Каримов С.К., д.ф.-м.н., профессор, Азимбаев М.А., к.ф.-м.н., доцент, ОшГУ

Поведение решений сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений в особо критическом случае

Бул жумушта сингулярдык козголуусу бар дифференциалдык теңдемелер системасы өзгөчө критикалык болгон учурда экинчи тартиптеги матрицанын өздүк маанилери берилген аймакта нөлгө ээ болбогон учурда бир калыпта жакындашуу чечими изилденген.

В данной работе исследуется равномерные приближения решения сингулярно возмущенной системы дифференциалных уравнений в особо критическом случае, когда собственные значения матрицы второго порядка не имеют нулей в рассматриваемой области.

In this article we study the steady approximation solution of singularly indignant system of differential equation in a particular critical assident when own values of matrix of the second order has no noughts in a considering area.

Рассмотрим конкретную задачу:

$$\varepsilon \dot{x}(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f(t),$$
 (1)

$$x_0(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), ||x^0(\varepsilon)|| = O(1), \tag{2}$$

где
$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}$$
; $t_0 = -\frac{\pi}{2}$, $T_0 = \frac{\pi}{2}$; $\varepsilon > 0$ – малый параметр;



$$\begin{split} H_0 &= \{ (t_1, t_2) : t_0 \le t_1 \le T_0, -\infty < t_2 < +\infty \} \subset S = \\ &= \{ (t_1, t_2) : t_0 - \gamma < t_1 < T_0 + \gamma, -\infty < t_2 < +\infty, 0 < \gamma << 1 \}, \end{split}$$

 $\Phi(s)$ – пространство аналитических функции в S:

$$f(t) = colon(f_1(t), f_2(t)), f_k(t) \in \hat{O}(s) (k = 1,2).$$

Решение будем искать в классе $x_k(t,\varepsilon) \in \hat{O}(S)$ (k=1,2) по t.

Матрица A(t) имеет собственные значения

$$\lambda_1(t) = \sin t + i \cos t, \lambda_2(t) = \sin t - i \cos t.$$

$$u_1(t_1, t_2) = \text{Re} \int_{t_0}^{t} \lambda_1(s) ds = -e^{t_2} \cos t_1;$$

$$u_2(t_1, t_2) = \text{Re} \int_{t_1}^{t} \lambda_2(s) = -e^{-t_2} \cos t_1.$$

$$u_2(t_1, t_2) = \text{Re} \int_{t_0}^{t} \lambda_2(s) = -e^{-t_2} \cos t_1$$

С помощью преобразования

$$x(t,\varepsilon) = B \cdot y(t,\varepsilon) + g(t)$$

где $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $g(t) = -A^{-1}(t)f(t)$, задачу (1), (2) приведем к виду:

$$\varepsilon \cdot y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon h(t), \tag{3}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = y^0(\varepsilon), ||y^0(\varepsilon)|| = O(\varepsilon).$$
 (4)

Здесь $D(t) = diag(\lambda_1(t), \lambda_2(t)), h(t) = -B^{-1}g'(t).$

Задачу (3), (4) заменим следующей интегральной

$$y(t,\varepsilon) = E(t,\tau,\varepsilon)y^{0}(\varepsilon) + \int_{t_{0}}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau, \tag{5}$$

где
$$E(t,\tau,\varepsilon) = diag \left(\exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} \lambda_{1}(s) ds, \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} \lambda_{2}(s) ds \right).$$



Теперь оценим величины $I(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^t E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau$.

Пусть
$$\{C_1\}$$
 $(u_1(t_1,t_2)=C_1)$ соединяет точки $(t_{01},0), (T_1,0),$ а $\{C_2\}$ $(u_1(t_1,t_2)=C_2)$ точки $(t_{02},0), (T_2,0)(t_0 < t_{01} < t_{02} < a_0, a_0 < T_2 < T_1 < T_0),$ где $a_0=0$.

Рассмотрим полосу P, ограниченную линиями уровней $\{C_1\}$ и $\{C_2\}$ отрезками действительной оси $[t_{01},t_{02}]$, $[T_2,T_1]$.

На полосе Р рассмотрим уравнения

$$u_1(t_1, t_2) = at_1 + b$$
, где $a = \frac{C_2 - C_1}{T_2 - t_{01}}$, $b = \frac{C_1 T_2 - C_2 t_{01}}{T_2 - t_{01}}$. (6)

Основная лемма: Если линии уровня $u_1(t_1,t_2)=C$ ($C_2 \le C \le C_1$) полностью покрывают полосу Р и произвольная точка (t_1,t_2) полосы Р принадлежит единственной линей уровня $\{C\}$, $Jm\lambda_1(t) \ne 0$, то уравнения (6) в полосе Р определяют однозначную непрерывно — дифференцируемую функцию $t_2 = \varphi(t_1)$ с областью существования $(t_{01} \le t_1 \le T_2)$ и кривая (K_0) , определяемая этой функцией, соединяет точки $(t_{01},0)$, $(T_2,0)$, причем $u_1(t_1,\varphi(t_1))$ убывает на $[t_{01},T_2]$.

Основная лемма своеобразным методом доказана в работе [2]. Другое доказательство имеется в наших работах [1].

Пусть $\alpha(\epsilon)$ определена, непрерывна и монотонно убывает на отрезке $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$, причем $\alpha(0) = 0$.

Тогда из равенства

$$u_1(t_1^*,0) = \alpha(\varepsilon) \tag{7}$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^*=t_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=t_0+\gamma(\varepsilon)$, причем $\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0$, где $\gamma(\varepsilon)\geq 0$ непрерывная функция от ε при $0\leq \varepsilon\leq \varepsilon_0$. Аналогично из (7) в некоторой окрестности точки $(t_1^*=T_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=T_0-\widetilde{\gamma}(\varepsilon)$, где $\widetilde{\gamma}(\varepsilon)\geq 0$ непрерывная функция от

 \mathcal{E} при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, причем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\gamma}(\varepsilon) = 0.$$

Будем иметь $\cos t^*_1 = -\alpha(\varepsilon)$.



Поэтому, соответственно, получим

$$t_1^* = -\frac{\pi}{2} + \gamma(\varepsilon), t_1^* = \frac{\pi}{2} - \widetilde{\gamma}(\varepsilon), \quad \text{где } \gamma(\varepsilon) = \widetilde{\gamma}(\varepsilon) = \arcsin(-a(\varepsilon)).$$

Если $\alpha(\varepsilon)=\alpha_k(\varepsilon)$, то значения $\gamma(\varepsilon),\widetilde{\gamma}(\varepsilon)$, соответственно, обозначим $\gamma_k(\varepsilon),\widetilde{\gamma}_k(\varepsilon)$. Для оценки функций $I_k(t,\varepsilon)(k=1,2)$ будем использовать основную лемму.

Пусть линия уровня (C_1) соединяет точки $(t_{01},0),(T_2,0)$, линия уровня (C_2) соединяет точки $(t_{02},0),(T_2,0)$. Возьмем кривую (K_0^*) симметричную к (K_0) . Область ограниченную (K_0) и (K_0^*) обозначим через $H \subset H_0$. $\widetilde{H} = \Delta \cup H$, где $\Delta = \{(t_1,t_2): t_0 \leq t_1 \leq t_{01}, t_2 = 0\}$. Теперь будем оценивать $I_k(t,\varepsilon)(k=1,2)$ для $\forall t \in \widetilde{H}$.

Для $I_1(t,\varepsilon)$ путь интегрирования l определяется следующий образом:

Если
$$(t_1, t_2) \in \Delta(t = t_1, t_2 = 0)$$
,

то l состоит из одного отрезка прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_1,0)(t_0 \le t_1 \le t_{01})$. В этом случае $\operatorname{Re} \lambda_k(t) \le -\alpha, \alpha > 0 - const.$

Пусть $(t_1,t_2)\in H$. Тогда $l=\bigcup_{k=1}^3 l_k$, где l_1 - отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_0,0)$; l_2 - отрезок кривой (K_0) , соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_1,t_2^*=\widetilde{\varphi}(t_1))$; l_3 - отрезок прямой, соединяющий точки (t_1,t_2^*) с точкой (t_1,t_2) . Заметим, что если $(t_1,t_2)\in H$, то на кривой (K_0) при любом допустимом t_1 имеется единственная точка $(t_1,t_2^*=\varphi(t_1))$.

Для $I_2(t,\varepsilon)$ путь интегрирования \widetilde{l} симметричен для l относительно действительной оси..

Пусть $\alpha_1(\varepsilon) = -\varepsilon$; $C_1 = -\varepsilon$; $C_2 = -2\varepsilon$. В этом случае область H обозначим через $S_\varepsilon u \widetilde{S}_\varepsilon = \Delta_I \cup S_\varepsilon$, где $\Delta_1 = \{(t_1, t_2) : t_0 \le t_1 \le t_0 + \gamma_1(\varepsilon), t_2 = 0\}$.

Тогда при $(t_1, t_2) \in \widetilde{S}_{\varepsilon}$ справедлива оценка:

$$\left| \int_{l} \exp \frac{1}{\varepsilon} \left[u_1(t_1, t_2) - u_1(\tau_1, \tau_2) \right] d\tau \right| = O(1);$$



Пусть $\alpha_2(\varepsilon) = \delta(\varepsilon), C_1 = \delta(\varepsilon); C_2 = 2\delta(\varepsilon)$, где $\delta(0) = 0; \delta(\varepsilon) = \varepsilon \ln \varepsilon, 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$. В этом случае область H обозначим через $K_\varepsilon u \widetilde{K}_\varepsilon = \Delta_I \cup K_\varepsilon$, где $\Delta_2 = \{(t_1, t_2) : t_0 \le t_1 \le t_0 + \gamma_2(\varepsilon), t_2 = 0\}$. Тогда при $(t_I, t_2) \in \widetilde{K}_\varepsilon$ справедливы оценки:

$$\left| \int_{l_1} \exp \frac{1}{\varepsilon} \left[u_1(t_1, t_2) - u_1(\tau_1, \tau_2) \right] d\tau \right| = O(\varepsilon);$$

$$\left| \int_{l_2} \exp \frac{1}{\varepsilon} \left[u_1(t_1, t_2) - u_1(\tau_1, \tau_2) \right] d\tau \right| = O(\delta_0(\varepsilon)),$$

где
$$\delta_0(\varepsilon) = \frac{1}{|\ln \varepsilon|} (0 < \varepsilon \le \varepsilon_0); \left| \int_{l_3} \exp \frac{1}{\varepsilon} \left[u_1(t_1, t_2) - u_1(\tau_1, \tau_2) \right] |d\tau| \right| = O(\delta_0(\varepsilon).$$

Следовательно, имеет места оценка

$$\left| \int_{l} \exp \frac{1}{\varepsilon} \left[u_1(t_1, t_2) - u_1(\tau_1, \tau_2) \right] d\tau \right| = O(\delta_0(\varepsilon)), (0 < \varepsilon \le \varepsilon_0).$$
 (8)

Пусть $\alpha_3(\varepsilon)=\varepsilon^p$, p-постоянное, причем $0< p<1; C_1=-\varepsilon^p$; $C_2=-2\varepsilon^p$. В этом случае область H обозначим через H_ε u $\widetilde{H}_\varepsilon=\Delta_3\cup H_\varepsilon$, где $\Delta_4=\{(t_1,t_2):t_0\leq t_1\leq t_0+\gamma_3(\varepsilon),t_2=0\}$. Тогда при $(t_1,t_2)\in\widetilde{H}_\varepsilon$ справедлива оценка:

$$\left|\int_{l} \exp \frac{1}{\varepsilon} \left[u_1(t_1, t_2) - u_1(\tau_1, \tau_2) \right] d\tau \right| = O(\varepsilon^{\gamma}), \text{ здесь } \gamma = l - p.$$

Пусть $\alpha_4(\varepsilon)=-a,a$ -постоянное, причем $0< a<<1; C_1=-a; C_2=-2a$. В этом случае область H обозначим через $H_cu\widetilde{H}_c=\Delta_4\cup H_c$, где $\Delta_3=\{(t_1,t_2):t_0\leq t_1\leq t_0+\gamma_4(\varepsilon),t_2=0\}$. Тогда при $(t_1,t_2)\in\widetilde{H}_c$ справедлива оценка:

$$\left| \int_{l} \exp \frac{1}{\varepsilon} \left[u_1(t_1, t_2) - u_1(\tau_1, \tau_2) \right] d\tau \right| = O(\varepsilon).$$

Пусть (K_0) , (K'_0) — симметричные кривые ограничивающей фигуры S_ε . Тогда на этих кривых существуют симметрические точки (t_1^0,t_2^0) , $(t_1^0,-t_2^0)$ с наибольшой ординатой $t_2^0(\grave{e}\ddot{e}\grave{e}-t_2^0)$. Обозначим через $H'_0=\left\{(t_1,t_2)\!:\!-\frac{\pi}{2}\!\leq\! t_1\!\leq\!\frac{\pi}{2},\!-t_2^0\!\leq\! t_2\!\leq\! t_2^0\right\}$. Пусть



 $(t_1,t_2)\in H_0',$ $i\hat{i}$ (t_1,t_2) $\equiv \overline{S}_{\varepsilon}$. Через точки (t_1,t_2) проведем прямая параллельная на оси абциссы. Эта прямая с кривой K_0 , $(\grave{e} \ddot{e} \grave{e} K_0')$ пересекается в двух точках $(t_1'',t_2),(t_1'',t_2)$. Путь интегрирования l в концевой части будет по отрезку прямой $[(t_1',t_2),(t_1,t_2)]$ или по отрезку прямой $[(t_1'',t_2),(t_1,t_2)]$. Тогда при $(t_1,t_2)\in H_0'$ имеет места оценка $|I_k(t_1,t_2)|=O(1)(k=1,2)$.

Справедлива следующая теорема.

Если $\|A^{-1}(t)f(t)\| = O(1)$ в H_0 , то задача (1),(2) имеет единственное решение и для него справедлива следующие оценки:

$$\begin{split} W(t,\varepsilon) &= \left\| x(t,\varepsilon) + A^{-1}(t)f(t) \right\| = O(1) \ \ \ \ddot{o}\dot{e} \ \ (t_1,t_2) \in H_0', \\ W(t,\varepsilon) &= O(\delta_0(t))npu\left(t_1,t_2\right) \in \widetilde{K}_\varepsilon; \\ W(t,\varepsilon) &= O(\varepsilon^{\gamma})npu\left(t_1,t_2\right) \in \widetilde{H}_\varepsilon; \\ W(t,\varepsilon) &= O(\varepsilon)\ddot{o}\dot{e} \ \ \left(t_1,t_2\right) \in \widetilde{H}_c, \end{split}$$

где
$$\gamma=1-p, 0< p<1, p$$
—постоянное; $\delta_0 \left(\varepsilon \right) = \frac{1}{\left| \ln \varepsilon \right|} \left(0< \varepsilon \leq \varepsilon_0 \right).$

Литература

- 1. Каримов С.К. Вестник ОшГУ, №3-2012, выпуск ІІІ, С. 87-105.
- 2. Алыбаев К.С., Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дисс. ...докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Жалал-Абад, 2001, 1-376.

УДК: 517.928

Каримов С.К., д.ф.-м.н., профессор, Панков П.С., Азимбаев М.А., к.ф.-м.н., доцент, ОшГУ

Об одном обобщении принципа максимума для гармонических функций на неограниченных областях

Бул жумушта кадимки сингулярдык козголуусу бар дифференциалдык теңдеменин аналитикалык функциясы туруктуу өзгөрүлмө болгон учурда чектелбеген аймакта изилденген.

В данной работе исследуются обыкновенные сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнение с аналитическими функциями с переменой устойчивости на неограниченных областях.



In this article we study the ordinary singular-indignant differential equations with analutical functions and with changeable stability in an unlimited areas.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные, устойчивость, аналитический функция.

Известно, что гармоническая функция, определенная в ограниченной области, достигает своего максимума на границе области. В частности, если она равна константе на границе области, то она является константой во всей области.

В связи с развитием теории обыкновенных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями с переменой устойчивости (см. в частности, [1-4]) возник вопрос о свойствах гармони-ческих функций на неограниченных областях.

Такие гармонические функции представляют вещественные части фундаментальных решений линеаризованных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями

$$u(t_1, t_2) = \operatorname{Re} \int_{t_0}^{t_1 + it_2} \lambda(s) ds,$$

где $\lambda(t)$ - собственное значение матрицы коэффициентов при неизвестной функции.

Известна

Т е о р е м а. 1. [5, теорема Фрагмена-Линделёфа]. Если для аналитической функции f(z), определенной в области D с границей Γ , можно выделить некоторое подмножество $E \subset \Gamma$ и подобрать такую регулярную в D функцию $\omega(z)$, что:

- 1) $|f(z)| \le M = const \ (z \in \Gamma \setminus E);$
- 2) $\omega(z) \neq 0$, $|\omega(z)| < 1 \ (z \in D)$;
- 3) для любого p > 0: $|\omega(z)|^p |f(z)| \le M (z \in E)$,

to | f(z)|≤M (z ∈ D).

Однако для наших целей эта теорема не подходит, поскольку возникающие, как упомянуто выше, гармонические функции обращаются в нуль на границе области, но отличны от нуля внутри области. Вместе с тем, они имеют ряд других свойств, которые не учитываются данной теоремой.

Нами сформулирована и доказана T е о р е м а 2. Пусть $t_0 < T_0$ - заданные вещественные числа. Обозначим $D := \{(t_1 + it_2): t_0 < t_1 < T_0\}$, тогда $\Gamma := \{(t_1 + it_2): t_1 = t_0 T_0\} \cup \{(t_1 + it_2): t_1 = T_0\}$ - граница области; $D_1 := D \cup \Gamma$.

Если функция $u(t_1,t_2)$

- 1) непрерывная в D_1 ;
- 2) гармоническая в D;
- 3) отрицательная в D;
- 4) обращается в нуль на Γ ;
- 5) не возрастает по t_2 ,



то $\lim_{t_2 \to -\infty} u(t_1, t_2) = 0$ при фиксированном t_1 .

Доказательство. Введем функцию

$$\varphi(t_2) = \inf_{t_0 \le t_1 \le T_0} u(t_1, t_2), \quad \text{при} - \infty < t_2 \le 0.$$

Имеют место следующие факты:

- 6) $\varphi(t_2) < 0$ в силу 3);
- 7) $\varphi(t_2)$ не убывает при уменьшении t_2 в силу 5);
- 8) $\varphi(t_2)$ непрерывная функция в силу 1).
- 9) Следовательно, существует $\lim_{t_2 \to -\infty} \varphi(t_2) \le 0$.

Предположим, что

10)
$$\lim_{t_2 \to -\infty} \varphi(t_2) = -\alpha < 0 \quad (\alpha > 0).$$

Тогда в силу 1) и 4) существуют такие точки $t_0 < t_{1-} < t_{1+} < T_0$, что

11)
$$u(t_1,0) \ge -\frac{\alpha}{2}$$
 $(t_0 \le t_1 \le t_{1-}); \ u(t_1,0) \ge -\frac{\alpha}{2}$ $(t_{1+} \le t_1 \le T_0).$

Из 11) и 5) следует

12)
$$u(t_1,t_2) \ge -\frac{\alpha}{2}$$
 при любых $t_2 \le 0$, $t_0 \le t_1 \le t_{1-}$, а также при $t_{1+} \le t_1 \le T_0$.

Возьмем окружность Q радиуса $R=(T_0-t_0)/2$ с центром в точке $t_1=t_{10}:=\left(t_0+T_0\right)/2$, $t_2=t_{20}<-R$.

Тогда на дуге окружности Q длиной L_- в полосе (слева) $t_0 \le t_1 \le t_{1-}$ и на дуге окружности Q длиной L_+ в полосе (справа) $t_{1+} \le t_1 \le T_0$ получим

13)
$$u(t_1,t_2) \ge -\frac{\alpha}{2}$$
 . (Числа L_- и L_+ зависят только от t_{1-} и t_{1+}).

Обозначим через β отношение длины более короткой из дуг L_- , L_+ к $2\pi R$, $k \coloneqq \beta(2-2\beta)$.

По предположению 10), при $t_2 \to \infty$ значение функции $\varphi(t_2)$ становится больше любого числа, меньшего α , то есть существует такое t_2^* , что при $t_2 < t_2^* + R$ имеем $\varphi(t_2) > -\alpha - \alpha k$, или



14)
$$u(t_1, t_2) > -\alpha - \alpha k \ (t_2 < t_2^* + R, t_0 \le t_1 \le T_0).$$

По определению функции ϕ и по предположению 10), существует такое t_1^* , что

15)
$$u(t_1^*, t_2^*) \equiv \varphi(t_2^*) \le -\alpha$$
.

Значение t_1^* может быть либо меньше или равно, либо больше t_{10} . Не умаляя общности, в силу симметрии, будем считать $t_1^* \leq t_{10}$. Отсюда и из 12) следует, что $t_{1-} \leq t_1^* \leq t_{1+}$. Проведем окружность Q_l радиуса $\binom{t}{t_1} - t_0$ с центром в точке t_1^* , t_2^* .

Отношение длины дуги окружности Q_I в полосе $t_0 \le t_1 \le t_{0+}$ к длине всей окружности Q_I будет не меньше β , поскольку радиус окружности Q_I не больше R - радиуса окружности Q_I .

Будем использовать формулу Пуассона для гармонических функций в полярных координатах, дающую значение функции внутри круга через ее значения на краю круга:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} u(R,\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

Из этой формулы (при r=0) следует, что значение гармонической функции в центре любой окружности равно среднему арифметическому из значений ее на этой окружности.

Выделим на окружности Q_l дугу в полосе $t_0 \le t_1 \le t_{1-}$, такую, что отношение ее длины L_{1-} к длине всей окружности Q_l равно β . Тогда отношение оставшейся части к длине всей окружности Q_l равно $(l-\beta)$.

Отсюда имеем, учитывая 12) и 14):

$$u(t_1^*, t_2^*) > \beta(-\alpha/2) + (1-\beta)(-\alpha-\alpha k) = -\alpha(\beta/2 + (1-\beta)(1+k)) =$$

$$= -\alpha(\beta/2 + (1-\beta)(1+\beta/(2-2\beta))) = -\alpha(\beta/2 + (1-\beta) + \beta/2) = -\alpha,$$

что противоречит 15), а следовательно, и предположению 10). Таким образом, теорема доказана

Приведем примеры, показывающие существенность условий теоремы. Положим $t_0 = 0$, $T_0 = \pi$. Тогда для любой функции, имеющей сомножитель $sin\ t_1$, выполняется условие 4).

Гармоническая функция $u_1(t_1,t_2)=(exp(-t_2)-exp(t_2))$ sin t_1 убывает по t_2 , но не отрицательная. Конечного предела при $t_2 \to -\infty$ не существует.

Гармоническая функция $u_2(t_1,t_2) = -(exp(-t_2) + exp(t_2))$ sin t_1 отрицательная, но не монотонная по t_2 . Конечных пределов при $t_2 \rightarrow -\infty$ не существует.

Литература

1. Шишкин А. А. Асимптотика решения некоторых задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае смены устойчивости условий регулярности вырождения. Дисс. ... канд. физ.-мат.наук: 01.01.02. – Москва, 1974. – С. 142.



- 2. Алыбаев К.С. Метод линии уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Бишкек, 2001. С. 376.
- 3. Каримов С.К., Азимбаев М.А. Асимптотические оценки решений линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Труды международной научной конф., посв. 70-летию акад. М.И. Иманалиева. Вестник КГНУ, 2001. Сер. 3, вып. 6. С. 53-58.
- 4. Азимбаев М.А. Исследование асимптотического поведения решения неоднородных линейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости // Вестник КазНУ, 2004. Вып.1(40) С. 39-47.
- 5. Евграфов М.А. Аналитические функции. Москва: Наука, 1968.

УДК: 519.6

Кудуев А.Ж., ОшМУ gold oshsu@rambler.ru

Бешинчи даражадагы көп мүчөлүү, ортогоналдуу жаңы типтеги мультивейвлеттер

Макалада эрмиттик сплайндар үчүн базистик сплайн-мультивейвлеттердин системасында көп мүчөлөрдүн бешинчи даражасынын ортогоналдуулук шарты колдонулган жаңы усул изилденди, андан сырткары блок фильтрге кайрылуу жана кеңейүү варианты каралган. Сандык эксперименттердин жыйынтыгы келтирилген.

Ачкыч сөздөр: эрмиттик сплайндар, мультивейвлеттер, көп мүчөлөрдүн ортогоналдуулугу.

Для случая эрмитовых сплайнов пятой степени исследован новый метод построения системы базисных сплайн-мультивейлетов, использующий условия ортогональности многочленам пятой степени. Рассмотрены варианты построения и обращения блока фильтров. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: эрмитовы сплайны пятой степени, мультивейвлеты, ортогональность многочленов.

In the case of the fifth degree Hermite splines investigated a new method of constructing systems of basic spline multiveyletov using conditions of orthogonal polynomials of the fifth degree. Deals the variants of the construction and handling of the filter unit. Given the results of numerical experiments.

Key words: Hermitian splines of the fifth degree, multiveyvlety, orthogonal polynomials.

1. Киришуу

Кыска же тез басаңдоочу толкундуу функциялар вейвлеттер деп аталышат, ошондой эле алардын көптүгү экилик кысуу жана экилик-рационалдык жылуу жыйындысы $L^2(R)$ мейкиндигинин базисин түзөт [1,3]. Эгер толкундуу функциялар бир нече болгон учур болсо, алар мультивейвлеттердин катарларын түзөт [4,8]. Мультивейвлеттердин бирден-бир негизги артыкчылыгы вейвлеттерге караганда, алар ортогоналдуу бирдей даражадагы көп мүчөлөр жана кичине узундуктагы интервалда каралат. Мисалы, мультивейвлеттердин бешинчи даражасы [0,3] аралыгына ээ, ошол эле



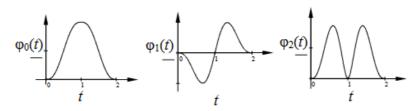
учурда [0, 11] аралыктагы вейлветтердин бешинчи даражасына караганда кичине аралыкта жайгашат. Андан сыркары [9] иште мультивейвлеттердин бешинчи даражасы тургузулган, жана алардын экинчи туундусу базистик эрмиттик сплайндардын бешинчи даражасынын экинчи туундусу менен ортогоналдуу. Берилген мультивейвлеттер [0, 2] аралыгына ээ болот. Дифференциалдык теңдемелерди сандык түрдө чечүүдө Галеркиндин усулу боюнча бириндетип чечилүүчү системаларды көбөйтөт. Алардын жетишпегендиги, көп мүчөлөрдүн биринчи даражасы менен гана ортоганалдуу. Бул албетте жөнөкөй вейвлеттер жана мультивейвлеттерге салыштырмалуу сандык берилгендерди кысууну [10] колдонулган начарлатат. Бул макалада иште усул менен. мультивейвлеттердин бешинчи даражасын [0, 2] аралыгында тургузабыз жана тургузулган мультивейвлеттер бардык көп мүчөлөрдүн бешинчи даражасы менен ортогоналдуу.

2. Чектелген аралыкта базисдик сплайн-мультивейлеттердин системасын тургузуу

Вейвлеттерди-кайра өзгөртүп түзүү үчүн камтылган мейкиндиктердин көптүгү ... $V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1}$... алгачкы негизи болуп саналат. Берилген учурда V_L мейкиндиги [a,b] аралыгындагы C^2 тегиздиги сплайндардын бешинчи даражадагы мейкиндиги болуп саналат жана берилген аралыкта бирдей торчолордо түйүндөргө ээ $\Delta^L: x_i = a + (b-a)i/2^L, i = 0,1,...2^L, L \ge 0$, жана базистик функциялар $N_{i,k}^L(x) = \varphi_k(v-i), k = 0,1,2 \, \forall i$ мында $v = 2^L(x-a)/(b-a)+1$, бүтүн сандарды кысуудан жана жылдыруудан келип чыккан үч масштабдоочу функциялар [11] (1-сүр.):

$$\begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} t^3 (6t^2 - 15t + 10) \\ -t^3 (3t^2 - 7t + 4) \\ \frac{t^3}{2} (t^2 - 2t + 1) \end{bmatrix}, 0 \le t \le 1; \begin{bmatrix} (2-t)^3 (6t^2 - 9t + 4) \\ (2-t)^3 (3t^2 - 5t + 2) \\ \frac{(2-t)^3}{2} (t^2 - 2t + 1) \end{bmatrix}, 1 \le t \le 2 \right\},$$

$$\phi_k(t) = 0, \ k = 0, 1, 2, \ t \notin [0, 2].$$



1-сүрөт. Масштабдоочу функциялардын графиги $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t)$

 $L \ge 1$ болгондуктан Δ^{L-1} торчосу, Δ^L торчосунан ар бир экинчи түйүндү жок кылуунун жардамы менен алынат, анда L_{L-1} базистик функциялары үчүн $N_{i,k}^{L-1}(x)$, функциялары масштабдоо байланышына ылайык туурасы боюнча аралыгы эки эсе чоң жана борбору жуп бүтүн сандардан болот. [12]

$$\begin{bmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{2} H_k \begin{bmatrix} \phi_0(2t-k) \\ \phi_1(2t-k) \\ \phi_2(2t-k) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

мында



$$H_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{15}{16} & 0 \\ -\frac{5}{32} & -\frac{7}{32} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{15}{16} & 0 \\ \frac{5}{32} & -\frac{7}{32} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix},$$

Ар бир кеңири базистик функцияларды аралыктын ичинде аппроксимациялоону үч функциядан, ал эми аралыктын четтеринде аппроксимациялоону эки, үч тар базистик фукциялардан тургузуууга болот. Тескерисинче, жакындаштырылган түрдө гана мүмкүн экендиги талашсыз. Эми майда-чүйдө тактоолорду камтыган $\mathit{W}_{\mathit{L-1}}$ кээ бир мейкиндиги калат, жана ал өз кезегинде V_{L} ди $V_{L} = V_{L-1} + W_{L-1}$ мейкиндигинен калыбына келтирүүгө жардам берет. Кийинки этап W_{L-1} – базиси вейвлеттерди аныктоо этапы болуп саналат. Вейвлеттердин классическалык теориясында W_{L-1} базистик функциясы Δ^{L-1} сейрек бардык базистик сплайндар скалярдык көбөйтүндүсүнө ортогоналдуу. Жыйынтыкта V_{L} мейкиндиги V_{L-1} жана W_{L-1} түз суммасын билдирет:

$$V_L = V_{L-1} \oplus W_{L-1}$$
.

Мындан айырмаланып, биз W_L мейкиндигинин базистик фукцияларын базистик эрмиттик сплайндардын сызыктуу айкалыштары катары Δ^{L+1} торчосунда бардык көп мүчөлөрдүн алтынчы даражасы үчүн ортоганалдуулук шартын канааттандыруучулугун издейбиз, башкача айтканда

$$\int_{a}^{b} \mathbf{M}_{i,k}^{L}(x) x^{m} dx = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad \forall i \ (m = 0, 1, ..., 5).$$
 (2)

Теорема 1. Мейли

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1,0}^{0}(x) &= M_{0}(v), \, \mathbf{M}_{1,1}^{0}(x) = M_{1}(v), \, \mathbf{M}_{1,2}^{0}(x) = M_{2}(v), \\ \mathbf{M}_{1,0}^{L}(x) &= w_{0}(v), \, \mathbf{M}_{1,1}^{L}(x) = w_{1}(v), \, \mathbf{M}_{1,2}^{L}(x) = w_{2}(v), \\ \mathbf{M}_{2^{L}}^{L}(x) &= w_{0}(2^{L} - v), \, \mathbf{M}_{2^{L}}^{L}(x) = -w_{1}(2^{L} - v), \, \mathbf{M}_{2^{L}}^{L}(x) = w_{2}(2^{L} - v), \, L \geq 1, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{2^{L},0}^{L}(x) = w_{0}(2^{L} - \nu), \ \mathbf{M}_{2^{L},1}^{L}(x) = -w_{1}(2^{L} - \nu), \ \mathbf{M}_{2^{L},2}^{L}(x) = w_{2}(2^{L} - \nu), \ L \ge 1,$$

$$M_{i,0}^{L}(x) = \psi_0(v+3/2-i), M_{i,1}^{L}(x) = \psi_1(v+3/2-i), M_{i,2}^{L}(x) = \psi_2(v+3/2-i),$$

 $i = 2.3....2^{L} - 1, L \ge 2.$

мында $v = 2^{L}(x-a)/(b-a)$, $v=2^{L}(x-a)/(b-a)$, жана

$$M_0(t) = \varphi_0(2t) - 4\varphi_0(2t+1) - 4\varphi_0(2t-1) + 84(\varphi_1(2t+1) - \varphi_1(2t-1)) - 828(\varphi_2(2t+1) + \varphi_2(2t-1)),$$

$$M_1(t) = 35\varphi_1(2t) - 200(\varphi_1(2t+1) + \varphi_1(2t-1)) + 8\varphi_0(2t+1) - 8\varphi_0(2t-1) + 2280(\varphi_2(2t+1) - \varphi_2(2t-1)),$$

$$M_2(t) = 35\varphi_2(2t) - 251(\varphi_2(2t+1) + \varphi_2(2t-1)) - \varphi_0(2t+1) - \varphi_0(2t-1) + 23(\varphi_1(2t+1) - \varphi_1(2t-1)),$$

$$w_0(t) = 1296\varphi_0(2t+1) + (7990\varphi_0(2t) - 538\varphi_0(2t-1) - 41545\varphi_1(2t) - 41140\varphi_1(2t-1) - 924040\varphi_2(2t) + 438040\varphi_2(2t-1)),$$

$$w_1(t) = 432\varphi_1(2t+1) + (283\varphi_0(2t) - 12\varphi_0(2t-1) - 1161\varphi_1(2t) - 1288\varphi_1(2t-1) - 32372\varphi_2(2t) + 13520\varphi_2(2t-1)),$$

$$w_2(t) = 2160\varphi_2(2t+1) + (77\varphi_0(2t) - 2\varphi_0(2t-1) - 245\varphi_1(2t) - 320\varphi_1(2t-1) - 8900\varphi_2(2t) + 3320\varphi_2(2t-1)),$$



$$\psi_{0}(t) = 164\phi_{0}(2t) + (28\phi_{0}(2t+1) + 28\phi_{0}(2t-1) + 115\phi_{1}(2t+1) - 115\phi_{1}(2t-1) - 13200\phi_{2}(2t)),$$

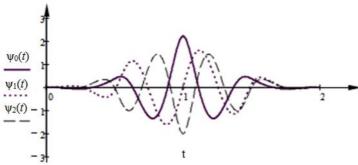
$$\psi_{1}(t) = 80\phi_{1}(2t) + (-\phi_{0}(2t+1) + \phi_{0}(2t-1) + 37\phi_{1}(2t+1) + 37\phi_{1}(2t-1) + 412\phi_{2}(2t+1) - 412\phi_{2}(2t-1)),$$

$$\psi_{2}(t) = 464\phi_{2}(2t) + (-4\phi_{0}(2t) - 11\phi_{1}(2t+1) + 11\phi_{1}(2t-1) - 112\phi_{2}(2t+1) - 112\phi_{2}(2t-1)).$$
(3)

Анда функциялардын системасы $\left\{ \mathbf{M}_{i,k}^L(x), i=1,2,...,2^L \ (k=0,1,2) \right\}$, (2) - шартты канааттандырат жана $W_L(L \geq 0)$ мейкиндигинде базисти түзөт.

Далилдөө. Ортоганалдуулук шарттын текшерүү (2) түздөн-түз эсептөөдөн келип чыгат. $M_{i,k}^L(x)$ фукциясынын базистүүлүгүн орнотуу үчүн чектелген аралык учурунда алардын сызыктуу көз карандылыгы жетиштүү жана факт аркылуу алынат, ошондой эле алар нөл эмес функциялардын жылуу көптүгүн компакттуу аралыгын өз алдынча көрсөтөт. Ошондуктан алардын саны V_{L+1} жана V_L мейкиндиктеринин өлчөмдөрүнүн айырмасына барабар $3\cdot (2^{L+1}+1)-3\cdot (2^L+1)=3\cdot 2^L$. 1-теорема далилденди.

Функциянын аралыгы базистик сплайндардын аралыгына Δ^L торчосунда барабар (2-сүрөт).



2-сүрөт. Симметриялуу эки жана антисимметриялуу бир «энелик» вейвлетердин графиги $\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t)$

Бардык торчолордо Δ^L , $L{\ge}0$, интерполяциондук эрмитик сплайндардын 5-даражасынын аналитикалык көрүнүшү

$$S^{L}(x) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{2^{L}} C_{i}^{L,k} N_{i,k}^{L}(x), \quad a \le x \le b,$$
(4)

мында $C_i^{L,k}, k=0,1,2$, коэффициенттери аппроксимациялоочу функциялардын туундуларынын торчолордогу түйүндөрүндөгү маанилери болуп саналат. Эгер базистик сплайн-функцияларды бирдиктүү матрицалык-жолчо түрүндө жазсак, $\phi=\left[N_{0,0}^L,N_{0,1}^L,N_{0,2}^L,N_{1,0}^L,N_{1,1}^L,...,N_{2^L,2}^L\right]$, жана сплайндын коэффициенттерин тартипке келтирип вектор түрүндө жазсак, $C^L=\left[C_0^{L,0},C_0^{L,1},C_0^{L,2},C_1^{L,0},C_1^{L,1},...,C_{2^L}^{L,2}\right]^T$, анда (4) теңдеме $S^L(x)=\phi^L(x)C^L$ түрүндө жазылат. Ушуга окшош эле, базистик вейвлет-функциялады L чечүү деңгээлинде $\psi^L=\left[M_{1,0}^L,M_{1,1}^L,M_{1,2}^L,...,M_{2^L,2}^L\right]$ матрицалык-жолчо түрүндө жазып алабыз. Туура келүүчү вейвлет-коэффициенттерди вектор түрүндө жазып алабыз. Туура келүүчү вейвлет-коэффициенттерди вектор түрүндө жазып алабыз: $D^L=\left[D_1^{L,0},D_1^{L,1},D_1^{L,2},...,D_{2^L}^{L,2}\right]^T$. Мындан белгилөөлөрдүү колдонуу менен блоктук



матрицалар үчүн C^L ден C^{L-1} жана D^{L-1} алуу процессин төмөнкү түрдө жазып алабыз [13]:

$$C^{L} = [P^{L} \mid Q^{L}] \left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}} \right]. \tag{5}$$

 P^L матрицасынын блоктору масштабдоо катнашынын коэффициенттеринен эрмиттик сплайндардын 5-даражасы (1) үчүн түзүлгөн, анда Q^L матрицасынын блоктору (3) өз ара катнашынын коэффициенттеринен келип чыгат. Тескерисинче коэффициенттерди бөлүү процесси C^L одоно түрдөгү C^{L-1} версиясы жана толуктоочу коэффициенттери D^{L-1} (5) сызыктуу теңдемелер системасын чечүүдө турат. Бул системанын мүмкүндүгү базистик функцияларды сызыктуу көз каранды эместиги менен кепилденет. Ошондуктан $[P^L | Q^L]$ матрицаларын эсептөөнү тездетүү үчүн лента түрүндө аткаруу мүмкүн. Ал үчүн P^L жана Q^L матрицаларынын мамычалары кысылгандай кылып белгисиздиктердин катарын өзгөртүү керек. [13].

 C^L бөлүү процедурасы C^{L-1} бөлүктөрүн жөнөкөй чечүүгө дал келет, жана D^{L-1} толуктоочу коэффициенттерин кайталап колдонууга мүмкүн жана C^{L-1} бөлүктөрүнө колдонулат. Ошондуктан, алгачкы коэффициенттерди иерархиялык одоно версия менен $C^0, C^1, ..., C^{L-1}$ жана толуктоочу бөлүктөрү $D^0, D^1, ..., D^{L-1}$ түрүндө жазып алууга болот. $S^L(x)$ эрмиттик сплайндардын 5-даражасынын вейвлет-ажыралыштагын төмөнкү түрдө жазып алууга болот.

$$S^{L}(x) = \sum_{k=0}^{2} \left(\sum_{i=0}^{1} C_{i}^{0,k} \, N_{i,k}^{0}(x) + \sum_{j=0}^{L-1} \, \sum_{i=0}^{2^{j}} D_{i}^{j,k} \, M_{i,k}^{j}(x) \right), \quad a \leq x \leq b.$$

Ошондуктан D^j , j=0,1,...,L-1 вейвлет-коэффициентердин чоңдугу боюнча, толуктоочу бөлүктөрдүн маанилүүлүктөрүн текшерүүгө болот. Маанилүү эмес коэффициенттерди маалыматтарды кысуу максатында жок кылабыз.

3. Мисал. Мейли $x \in [0,1]$ үчүн

$$\begin{split} &\psi_1^0(x) = \sqrt{231/272}\,\mathrm{M}_{1,0}^0(x), \psi_2^0(x) = 3/8\mathrm{M}_{1,1}^0(x), \psi_3^0(x) = \sqrt{231/13}\,\mathrm{M}_{1,2}^0(x), \text{ жана} \\ &\psi_{i-2}^L(x) = \left(2^L 1695/30371\right)^{1/2}/1296\,\mathrm{M}_{i/3,0}^L(x), \psi_{i-1}^L(x) = \left(2^L 4322/705\right)^{1/2}/432\,\mathrm{M}_{i/3,1}^L(x), \\ &\psi_i^L(x) = \left(2^L 505979/208\right)^{1/2}/2160\,\mathrm{M}_{i/3,2}^L(x), i = 3,3 \cdot 2^L, L \geq 1; \\ &\psi_{i-2}^L(x) = \left(2^L 8733/1762\right)^{1/2}/164\,\mathrm{M}_{i/3,0}^L(x), \psi_{i-1}^L(x) = \left(2^L 86625/716\right)^{1/2}/80\,\mathrm{M}_{i/3,1}^L(x), \\ &\psi_i^L(x) = \left(2^L 1088893/20\right)^{1/2}/464\,\mathrm{M}_{i/3,2}^L(x), i = 6,9,\dots,3 \cdot 2^L - 3, L \geq 2. \\ &\mathrm{Mындан}\,\,\,\psi_i^L(x)\,\,\,\mathrm{нормалоонy}\,\, \left\|\psi_i^L(x)\right\|_{L_2(0,1)} = 1\,\,\mathrm{аркылуy}\,\,\mathrm{белгилейби3}, \,\,i = 1,2,\dots,3 \cdot 2^L. \end{split}$$

Көп мүчөнүн бешинчи даражадагы тестирлөө функциясы үчүн $f(x) = (1/2-x)^5$ карайбыз, мында $0 \le x \le 1$ аралыкты бөлүштүрүү саны $n = 2^5$, кадамдын узундугу $\Delta x = 1/n$. Колдонулган функциянын маанилеринин саны жана аралыктагы эки туундусу вейвлет-кайра түзүү учурунда $3 \cdot (n+1) = 99$ барабар.

L = 5 жогорку чечүү деңгээлинен баштап удаалаш түрдө табабыз



 $L = 5: D^{4} = [0.08679; -0.1174; 0.03294; -0.005044; -0.002738; -0.002359; -0.002481; -0.001461; \\ -0.001019; -0.001459; -0.0006021; -0.0006303; -0.0006729; -0.0001976; -0.0002875; -0.0002498; \\ -3.499 \cdot 10^{-5}; -0.0001086; -5.528 \cdot 10^{-5}; 2.879 \cdot 10^{-6}; -2.483 \cdot 10^{-5}; -2.848 \cdot 10^{-6}; 1.055 \cdot 10^{-6}; -1.689 \cdot 10^{-6}; \\ 5.528 \cdot 10^{-5}; 2.879 \cdot 10^{-6}; 2.483 \cdot 10^{-5}; 0.0002498; -3.499 \cdot 10^{-5}; 0.0001086; 0.0006729; -0.0001976; \\ 0.0002875; 0.001459; -0.0006021; 0.0006303; 0.002481; -0.001461; 0.001019; 0.005044; -0.002738; \\ 0.002359; -0.08679; -0.1174; -0.03294]^{T};$

 $L = 4; D^{3} = [-0.07943; 0.1773; -0.09874; -0.00107; 0.00016; -0.0005311; -8.338 \cdot 10^{-5}; 6.975 \cdot 10^{-5}; -3.565 \cdot 10^{-5}; -1.852 \cdot 10^{-5}; 1.135 \cdot 10^{-5}; -1.869 \cdot 10^{-5}; 1.852 \cdot 10^{-5}; 1.135 \cdot 10^{-5}; 1.869 \cdot 10^{-5}; 8.338 \cdot 10^{-5}; 6.975 \cdot 10^{-5}; 3.565 \cdot 10^{-5}; 0.00107; 0.00016; 0.0005311; 0.07943; 0.1773; 0.09874]^{T};$

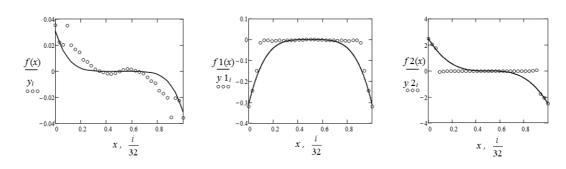
 $L = 3: D^2 = [-0.07274; 0.1526; -0.08045; -0.0002049; 1.391 \cdot 10^{-5}; -0.0001316; 0.0002049; 1.391 \cdot 10^{-5}; 0.0001316; 0.07214; 0.1526; 0.08045]^T;$

L = 2: $D^{1} = [-0.04817, 0.09931 - 0.051340.04817, 0.099310.05134]^{T}$;

L=1: акыркы кадамда көп мүчөнүн бешинчи даражасы үчүн алты мааниси калат жана эки туундусу аралыктын чеке белинде $C^0=[0.0570\,\mathrm{l}-0.3206,-0.858,-0.0570\,\mathrm{l}-0.3206,-0.858]^T$, жана ортолугунда функциянын ажыралышынын үч вейвлет-коэффициенти жана туундусу $D^0=[4.653\cdot 10^{-16};-0.001413-3.571\cdot 10^{-16}]^T$.

Вейвлет-коэффициенттерди нөлгө айландыргандан кийин, модулу боюнча 0,032 ден кичине, 30 маани калат, жана бул маанилер 99/30=3,3 кысуу коэффициентин берет.

3-сүрөттө $S^5(x)$ сплайндын реконструкциялоодогу жана эки туундусу торчолордун түйүндөрүндө Δ^5 маанилеринин жыйынтыгы көрсөтүлгөн. $y_i, y1_i, y2_i, i=0,1,...,32$. Сүрөттө тугаш сызык менен берилген функция жана анын туундулары белгиленген: $f(x), f1(x), f2(x), 0 \le x \le 1$.



3-сүрөт. Вейвлет-реконструкциялоодогу сплайндардын 5-даражадагы жана алардын туундуларынын түйүндөрдөгү маанилеринин жыйынтыгы $f(x) = (1/2-x)^5$ функциясы үчүн салыштырылган.

4. Корутундуу. Макалада эрмиттик сплайн-вейвлетттерди тургузуу схемасы ортогоналдуу көп мүчөлөр үчүн көрсөтүлдү. Алынган жыйынтыктар сандык маалыматтарды иштеп чыгарууда оптималдаштыруу усулдарын колдонуу үчүн кеңири мүмкүнчүлүктөрдү көрсөтөт.



Адабияттар

- 1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. С. 332.
- 2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. М.: Мир, 2001. С. 412.
- 3. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 616.
- 4. Strela V. Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform // Stud. Appl. Math. 1997. Vol. 98, iss. 4. P. 335-354.
- 5. Strela V., Heller P.N., Strang G., Topivala P., Heil C. The application of multiwavelet filterbanks to image processing // IEEE Trans. Signal Processing. 1999. Vol. 8, no. 4. P. 548-563.
- 6. Warming R., Beam R. Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // SIAM J. Sci. Comp., 2000, v. 22, №1. P. 269-317.
- 7. Dahmen W., Han B., Jia R.-Q., Kunoth A. Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines // Constr. Approx., 2000, v. 16. P. 221-259.
- 8. Han B. Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets // J. Approxim. Theory, 2001, v. 110. P. 18-53.
- 9. Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Эшаров Э.А., Турсунов Э.А. Новый тип эрмитовых мультивейвлетов пятой степени // Пятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям / Под ред. проф. А.В. Старченко. Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2010. С. 101-105.
- 10. Koro K., Ade K. Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2001, v. 25. P. 149-164.
- 11. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. С. 352.
- 12. Strang G., Strela V. Short wavelets and matrix dilation equations // IEEE Trans. Signal Processing.1995. Vol. 43, no. 1. P. 108-115.
- 13. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д., Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. С. 272.

УДК: 517.956.6

Сопуев У.А., к.ф.-м.н., доцент ОшГУ ulansopuev@mail.ru

Задачи со смещением для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения третьего порядка

Үчүнчү тартиптеги аралаш псевдопарабола-гиперболалык типтеги теңдеме үчүн жылдыруусу бар маселелердин чечимдеринин жашашы жана жалгыздыгы далилденген.

Ачкыч сөздөр: Риман функциясы, Гурса маселеси, жалгаштыруу шарттар, жылдыруу шарттары, интегралдык теңдемелер.

Доказано существование и единственность решения задач со смещением для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения третьего порядка.

Ключевые слова: Функция Римана, задача Гурса, условия сопряжения, условия смещения, интегральное уравнение.

Existence and uniqueness of solution problems are well-proven with displacement for the mixed pseudoparabolic - hyperbolic equation of the third order.



Key words: function of Riemann, Goursat problem, interface conditions, displacement conditions, integral equations.

Задачи, содержащие условия смещения, называются задачами со смещениями [1, 2]. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках и с разрывом на переходной линии рассмотрена в работе [3]. Достаточно полная библиография работ по теории краевых задач со смещением содержится в работе [4]. В данной работе рассматривается задачи со смещением для уравнения смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения третьего порядка.

Пусть $D \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при y>0 отрезками прямых $AA_0: x=0, \quad BB_0: x=\ell, \ell>0, \quad A_0B_0: y=h, h>0, \quad \text{а при } y<0$ - отрезками прямых AC: x+y=0 и $BC: x-y=\ell.$

Обозначим:
$$D_1 = D \cap (y > 0), D_2 = D \cap (y < 0);$$
 $\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\frac{x}{2},$

 $\theta_1(x) = \frac{x+\ell}{2} + i \frac{x-\ell}{2}$; K – произвольная точка, лежащая на отрезке AB с координатами

$$(x_0,0),\ 0 < x_0 < \ell,\ KC: x = \sigma(y),\ -\frac{\ell}{2} \le y \le 0$$
 — простая гладкая кривая, $\sigma(-\frac{\ell}{2}) = \frac{\ell}{2},$

 $\sigma(0) = x_0$; C^{n+m} — класс функций, имеющих непрерывные

производные
$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial x^s}$$
 $(r = 0,1,...,n; s = 0,1,...,m)$.

В области D для уравнений

$$u_{xxy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, (x, y) \in D_1,$$
 (1)

$$u_{xxx} - u_{xyy} = 0, (x, y) \in D_2,$$
 (2)

где a(x, y), b(x, y), c(x, y) – заданные функции, рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1(D_1) \cup C^{1+2}(D_1) \cup C^{3+0}(D_2)$, удовлетворяющую уравнениям (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно, условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \ u(\ell, y) = \varphi_2(y), \ 0 \le y \le h,$$
 (3)

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}\left[u_x(\theta_0(x))\right] + \beta(x)\frac{d}{dx}\left[u_x(\theta_1(x))\right] = \delta(x), \ 0 \le x \le \ell, \tag{4}$$

$$u(\sigma(y), y) = \psi(y), -\frac{\ell}{2} \le y \le 0 \tag{5}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0), \ u_{v}(x,-0) = u_{v}(x,+0), \ 0 \le x \le \ell,$$
 (6)

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(y)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\delta(x)$ – заданные гладкие функции.



Задача 2. Найти функцию u(x, y), удовлетворяющую всем условиям задачи 1, если вместо условий (4) и (5) берутся условия

$$\alpha_1(x)u(\theta_0(x)) + \beta_1(x)u(\theta_1(x)) = \delta_1(x), \ 0 \le x \le \ell, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC} = \psi_1(x), \ 0 \le x \le \frac{\ell}{2},\tag{8}$$

где $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$, $\delta_1(x)$ — заданные гладкие функции, а n — внутренняя нормаль.

Относительно заданных функций предполагаем следующее:

$$a(x, y) \in C^{1+0}(\overline{D}_1), b(x, y) \in C^{0+1}(D_1), c(x, y) \in C(D_1),$$
 (9)

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0, h],$$
 (10)

$$\alpha(x), \ \beta(x), \ \delta(x) \in C^{1}[0, \ell], \ \psi(y), \ \sigma(y) \in C^{2}\left[-\frac{\ell}{2}, 0\right],$$

$$\forall x \in [0, \ell]: \alpha(x)\beta(x) \neq 0, \ \alpha(x) + \beta(x) \neq 0$$
(11)

$$\alpha_{1}(x), \ \beta_{1}(x), \ \delta_{1}(x) \in C^{1}[0, \ell], \ \psi_{1}(x) \in C^{2}[0, \frac{\ell}{2}],$$

$$\forall x \in [0, \ell]: \alpha_{1}(x)\beta_{1}(x) \neq 0, \ \alpha_{1}(x) + \beta_{1}(x) \neq 0,$$

$$\alpha_{1}(0)\alpha_{1}(\ell)\varphi_{1}(0) + \beta_{1}(0)[\alpha_{1}(\ell)\delta_{1}(\ell) - \beta_{1}(\ell)\varphi_{2}(0)] = \delta_{1}(0).$$
(12)

Условия (4) и (7) называются условиями со смещением. Такой термин введен в работе [1]. Когда точка x, лежащая на отрезке AB, пробегает значение от 0 до ℓ , точки $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ смещаются вдоль характеристик AC и BC уравнения (2) соответственно.

Введем обозначение

$$u(x,0) = \tau(x), \ u_{\nu}(x,0) = \nu(x), \ 0 \le x \le \ell,$$
 (13)

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Найдем соотношение, полученное из области D_1 . Переходя к пределу в (1) при $y \to +0$ и с учетом обозначения (13) получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$v''(x) + b(x,0)v(x) = f(x,\tau(x),\tau'(x)), \tag{14}$$

где $f(x, \tau(x), \tau'(x)) \equiv -a(x, 0)\tau'(x) - c(x, 0)\tau(x)$.

Присоединяя к уравнению (14) краевые условия

$$v(0) = \varphi_1'(0), \ v(\ell) = \varphi_2'(0),$$
 (15)

относительно v(x) получаем первую краевую задачи.

Нетрудно убедиться, что однородная задача



 $\widetilde{v}''(x)+b(x,0)\widetilde{v}(x)=0,\ \widetilde{v}(0)=0,\ \widetilde{v}(\ell)=0$ имеет только тривиальное решение при выполнении условия

$$\forall x \in [0, \ell] : b(x, 0) \le 0. \tag{16}$$

Тогда решение задачи (14), (15) представимо через функции Грина $G_{\rm I}(x,\xi)$ в виде [5]

$$v(x) = v_0(x) + \int_0^{\ell} K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi,$$
 (17)

где

$$K_{1}(x,\xi) = a(\xi,0)G_{1\xi}(x,\xi) - \left[a_{\xi}(\xi,0) + c(\xi,0)\right]G_{1}(x,\xi),$$

$$V_{0}(x) = \varphi_{0}(x) - \int_{0}^{\ell} b(\xi,0)\varphi_{0}(\xi)G_{1}(x,\xi)d\xi,$$

$$\varphi_0(x) = \varphi_1'(0) + \frac{x}{2} [\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0)]$$

Здесь функция Грина $G_1(x,\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$G_{1\xi\xi}(x,\xi) + b(\xi,0)G_1(x,\xi) = 0, \ 0 < \xi < \ell,$$

$$G_1(x,0) = G_1(x,\ell) = 0,$$

$$G_1(x,x+0) - G_1(x,x-0) = 0, \ G_{1\xi}(x,x+0) - G_{1\xi}(x,x-1) = 1.$$

Далее выведем соотношение, полученное из области D_2 . Сначала рассмотрим задачу 1. Интегрируя уравнение (2), получим уравнение с неизвестной правой частью:

$$u_{xx} - u_{yy} = \omega_0(y), \ \omega_0(y) \in C\left[-\frac{\ell}{2}, 0\right].$$
 (18)

Известно, что общее решение однородного уравнения (18) имеет вид [6]

$$u(x, y) = F_1(x + y) + F_2(x - y),$$

где $F_1, F_2 \in C^2$ — произвольные функции.

Если в качестве некоторого частного решения неоднородного уравнения (18) берем функцию

$$\omega(y) = -\int_{0}^{y} (y - \eta)\omega_{0}(\eta)d\eta, \tag{19}$$

то общее решение уравнения (18) имеет вид

$$u(x,y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) + \omega(y). \tag{20}$$



Из (19) заключаем, что
$$\omega(y) \in C^2 \left[-\frac{\ell}{2}, 0 \right]$$
, причем $\omega(0) = \omega'(0) = 0$.

Из (20) получим решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (13):

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v(\eta) d\eta + \omega(y).$$
 (21)

Отсюда получим

$$u_x(\theta_0(x)) = \frac{1}{2} \left[\tau'(x) - \nu(x) + \tau'(0) + \nu(0) \right], \quad u_x(\theta_1(x)) = \frac{1}{2} \left[\tau'(x) + \nu(x) + \tau'(\ell) - \nu(\ell) \right]$$

Тогда из условия (4) будем иметь соотношение

$$\left[\alpha(x) + \beta(x)\right]\tau''(x) - \left[\alpha(x) - \beta(x)\right]v'(x) = 2\delta(x), \ 0 < x < \ell. \tag{22}$$

С учетом условия (11) из (22) имеем

$$\tau''(x) = \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} v'(x) + \frac{2\delta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)}.$$
 (23)

Решая уравнение (23) относительно $\tau(x)$ при краевых условиях $\tau(0) = \varphi_1(0)$, $\tau(\ell) = \varphi_2(0)$, получим соотношение

$$\tau(x) = \tau_0(x) + \int_0^{\ell} K_2(x,\xi) \nu(\xi) d\xi,$$
 (24)

где
$$K_2(x,\xi) = -\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\alpha(\xi) - \beta(\xi)}{\alpha(\xi) + \beta(\xi)} G_2(x,\xi) \right]$$

$$\tau_0(x) = \varphi_1(0) + \frac{x}{\ell} \left[\varphi_2(0) - \varphi_1(0) \right] + \int_0^\ell \frac{2\delta(\xi)}{\alpha(\xi) + \beta(\xi)} G_2(x, \xi) d\xi, \ G_2(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - \ell}{\ell} \xi, \ 0 \le \xi \le x, \\ \frac{\xi - \ell}{\ell} x, \ x \le \xi \le \ell. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу 1 в области D_2 . Исключая $\tau(x)$ из (17) и (24) будем иметь интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно v(x):

$$v(x) = \widetilde{V}_0(x) + \int_0^\ell K(x,\xi)v(\xi)d\xi, \tag{25}$$

где
$$K(x,\xi) = \int\limits_0^\ell K_1(x,s) K_2(s,\xi) ds, \ \widetilde{V}_0(x) = V_0(x) + \int\limits_0^\ell K_1(x,\xi) \tau_0(\xi) d\xi.$$

Пусть
$$Q = \{(x, \xi) : 0 < x < \ell, 0 < \xi < \ell\}$$
. Если



$$||K(x,\xi)||_{\overline{O}} \le 1,\tag{26}$$

то уравнение (25) имеет единственное решение. Определяя отсюда v(x), из (24) найдем и $\tau(x)$.

Используя представление (21) в силу условия (5) определим $\omega_0(y)$:

$$\omega_0(y) = \frac{1}{2} \left[[\sigma'(y) + 1]^2 [\tau''(\sigma(y) + y) + \nu'(\sigma(y) + y)] + [\sigma'(y) - 1]^2 [\tau''(\sigma(y) - y) - \tau'(\sigma(y) + y)] \right]$$

$$-v'(\sigma'(y)-y)] + \sigma''(y)[\tau'(\sigma(y)+y) + v(\sigma(y)+y) + \tau'(\sigma(y)-y) - v(\sigma(y)-y)]\}.$$

Таким образом, решение задачи 1 в области D_2 определяется по формуле (21).

Перейдем к решению задачи 1 в области $D_{\rm l}$. Рассмотрим в области $D_{\rm l}$ задачу Гурса для уравнения (1) с условиями

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \ u_x(0, y) = g(y), \ 0 \le y \le h, \ u(x, 0) = \tau(x), \ 0 \le x \le \ell,$$
 (27)

где g(y) – пока неизвестная функция.

Решение задачи (1), (27) представим через функцию Римана. С этой целью рассмотрим тождество

$$\mathcal{G}L_1(u) - uL_1^*(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}u_{\xi_n} + \mathcal{G}_{\xi_n}u + a\mathcal{G}u)_{\xi} - (\mathcal{G}_{\xi}u_{\xi} - b\mathcal{G}u)_{\eta}, \tag{28}$$

где $L_1^*(\vartheta) = -\vartheta_{\varepsilon\varepsilon_n} - (a\vartheta)_{\varepsilon} - (b\vartheta)_n + c\vartheta$.

Пусть $B^*(x,y)$ — произвольная точка области D_1 . Интегрируя равенство (28) по области $D_1^* = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < x, \ 0 < \eta < y\}$ имеем

$$\iint_{\mathcal{D}_{\star}^{*}} \left[9L_{1}(u) - uL_{1}^{*}(9) \right] d\xi d\eta = \int_{\partial \mathcal{D}_{\star}^{*}} (9_{\xi}u_{\xi} - b\,9u) d\xi + (9u_{\xi\eta} + 9_{\xi\eta}u - a\,9u) d\eta. \tag{29}$$

Пусть $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ – является решением задачи Гурса:

$$L_{1}^{*}(\vartheta) = 0, \ (\xi, \eta) \in D_{1}^{*},$$

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta)\big|_{\xi=x} = 0, \ \vartheta_{\xi}(x, y; \xi, \eta)\big|_{\xi=x} = 1,$$

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta)\big|_{\eta=y} = \omega(x, y; \xi),$$
(30)

где $\omega(x, y; \xi)$ – является решением задачи Коши:

$$\begin{aligned}
& \theta_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) + b(\xi, y)\theta(x, y; \xi, y) = 0, \ 0 < \xi < x, \\
& \theta(x, y; \xi, y)\big|_{\xi=x} = 0, \ \theta_{\xi}(x, y; \xi, y)\big|_{\xi=x} = 1.
\end{aligned} \tag{31}$$

Нетрудно заметить, что решение задачи (31) эквивалентно сведется к решению уравнения



$$\vartheta(x,y;\xi,y) = \xi - x + \int_{x}^{\xi} (s-\xi)b(s,y)\vartheta(x,y;s,y)ds,$$

которое допускает единственное решение, представимое в виде

$$\vartheta(x,y;\xi,y) = \xi - x + \int_{x}^{\xi} R(y,\xi,s)(s-x)ds, \tag{32}$$

где $R(y,\xi,s)$ – резольвента ядра $(s-\xi)b(s,y)$.

Заметим, что если

$$\forall (x, y) \in \overline{D}_1 : b(x, y) \le 0, \tag{33}$$

To $\vartheta(x, y; \xi, y) \le 0$.

В частности, из (32) получим неравенство

$$\mathcal{G}(\ell, y; 0, y) \le -\ell < 0. \tag{34}$$

Пример 1. Пусть a = b = 0, c = const. Тогда функция Римана имеет вид

$$\vartheta(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c^n}{n!(2n+1)!} (\xi - x)^{2n+1} (\eta - y)^n.$$

Перейдем к решению задачи 2. Вычисляя криволинейные интегралы в (29) по контуру области D_1^* и учитывая свойства функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, будем иметь

$$u(x,y) = \tau(x) + \varphi_{1}(y) - \vartheta(x,y;0,y)g(y) - \vartheta_{\xi}(x,y;0,0)\varphi_{1}(0) + \vartheta(x,y;0,0)g(0) - \int_{0}^{x} \left[\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0) + b(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0) \right] \tau(\xi)d\xi + \int_{0}^{y} \vartheta_{\eta}(x,y;0,\eta)g(\eta)d\eta -$$

$$- \int_{0}^{y} \left[\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta) + a(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta) \right] \varphi_{1}(\eta)d\eta.$$
(35)

С учетом второго условия (3) и неравенства (34) из (35) для определения g(y) придем к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$g(y) = g_0(y) + \int_0^y \frac{g_{\eta}(\ell, y; 0, \eta)}{g(\ell, y; 0, y)} g(\eta) d\eta,$$

которое допускает единственное решение, где

$$\begin{split} g_{0}(y) &= \varphi_{1}(y) - \varphi_{2}(y) + \tau(\ell) - \vartheta_{\xi}(\ell, y; 0, 0) \varphi_{1}(0) + \vartheta(\ell, y; 0, 0) \tau'(0) - \\ &- \int_{0}^{\ell} \left[\vartheta_{\xi\xi}(\ell, y; \xi, 0) + b(\xi, 0) \vartheta(\ell, y; \xi, 0) \right] \tau(\xi) d\xi - \\ &- \int_{0}^{y} \left[\vartheta_{\xi\eta}(\ell, y; 0, \eta) + a(0, \eta) \vartheta(\ell, y; 0, \eta) \right] \varphi_{1}(\eta) d\eta. \end{split}$$



Таким образом, имеет место

Теорема 1. Если выполняются условия (9), (10), (11), (26), (33), тогда задача 1 имеет единственное решение.

Теперь рассмотрим задачу 2. Введя функции $f_1(t) = F_1(t) + F_2(0), \ f_2(t) = F_2(t) - F_2(0), \ \text{общее решение (20) можно записать в форме}$ $u(x,y) = f_1(x+y) + f_2(x-y) + \omega(y). \ \text{Очевидно, что} \ f_2(0) = 0. \ \text{Поэтому без}$

ограничения общности можно с самого начала считать $F_2(0) = 0$.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (8) и $u_y(x,0) = v(x)$, $0 \le x \le \ell$, представимо в виде

$$u(x,y) = F_2(x+y) + F_2(x-y) + \int_0^{x+y} v(t)dt + \varphi_1(0) + \omega_1(y),$$
 (36)

где
$$\omega_1(y) = -\sqrt{2} \int_0^y (y - \eta) \psi_1'(-\eta) d\eta$$
.

Из (36) с учетом условия (7) найдем

$$F_2(x) = -\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x) + \beta_1(x)} \int_0^y v(t)dt + {\delta_1}^*(x), \tag{37}$$

где
$$\delta_1^*(x) = -\varphi_1(0) + \frac{1}{\alpha_1(x) + \beta_1(x)} \bigg\{ \delta_1(x) - \beta_1(x) F_2(\ell) - \alpha_1(x) \omega_1(-\frac{x}{2}) - \beta_1(x) \omega_1(\frac{x-\ell}{2}) \bigg\},$$

$$F_2(\ell) = -\varphi_1(0) - \omega_1(-\frac{\ell}{2}) + \frac{1}{\beta_1(0)} [\delta_1(0) - \alpha_1(0)\varphi_1(0)]$$

Тогда из (36) получим соотношение

$$\tau(x) = \frac{\alpha_1(x) - \beta_1(x)}{\alpha_1(x) + \beta_1(x)} \int_0^x v(t)dt + \delta_2(x),$$
(38)

где $\delta_2(x) = 2\delta_1^*(x) + \varphi_1(0)$.

Исключая $\tau(x)$ из (17) и (38) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$v(x) = v_0^*(x) + \int_0^\ell K_2(x, t)v(t)dt,$$
(39)

где
$$K_2(x,t) = \int\limits_{t}^{\ell} \frac{\alpha_1(\xi) - \beta_1(\xi)}{\alpha_1(\xi) + \beta_1(\xi)} K_1(x,\xi) d\xi$$
, $v_0^*(x) = v_0(x) + \int\limits_{0}^{\ell} K_1(x,\xi) \delta_2(\xi) d\xi$, которое при выполнении условия



$$||K_2(x,t)||_{C(O)} < 1$$
 (40)

имеет единственное решение.

После определения v(x) из (39) решение задачи 2 в области D_2 восстанавливается по формуле (36), а в области D_1 - по формуле (35).

Таким образом, доказана

Теорема 2. Если выполняются условия (9), (10), (12), (33), (40), тогда задача 2 имеет единственное решение.

Литература

- 1. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. V. №1. С. 44-59.
- 2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1995. С. 301.
- 3. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Учен. Зап. Казан. Госуниверситета. 1962. Т. 122. кн. 3. С. 3-16.
- 4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. С. 287.
- 5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. С. 528.
- 6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. С. 736.

УДК: 517.928

Талиев А.А., ОшГУ aidartaliev@mail.ru

Нелинейные сингулярно возмущенные уравнения второго порядка с разрывными правыми частями

Макалада туруктуулук шарты аткарылбаган учурдагы оң бөлүгү үзүлүү чекиттерге ээ болгон экинчи тартиптеги сызыктуу эмес сингулярдык козголгон теңдеме каралган. Мындай класстагы теңдемелер үчүн чечимдин жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө теорема далилденген. Мисалдар келтирилген.

Ачкыч сөздөр: экинчи тартиптеги сингулярдык козголгон теңдеме, кубулган теңдеме, бириктирилген теңдеме, тең салмактуулук чекити, туруктуулук, удаалаш жакындаштыруу усулу, үзүлүү чекити.

В данной работе рассматриваем нелинейные сингулярно возмущенные уравнения второго порядка с разрывными правыми частями при нарушении условия устойчивости. Доказано теорема существования и единственности решения. Приведены примеры.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение второго порядка, вырожденное уравнение, присоединенное уравнение, точка покоя, устойчивость, метод последовательных приближений, точка разрыва.

In the given work is considered (examined) nonlinear singularly the indignant equations of the second order with explosive right parts at infringement of a condition of stability. The theorem of existence and uniqueness of the decision is proved. The examples is given.



Keywords: the indignant equation of the second order, the degenerate equation, the attached equation, rest point, stability, method of consecutive approximations, gap point is singular.

1. Введение. Постановка задачи.

Рассматривается задача

$$\varepsilon \cdot x'(t,\varepsilon) = \Lambda(t) \cdot x(t,\varepsilon) + \varepsilon \cdot g(t,x(t,\varepsilon)), \tag{1}$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ - малый параметр; $x^0(\varepsilon) = colon(x_1^0(\varepsilon), x_2^0(\varepsilon))$.

Для общности будем считать, что $x^0(\varepsilon)$ - const, т.е. $\lim_{\varepsilon \to 0} x^0(\varepsilon) \neq 0$.

$$\Lambda(t) = diag[\lambda_1(t), \lambda_2(t)], \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t); x(t, \varepsilon) = colon(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon));$$

 $g(t,x) = colon(g_1(t,x_1,x_2),g_2(t,x_1,x_2)); t \in [t_0,T].$ $[t_0,T]$ - отрезок действительной оси, $t_0 < T$. $\lambda_j(t) \in E[t_0,T], \ (j=1,2), \ \text{где} \ E[t_0,T]$ - пространство функций имеющие точки разрыва на отрезке $[t_0,T].g_j(t,x_1,x_2) \in C(\Delta), (j=1,2).$ $C(\Delta)$ - множества функций непрерывных на множестве $\Delta = \{(t,x_1,x_2) \mid t_0 \leq t \leq T, |x_j| \leq \delta\}, \ (j=1,2), \ 0 < \delta$ - некоторая постоянная, не зависящая от ε .

Решение задачи (1)-(2) будем искать в классе $x(t,\varepsilon) \in C^1[t_0,T]$ - пространство функций, имеющих непрерывные производные первого порядка на промежутке действительной оси $[t_0,T]$.

От правых частей системы (1) потребуем выполнения следующих условий:

$$U.I. \quad Re \,\lambda_k(t) = \begin{cases} \lambda_{Ik} \leq 0, & t_0 \leq t \leq t_k, \\ \lambda_{2k} > 0, & t_k < t \leq T. \end{cases}$$

где $\lambda_{Ik} = 0$ только при $t = t_k$, (k = I,2).

Для определенности считаем $t_0 < t_1 < t_2 < T$.

Введем обозначение $F_k(t) = Re \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds$, (k = 1,2).

$$U.II \cdot \forall (t, x) \in \Delta$$
:

$$1. \quad g(t,0) = 0.$$

 $2.\left\|g(t,\widetilde{x}\,)-g(t,\widetilde{\widetilde{x}}\,)\right\| \leq M_0 \left\|\widetilde{x}\,-\widetilde{\widetilde{x}}\,\right\|$, где $0 < M_0$ - некоторая постоянная, не зависящая от ε .

3.
$$\left|x_2^0(\varepsilon)\right| \le \left|x_1^0(\varepsilon)\right|$$
.

U.III . $1. \, \forall t \in [t_0, T]: (F_I(t) - F_2(t))$ -возрастает или постоянна.



2.
$$F_1(T_0) = 0$$
, $F_2(T_{01}) = 0$, причем $t_1 < T_0 < t_2 < T_{01}$.

Условие U.III вносит ясность с точки зрения расположения графиков функций $F_k(t)$. Для общего случая расположение графиков могут быть разными.

При $\varepsilon=0$ вырожденная уравнения $\Lambda(t)\overline{x}(t)=0$ имеет решение $\overline{x}(t)=0$, которое для присоединенного уравнения будет точкой покоя. Устойчивость точки покоя нарушается при $t=t_1$ и $t=t_2$ [2].

Постановка задачи. Исследуем асимптотическое поведение решения $x(t,\varepsilon)$, если оно существует, при $\varepsilon \to 0$ на всем промежутке $[t_0,T]$.

Аналогичные задачи исследованы в [1], [4], [5]. В работе [1] поставленные задачи решены в некоторой области $H \subset C$ -комплексная плоскость. Причем правые части являются аналитическими по всем переменным, за исключением ε , если она входит в правую часть. В работах [4], [5] аналогичные задачи решены для систем других классов.

В данной работе от правых частей требуется только выполнимость U.I - U.III , т.е. не требуется аналитичность правых частей. В такой постановке задача исследуется впервые.

2. Решение задачи.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Пусть выполнены условия U.I - U.III . Тогда для любого $t \in [t_0, T_0]$ решение задачи (1)-(2) существует и единственна в классе $C^1[t_0, T_0]$ и для него справедлива оценка

$$||x(t,\varepsilon)|| \le \begin{cases} |x^{0}(\varepsilon)|, & t_{0} \le t < t_{0} + \varepsilon^{\gamma}, & 0 < \gamma < 1, \\ o(\varepsilon^{n}), & t_{0} + \varepsilon^{\gamma} \le t \le T_{0} - \varepsilon^{\gamma}, & n \in \mathbb{N}, \\ |x^{0}(\varepsilon)|, & T_{0} - \varepsilon^{\gamma} < t \le T_{0}. \end{cases}$$
 (3)

Доказательство. Задачу (1)–(2) заменим следующим эквивалентным интегральным уравнением

$$x(t,\varepsilon) = V(t,t_0,\varepsilon) \cdot x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^t V(t,\tau,\varepsilon) \cdot g(\tau,x(\tau,\varepsilon)) d\tau$$
 (4)

где
$$V(t, \tau, \varepsilon) = diag \left[exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} \lambda_{I}(s) ds, exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} \lambda_{2}(s) ds \right].$$

Функции $F_j(t)$ (j=1,2)- непрерывны на всем отрезке $[t_0,T]$ и имеют кусочнонепрерывные производные.

Для доказательства существования решения уравнения (4) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим следующим образом:

$$x_{0}(t,\varepsilon) \equiv 0$$

$$x_{m}(t,\varepsilon) = V(t,t_{0},\varepsilon) \cdot x^{0}(\varepsilon) + \int_{t_{0}}^{t} V(t,\tau,\varepsilon) \cdot g(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon)) d\tau, \quad (5)$$

где $x_m = colon(x_{1m}, x_{2m}), m = 1,2,...$



Оценку проведем покомпонентно. Из (5) получим

$$x_{jm} = x_j^0(\varepsilon) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^t \lambda_j(s) ds} + \int_{\tau_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t \lambda_j(s) ds} g_j(\tau, x_{1m-1}, x_{2m-1}) d\tau, \qquad j = 1, 2.$$

Учитывая условие U.II(1), оценим первые приближения.

$$|x_{II}| = |x_1^0(\varepsilon)| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_I(t)}, |x_{2I}| = |x_2^0(\varepsilon)| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_2(t)}.$$

В целом, учитывая U.I., имеем

$$\|x_I\| \le \begin{cases} \left| x^{\theta}(\varepsilon) \right|, & t_0 \le t < t_0 + \varepsilon^{\gamma} , & 0 < \gamma < I, \\ o(\varepsilon^n), & t_0 + \varepsilon^{\gamma} \le t \le T_0 - \varepsilon^{\gamma}, & n \in N, \\ \left| x^{\theta}(\varepsilon) \right|, & T_0 - \varepsilon^{\gamma} < t \le T_0. \end{cases}$$

При
$$m=2$$
 , $|x_{12}| \leq \left|x_{1}^{0}(\varepsilon)\right| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{1}(t)} + \int\limits_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_{1}(t)-F_{1}(\tau))} M_{0} \cdot max\{|x_{11}|,|x_{21}|\}d\tau$.

Для определения $\max\{x_{11}|,|x_{21}|\}$ используя условий U.II. (3) и U.III. (1) , получим $\max\{x_{11}|,|x_{21}|\}=|x_{11}|$. Учитывая сказанное, получим оценки

$$\begin{split} |x_{12}| &\leq \left|x_{1}^{0}(\varepsilon)\right| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{I}(t)} + \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_{I}(t) - F_{I}(\tau))} M_{0} \cdot \max\{|x_{1I}|, |x_{2I}|\} d\tau = \\ &= \left|x_{1}^{0}(\varepsilon)\right| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{I}(t)} + M_{0} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_{I}(t) - F_{I}(\tau))} |x_{1I}| d\tau = \left|x_{1I}\right| + M_{0} \left|x_{1}^{0}(\varepsilon)\right| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{I}(t)} (t - t_{0}) = \left|x_{II}\right| (I + M_{0}(t - t_{0})) \\ &|x_{22}| \leq \left|x_{2}^{0}(\varepsilon)\right| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{2}(t)} + \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_{2}(t) - F_{2}(\tau))} M_{0} \cdot \max\{|x_{1I}|, |x_{2I}|\} d\tau = \\ &= \left|x_{2}^{0}(\varepsilon)\right| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{2}(t)} + M_{0} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_{2}(t) - F_{2}(\tau))} |x_{1}^{0}(\varepsilon)| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{I}(\tau)} d\tau. \end{split}$$

Согласно условия U.III выражение $F_1(\tau) - F_2(\tau) \le F_1(t) - F_2(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left|x_{22}\right| \leq \left|x_{2I}\right| + M_{0} \cdot \left|x_{I}^{0}(\varepsilon)\right| \cdot e^{\frac{I}{\varepsilon}F_{2}(t)} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{I}{\varepsilon}(F_{I}(t) - F_{2}(t))} d\tau = \left|x_{2I}\right| + M_{0}\left|x_{I}^{0}(\varepsilon)\right| \cdot e^{\frac{I}{\varepsilon}F_{2}(t)} \cdot e^{\frac{I}{\varepsilon}(F_{I}(t) - F_{2}(t))} (t - t_{0}) \leq \\ &\leq \left|x_{II}\right| + M_{0}\left|x_{II}\right| (t - t_{0}) = \left|x_{II}\right| \cdot \left(I + M_{0}(t - t_{0})\right) \end{aligned}$$

При m = 3, имеет место оценки



$$\left|x_{13}\right| \leq \left|x_{1}^{0}\left(\varepsilon\right)\right| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{1}\left(t\right)} + \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(F_{1}\left(t\right) - F_{1}\left(\tau\right)\right)} M_{0} \cdot \max\{\left|x_{12}\right|, \left|x_{22}\right|\} d\tau$$

Если учесть, что $\max\{x_{12}|,|x_{22}|\}=|x_{11}|\cdot M_0\cdot (t-t_0)$, то имеем

$$\begin{aligned} |x_{13}| &\leq \left| x_{1}^{0}(\varepsilon) \right| \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}F_{I}(t)} + \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_{I}(t) - F_{I}(\tau))} M_{0} \cdot \max\{|x_{12}|, |x_{22}|\} d\tau = \\ &= |x_{11}| + M_{0} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_{I}(t) - F_{I}(\tau))} |x_{11}| (1 + M_{0}(\tau - t_{0})) d\tau = |x_{11}| \cdot \left(1 + M_{0}(t - t_{0}) + \frac{M_{0}^{2}(t - t_{0})^{2}}{2} \right) \\ |x_{23}| &\leq |x_{12}| + M_{0} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_{2}(t) - F_{2}(\tau))} |x_{11}| (1 + M_{0}(\tau - t_{0})) d\tau = \\ &= |x_{12}| + M_{0} \cdot |x_{11}| \cdot \left((t - t_{0}) + \frac{M_{0}(t - t_{0})^{2}}{2} \right) \leq |x_{11}| \left(1 + M_{0}(t - t_{0}) + \frac{M_{0}^{2}(t - t_{0})^{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Производя аналогичные вычисления, имеем

$$||x_m|| \le |x_{11}| \cdot \left(1 + M_0(t - t_0) + \frac{M_0^2(t - t_0)^2}{2} + \dots + \frac{M_0^{m-1}(t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!}\right) \le ||x_1|| \cdot e^{M_0(T - t_0)}$$

Таким образом, последовательность $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ ограничена.

Теперь докажем сходимость последовательных приближений $\{x_m(t,\varepsilon)\}$. Используем критерий Вейерштрасса (метод мажорант). Представим x_m в виде

$$x_m = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_m - x_{m-1}).$$

Имеем
$$x_m - x_{m-1} = \int_{t_0}^t V(t, \tau, \varepsilon) [(g(\tau, x_{m-1}) - g(\tau, x_{m-2}))] d\tau$$
,

где
$$V(t, \tau, \varepsilon) = diag \left[exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} \lambda_{1}(s) ds, exp \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} \lambda_{2}(s) ds \right].$$

Норму матрицы $V(t,\tau,\varepsilon)$ определим следующим образом $\|V(t,\tau,\varepsilon)\| = \max_k \sum\limits_{j=1}^2 a_{kj}$, (k=1,2). Согласно условию U.III при $t_0 \leq \tau \leq t$ имеем $F_I(t) - F_I(\tau) > F_2(t) - F_2(\tau)$.

Отсюда следует, что $e^{\dfrac{l}{\varepsilon}(F_I(t)-F_I(\tau))}>e^{\dfrac{l}{\varepsilon}(F_2(t)-F_2(\tau))}$

Тогда получим норму
$$\|V(t,\tau,\varepsilon)\| = \max \left\{ e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_I(t) - F_I(\tau))}, e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_2(t) - F_2(\tau))} \right\} = e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_I(t) - F_I(\tau))}.$$

Оценку разности $(x_m - x_{m-1})$ проведем покомпонентно.



$$x_{jm} - x_{jm-1} = \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} \lambda_{j}(s) ds} \left[g_{j}(\tau, x_{lm-1}, x_{2m-1}) - g_{j}(\tau, x_{lm-2}, x_{2m-2}) \right] d\tau$$

Для m = 2 имеем:

$$||x_2 - x_1|| = \int_{t_0}^t ||V(t, \tau, \varepsilon)|| \cdot ||g(\tau, x_1)|| d\tau \le M_0 \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_I(t) - F_I(\tau))} \cdot \max\{|x_{1I}|, |x_{2I}|\} d\tau.$$

Учитывая $max\{x_{II}|,|x_{2I}|\}=|x_{II}|$, получим оценку

$$\begin{aligned} & \|x_{2} - x_{I}\| = \int_{t_{0}}^{t} \|V(t, \tau, \varepsilon)\| \cdot \|g(\tau, x_{I})\| d\tau \leq \\ & \leq M_{0} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_{I}(t) - F_{I}(\tau))} \cdot max \{x_{II}|, |x_{2I}|\} d\tau \leq M_{0} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_{I}(t) - F_{I}(\tau))} \cdot |x_{II}| d\tau = M_{0} |x_{II}| \cdot (t - t_{0}), \\ & m = 3, \|x_{3} - x_{2}\| = \int_{t_{0}}^{t} \|V(t, \tau, \varepsilon)\| \cdot \|g(\tau, x_{2}) - g(\tau, x_{I})\| d\tau \leq M_{0} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_{I}(t) - F_{I}(\tau))} \cdot \|x_{2} - x_{I}\| d\tau \leq \\ & \leq M_{0} \int_{t_{0}}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_{I}(t) - F_{I}(\tau))} M_{0} \cdot |x_{I}^{0}(\varepsilon)| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_{I}(\tau)} \cdot (\tau - t_{0}) d\tau = M_{0}^{2} \cdot |x_{II}| \cdot \frac{(t - t_{0})^{2}}{2} \end{aligned}$$

Производя аналогичные вычисления, получим

$$||x_m - x_{m-1}|| \le M_0^{m-1} |x_{II}| \frac{(T_0 - t_0)^{m-1}}{(m-1)!}$$

Предположим, что $\|x_{m+1} - x_m\| \le M_0^m |x_{II}| \frac{(T_0 - t_0)^m}{m'}$

$$||x_{m}|| \leq ||x_{I}|| + ||x_{2} - x_{I}|| + ||x_{3} - x_{2}|| + \dots + ||x_{m} - x_{m-I}|| \leq$$

$$\leq ||x_{I}|| \cdot \left(I + M_{0}(T_{0} - t_{0}) + M_{0}^{2} \frac{(T_{0} - t_{0})^{2}}{2!} + \dots + M_{0}^{m} \frac{(T_{0} - t_{0})^{m}}{m!}\right) \leq |x_{II}| \cdot e^{M_{0} \cdot (T_{0} - t_{0})}$$

$$(6)$$

Из (6) следует, что $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ для любого $t\in[t_0,T_0]$ сходится равномерно к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи (4).

Учитывая (6), имеем $||x(t,\varepsilon)|| \le |x_{11}| \cdot e^{M_0 \cdot (T_0 - t_0)}$.

Докажем единственность решения.

Допустим, что существует другое решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (4). Тогда это решение можно представить в следующем виде

$$y(t,\varepsilon) = V(t,t_0,\varepsilon) \cdot x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^t V(t,\tau,\varepsilon) \cdot g(\tau,y) d\tau.$$

Следуя [3], имеем
$$x_m - y = \int_{t_0}^t V(t, \tau, \varepsilon) [g(\tau, x_{m-1}) - g(\tau, y)] d\tau$$
,



где
$$x_m = V(t, t_0, \varepsilon) \cdot x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^t V(t, \tau, \varepsilon) \cdot g(\tau, x_{m-1}) d\tau$$
.

$$||x_m - y|| \le \int_{t_0}^t ||V(t, \tau, \varepsilon)|| \cdot ||g(\tau, x_{m-1}) - g(\tau, y)|| d\tau$$

Учитывая условие U.II и $\|V(t,\tau,\varepsilon)\| = \max \left\{ e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_I(t) - F_I(\tau))}, e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_2(t) - F_2(\tau))} \right\} = e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_I(t) - F_I(\tau))}$

имеем
$$\|x_m-y\| \leq M_0 \int\limits_{t_0}^t e^{\displaystyle\frac{l}{\varepsilon}(F_I(t)-F_I(au))} \cdot \|x_{m-1}-y\|d au$$
 .

При
$$m = I$$
: $||x_I - y|| \le M_0 \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_I(t) - F_I(\tau))} \cdot ||y|| d\tau$, где $||y|| = max ||y_I|, |y_2|| = |y_I|$. Тогда

получим оценку

$$\|x_I - y\| \le M_0 \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_I(t) - F_I(\tau))} \cdot \|y\| d\tau = M_0 \int_{t_0}^t e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_I(t) - F_I(\tau))} \cdot \left| x_I^0(\varepsilon) \right| e^{\frac{1}{\varepsilon} F_I(\tau)} d\tau = M_0 \left| x_{II} \right| \cdot (t - t_0).$$

$$m = 2: \|x_2 - y\| \le M_0 \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon} (F_I(t) - F_I(\tau))} \cdot \|x_I - y\| d\tau = M_0^2 |x_{II}| \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

$$m = 3: \|x_3 - y\| \le M_0 \int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}(F_I(t) - F_I(\tau))} \cdot \|x_2 - y\| d\tau = M_0^3 |x_{II}| \cdot \frac{(t - t_0)^3}{6}.$$

Производя аналогичные вычисления, имеем

$$||x_m - y|| \le M_0^m |x_{II}| \cdot \frac{(t - t_0)^m}{m!} \le M_0^m |x_{II}| \cdot \frac{(T_0 - t_0)^m}{m!}$$
 (7)

Таким образом, формула (7) верна для любого $m \in N$. Учитывая (6), при $m \to \infty$ из (7) имеем $\|x-y\| \le 0$. Из этого следует, что x=y . Теорема доказана.

3. Заключение.

$$\Pi \, \mathrm{p} \, \mathrm{u} \, \mathrm{m} \, \mathrm{e} \, \mathrm{p} \quad 1 \, . \, \, \lambda_I(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 0, \\ t+1, & 0 < t \leq I. \end{cases}, \ \lambda_2(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2}, & -1 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ t + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < t \leq I. \end{cases}$$

1)
$$-1 \le t \le 0$$
: $F_I(t) = \int_{-1}^t s ds = \frac{t^2 - 1}{2} \cdot 2 \cdot 0 < t \le 1$: $F_I(t) = \int_{-1}^0 s ds + \int_0^t (s + 1) ds = \frac{(t + 2)^2 - 1}{2}$.



$$F_I(t) = \begin{cases} \frac{t^2 - I}{2}, & -I \leq t \leq 0, \\ \frac{(t+I)^2 - 2}{2}, & 0 < t \leq I. \end{cases}$$
, функция $F_I(t)$ непрерывна в точке $t = 0$.

1)
$$-1 \le t \le \frac{1}{2}$$
: $F_2(t) = \int_{-1}^{t} \left(s - \frac{1}{2}\right) ds = \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}{2}$.

$$2)\frac{1}{2} < t \le 1: F_2(t) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(s - \frac{1}{2}\right) ds + \int_{\frac{1}{2}}^{t} \left(s + \frac{1}{2}\right) ds = \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}}{2}.$$

$$F_2(t) = \begin{cases} \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}{2}, & -1 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}}{2}, & \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$
, при $t = \frac{1}{2}$ функция $F_2(t)$ непрерывна.

$$t = -1$$
: $F_1(-1) - F_2(-1) = 0$

$$-1 < t \le 0 : F_1(t) - F_2(t) = \frac{t^2 - 1}{2} - \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}{2} = \frac{t + 1}{2} > 0.$$

$$0 < t \le \frac{1}{2}: \qquad F_1(t) - F_2(t) = \frac{(t+1)^2 - 2}{2} - \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}{2} = \frac{3t+1}{2} > 0.$$

$$\frac{1}{2} < t \le 1: \qquad F_1(t) - F_2(t) = \frac{(t+1)^2 - 2}{2} - \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}}{2} = \frac{t+2}{2} > 0.$$

 $F_j(t)\in C[-1,I]$. $g(t,x)=\frac{x}{I+t^2}$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что выполняются все условия U.I-U.III. При этом $t_0=-1$, $T_0=\sqrt{2}-1$. Для этого примера решение задачи (1)- (2) ограничена при $-1\le t\le \sqrt{2}-1$.

$$\Pi \, \mathrm{p} \, \mathrm{u} \, \mathrm{m} \, \mathrm{e} \, \mathrm{p} \ \, 2 \, . \, \, \lambda_I(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 0, \\ t + \frac{1}{2}, & 0 < t \leq 1. \end{cases}, \quad \lambda_2(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2}, & -1 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ t + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$



$$F_{I}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2} - 1}{2}, & -1 \le t \le 0, \\ \left(t + \frac{1}{2}\right)^{2} - \frac{5}{4}, & 0 < t \le 1. \end{cases}, F_{2}(t) = \begin{cases} \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^{2} - \frac{9}{4}}{2}, & -1 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)^{2} - \frac{13}{4}}{2}, & \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

 $F_j(t)\in C[-1,l]$. Все условия U.I - U.III выполняются. При этом $t_0=-l$, $T_0=\frac{\sqrt{5}-l}{2}$. Для второго примера решение задачи (1)-(2) ограничена при $-l\le t\le \frac{\sqrt{5}-l}{2}$.

Литература

- 1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. Сер.3. 2001. Вып.6. С. 190-200.
- 2. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащие малые параметры при производных // Мат.сб. 1952. Т. 31 (73), №3. С. 575-586.
- 3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений // Москва: изд. Иностранной литературы, 1954.
- 4. Шишкин А.А. Асимптотика решения некоторых задач для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в случае нарушения условий регулярности вырождении // Дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Москва, 1974. С. 142.
- 5. Рожков В.И. Асимптотика решений некоторых систем с малым параметром при производных // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, №6.

УДК: 517.928

Тампагаров К.Б., ЖаГУ tampagarovkak@mail.ru

Метод характеризующих функций определения пограничных линий регулярных и сингулярных областей для сингулярно возмущенных уравнений

Макалада сингулярдык козголгон теңдемелер үчүн сингулярдык жана регулярдык аймактарда чектик сызыктарды аныктоо үчүн мүнөздөөчү функциялар усулу каралды.

Ачкыч сөздөр: сингулярдык козголгон теңдеме, чектик сызык, сингулярдык жана регулярдык аймактар.

B данной работе предложен метод характеризующих функций определения пограничных линий сингулярных и регулярных областей для сингулярно возмущенных уравнений.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, пограничные линии, сингулярные и регулярные области.

In hired the method of characterizing functions of determination of boundary lines of singulary and regulary domain offers for singulary perturbed equations.

Keywords: singulary perturbed equation, boundary lines, singulary and regulary domain.



1. Введение.

В [1] были введены понятия пограничные линии, ($\Pi\Lambda$) регулярные и сингулярные области (PO, CO) для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Там же дано доказательство существования ($\Pi\Lambda$), (PO), (CO) для линейного сингулярно возмущенного уравнения первого порядка.

В [2] обнаружено явление простирающегося пограничного слоя. По результатам проведенных исследований вытекает, что если уравнения второго порядка и матрица при линейной неизвестной функции имеет комплексные сопряженные собственные значения, то ($\Pi\Lambda$) имеет форму «петли».

Для общего случая задача существования ($\Pi\Lambda$), (PO), (CO) не решена.

В данной работе предлагается метод характеризующих функций определения (П Λ), (PO), (CO) для решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи.

Пусть рассматривается задача

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = \Lambda(t)z(t,\varepsilon) + f(t,z(t,\varepsilon)) + \varepsilon \cdot g(t,z(t,\varepsilon)) \tag{1}$$

$$z(t_0, \varepsilon) = z^0, \quad ||z^0|| = c \cdot \varepsilon, \quad c - const.$$
 (2)

где $0<\varepsilon$ - малый параметр; $z(t,\varepsilon)=colon(z_1(t,\varepsilon),z_2(t,\varepsilon),...,z_n(t,\varepsilon))$, $t\in\Omega$ - односвязная область в комплексной плоскости C; $t_0\in\Omega$;

$$\left\|z\right\| = \max_{1 \leq k \leq n} \left|z_k\right|; \ \Lambda(t) = diag(\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t)), \lambda_k(t) \neq \lambda_m(t) \quad \text{при} \quad k \neq m.$$

Далее Q(H) означает пространство аналитических функций в H.

U. Пусть
$$\lambda_k(t) \in Q(\Omega)(k = \overline{1,n}); f(t.z(t,\varepsilon)) \in Q(H), g(t,z(t,\varepsilon)) \in Q(H);$$

где $H = \{(t, z) | t \in \Omega, ||z|| \le \delta \}, \ 0 < \delta$ - некоторая постоянная.

$$f(t,0) \equiv 0; \| f(t,\widetilde{z}) - f(t,\widetilde{z}) \| \le M \| \widetilde{z} - \widetilde{z} \| \cdot \max \{ \| \widetilde{z} \|, \| \widetilde{z} \| \},$$
$$\| g(t,\widetilde{z}) - g(t,\widetilde{z}) \| \le M \| \widetilde{z} - \widetilde{z} \|, \quad 0 < M - const.$$

3. Решение задачи.

Задачу (1), (2) заменим следующим

$$z(t,\varepsilon) = z^{0}V(t,t_{0},\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{p(t_{0},t)} V(t,\tau,\varepsilon) \left[f(\tau,z(\tau,\varepsilon)) + \varepsilon g(\tau,z(\tau,\varepsilon)) \right] d\tau, \tag{3}$$

где
$$V(t,\tau,\varepsilon) = diag(\exp{\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda_{1}(s)ds}, \exp{\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda_{2}(s)ds},..., \exp{\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda_{n}(s)ds}),$$

 $p(t_0,t)$ — произвольный путь интегрирования полностью принадлежащая Ω и соединяющая точки t_0 и t.

Поставим задачу определения ПЛ, РО, СО для решения задачи (3).

На решение этой задачи основное влияние оказывает вектор- функция

$$z_1(t,\varepsilon) = z^0 V(t,t_0,\varepsilon) + \int_{\eta(t,\varepsilon)} V(t,\tau,\varepsilon) g(\tau,0) d\tau$$
(3.1)

В развернутом виде компоненты вектор – функции выглядят в виде



$$z_{1k}(t,\varepsilon) = z_k^0 e^{\frac{1}{\varepsilon}F_k(t)} + \int_{p(t_0,t)} e^{\frac{1}{\varepsilon}F_k(t) - F_k(\tau)} g_k(\tau,0) d\tau$$

$$k = 1, 2, ..., n; \quad F_k(t) = \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds;$$

$$z_1(t,\varepsilon) = colon(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1n}); \quad z^0 = colon(z_1^0, z_2^0, ..., z_n^0);$$

$$g(\tau,0) = colon(g_1(\tau,0), g_2(\tau,0), ..., g_n(\tau,0)).$$

$$(3.1.K)$$

Особенность функций (3.1.К) заключается в том, что каждую из этих функций можно рассматривать независимо друг от друга в области Ω .

Рассмотрим функцию $z_{1k}(t,\varepsilon)$ при фиксированном k.

Задачи на ПЛ, РО, СО будем решать в терминах «линии уровня» функций

Re
$$F_k(t) = F_{1k}(t_1, t_2)$$
, $JmF_k(t) = F_{2k}(t_1, t_2)$,

где $t=t_1+it_2$, t_1,t_2 - действительные переменные, $i=\sqrt{-1}$.

Определение 1. Функции $F_{jk}(t_1,t_2)(j,k=1,2)$ назовем характеризующими.

Название характеризующие общясняется тем, что ограниченность или неограниченность функций $z_{lk}(t,\varepsilon)$ определяется свойствами (постоянство, убывание, возрастание и.т.д.) этих функций в Ω .

Предлагаемый метод характеризующих функций основан на свойствах линии уровней функций $F_{ik}(t_1,t_2)$.

Суть метода заключается в следующем.

1. Образуем гармоническую пару

$$F_{1k}(t_1,t_2)$$
 и $F_{2k}(t_1,t_2)$

2. Рассмотрим линии уровня

$$F_{1k}(t_1,t_2)=0 \wedge F_{2k}(t_1,t_2)$$
.

Эти линии уровня согласно определениям проходят через точку t_0 и являются взаимно ортогональными.

Согласно U такие линии всегда существуют.

Для простоты изложения далее будем считать, что $\lambda_k(t), (k=1,2,...,n)$ в Ω имеют только простые точки т.е. $\forall t \in \Omega : \lambda_k(t) \neq 0$.

Из сделанного предположения следует, что через точку t_0 проходит единственная линия уровня функций $F_{lk}(t_1,t_2)$.

3. Линия уровня $F_{1k}(t_1,t_2) = 0 \ \{L_{1k}\}$ делит область Ω на две части.

Эти части обозначим Ω_{1k} и Ω_{2k} . В одном из этих частей $F_{1k}(t_1,t_2) \leq 0$ в другой части $F_{1k}(t_1,t_2) \geq 0$. Причем равенство имеет место только на $\{L_{1k}\}$. Линия уровня $F_{2k}(t_1,t_2) = 0$ $\{L_{2k}\}$ является линией наибыстрейшего убывания или возрастания функции $F_{1k}(t_1,t_2)$.

Таким образом, если будем исходить из точки $t_0 = t_{10} + it_{20}$, то в одном направлении F_{1k} убывает, в противоположном направлении возрастает.

Если точку t_0 двигать по $\{L_{1k}\}$, то даные свойства сохраняются.



Условно обозначим, что $\forall (t_1,t_2) \in \Omega_{1k} : F_{1k}(t_1,t_2)$ –убывает; $\forall (t_1,t_2) \in \Omega_{2k} : F_{1k}(t_1,t_2)$ – возрастает.

4. После определения областей Ω_{1k} и Ω_{2k} найдем пересечение $\bigcap_{k=1}^n \Omega_{1k}$ и $\bigcap_{k=1}^n \Omega_{2k}$.

Для общего случая существования данных пересечений остается открытым вопросом.

5. Пусть существуют $\bigcap_{k=1}^n \Omega_{1k} = \Omega_{10}$ и $\bigcap_{k=1}^n \Omega_{2k} = \Omega_{20}$ причем Ω_{10} и Ω_{20} имеют общую границу $\{L_0\}$.

После определения Ω_{10} , Ω_{20} и $\{L_0\}$ функции (3.1.K) будем рассматривать в данных областях и докажем, что Ω_{10} –(PO), Ω_{20} –(CO) и $\{L_0\}$ – $\Pi\Lambda$.

В [1] задача на $(\Pi\Lambda)$, (PO), (CO) решена для линейного уравнения т.е. в (1) z - скаляр, $\Lambda(t) = \lambda_1(t)$, $f(t, z(t, \varepsilon)) \equiv f(t)$, $g(t, z(t, \varepsilon)) \equiv 0$.

В [2] рассмотрено уравнение второго порядка в случае, когда $\Lambda(t) = diag[\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$, причем $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ комплексно сопряженные.

Из полученных результатов вытекает, что в данном случае ($\Pi\Lambda$) имеет форму «петли» и часть плоскости заключенной внутри «петли» является (PO).

Теперь все сказанное проиллюстрируем на следующем примере Пример. Решение задачи для уравнения первого порядка.

Пусть в (1) $z(t,\varepsilon)$ — скалярная функция; $\Lambda(t) \equiv \lambda(t)$.

Определим характеризующие функции

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds$$
, $\operatorname{Re} F(t) = F_1(t_1, t_2)$, $JmF(t) = F_2(t_1, t_2)$.

Рассмотрим линии уровня

$$F_1(t_1, t_2) = 0 (\{L_1\}), \quad F_2(t_1, t_2) = 0 (\{L_2\})$$

Линии уровня $\{L_1\}$ и $\{L_2\}$ проходят через точку t_0 и являются взаимно ортогональными. $\{L_1\}$ область делит на две части, которые обозначим Ω_1 и Ω_2 .

Без ограничения общности будем считать, что $\forall (t_1,t_2) \in \Omega_1$ функции $F_1(t_1,t_2)$ убывает по линии уровня $F_1(t_1,t_2) = const$ проходящего через эту точку. При таком предложении функции $F_1(t_1,t_2)$ возрастают в противоположном направлении от линии уровня $\{L_1\}$ (рис.1).

При сделанных предложениях $\{L_{\rm l}\}$ является (ПЛ), а $\Omega_{\rm l}$ –(PO), $\Omega_{\rm 2}$ –(CO).

Доказательство данного утверждения проводится оценкой и доказательством сходимости последовательных приближений [3].

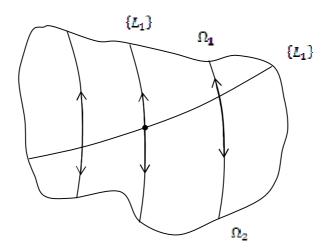


Рис.1.

Литература

- 1. Панков, Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно-возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник ОшГУ Ош, 2013. С. 227-231.
- 2. Алыбаев К.С., Нарбаев М.Р. Явление простиращегося симметричного пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости // Вестник ЖАГУ. Жалал-Абад, 2008. №1. С. 122-126
- 3. Алыбаев К.С. Метод линии уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Дис....докт.физ.-мат.наук: 01.01.02. Жалал-Абад, 2001. С. 203.

УДК: 517.955.8

Турсунов Д.А., УрГПУ, г. Екатеринбург Эркебаев У.З., ОшГУ uluk3188@mail.ru

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с точками поворота

При математическом моделировании задач гидродинамики, процессов конвективнодиффузионного переноса, химической кинетики и др. возникают краевые задачи для уравнений
эллиптического типа второго порядка с малым параметром при старших производных. Явное
решение этих задач построить, в общем случае не удается, поэтому используют разные
асимптотические методы. Основополагающими в этом направлении являются работы
А.Н. Тихонова, А.Б. Васильевой, С.А. Ломова, В.Б. Бутузова, Л.И. Люстерника, М.И. Вишика,
А.М. Ильина. В случае когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет негладкое
решение, то эти задачи, по терминологии А.М. Ильина, называют бисингулярными. Ранее для
построения асимптотики бисингулярно возмущенных задач применялся метод сращивания, а
метод пограничных функций не использовался напрямую. В работе предложена модификация
метода пограничных функций, благодаря которой стало возможным построить асимптотику
решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения.

For mathematical modeling of problem hydrodynamics, convective-diffusive transport, chemical kinetics and ets. arise boundary value problems for elliptic equations of the second order with a small parameter in the highest derivatives. The explicit solution of these problems can be constructe in a



general case by using different asymptotic methods. Fundamental works in this direction were done by A.N. Tikhonov, A.B. Vasilyeva, S.A. Lomov, V.B. Butuzov, L.I. Lyustemik, M.I. Vishik, A.M. Ilin. When the corresponding unperturbed equation has a smooth solution, then these problems in the terminology A.M. Ilin is called bisingularly. Previously, for the construction of asymptotic bisingularly perturbed problems using the method of matching, but the method of boundary functions are not used, because it was not possible to apply this method directly. The method of boundary functions was modified and asymptotic solutions of bisingularly perturbed elliptic equations can be constructe.

Ранее сингулярно возмущенные эллиптические уравнения исследованы в работах [1, 7] и цитируемых в них работах, в этих работах применялся метод согласования (сращивания). Мы применяем идею член-корреспондента НАН КР Алымкулова Келдибая, в котором модернизируется метод пограничных функций. Аналог метода пограничных функций применялся: для обыкновенных дифференциальных уравнений в действительной области в [8] и в др. работах К. Алымкулова; для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений [9] и для построения асимптотических разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости [10].

В данной работе исследуем случай, когда предельное уравнение имеет особенность только в граничных точках области.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \Delta u - q(x)u = f(x,y), (x,y) \in D = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\},$$
 (1)

$$u|_{\Gamma} = 0, \ \Gamma = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 = 1\},$$
 (2)

где $f(x, y) \in C^{\infty}(\overline{D})$ – заданная функция, u – искомая функция.

I. Случай q(x)=(1-x).

Рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), которое ищем в виде:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(x, y), \quad \varepsilon \to 0,$$
 (3)

после подстановки (3) в (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях є, получим рекуррентную систему уравнений:

$$-(1-x)\widetilde{v}_0(x,y)=f(x,y),$$

$$(1-x)\widetilde{v}_k(x,y)=\Delta\widetilde{v}_{k-1}(x,y), \ k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда однозначно определяются все $\widetilde{v}_k(x,y) \in C^{\infty}(\overline{D} \setminus (1,y))$:

$$\widetilde{v}_0(x,y) = -f(x,y)/(1-x),$$

$$\widetilde{v}_k(x,y) = \Delta \widetilde{v}_{k-1}(x,y)/(1-x), \ k \in \mathbb{N}, \text{ t.e.}$$

$$V = -\frac{f(x,y)}{(1-x)} + \frac{\varepsilon}{(1-x)^4} F_1(x,y) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{(1-x)^{3n+1}} F_n(x,y) + \dots, \quad \varepsilon \to 0,$$



где $F_k(x, y) \in C^{\infty}(\overline{D}), k \in \mathbb{N}$.

В граничной точке (1,0), все эти функции $\widetilde{\mathcal{V}}_k(x,y)$ имеют нарастающие особенности:

$$\widetilde{v}_k(x, y) = \frac{F_k(x, y)}{(1-x)^{3k+1}}$$
.

Построение ФАР решения. Решение задачи (1)-(2) ищем в виде:

$$u(x,y) = v_0(x,y) + \pi_0(\eta,\phi) + w_{-2}(\tau,\xi)/\mu^2 + w_{-1}(\tau,\xi)/\mu + w_0(\tau,\xi) + R(x,y)$$
(4)

где $\eta = (1-r)/\lambda$, $\tau = (1-x)/\mu^2$, $\xi = y/\mu$, $\epsilon = \lambda^2$, $\epsilon = \mu^6$, $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

Подставляя (4) в (1) получим:

$$\varepsilon \Delta v_0 - (1-x)v_0 + \mu^2 \Delta_{\tau \xi}(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu w_{-1} + \mu^2 w_0) + \varepsilon \Delta_{n\phi} \pi_0 - \tau(w_{-2} + \mu$$

$$-(1-\cos(\phi)+\lambda\eta\cos(\phi))\pi_0+\varepsilon\Delta R-(1-x)R=f(x,y)-H(y)+H(\xi\mu), \quad (5)$$

$$\text{где } \Delta_{\tau\xi} = \frac{1}{\mu^4} \Biggl(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Biggr), \ \Delta_{\eta\phi} = \frac{1}{\lambda^2} \Biggl(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{\left(1 - \lambda \eta\right)} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\lambda^2}{\left(1 - \lambda \eta\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Biggr).$$

Как всегда мы здесь ввели новую функцию H(y), которую определяем ниже. Из равенства (5) имеем:

$$-(1-x)v_0=f(x,y)-H(y),$$

или

$$v_0(x,y) = -(f(x,y)-H(y))/(1-x),$$

и здесь мы определим неизвестную функцию H(y) так, чтобы $v_0(x,y) \in C^{\infty}(\overline{D})$. Пусть H(y) = f(1,y), тогда

$$v_0(x,y) = -\sum_{j=1}^{\infty} f_j(y)(1-x)^{j-1}.$$
 (6)

Из равенства (5) для π_0 получим задачу:

$$\frac{\partial^2 \pi_0}{\partial n^2} - (1 - \cos \phi) \pi_0 = 0, \quad \pi_0(0, \phi) = -v_0(1, \phi), \quad \lim_{\eta \to \infty} \pi_0(\eta, \phi) = 0.$$

Отсюда

$$\pi_0(\eta,\phi) = -e^{-\sqrt{1-\cos\phi}\,\eta}v_0(1,\phi)$$



Для функций $w_{-2}(\tau,\xi)$, $w_{-1}(\tau,\xi)$, $w_0(\tau,\xi)$ составим следующие задачи:

$$\frac{\partial^2 w_{-2}}{\partial \tau^2} - \tau w_{-2} = H_0, \quad \lim_{\tau \to \infty} w_{-2}(\tau, \xi) = 0, \quad w_{-2}(0, 0) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial \tau^2} - \tau w_{-1} = \xi H_1, \quad \lim_{\tau \to \infty} w_{-1}(\tau, \xi) = 0, \quad w_{-1}(0, 0) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - \tau w_0 = \xi^2 H_2, \quad \lim_{\tau \to \infty} w_0(\tau, \xi) = 0, \quad w_0(0, 0) = -v_0(0, 0), \tag{9}$$

где
$$H_k = \frac{1}{k!} H^{(k)}(0), k=0,1,2.$$

Задачи (7)-(9) имеют единственные решения:

$$w_{-2}(\tau,\xi) = -\pi H_0 \left[Ai(\tau) \int_0^{\tau} Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_{\tau}^{\infty} Ai(s) ds - \sqrt{3} Ai(\tau) \int_0^{\infty} Ai(s) ds \right],$$

$$w_{-1}(\tau,\xi) = -\pi H_1 \xi \left[Ai(\tau) \int_0^{\tau} Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_{\tau}^{\infty} Ai(s) ds - \sqrt{3} Ai(\tau) \int_0^{\infty} Ai(s) ds \right],$$

$$w_0(\tau,\xi) = -\pi H_2 \xi^2 \left[Ai(\tau) \int_0^{\tau} Bi(s) ds + Bi(\tau) \int_{\tau}^{\infty} Ai(s) ds - \sqrt{3} Ai(\tau) \int_0^{\infty} Ai(s) ds \right] - \frac{v_0(0,0)}{Ai(0)} Ai(\tau).$$

Асимптотику решений задачи (7)-(9) при $\tau \to \infty$, ищем в виде:

$$w_k(\tau,\xi) = a_0(\xi) + \frac{a_1(\xi)}{\tau} + \dots + \frac{a_n(\xi)}{\tau^n} + \dots$$
 (10)

Подставляя (10) в (7) имеем:

$$\left\{\frac{2a_1(\xi)}{\tau^3} + \ldots + \frac{n(n+1)a_n(\xi)}{\tau^{n+2}}\right\} - \tau\left\{a_0(\xi) + \frac{a_1(\xi)}{\tau} + \ldots + \frac{a_n(\xi)}{\tau^n}\right\} = H_0.$$

Из этого равенства определим коэффициенты ряда (10):

$$a_0(\xi) = 0$$
, $a_1(\xi) = -H_0$, $a_2(\xi) = 0$, $a_3(\xi) = 0$, $a_4(\xi) = 2a_1(\xi)$, ...

Следовательно,

$$w_{-2}(\tau,\xi) = -\frac{H_0}{\tau} \left(a_1 + \frac{1}{\tau^3} a_4 \dots + \frac{1}{\tau^{3m}} a_{3m+1} + \dots \right).$$

Аналогично получим:



$$w_{-1}(\tau,\xi) = -\frac{H_1\xi}{\tau} \left(a_1 + \frac{1}{\tau^3} a_4 \dots + \frac{1}{\tau^{3m}} a_{3m+1} + \dots \right),$$

$$w_0(\tau,\xi) = -\frac{H_2\xi^2}{\tau} \left(a_1 + \frac{1}{\tau^3} a_4 \dots + \frac{1}{\tau^{3m}} a_{3m+1} + \dots \right).$$

Оценка остаточного члена R(x,y)**.** Для R(x,y) получим следующую задачу:

$$\varepsilon \Delta R - (1-x)R = O(\varepsilon), R|_{\Gamma} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$|R|$$
≤ $c\epsilon^{2/3}$ в области D .

Нами доказана

Теорема 1. Пусть $f(x,y) \in C^{\infty}(\overline{D})$, $f(1,0) \neq 0$, тогда для решения задачи (1)-(2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,y)=v_0(x,y)+\pi_0(\eta,\phi)+w_{-2}(\tau,\xi)/\mu^2+w_{-1}(\tau,\xi)/\mu+w_0(\tau,\xi)+O(\varepsilon^{2/3}),$$

где $\eta = (1-r)/\lambda$, $\tau = (1-x)/\mu^2$, $\xi = y/\mu$, $\varepsilon = \lambda^2$, $\varepsilon = \mu^6$, $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

II. Случай $q(x)=(1-x^2)$. В этом случае предельное уравнение имеет особенность в двух граничных точках (-1,0) и (1,0).

Структура внешнего разложения примет вид:

$$V = -\frac{f(x,y)}{(1-x^2)} + \frac{\varepsilon}{(1-x^2)^4} F_1(x,y) + \dots + \frac{\varepsilon^n}{(1-x^2)^{3n+1}} F_n(x,y) + \dots, \quad \varepsilon \to 0,$$

где $F_k(x, y) \in C^{\infty}(\overline{D}), k \in \mathbb{N}$.

Построение ФАР решения. Решение задачи (1)-(2) ищем в виде:

$$u(x,y) = v_0(x,y) + \pi_0(\eta,\phi) + g_{-2}(\gamma,\xi)/\mu^2 + g_{-1}(\gamma,\xi)/\mu + g_0(\gamma,\xi) + w_{-2}(\tau,\xi)/\mu^2 + w_{-1}(\tau,\xi)/\mu + w_0(\tau,\xi) + R(x,y)$$
(11)

где
$$\eta = (1-r)/\lambda$$
, $\gamma = (1+x)/\mu^2$, $\tau = (1-x)/\mu^2$, $\xi = y/\mu$, $\epsilon = \lambda^2$, $\epsilon = \mu^6$, $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

 $g(\gamma,\xi)$ — обобщенная погранфункция в окрестности точки (-1,0), а $w(\tau,\xi)$ — обоб-щенная погранфункция в окрестности точки (1,0).

Подставляя (11) в (1) получим:

$$\begin{split} &\epsilon\Delta\nu_{0}-(1-x^{2})\nu_{0}+\Delta_{\gamma\xi}(g_{-2}+\mu g_{-1}+\mu^{2}g_{0})-\gamma(2-\mu^{2}\gamma)(g_{-2}+\mu g_{-1}+\mu^{2}g_{0})+\\ &+\mu^{2}\Delta_{\tau\xi}(w_{-2}+\mu w_{-1}+\mu^{2}w_{0})-\tau(2-\mu^{2}\tau)(w_{-2}+\mu w_{-1}+\mu^{2}w_{0})+\Delta_{\eta\phi}\pi_{0}- \end{split}$$



$$-(1-(1-\lambda\eta)^2\cos^2(\phi))\pi_0+\varepsilon\Delta R-(1-x^2)R=f(x,y)-H(x,y)+H(x,y),$$
 (12)

где
$$\Delta_{\tau\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \ \Delta_{\gamma\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \ \Delta_{\eta\phi} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{(1-\lambda\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda\eta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Как всегда мы здесь ввели новую функцию H(x,y), которое определим ниже.

Из равенства (12) имеем:

$$-(1-x^2)v_0 = f(x,y) - H(x,y)$$
.

Тем самым

$$v_0(x,y) = -(f(x,y)-H(x,y))/(1-x^2).$$

Определим неизвестную функцию H(x,y) так чтобы $v_0(x,y) \in C^\infty(\overline{D})$. Пусть H(x,y)=(f(1,y)(1+x)+f(-1,y)(1-x))/2, тогда

$$v_0(x,y) = -(f(x,y) - (f(1,y)(1+x) + f(-1,y)(1-x))/2)/(1-x^2).$$
 (13)

Из равенства (12) для π_0 получим задачу:

$$\frac{\partial^2 \pi_0}{\partial \eta^2} - (1 - \cos^2 \phi) \pi_0 = 0, \ \pi_0(0, \phi) = -v_0(1, \phi), \lim_{\eta \to \infty} \pi_0(\eta, \phi) = 0,$$

решение, которого имеет вид:

$$\pi_0(\eta,\phi) = -e^{-|\sin\phi|\eta}v_0(1,\phi).$$

Для функции $w_{-2}(\tau,\xi)$, $w_{-1}(\tau,\xi)$, $w_0(\tau,\xi)$, $g_{-2}(\gamma,\xi)$, $g_{-1}(\gamma,\xi)$, $g_0(\gamma,\xi)$ составляем аналогичные задачи такие как (7)-(9).

При $\tau \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow \infty$ имеем:

$$w_{-2}=O(\tau^{-1}), w_{-1}=O(\xi\tau^{-1}), w_0=O(\xi^2\tau^{-1}),$$

 $g_{-2}=O(\gamma^{-1}), g_{-1}=O(\xi\gamma^{-1}), g_0=O(\xi^2\gamma^{-1}).$

Оценка остаточного члена R(x,y). Для R(x,y) получим следующую задачу:

$$\varepsilon \Delta R - (1-x^2)R = O(\varepsilon), R|_{\Gamma} = 0.$$

Применяя принцип максимума имеем:

$$|R| \le c \varepsilon^{2/3}$$
 в области D .

Нами доказана



Теорема 2. Пусть q(x)= $(1-x^2)$, $f(x,y) \in C^{\infty}(\overline{D})$, $f(1,0) \neq 0$, $f(-1,0) \neq 0$, тогда для решения задачи (1)-(2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,y)=v_0(x,y)+\pi_0(\eta,\phi)+g_{-2}(\gamma,\xi)/\mu^2+g_{-1}(\gamma,\xi)/\mu+g_0(\gamma,\xi)+$$
$$+w_{-2}(\tau,\xi)/\mu^2+w_{-1}(\tau,\xi)/\mu+w_0(\tau,\xi)+O(\mu),$$

где $\eta = (1-r)/\lambda$, $\gamma = (1+x)/\mu^2$, $\tau = (1-x)/\mu^2$, $\xi = y/\mu$, $\varepsilon = \lambda^2$, $\varepsilon = \mu^6$, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $g(\gamma, \xi) - \cos \phi$ обобщенная погранфункция в окрестности точки (-1,0), а $w(\tau, \xi)$ – обобщенная погранфункция в окрестности точки (1,0), регулярная функция $v_0(x,y)$ определена в (13).

Заключение. Впервые доказана применимость обобщенного метода пограничных функций для построения равномерного асимптотического разложения решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с особенностью в граничных точках. Показано, что асимптотическое поведение решения бисингулярно возмущенных задач существенно зависит от неоднородной части Асимптотические разложения решений исследованных задач представляет собой ряд Пюйзо. Следует отметить, полученные разложения решений что являются неулучшаемыми.

Литература

- 1. Levinson, N. The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε / N. Levinson // Ann. Of Math. 1950. Vol. 51. P. 428-445.
- 2. Eckhaus, W. Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type / W. Eckhaus, E.M. de Jager // Arch. Rat. Mech. Anal. 1966. Vol. 23. № 1. P. 26-86.
- 3. Eckhaus, W. Boundary Layers in Linear Elliptic Singular Perturbation Problems / W. Eckhaus // SIAM Review. 1972. Vol. 14, № 2. P. 225-270.
- 4. De Groen, P.P.N. Turning points in second order elliptic singular perturbation problems / P.P.N. de Groen // Lecture Notes in Math. 1972. № 280. P. 273-278.
- 5. Shagi-di Shih, R. Bruce Kellogg Asymptotic analysis of a singular perturbation problem // SIAM J. Math. Anal. 1987. Vol. 18. № 5. P. 1467-1511.
- 6. Вишик М.И., Люстерник Л.А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. 12:5 (77). С. 3-122.
- 7. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. С. 334.
- 8. Alymkulov K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point. American J.Math. & Statistics. 2013. Vol. 3. № 1. − P. 53-61.
- 9. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Вестник ТомГУ. Математика и механика. 2013, 6(26). С. 37-44
- 10. Tursunov, D.A. Uniform asymptotic solutions of the Cauchy problem for a generalized model equation of L.S. Pontryagin in the case of violation of conditions of asymptotic stability. Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. Vol. 1, N 3. New York. 2013. P. 25-29.



УДК: 517.955.8

Турсунов Э.А., ОшГУ, emrah812@mail.ru

Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с четырьмя периодическими точками перевала

Бул макалада жөнөкөй периодикалык чекити менен асимптотикалык туруктуулуктун шарты бузулган учурда, бир калыптагы асимптотиканы жөнөкөй дифференциалдык теңдемелердин системасын чечүү ошондой эле интегралды баалоо үчүн стационардык фазанын ыкмасы жана өткөөл ыкмасы колдонуулары жана асимптотикалык теңдемени чечүүнүн жолдорун далилдөө тууралуу жазылган.

Ачкыч сөздөр: ашуу методу, квадраттык матрица, аналитикалык функция.

Целью данной работы является построить равномерную асимптотику решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с простыми периодическими точками перевала в комплексной плоскости, когда нарушается условие асимптотической устойчивости. Для оценки интегралов применяется метод стационарной фазы и метод перевалов. Доказана существенная зависимость асимптотики решения рассматриваемой задачи от неоднородной части рассматриваемой системы.

Ключевые слова: метод перевалов, квадратная матрица, аналитические функции.

The aim of this paper is to construct a uniform asymptotic solution of ordinary differential equations with a simple turning point in the complex plane when a condition of asymptotic stability is violated. The method of stationary phase and the passes method are used to evaluate the integrals. The uniform asymptotic solution of the problem was constructed. Asymptotic of the solution of the problem essentially depends on the inhomogeneous part of the system equation.

Key words: method passes a square matrix, analytical certain functions.

Введение. Теория запаздывания потери устойчивости в системах общего вида построена в работах А.И. Нейштадта [2]. Далее появились работы [1] и др. Численными и аналитическими методами явление запаздывания потери устойчивости изучалось в системах, встречающихся в физике лазеров, химической кинетике, биофизике, в модифицированной системе Циглера и в моделировании безопасных процессов горения с максимальной температурой. Во всех этих перечисленных работах невозмущенное (предельное) уравнение имеет тривиальное, т.е. гладкое решение в рассматриваемой области. В нашем случае решение предельного уравнения имеет особенность.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f(t), \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0, \tag{2}$$

где A(t) — квадратная матрица-функция второго порядка с элементами $a_{jk}(t)$, $f(t)=colon\{f_1(t),f_2(t)\}$, $a_{jk}(t)$, $f_k(t)$ — аналитические функции в D, $x^0=colon\{x_1^0,x_2^0\}$ — постоянный вектор, $t\in D$, $t=t_1+it_2$.

U₁. Пусть матрица-функция A(t) имеет комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_{1,2}(t) = \sin t \pm ia \cos t$, a > 1, и $t_0 = -\pi/2$.

U₂. Пусть $f_1(-\pi/2, -\alpha) \neq 0$, $f_1(\pi/2, -\alpha) \neq 0$, $f_2(-\pi/2, \alpha) \neq 0$, $f_2(\pi/2, \alpha) \neq 0$.



В рассматриваемом случае каждое собственное значение имеет по два простых периодических нуля в комплексной плоскости. Исследуемая область является прямоугольником, и нули собственных значений матрицы-функции A(t) находятся на вершинах этого прямоугольника. Такой случай рассматривается впервые. Требуется построить асимптотику решения задачи (1)-(2) в области $D \supset [-\pi/2, \pi/2]$, при $\varepsilon \to 0$.

Приведение задачи к стандартному виду. Для приведения A(t) к диагональному

виду выполняем следующее преобразование: $B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t)=D(t)$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, B_0(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) - a_{22}(t) & \lambda_2(t) - a_{22}(t) \\ a_{21}(t) & a_{21}(t) \end{pmatrix}, D(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t)).$$

Пусть в области D выполняется неравенство $\det B_0(t) \neq 0$.

Задача (1)-(2) с заменой $x(t,\varepsilon)=B_0(t)y(t,\varepsilon)$ принимает вид:

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)y(t,\varepsilon) + h(t), \tag{3}$$

$$y(t_0, \varepsilon) = y^0, \tag{4}$$

где
$$B(t) = -B_0^{-1}(t)B_0'(t)$$
, $y^0 = B_0^{-1}(t_0)x^0$, $h(t) = B_0^{-1}(t)f(t)$.

Задачу Коши для дифференциальных уравнений (3)-(4) заменим интегральным уравнением:

$$z(t,\varepsilon) = \varepsilon E(t,t_0,\varepsilon) y^0 + \int_{t_0}^t E(t,\tau,\varepsilon) (B(\tau)z(\tau,\varepsilon) + h(\tau)) d\tau.$$
 (5)

где
$$z(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)\varepsilon$$
, $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds)$.

Начало исследования. В работе [3] доказана

Теорема. Если для интеграла

$$\int_{t_0}^{t} E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau, \qquad (6)$$

в некоторой области D справедлива оценка $\left\|\int_{t_0}^t E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau\right\| \leq c\delta(\varepsilon)$, где

 $\varepsilon \le c\delta(\varepsilon) < 1$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0$, то для решения системы интегральных уравнений (5)

справедлива оценка $||z(t,\varepsilon)|| \le c\delta(\varepsilon)$.

Значит, достаточно вычислить асимптотику интеграла (6), при условиях U_1 и U_2 . Рассмотрим собственные значения



 $Re(\lambda_1(t_1,0))=Re(\lambda_2(t_1,0))=sint_1; Re(\lambda_1,2(t_1,0))<0$ – устойчивый интервал, при $-\pi+2\pi k< t_1<2\pi k;$ $Re(\lambda_1,2(t_1,0))>0$ – неустойчивый интервал, при $2\pi k< t_1<\pi+2\pi k;$

 $\text{Re}(\lambda_{1,2}(t_1,0))=0$, при $t_1=\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что $(\pi/2+\pi k,-\alpha)$ и $(\pi/2+\pi k,\alpha)$, где $\alpha=\ln\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}>0$ $k\in \mathbb{Z}$, являются нулями собственных значений $\lambda_1(t_1,t_2)$ и $\lambda_2(t_1,t_2)$ соответственно.

Рассмотрим теперь функции: $u_1(t) = \int \lambda_1(t) dt$, $u_2(t) = \int \lambda_2(t) dt$.

Если
$$t=t_1+it_2$$
, то $u_1(t_1,t_2)=-\cos t_1(\cosh t_2+a\sinh t_2)+i\sin t_1(\sinh t_2+a\cosh t_2),\ u_2(t_1,t_2)=-\sin t_1(\sinh t_2+a\cosh t_2)+i\sin t_2(\sinh t_2+a\cosh t_2)$

 $-\cos t_1(\cosh t_2 - a \sinh t_2) + i \sin t_1(a \cosh t_2 - \sinh t_2)$. Пусть $u_{11}(t_1, t_2) = \operatorname{Re}(u_1(t_1, t_2))$, $u_{21}(t_1, t_2) = \operatorname{Re}(u_2(t_1, t_2))$. Область $D = \{t: u_{11}(t_1, t_2) \le 0, u_{21}(t_1, t_2) \le 0, |t_1| \le \pi/2\}$ — является прямоугольником с вершинами $A(-\pi/2, -\alpha), B(\pi/2, -\alpha), B_1(\pi/2, \alpha)$ и $A_1(-\pi/2, \alpha)$.

Решение предельной (вырожденной) системы: $\widetilde{X}(t) = -A^{-1}(t)f(t)$ в четырех точках $A(-\pi/2, -\alpha)$, $B(\pi/2, -\alpha)$, $B_1(\pi/2, \alpha)$ и $A_1(-\pi/2, \alpha)$ имеет особенность, при $f(t) \neq 0$. Кроме того, это решение не удовлетворяет начальному условию $\widetilde{X}(t_0) \neq x^0$.

Таким образом, мы здесь тоже сталкиваемся с двумя сингулярностями: первое – это наличие пограничного слоя, а второе – соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение имеет особенность в точках $A(-\pi/2,-\alpha)$, $B(\pi/2,-\alpha)$, $B_1(\pi/2,\alpha)$ и $A_1(-\pi/2,\alpha)$. Каждое уравнение системы (1) имеет по две точки поворота, в целом система имеет четыре точки поворота. Поэтому рассматриваемую задачу можно называть бисингулярной.

Перейдем к оценке интегралов

$$J(t,\varepsilon) = \int_{I} e^{\frac{1}{\varepsilon}(u_{1}(t)-u_{1}(\tau))} h_{1}(\tau) d\tau, \ \widetilde{J}(t,\varepsilon) = \int_{\widetilde{T}} e^{\frac{1}{\varepsilon}(u_{2}(t)-u_{2}(\tau))} h_{2}(\tau) d\tau,$$

где L, $\widetilde{L}-$ пути интегрирования, соединяющие точки $(-\pi/2,0)$ и $t\in D$. Пути интегрирования L, \widetilde{L} симметричны относительно действительной оси. Область D разобьңм на подобласти:

$$H_{00} = \{t: 0 \le t_1 + \pi/2 \le \delta, \delta \le t_2 + \alpha \le 2\alpha\}, H_{10} = \{t: 0 \le t_1 + \pi/2 \le \delta \varepsilon^{\gamma}, t_2 + \alpha = \delta \varepsilon^{\gamma}\},$$

$$H_{01} = \{t : -\pi/2 + \delta \le t_1, u_{11}(t_1, t_2) \le (\epsilon \ln \epsilon)/2, \delta \le |(t_1 - \pi/2) + i(t_2 + \alpha)|, t_2 \le \alpha\},\$$

$$H_{11}=\{t:-((1-2\gamma)\epsilon\ln\epsilon)/2\leq t_2+\alpha\leq\delta\epsilon^{\gamma}\ t_1+\pi/2=\delta\epsilon^{\gamma}\},$$

$$H_{12} = \{t: |t_1| \le \pi/2 - \delta \varepsilon^{\gamma} \ u_{11}(t_1, t_2) = ((1 - 2\gamma) \varepsilon \ln \varepsilon)/2\},$$

$$H_{13}=\{t:-((1-2\gamma)\epsilon\ln\epsilon)/2\leq t_2+\alpha\leq\delta\epsilon^{\gamma}, t_1=\pi/2-\delta\epsilon^{\gamma}\},$$

$$H_{14}=\{t:-\delta\epsilon^{\gamma}\leq t_1-\pi/2\leq ((1-2\gamma)\epsilon\ln\epsilon)/2, t_2+\alpha=\delta\epsilon^{\gamma}\},$$



 $H_{15} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) = ((1-2\gamma)\epsilon \ln \epsilon)/2, \delta \epsilon^{\gamma} \le t_2 + \alpha \le 2\alpha\},\$

$$H_{20} = \{t: 0 \le t_1 + \pi/2 \le \delta \sqrt{\varepsilon}, 0 \le t_2 + \alpha \le \delta \sqrt{\varepsilon} \}, H_{21} = \{t: |t_1| \le \pi/2 - \delta \sqrt{\varepsilon}, (\varepsilon \ln \varepsilon)/2 \le u_{11}(t_1, t_2) \le 0 \},$$

 $H_{22} = \{t : -\delta\sqrt{\varepsilon} \le t_1 - \pi/2 \le 0, (\varepsilon \ln \varepsilon)/2 \le u_{11}(t_1, t_2) \le 0\}, 0 < \delta << 1 - достаточное малое число, <math>0 \le \gamma < 1/2$,

$$H_0 = H_{00} \cup H_{01}, \ H_1 = \bigcup_{k=0}^{5} H_{1k}, H_2 = \bigcup_{k=0}^{2} H_{2k}, D = H_0 \cup H_1 \cup H_2.$$

Лемма 1. Если $t \in H_{00}$, то для интеграла $J(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|J(t,\varepsilon)| \le c\varepsilon.$$
 (7)

Доказательство. Путь интегрирования L состоит из отрезка прямой $\tau_2 = (\tau_1 - t_0)t_2/(t_1 - t_0)$, соединяющей точки $(t_0,0)$ и $t \in H_{00}$. Так как в области H_{00} имеет место условие: $\text{Re}(\lambda_1(t_1,t_2)) = \sin t_1(\text{ch}t_2 + a \text{sh}t_2) \le -c < 0$, то имеем:

$$|J(t,\varepsilon)| \leq O(1) \int_{L} e^{-\frac{c}{\varepsilon}(t_1-\tau_1)} d\tau_1 = O(\varepsilon).$$

Справедливость этой оценки также можно доказать и интегрируя по частям $J(t,\varepsilon)$. \blacklozenge **Лемма 2**. Если $t \in H_{10}$, то для интеграла $J(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|J(t,\varepsilon)| \le c\varepsilon^{1-\gamma}$$
, где $0 \le \gamma < 1/2$. (8)

Доказательство. Путь интегрирования L тот же, что в лемме 1. Интегрируя $J(t,\varepsilon)$ по частям, имеем: $|J(t,\varepsilon)| \le \varepsilon |h_1(t)/\lambda_1(t)| + O(\varepsilon)$.

Учитывая, что $\lambda_1(t)$ =O(($t+\pi/2+i\alpha$)) и $c\varepsilon^{\gamma} \le |\lambda_1(t)| \le C\varepsilon^{\gamma}$, то следует оценка:

$$|\varepsilon h_1(t)/\lambda_1(t)| = O(\varepsilon^{1-\gamma}). \blacklozenge$$

Рассмотрим следующий интеграл

$$J(t,\varepsilon) = \int_{L} e^{\frac{1}{\varepsilon}(u_{1}(t)-u_{1}(\tau))} h_{1}(\tau) d\tau = \left(\int_{L_{1}} + \int_{L_{2}} + \int_{L_{3}} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon}(u_{1}(t)-u_{1}(\tau))} h_{1}(\tau) d\tau,$$

где $L=L_1\cup L_2\cup L_3$, $J(t,\varepsilon)=j_1(t,\varepsilon)+j_2(t,\varepsilon)+j_3(t,\varepsilon)$, L_1 – отрезок линии $\tau_1=-\pi/2$, $-\alpha\leq\tau_2\leq 0$; L_2 – отрезок линии $\tau_2=-\alpha$, $-\pi/2\leq\tau_1\leq t_1$; L_3 – отрезок линии $\tau_1=t_1$, $-\alpha\leq\tau_1\leq t_2$;

Вычисляя эти интегралы, получим оценки:

$$|j_1(t,\varepsilon)| \le e^{\frac{1}{\varepsilon}u_{11}(t)} (c\varepsilon + h_{10}\sqrt{\varepsilon});$$
 (9)



$$|j_2(t,\varepsilon)| \le e^{\frac{1}{\varepsilon}u_{11}(t_1,t_2)} (h_{10}c\sqrt{\varepsilon} + c\varepsilon); \tag{10}$$

1) Пусть
$$-\pi/2 \le t_1 \le -\pi/2 + \delta \varepsilon^{1/2}$$
, $0 \le t_2 + \alpha \le \delta \varepsilon^{1/2}$, тогда $|j_3(t,\varepsilon)| \le c \varepsilon^{1/2}$. (11)

2) Пусть
$$|t_1| \le \pi/2 - \delta \varepsilon^{1/2}$$
, тогда $|j_3(t,\varepsilon)| \le c\varepsilon$. (12)

3) Пусть
$$\pi/2 - \delta \varepsilon^{1/2} \le t_1 \le \pi/2$$
, $0 \le t_2 + \alpha \le \delta \varepsilon^{1/2}$, тогда $|j_3(t,\varepsilon)| \le c \varepsilon^{1/2}$. (13)

4) Пусть $\pi/2 - \delta \varepsilon^{1/2} \le t_1 \le \pi/2$, $\delta \varepsilon^{1/2} \le t_2 + \alpha \le 2\alpha$, тогда

$$\left|j_{53}(t,\varepsilon)\right| \le c\sqrt{\varepsilon}e^{\frac{u_{11}(t_1,t_2)}{\varepsilon}} + \varepsilon \left|\frac{h_1(t_1,t_2)}{\lambda_1(t_1,t_2)}\right| + c\sqrt{\varepsilon}\left|h_1(t_1,-\alpha+\sqrt{\varepsilon})\right|e^{\frac{u_{11}(t_1,t_2)}{\varepsilon}}.$$
(14)

Таким образом:

- а) Если $t \in H_{20} \cup H_{21} \cup H_{22}$, то для интеграла $J(t,\varepsilon)$ справедлива оценка: $|J(t,\varepsilon)| \le c\varepsilon^{1/2}$. Оно следует из (9)-(11), (13), (14).
- б) Если $t \in H_{12} \cup H_{13} \cup H_{14} \cup H_{15}$, то для $J(t,\varepsilon)$ справедлива оценка: $|J(t,\varepsilon)| \le c\varepsilon^{1-\gamma}$. Это следует из (9), (10), (12), (14).
- в) Если $t \in H_{01}$, то для $J(t,\varepsilon)$ справедлива оценка: $|J(t,\varepsilon)| \le c\varepsilon$. Это следует из (9), (10), (12), (14).

Вывод. Пусть выполняются условия U_1 , U_2 . Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение, и для него справедлива асимптотическая оценка:

$$||x(t,\varepsilon)|| \le c\Omega_2(t,\varepsilon)/\varepsilon$$
,

где
$$\Omega_2 \big(t, \varepsilon \big) = \begin{cases} \varepsilon, \, \text{при} \, t \in H_0 \cap \widetilde{H}_0, \\ \varepsilon^{1 - \gamma}, \, \text{при} \, t \in H_1 \cup \widetilde{H}_1, t_1 \leq \pi/2 + \big(1 - 2\gamma\big) \varepsilon \ln \varepsilon, \\ \sqrt{\varepsilon}, \, \text{при} \, t \in H_2 \cup \widetilde{H}_2, \, 0 \leq \gamma < 1/2. \end{cases}$$

Литература

- 1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Жалалабат, 2001. С. 203.
- 2. Нейштадт А.И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. Вып. 5. С. 300-301.
- 3. Турсунов Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений. Ош: РИО ОшГУ «Билим». С. 150.



УДК: 517.928

Чоюбеков С.М. ст.преп., Бекешов Т.О., к.ф.-м.н., доцент ОшГУ Асанов А., д.ф.-м.н. профессор, КТУ "Манас"

Об одном классе неклассического интегрального уравнения вольтерра І рода

Көптөгөн прикладдык мүнөздөгү маселелердин модели интегралдык теңдемелерге, алардын ичинен өзгөчө кызыктырууну жаратуу менен азыраак каралган классикалык эмес теңдемелерге келтирилет. Бул жумушта М. Иманалиев жана А. Асановдор сунуштаган метод боюнча түрдүү функционалдык мейкиндикте Вольтерранын І түрдөгү классикалык эмес теңдемесине регуляризация тургузулган жана чечимдин жалгыздыгы далилденген.

Вольтерранын I түрдөгү классикалык эмес теңдемеси үчүн регуляризациялоочу теңдеме чечими тургузулган.

Ачкыч сөздөр: Интегралдык теңдеме, Дирихленин формуласын жалпылоо, чечимдин жалгыздыгы, резольвента, регуляризация, функционалдык мейкиндик.

Модели многих задачи прикладного характера сводятся к уравнением, среди которых неклассические уравнения представляют особые интересы и мало изучены. В данной работе в предположении следуя по методу предположенному М. Иманалиевым и А. Асановым строится регуляризация и доказывается единственность решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода в различных функциональных пространствах.

Построен регулирующее уравнение по Лаврентьеву для решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода.

Ключевые слова: Интегральное уравнения, обобщенная формула Дирихле, единственность решения, резольвента, регуляризация, функциональное пространство.

Models of many applied problems are reduced to equation, among which unclassical equations present some particular interests and they are not investigated all. By following the methods, suggested by M. Imanaliev and A. Asanov, in the given work in the given work in the case the regularity of the solution of unclassical integral equation of Volter's first order is built find uniqueness of this solution is proved.

The regulative equation of Lavrentyev for solution unclassical integral equation of Volter's first order was built.

Key words: integral equation, generalized formula of Dirixle, uniqueness, resolvent, regularity, functional space.

1. Введение и постановака задачи.

Расмотрим интегральное уравнение

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t)$$

$$t \in [t_0,T]$$
(1)

где $\alpha(t) \in C[t_0,T]$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \le t$ при всех $t \in C[t_0;T]$, K(t,s) и f(t) известные фунции в области $G = \{(t,s): t_0 \le t \le T, \alpha(t) \le s \le t\}$ и на отрезке $[t_0;T]$ соответственно $f(t_0) = 0$.

Уравнение вида (1) возникает при решении многих прикладных задач [2], [4]. Однако, уравнения такого типа значительно менее исследованы, чем классические уравнения Вольтерра I рода.



В данной работе в предположении $\alpha(t_0) = t_0$, следуя по методу предположенному М. Иманалиевым и А. Асановым [1] строится регуляризация и доказывается единственность решения уравнения (1) в различных функциональных пространствах.

Следуя по методике предложенный в [1]-[4] и развитает в [5] строим регуляризация уравнение для (1).

2. Метод решение.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u(t_0), \quad t \in [t_0;T];$$
(2)

где, u(t) - решение уравнения (1).

Его решение будем искать в виде
$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon)$$
 (3)

Тогда из (2) имеем
$$\varepsilon \xi(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\varepsilon(u(t)-u(t_0))$$
.

Последнее перепишем в следующем виде

$$\xi(t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} K(s,s) \xi(s,\varepsilon) ds = \frac{(-1)}{\varepsilon} \int_{\alpha(t)}^{t} [K(t,s) - K(s,s)] \xi(s,\varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\alpha(t)} K(s,s) \xi(s,\varepsilon) ds - (u(t) - u(t_0))$$
(4)

Используя резольвенту ядра $\left(-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right)$, из (4) получим

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha(t)}^{t} [K(t,s) - K(s,s)] \xi(s,\varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\alpha(t)} K(s,s) \xi(s,\varepsilon) ds - (u(t) - u(t_0)) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{t_0}^{t} K(s,s) \times ds$$

$$\times e^{-\frac{1}{\varepsilon_s}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau} \{ \int_{\alpha(s)}^{s} [K(s,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau - \int_{t_0}^{\alpha(s)}K(\tau,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \varepsilon(u(s)-u(t_0))\}ds.$$

Из последнего переходим

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha(t)}^{t} [K(t,s) - K(s,s)] \xi(s,\varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\alpha(t)} K(s,s) \xi(s,\varepsilon) ds - (u(t) - u(t_0)) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{t_0}^{t} \int_{\alpha(s)}^{s} K(s,s) \times ds$$

$$\times e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}^{\prime}}[K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds + \frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}^{\prime}}[K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds - \frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}^{\prime}}[K(\tau,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds} - \frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}^{\prime}}[K(\tau,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds} - \frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}K(s,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}^{\prime}}[K(\tau,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds} - \frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}K(s,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}^{\prime}}[K(\tau,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\tau)d\tau} ds$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}\int_{t_{0}}^{\alpha(s)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_{0}}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}[u(s)-u(t_{0})]ds;$$
 (5)

Применим обобщенную формулу Дирихле [6] и преобразуем двойные интегралы в (5):



$$\frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_{0}}^{\alpha(t)}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$\times (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\alpha(t)}^{t} \int_{\tau}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon_s}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau. \tag{6}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}\int_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_{0}}^{\alpha(t)}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}\right\}\times$$

$$\times [K(t,\tau) - K(\tau,\tau)] \xi(\tau,\varepsilon) d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha(\tau)}^{t} [1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} K(\tau,\tau) d\tau}] [K(t,\tau) - K(\tau,\tau)] \xi(\tau,\varepsilon) d\tau.$$
 (7)

$$-\frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{t_{0}}^{t}\int_{t_{0}}^{\alpha(s)}K(s,s)e^{\frac{-1}{\varepsilon_{s}}\int_{t_{0}}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds = \frac{-1}{\varepsilon}\int_{t_{0}}^{\alpha(t)}K(\tau,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_{0}}^{\alpha(t)}K(\tau,\tau)e^{\frac{-1}{\varepsilon_{\alpha^{-1}(\tau)}}\int_{t_{0}}^{t}K(s,s)ds}\xi(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} K(\tau,\tau) d\tau} [u(s) - u(t_0)] ds = u(t) - u(t_0) - [u(t) - u(t_0)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} K(s,s) ds} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{s}^{t} K(\tau,\tau) d\tau} [u(t) - u(s)] ds, \quad (9)$$

В силу (6)-(9) уравнение (5) примет вид

$$\xi(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\alpha(t)} \{K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(s,s)ds} + \int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)} \frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} [K(s,\tau) - K(t,\tau)]ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} [K(s,\tau) - K(t,\tau)]ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} [K(s,\tau) - K(t,\tau)]ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} [K(s,\tau) - K(t,\tau)]ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(t,\tau))ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau) - K(s,\tau)ds] ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau)ds) ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K(s,\tau)ds) ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(s,\tau)ds} (K$$

$$-e^{-\frac{1}{\varepsilon_{\tau}}[K(\tau,\tau)d\tau}][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t} \{-[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)] + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}}[K(\tau,\tau)d\tau} \times \frac{1}{\varepsilon_{s}}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon_{s}}[K(\tau,\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon_{s}$$

$$\times [K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds + [1-e^{-\frac{1}{\varepsilon_{\tau}}\int_{0}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau - [u(t)-u(t_{0})]e^{-\frac{1}{\varepsilon_{t_{0}}}\int_{0}^{t}K(\tau,\tau)d\tau} -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon_s} \int_{s}^{t} K(\tau,\tau) d\tau} [u(t) - u(s)] ds.$$
 (10)

Введем обозначения

$$H_0(t,\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} K(\alpha^{-1}(\tau),\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K(s,s)ds},$$
(11)



$$H_1(t,\tau,\varepsilon) = -e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(\tau,\tau)d\tau} \frac{1}{\varepsilon} [K(t,\tau) - K(\tau,\tau)] + \int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)} \frac{1}{\varepsilon^2} K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau} [K(s,\tau) - K(\tau,\tau)] d\tau$$

$$-K(t,\tau)]ds + \frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau) - K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{\tau}K(\tau,\tau)d\tau},$$
(12)

$$H_{2}(t,\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K(s,s)ds}[K(t,\tau) - K(\tau,\tau)] - \int_{\tau}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau) - K(s,\tau)]ds, \quad (13)$$

$$U(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} [u(t) - u(t_0)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K(\tau,\tau)d\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} [u(t) - u(s)] ds.$$
 (14)

Учитывая обозначения (11)-(14) уравнение (10) запишем в следующем виде

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{\alpha(t)} H_0(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_{t_0}^{\alpha(t)} H_1(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_{\alpha(t)}^{t} H_2(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + U(t,\varepsilon), \ t \in [t_0,T].$$
 (15)

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1^0 - 3^0 и $\gamma_0 b_0 < 1$, где $\gamma_0 = \sup_{v \in [t_0,T]} \frac{\left|K(v,\alpha(v)\big|\alpha'(v)}{\left|K(v,v)\right|}, \quad b_0 = \exp[\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)]. \text{ Тогда: 1) если уравнение (1)}$

имеет решение $u(t) \in C[t_0;T]$, то решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению u(t). При этом справедлива оценка

$$\left\|v(t,\varepsilon) - u(t)\right\|_{c} \le \frac{b_0}{1 - \gamma_0 b_0} \left[2\left\|u(t)\right\|_{c} e^{-\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^{\beta})\right]. \tag{16}$$

где $\omega_u(\delta) = \sup_{|t-s| \le \delta} |u(t) - u(s)|;$

2) если уравнение (1) имеет решение $u(t) \in C^{\gamma}[t_0;T], \ 0 < \gamma \le 1$, то решение $\mathcal{V}(t,\mathcal{E})$ уравнения (2) при $\mathcal{E} \to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению u(t). При этом справедлива оценка

$$\left\| v(t,\varepsilon) - u(t) \right\|_{c} \le \frac{b_0}{1 - \gamma_0 b_0} c_0 c_{\gamma} \varepsilon^{\gamma}, \tag{17}$$

где
$$c_{\gamma} = \sup_{(t,s) \in [t_0,T]} \frac{|u(t) - u(s)|}{|t - s|^{\gamma}}; \ c_0 = \gamma \int_0^{\infty} e^{-m\tau} \tau^{\gamma - 1} d\tau.$$



Доказательство. С помошью несложных преобразований получим следующую оценку для уравнения (15)

$$\left|\xi(t,\varepsilon)\right| \leq \gamma_0 \left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_c + \int_{t_0}^{\alpha(t)} \frac{L}{m} (2e^{-1}+1) \left|\xi(s,\varepsilon)\right| ds + \int_{\alpha(t)}^t \frac{L}{m} \left|\xi(s,\varepsilon)\right| ds + \left|U(t,\varepsilon)\right|, \ t \in [t_0,T].$$

Отсюда имеем

$$\left| \xi(t,\varepsilon) \right| \le \frac{L}{m} (2e^{-1} + 1) \int_{t_0}^{t} \left| \xi(s,\varepsilon) \right| ds + \gamma_0 \left\| \xi(t,\varepsilon) \right\|_{c} + \left\| U(t,\varepsilon) \right\|_{c}, \ t \in [t_0,T]. \tag{18}$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, из (26) имеем

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{c} \leq \left[\gamma_{0}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{c} + \left\|U(t,\varepsilon)\right\|_{c}\right]e^{\frac{L}{em}(2e^{-1}+1)(T-t_{0})}$$

Отсюда вытекает

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{c} \leq \frac{b_{0}}{1-\gamma_{0}b_{0}}\left\|U(t,\varepsilon)\right\|_{c}.$$
(19)

Введя норму для $U(t,\varepsilon)$ надложащим образом в различных функциональных пространствах из (19) получим требуемые оценки (24) и (25). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1^0 - 3^0 и $\gamma_0 b_0 < 1$, где γ_0 и b_0 - определены в теореме 1. Тогда решение уравнения (1) в пространстве $C[t_0,T]$ единственно.

Доказательство. Пусть u(t) - ненулевое решение уравнения (1) в $C[t_0,T]$ при $f(t)=0, \quad \forall t \in [t_0,T]$. Тогда из (1) имеем $\int\limits_{\alpha(t)}^t K(s,s)u(s)ds + \int\limits_{\alpha(t)}^t [K(t,s)-K(s,s)]u(s)ds = 0,$ $t \in [t_0,T]$.

Далее
$$\left|\int_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)u(s)ds\right| \leq \int_{\alpha(t)}^{t} |K(t,s)-K(s,s)||u(s)|ds$$
, $t \in [t_0,T]$. Отсюда к левой

части применяя теорему о среднем, а к правой части условие теоремы 2, имеем

$$\left| K(s^*, s^*) u(s^*) [t - \alpha(t)] \right| \leq \int_{\alpha(t)}^{t} L(t, s) \|u(t)\|_{c} ds = L \|u(t)\|_{c} \left[-\frac{(t - s)^2}{2} \right]_{s = \alpha(t)}^{s = t} = \frac{1}{2} L \|u(t)\|_{c} (t - \alpha(t))^{2}, \ s^* \in [\alpha(t), t].$$
 (20)

Далее, из (20) получим
$$\left|K(s^*,s^*)u(s^*)\right| \leq \frac{1}{2} \|u(t)\|_c (t-\alpha(t), s^* \in [\alpha(t),t].$$



Отсюда переходя к пределу при $t \to t_0$ имеем $u(t_0) = 0$. Тогда $v(t, \mathbf{\epsilon}) = 0$ при

всех
$$t \in [t_0, T]$$
, $\varepsilon > 0$ и из оценки (16) получим $\|u(t)\|_c \le \frac{b_0}{1 - \gamma_0 b_0} [\|2u(t)\|_c e^{\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega(\varepsilon^{\beta})].$

Из последней оценки следует, что u(t) = 0 при всех $t \in [t_0, T]$. Теорема 2 доказана. Заключение: Доказана единственность решения уравнения (1).

Литература

- 1. Apartsyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First King. Utrech: VSP, 2003. P. 168.
- 2. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Inverse Problems. Utrech: VSP, 1998. P. 226.
- 3. Bukhgeim A.M. Volterra Equations and Inverse Problems. Utrech: VSP, 1999. C. 204
- 4. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск.: Наука. Сиб. отд-ние, 1999. С. 193.
- 5. Асанов А., Бекешов Т.О., Чоюбеков С.М. Регуляризация и единственность решения неклассического интегрального уравнения со условиям Липщица. Кырг.НУ-Вестник. Бишкек, 2011. С. 108-111.
- 6. Асанов А., Бекешов Т.О., Чоюбеков С.М. О решении неклассического интагрального уравнение I рода в пространстве не прерывных фукнции. Вестник ОшГУ. Ош, 2012. С. 48-54.
- 7. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука. С. 198-350.
- 8. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтера первого рода // ДАН 1991. Т. 317. № 1. С. 32-35.
- 9. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // ДАН 1989. Т. 309. № 5. С. 1052-1055.

УДК: 517.955.8

Эркебаев У.З., аспирант ОшГУ

Асимптотическое поведение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с граничной особой точкой

Целью данной работы является построение равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с граничной особой точкой. Когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет простую точку поворота на границе области, применяется метод К. Алымкулова — обобщенный метод погранфункций. Построена равномерная асимптотика решения поставленной задачи.

The aim of this paper is to construct a uniform asymptotic solution of the Dirichlet problem for the bisingularly perturbed elliptic equation with singularity boundary point. The corresponding unperturbed equation has a turning point with on the boundary domain. A K. Alymkulov's method (generalized method of boundary functions) has been applied. The uniform asymptotic solution of the problem was constructed.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения

$$\varepsilon \Delta u - (1 - x) u_v = f(x, y), (x, y) \in D = \{(x, y) | y > x^2 - 1, y < 0\}, \tag{1}$$



$$\mu|_{\Gamma} = \psi(x, y), \qquad \Gamma = \partial D,$$
 (2)

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $u=u(x,y,\varepsilon)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y) \in C^{(\infty,\infty)}(D)$, $0 < \varepsilon << 1$ — малый параметр, $\Gamma = \partial D$ — граница области D.

С начала, покажем бисингулярность задачи (1)-(2). Первая сингулярность очевидна, что предельное уравнение меняет тип

$$-(1-x) u_y = f(x,y),$$

и решение этого уравнения не может удовлетворять условию (2). Чтобы показать вторую особенность (сингулярность), рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1)-(2), которое ищем в виде:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(x, y), \text{ при } \varepsilon \to 0.$$
 (3)

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях є, получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-(1-x)\frac{\partial \widetilde{v}_0(x,y)}{\partial y} = f(x,y),$$

$$(1-x)\frac{\partial \widetilde{v}_k(x,y)}{\partial v} = \Delta \widetilde{v}_{k-1}(x,y), k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда определяем $\widetilde{v}_k(x,y)$:

$$\widetilde{v}_0(x,y) = -\frac{1}{1-x} \int_{x^2-1}^{y} f(x,s)ds + \psi(x,x^2-1),$$

$$\widetilde{v}_k(x,y) = \frac{1}{1-x} \int_{x^2-1}^{y} \Delta \widetilde{v}_{k-1}(x,s) ds, k \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $\widetilde{v}_k(x,y) \in C^{(\infty,\infty)}(\overline{D} \setminus (1,0))$, т.е. в точке (1,0) все эти функции $\widetilde{v}_k(x,y)$ имеют нарастающие особенности вида:

$$\widetilde{v}_k(x,y) = O(1/(1-x)^{1+3k}), k=0,1,2,...$$

Внешнее решение имеет вид:

$$V = \frac{1}{(1-x)} \left(-f(x,r) + \frac{\varepsilon}{(1-x)^2} F_1(x,y) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{(1-x)^3} \right)^m F_m(x,y) + \dots \right), \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где
$$F_k(x,y) \in C^{(\infty,\infty)}(\overline{D}), k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому задача (1)-(2) является бисингулярной — коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности в точке (1,0). В окрестности этой точки ряд (3) не только не приближает решение $u(x,y,\varepsilon)$, но даже теряет асимптотический характер [1].

Построение формального асимптотического разложения решения задачи (1)-(2). Для построения ФАР решения применяем метод профессора Келдибая Алымкулова [2]-[8]. Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде:



$$u(x,y,\varepsilon)=V(x,y,\varepsilon)+\Pi(x,\tau,\varepsilon)+W(\eta,y,\mu),$$
 (4) где $V(x,y,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kv_k(x,y),$ $\Pi(x,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi_k(x,\tau),$ $W(\eta,y,\mu)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^kw_k(\eta,y),$ $\tau=y/\varepsilon,$ $\eta=(1-x)/\mu,$ $\varepsilon=\mu^3.$

Учитывая граничное условие (2) имеем:

$$V(x, y, \varepsilon)\Big|_{y=x^2-1} = \psi(x, x^2-1);$$
 (5)

$$\Pi(x,\tau,\varepsilon)|_{\tau=0} = \psi(x,0) - V(x,0,\varepsilon), \Pi(x,\tau,\varepsilon) \to 0, \text{ при } \tau \to \infty;$$
 (6)

$$W(0,y,\mu)=0, W(\eta,y,\mu) \to 0,$$
при $\eta \to +\infty.$ (7)

Подставляя (4) в (1) получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \Delta v_k(x,y) - \left(1-x\right) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial v_k(x,y)}{\partial y} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left(\frac{\partial^2 \pi_k(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_k(x,\tau)}{\varepsilon^2 \partial \tau^2}\right) - \frac{\partial^2 \pi_k(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_k(x,\tau)}{\varepsilon^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \pi$$

$$-\left(1-x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\frac{\partial\pi_{k}(x,\tau)}{\varepsilon\partial\tau}+\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^{k+3}\left(\frac{\partial^{2}w_{k}(\eta,y)}{\mu^{2}\partial\eta^{2}}+\frac{\partial^{2}w_{k}(\eta,y)}{\partial y^{2}}\right)-\mu\eta\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^{k}\frac{\partial w_{k}(\eta,y)}{\partial y}=$$

$$= f(x,y) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(y) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} h_k(y).$$
 (8)

По идее метода, мы в правую часть последнего равенства прибавили и убавили одну и ту же функцию $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(y)$, функции $h_k(y)$ определим ниже.

Построение регулярного решения $V(x,y,\varepsilon)$. Из (5) и (8) для функции $v_k(x,y)$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \left(\Delta v_{k-1}(x, y) - (1-x) \frac{\partial v_{k}(x, y)}{\partial y} + h_{k}(y) \right) - (1-x) \frac{\partial v_{0}(x, y)}{\partial y} = f(x, y) - h_{0}(y),$$

$$v_{0}(x, y)\Big|_{y=x^{2}-1} = \psi(x, x^{2}-1), v_{k}(x, y)\Big|_{y=x^{2}-1} = 0, k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, получим:

$$-(1-x)\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} = f(x,y) - h_0(y), \ v_0(x,y)\Big|_{y=x^2-1} = \psi(x,x^2-1);$$
(9)
$$(1-x)\frac{\partial v_k(x,y)}{\partial y} = \Delta v_{k-1}(x,y) + h_k(y), \ v_k(x,y)\Big|_{y=x^2-1} = 0, k \in \mathbb{N}.$$
(10)

Решения задач (9), 10 имеют вид, соответственно:

$$v_0(x,y) = -\frac{1}{(1-x)} \int_{x^2-1}^{y} (f(x,s) - h_0(s)) ds + \psi(x,x^2 - 1),$$

$$v_k(x,y) = -\frac{1}{(1-x)} \int_{x^2-1}^{y} (\Delta_{k-1}(x,s) + h_k(s)) ds.$$

Пусть $g_k(x,y) = -\Delta_{k-1}(x,y)$, тогда $v_k(x,y) \in C^{(\infty,\infty)}(\overline{D})$, $k=0,1,\ldots$, при $h_0(y) = f(1,y)$, $h_k(y) = g_k(1,y)$, $k \in \mathbb{N}$.



Таким образом, мы построили регулярное внешнее решение:

$$V(x,y,\varepsilon) = \psi(x,x^2-1) + \frac{1}{(1-x)} \{ \int_{x^2-1}^{y} (f(1,s)-f(x,s)) ds + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\int_{x^2-1}^{y} (g_k(x,s)-g_k(1,s)) ds \right) \}.$$

Построение обыкновенной пограничной функции $\Pi(x,\tau,\varepsilon)$. Из (6) и (8) для функции $\pi_k(x,\tau)$ имеем:

$$\left(\frac{\partial^{2} \pi_{0}(x,\tau)}{\partial \tau^{2}} - (1-x)\frac{\partial \pi_{0}(x,\tau)}{\partial \tau}\right) + \varepsilon \left(\frac{\partial^{2} \pi_{1}(x,\tau)}{\partial \tau^{2}} - (1-x)\frac{\partial \pi_{1}(x,\tau)}{\partial \tau}\right) + \\
+ \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^{k} \left(\frac{\partial^{2} \pi_{k}(x,\tau)}{\partial \tau^{2}} - (1-x)\frac{\partial \pi_{k}(x,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^{2} \pi_{k-2}(x,\tau)}{\partial x^{2}}\right) = 0$$

 $\pi_0(x,0) = \psi(x,0) - v_0(x,0), \ \pi_k(x,0) = -v_k(x,0), \ k=1,2,...$

 $\pi_k(x,\tau) \to 0$, при $\tau \to -\infty$, k=0,1,2,...

Отсюла

$$l\pi_{0} = \frac{\partial^{2}\pi_{0}(x,\tau)}{\partial \tau^{2}} - (1-x)\frac{\partial\pi_{0}(x,\tau)}{\partial \tau} = 0, \ \pi_{0}(x,0) = \psi(x,0) - \nu_{0}(x,0), \ \pi_{0}(x,\tau) \to 0, \ \text{при } \tau \to -\infty;$$
(11)
$$l\pi_{1} = 0, \ \pi_{1}(x,0) = -\nu_{1}(x,0), \ \pi_{1}(x,\tau) \to 0, \ \text{при } \tau \to -\infty;$$
(12)

$$l\pi_k = -\frac{\partial^2 \pi_{k-2}(x,\tau)}{\partial x^2}, \, \pi_k(x,0) = -\nu_k(x,0), \, \pi_k(x,\tau) \to 0, \, \text{при } \tau \to -\infty, \, k > 1.$$
 (13)

Задачи (11), (12), (13) имеют единственные решения, представляемые в виде, соответственно:

$$\pi_0(x,\tau) = (\psi(x,0) - v_0(x,0))e^{(1-x)\tau},$$

$$\pi_1(x,\tau) = -v_1(x,0)e^{(1-x)\tau},$$

$$\pi_k(x,\tau) = e^{(1-x)\tau}(-v_k(x,0) + \tau P_k(x,\tau)), \ k>1, \ P_k(x,\tau) - \text{ограниченная, гладкая функция.}$$

Построение обобщенной пограничной функций $W(\eta,y,\mu)$. Из (7) и (8) для функции $w_k(\eta,y)$ имеем:

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \mu^{k+3} \left(\frac{\partial^2 w_k(\eta, y)}{\mu^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_k(\eta, y)}{\partial y^2} \right) - \mu \eta \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k \frac{\partial w_k(\eta, y)}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{3k} h_k(y),$$

 $w_k(0,y)=0, w_k(\eta,y)\to 0$, при $\eta\to +\infty$.

Отсюда, получим:

$$Lw_{-1} \equiv \frac{\partial^2 w_{-1}(\eta, y)}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial w_{-1}(\eta, y)}{\partial y} = f_1(1, y), \ w_{-1}(0, y) = 0, \ w_{-1}(\eta, y) \to 0, \ \text{при } \eta \to +\infty; \ (14)$$

$$Lw_0=0, w_0(0,y)=0, w_0(\eta,y)\to 0, при \eta\to +\infty;$$
 (15)

$$Lw_{1} = -\frac{\partial^{2} w_{-1}(\eta, y)}{\partial y^{2}}, w_{1}(0, y) = 0, w_{1}(\eta, y) \to 0, \text{при } \eta \to +\infty;$$
(16)

$$Lw_{3k-1} = -\frac{\partial^2 w_{3k-3}(\eta, y)}{\partial y^2} + g_k(1, y), w_{3k-1}(0, y) = 0, w_{3k-1}(\eta, y) \to 0, \text{ при } \eta \to +\infty, k \in \mathbb{N}; (17)$$

$$Lw_{3k} = -\frac{\partial^2 w_{3k-2}(\eta, y)}{\partial y^2}, w_{3k}(0, y) = 0, w_{3k}(\eta, y) \to 0, \text{ при } \eta \to +\infty, k \in \mathbb{N};$$
 (18)

$$Lw_{3k+1} = -\frac{\partial^2 w_{3k-1}(\eta, y)}{\partial y^2}, \ w_{3k+1}(0, y) = 0, \ w_{3k+1}(\eta, y) \to 0, \ \text{при } \eta \to +\infty, \ k \in \mathbb{N}.$$
 (19)

Все эти задачи имеют единственные решения, удовлетворяющие заданным граничным условиям. Задачи такого типа встречаются в задачах диффузионного пограничного слоя [9].



Асимптотическое поведение решения этих задач при $\eta \to +\infty$, можно определить с помощью ряда:

$$w_k(\eta, y) = \frac{a_1(y)}{\eta} + \frac{a_2(y)}{\eta^2} + \dots + \frac{a_n(y)}{\eta^n} + \dots$$
 (20)

Подставляя (20) в (14), (15) имеем:

$$\left\{\frac{2a_{1}(y)}{\eta^{3}} + \dots + \frac{n(n+1)a_{n}(y)}{\eta^{n+2}}\right\} - \eta\left\{\frac{a'_{1}(y)}{\eta} + \dots + \frac{a'_{n}(y)}{\eta^{n}}\right\} = f(1,y),$$

$$\left\{\frac{2a_{1}(y)}{\eta^{3}} + \dots + \frac{n(n+1)a_{n}(y)}{\eta^{n+2}}\right\} - \eta\left\{\frac{a'_{1}(y)}{\eta} + \dots + \frac{a'_{n}(y)}{\eta^{n}}\right\} = 0.$$

Отсюда

при
$$k=-1$$
: $w_{-1}(\eta,y)=\frac{a_1(y)}{\eta}+\frac{a_4(y)}{\eta^4}+...+\frac{a_{3n+1}(y)}{\eta^{3n+1}}+...,$

где
$$a'_1(y) = -f(1,y)$$
, $a'_{3n+1}(y) = (3n-2)(3n-1)a_{3n-2}(y)$, $a_{3n+2}(y) \equiv a_{3n}(y) \equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$;

при k=0: $w_0(\eta,y)=0$.

Для решения задач (16), (17), (18) и (19) получим:

$$w_1(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta^2}\right), w_{3k-1}(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta}\right), w_{3k}(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta^2}\right), w_{3k+1}(\eta, y) = O\left(\frac{1}{\eta^2}\right).$$

Следовательно, справедливы равенства:

Для $\forall k, w_k(\eta, y) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow +\infty$; $w_k(\eta, y) \in C^{\infty}(\overline{D}), k=-1,0,...$

Обоснование ФАР решения задачи (1)-(2). Пусть

 $R(x,y,\varepsilon)=u(x,y,\varepsilon)-u_n(x,y,\varepsilon),$

где
$$u_n(x,y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k v_k(x,y) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \pi_k(x,\tau) + \sum_{k=-1}^{3n} \mu^k w_k(\eta,y)$$
, $R(x,y,\varepsilon)$ – остаточный член.

Тогда для $R(x,y,\varepsilon)$ получим задачу:

$$\varepsilon \Delta R - (1-x)R_v = O(\varepsilon^{n+1/3}), R|_{\Gamma} = 0.$$

Из принципа максимума следует, что

$$R=O(\varepsilon^{n+1/3}).$$

Нами доказана

Теорема. Если $f(x,y) \in C^{(\infty,\infty)}(\overline{D})$, $f(1,y) \neq 0$, тогда для решения задачи (1)-(2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x,y) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(x,\tau) + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k w_k(\eta,y), \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Заключение. Построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с граничной особой точкой. Когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет простую точку поворота на границе области. Мы применяли метод К. Алымкулова – обобщенный метод погранфункций. Главный член асимптотики решения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру. Построенная равномерная асимптотика решения поставленной задачи не улучшаемая.

Литература

- 1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. С. 334.
- 2. Alymkulov, K. Extension of boundary layer function method for singularly perturbed differential equation of Prandtle-Tichonov and Lighthill types. Reports of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries, Almaty, June July, 2009. P. 256-259.



- 3. Alymkulov, K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point. American Journal Math. & Statistics, 2013, v. 3, n.1. P. 53-61.
- 4. Алымкулов, К. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. Матем. заметки, Т. 92. Вып. 6, 2012. С. 819-824.
- 5. Алымкулов, К. Аналог метода погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке // сб. тезисов межд. конф. «Дифференциальные уравнения и оптимальное упарвление», посвящ. 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. Москва, 2012. С. 12-14.
- 6. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. Заметки. Москва, 2013, Т. 94, вып. 4. С. 484-487.
- 7. Турсунов Д.А. Аналог метода погранфункции для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Сб. научн.трудов X межд.науч.конф. Молод. учен. «Перспективы развития фунд-х наук» Россия, Томск, 2013. С. 623-626.
- 8. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Вестник ТомГУ. Математика и механика. 2013, 6(26). С 37-44
- 9. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 576.

УДК: 621.315.592

Арапов Б., д.ф.-м.н., профессор, Садыкбекова А., ОшГУ

Жарым өткөргүчтөрдөгү иондук процесстер жана дефектердин радиациялык-стимулдаштырылган диффузиясы

Макалада жумушта жарым өткөргүчтөрдөгү дефекттердин радиациялык стимулдашкан диффузиясына иондук процесстердин таасири жөнүндө кыскача обзор берилди.

В данной работе дан краткий обзор о роли ионных процессов радиационно-стимулированной диффузии дефектов в полупроводниках.

In this paper we give a brief overview of the role of ionic processes of radiation-stimulated diffusion of defects in semiconductors.

Акыркы мезгилде катуу заттардагы өз алдынча жана гетеро диффузияга иондоштурулуучу нурдануунун ролун изилдөөгө көбүрөөк көңүл бурула баштады. Бул деген контролдоочу процесстер (дефекттердин комплексин жок кылуу жана кайра түзүү, радиолиз, радиациялык-стимулдаштырылган сорбция жана катализ, катуу телолордогу химиялык реакциялар, фазалык айлануулар ж.б) радиациялык нурдантуунун аракетинин натыйжасында катуу телолордун мүнөзүнүн өзгөрүүсүн аныктоо менен байланышкан. Катуу телолордогу төмөнкү температурадагы радиациялык-стимулдаштырылган диффузия (РСД) кубулушунун закон ченемдүүлүктөрүн аныктоо жогоруда аталган процесстердин механизми жөнүндө маалымат алууга мүмкүнчүлүк берет, ошондой эле жарым өткөргүчтүү приборлордун радиациялык туруктуулугун жогорулатуу маселеси



менен байланышкан суроолорду чечүүгө жана жарым өткөргүчтөрдү төмөнкү температурада легирлөө методун изилдөөгө жардам берет.

Жогорку энергетикалык нурдантуунун натыйжасында катуу заттардагы кошулмалардын диффузиясын ылдамдатуу жогорулатылган температуралык шартта жетиштүү деңгээлде изилденген жана негизинен вакансиялардын кошумча концентрацияларынын кирүүсү катары түшүндүрүлөт.

Азыркы мезгилде жарым өткөргүчтөрдүн радиациялык стимулдаштырылган диффузия кубулушунда андагы иондук процесстерди аныктоонун да зарылчылыгы пайда болду [1, 2]. Иондук кристаллдагы радиациялык деффекттердин пайда болуусунда, айлануусунда жана жок болуусундагы иондук процесстердин ролу кеңири изилденип жатат [2, 4].

Бул жумушта жарым өткөргүчтөрдөгү радиациялык ылдамдатылган жана радиациялык стимулдаштырылган диффузиялык процесстерди эксперименталдык жактан изилдөө жана заманбап ыкмаларды колдонуу менен диффузиялардын элементардык актыларынын активдешүү механизмдеринин закон ченемдүүлуктөрүн изилдөөлөрүнүн кыскача обзору каралган.

Алдын-ала нурдануунун жылуулук диффузиясына таасир этүүсү

Белгилүү болгондой кремнийдеги туруктуу радиациялык диффузиялар кошулмалардын, вакансиялардын, дивакансиялардын жана башка кристаллдык торчолордун ырааттуулуктарынын бузулушунун татаал комплексин берет. Структуралык жетишпестиктер кандайдыр бир негизде кошулмалардын жылуулук диффузияларынын агымына чоң таасирин берет.

Э.П. Савин жана В.И. Болтакс [6] цинктин кошулмасынын индий арсенид кристаллына нейтрондук нурдантуусунун диффузияга тийгизген таасирин изилдешкен. Цинк кошулмасы бар In As кристаллын нейтрон менен нурдантышкан, андан соң 600-650°C температуралык интервалда диффузиялык жок кылуу жүргүзүлгөн. 600-700 °C температуралык областта p-n өтүүнүн тереңдиги нурданбаган башка бөлүккө караганда нурдантылган бөлүктө көбүрөөк болгон жана бул айырма температуранын жогорулашы менен өскөн. 750°C температурада нурданган бөлүктөгү p-n өтүү нурданбаган башка бөлүккө караганда кристаллдын беттик бөлүгүнө жакыныраак жайланышкан. Алынган эксперименталдык жыйынтыкты авторлор төмөнкүчө түшүндүрүшкөн: 600-700°C температуралык интервалда цинк индийдин арсенидине негизинен вакансиялар боюнча которулган, нурданган материалдагы алардын вакансияларынын концентрациясынын жогорулашы диффузия коэффициентинин да өсүшүнө алып келген.

Салыштырмалуу жогорку температурада цинктин диффузия механизми диссоциативдүү боло баштайт, ошол эле учурда вакансиялардын концентрациясынын өсүшү диффузиянын эффективдүү коэффициентинин азайышына алып келет жана ошол эле мезгилде индий арсенидинин эрүүсүнүнүн жогорулагандыгы байкалат.

Адабиятта көрсөтүлгөн [7] жумуштун автору кремнийдеги жылуулук диффузиясынын өсүүсүнүн энергиясы 20 кэВ болгон сурьманын иону менен нурдантуунун салыштырмалуу ылдамдануусун изилдешкен. Бул эффект жука беттик катмарда (900А чейин) байкалган. Салыштырмалуу түрдө ¹²²Sb иондору менен нурданган кремнийдин бөлүкчөсү 700°С температурада жоголгон.

Мына ушуга окшош эле жыйынтык аллюминийдин кремнийге болгон диффузиясында да алынган.

Демек, жарым өткөргүчтөргө дефекттерди пайда кылуучу нурдантуулар менен аракет этүү вакансиялык механизмдин негизинде кошулмалардагы диффузиянын эффективдүү коэффициентинин жогорулашына жана анын диссоциативдүү механизм учурунда эффективдүү коэффициентинин азайышына алып келет.

Нурдануу убагында диффузиялардын үзгүлтүксүз ылдамдануусу



Катуу заттардагы гетеро жана өз алдынча диффузиянын нурдантуунун аракети менен ылдамдануу фактысы [7,8] авторлор тарабынан түшүндүрүлгөн. Алар иреттештирилген металлдык кошулмалардагы р-п өтүүнүн жылышуусун, нурдантуунун аракети астындагы миграциянын ылдамдануусу менен байланышкан дефекттердин жоголуусунун ылдамдануусун байкашкан. Диффузиянын ылдамдануусу жогорку энергетикалык нурдантуу мезгилинде жана чекке чейинки энергияларга ээ болгон нурдантуу убагында байкалган. Кызык жери, иондоштурулган нурдануунун аракетинин натыйжасында кошулмалуу атомдук дефекттердин диффузиясы кадимки жылуулук диффузиясынын салымы аз болгон температуралык интервалда болуп өткөн.

Иондоштуруучу нурдантуу жана радиациялык деффекттерди киргизүү өз алдынча диффузияга жана вакансиялык механизмдеги кошулмалардын миграциясына стимулдаштыруучу аракет этиши керек, көптөгөн изилдөөчүлөр теориялык жактан негизделген жумуштарын мына ушул алкакта изилдешкен. Мындан божомолдонгондой, диффузиянын элементардык актысынын активдешүүсү кадимки (термикалык) жол менен болуп өтөт. Мына ушуга байланыштуу көпчүлүк изилдөөчүлөр негизинен салыштырмалуу жогорку температурада эксперимент жүргүзүшкөн.

Ал эми башка багыттын улантуучулары диффузиянын элементардык актысынын активдештирүүсүн термикалык эмес жол менен да жасаса болот деген идеяны сунушташкан, мисалы кристаллдын моделине жараша анын электрондук майда системаларын ионизациялоо жана дүүлүктүрүү жолун сунушташкан. Бул ыкмада дефекттин диффузиясынын пайда болуусу үчүн жогорку концентрациядагы атомдук дефекттерди түзүүнүн зарылчылыгы жок болот. Ошондуктан аталган процессти төмөнкү температурада изилдөө үчүн элементардык дүүлүгүүлөрдүн жогорку тыгыздыгын пайда кылуу керек. Төмөнкү чегинен төмөн болгон жогорку энергиялык нурдантуу жогорку тыгыздыктагы элементардык дүүлүгүүлөрдү жетишээрлик алганда пайда кыла тургандыгы аныкталган.

Жогорку энергиялуу агымдардын жана электрондордун аракеттенүүсү

Айрым жумуштун авторлору жарым өткөргүчтөрдөгү жогорку энергиялуу нурдануудагы гетеродиффузиянын ылдамдануусун салыштырмалуу температураларда изилдешкен. Алар кошулмалардын диффузиясынын ылдамдыгынын жогорулашын кремнийде (бор, фосфор, галлий) жана германийде (сурьма, мышьяк) энергиясы 1 МэВ болгон электрондордун жана энергиясы 0,2 – 1,5 МэВ болгон протондордун аракеттешүүсүндө байкашкан. Эффектти байкоо үчүн изилденип жаткан кошулманын термикалык жол менен алынган гетеро диффузиялык өткөрүүлөр камтылган пластинасынын локалдык нурдануусу пайдаланылган. кремний же германийдин Бөлүкчөдөгү нурдантуунун диффузиясынын ылдамдануусу тустөнтүү ыкмасы менен келтирилген p-n өтүүнүн жылышуусу аркылуу аныкталган. Локалдык нурдантуу өтүүнүн термикалык жылышуусунун болгон зарылчылыгын жок кылган. Каралган маселелердин негизги жыйынтыктары төмөнкүдөй формулировкаланышы мүмкүн:

- диффузиялык өтүүнүн жылышы орточо энергиядагы протондор менен аракет этүүдө аныкталат;
- диффузиянын ылдамдануу эффекти иондук кошулмаларга жана заряддалган абалга сезгичтүү эмес;
- диффузиянын ылдамдануусу кремний үчүн 800^{0} С ден төмөн эмес жана германий үчүн 400^{0} С төмөн эмес температурада байкалат;
- кремний үчүн 900-1200°С жана германий үчүн 600-950°С температуралык интервалда диффузиянын ылдамдануу эффекти бөлүкчөлөрдүн агымынын тыгыздыгынан да, нурдантуу температурасынан да көз каранды болбойт.

Диффузиянын ылдамдыгынын температурадан көз карандылыгы 900^{0} Сден (кремний үчүн) жана 600^{0} Сден (германий үчүн) төмөнкү температурада нурдантуунун



интенсивдүүлүгүнүн жогорулашы менен жогорку көз карандылык төмөнкү температурага карай жылат.

Адабияттар

- 1. Арапов Б., Авилов А.Б., Оксенгендлер Б.Л. Радиационные дефектообразования и квазихимические реакции в неметаллических кристаллах. Бишкек: "Илим", 2003. С. 120.
- 2. Авилов А.Б., Арапов Б.А., Оксенгендлер В роли динамического хаоса в рекомбинационно стимулированных атомных процессах. Письмо в ЖТФ. 2000. Т. 28. Вып. 2. С. 23-27.
- 3. Б. Арапов Ионные, ионно-дырочные и ионно-электронные процессы распада и взамопревращения радиационных дефектов в ЩГК. Диссертация на соискание... доктора ф.-м.наук. Ош, 1993. С. 270.
- 4. Осконбаев М.Ч. Роль вакансионных дефектов в распаде и преобразовании радиационных центров в кристаллах NaCl и KCl. Диссертация на соискание... кандидата ф.-м.наук. Ош, 1996. С. 140.
- 5. Ташкулов К.Д. Фото- и термостимулированные ионные процессы распада радиационных дефектов в щелочно-галоидных кристаллах. Диссертация на соискание... кандидата ф.-м.наук. Ош, 2011. С. 147.
- 6. Савин Э.П., Балтакс Б.И. ФТП, 1970, Т. 4, В. 3, С.567-570; 1971, Т. 5, В.7, С.1331-1335.
- 7. Gamo., Iwaki M., Masuda G. Jap. J. Appl. 1970, V. 9, N. 3, P. 333-338.
- 8. Itoh T., Одотагі J.J. Appl. Phyz., 1970, V. 41, N. 1, P. 434-440.

УДК: 621. 315. 592

Арапов Б., д.ф.-м.н., профессор, Садыкбекова А., Мирзамахмудов Т., ОшГУ

Исследование фотоэлектретное состояние в пленках CdTe

Бул жумушта CdTe фотоэлектреттик пленканы алуу технологиясына жана фотоэлектрдин касиетине иондук процесстердин ролу изилденген.

Настоящая работа посвящена определению роли ионных процессов в технологии получения фотоэлектретных пленок и исследованию фотоэлектрических свойств фотоэлектретных пленок CdTe.

This work devoted new reproduction effective technology of the getting and researching of the photoelectric functions photoelectric films CdTe.

Известно, что в высоокомных полупроводниковых материалах в случае введения примеси наблюдается фотоэлектретное состояние (ФЭС). В полупроводниковых структурах с микро-р-п-переходами при наличии глубоких уровней релаксационные процессы, обусловленные локализованными на этих уровнях носителями, выступают в форме релаксационных фотоэлектретных элементов. Таким образом, можно изготовить полупроводниковые пленки обладающие фотоэлектретным состоянием (ФЭС). В связи с интерес представляют фотоэлектретные элементы без внешнего этим большой поляризующего поля, которые ΜΟΓΥΤ быть получены на полупроводниковых пленок, генерирующих аномально-большие фотонапряжения (АФН). В этих структурах роль поляризующего поля играют внутренние поля микро-р-ппереходов. Для изготовления таких пленок наиболее перспективными являются АФН

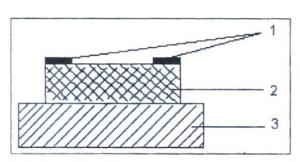


пленки, полученные из полупроводникового соединения теллурида кадмия. Это связано с тем, что АФН пленки CdTe отличаются стабильностью фотоэлектрических характеристик, а также эффективностью взаимодействия с падающим излучением [1, 2].

В настоящей работе продолжены и расширены методики эффективной технологии получения и исследования фотоэлектрических пленок CdTe, рассмотренные нами в работе [3].

Для получения таких элементов использован метод вакуумного испарения путем контроля таких технологических факторов как угол напыления, температура подложки, скорость испарения исходного материала, степень вакуума и т.п. Сложность этой операции заключалась в том, что из-за дендритной структуры пленки практически сложно ее легировать обычными способами, не ухудшая их способности генерировать высокие фотонапряжения. В качестве легирующих примесей для CdTe выбран Zn. Этот выбор обусловлен тем, что диффузия атомов в CdTe происходит при сравнительно низких температурах $T=300^{0}$ C.

Результаты экспериментальных исследований показало, что пленки, полученные таким методом, генерировали фотонапряжения 600-700 В/см и обладали фотоэлектретным напряжением порядка 50 В/см.



В нашем исследовании пленки были получены двумя способами:

1. На поверхность стеклянной подложки прогретой до 300° С в вакууме 10^{-4} мм.рт.ст., сначала напыляли CdTe (см., рис. 1):

Puc. 1. Структура пленки: 1-контакты, 2- **AФH** – пленка, 3-подложка.

Затем на эту поверхность была напылена примесь, которая последующем диффундируется слой напыляемой Точное количество вводимой полупроводниковой плёнки. примеси установить сложного протекания конденсации напыляемого невозможно из-за достаточно полупроводникового материала, а время и скорость напыления металла определялись экспериментально с получением наилучшего (ФЭС). При этом, если скорость осаждения CdTe меньше чем 0,3 нм/с. то полученные плёнки обладали хорошие ФЭС.

2. Получаемые АФН плёнки легировались непосредственно в процессе вакуумного осаждения полупроводника на стеклянные подложки, нагреты до 300° С (при этом примесь Zn из отдельного тигля в отдельности). Скорости их испарения были соответственно 3,1*10⁻⁶ г/см², а время выдержки около 5 секунд, что значительно меньше оптимального времени осаждения исходного материала. Следует отметить, что для получения воспроизводительных плёнок, напыление пленок-слоя примеси необходимо произвести не позднее чем за 30 мин. с начала испарения полупроводника. При позднем напылении примесей на конденсируемые слои CdTe в течении указанных выше интервалах ухудшаются фотоэлектретные свойства. Это связано, по-видимому, с сильным легированием верхнего активного слоя, т.е. разрушением дендритной области элемента.

Таким образом, ионным процессам происходящим при внедрении Zn в CdTe способствуют фотоэлектретное свойства CdTe. Сопоставляя различные способы получения фоточувствительных фотоэлектретных слоев можно сделать вывод, что $\Phi \Theta C$ в пленке наиболее эффективно проявляется в том случае, когда примесь вводится во внутрь выращиваемый полупроводниковой пленки. Однако известно, что в температурном интервале $100-300^{0}$ С примеси диффундируется через слой за доли секунды (коэффициент диффузии их $\Delta = 3.7 * 10^{-4}$ см/c). Проведенные нами экспериментальные



исследования показали, что вводимая примесь, диффундируя неоднородно по толщине, создает дефекты преимущественно на поверхности пленки. Этим объясняется малая концентрация вводимых примесей. Созданные дефекты или их комплексы вполне реально могут быть ответственны за ФЭС в пленке. Если концентрация примеси больше оптимального количества, то по видимому, происходит не только залегание на дефектах, но и легирование объема пленки, что приводит к ухудшению проявления АФН- эффекта. Нанесение контактов на образцы производилось именно таким способом. На оставленную часть поверхности подложки (с обоих концов пленки по 5 минут (рис-1) в вакууме 10^{-4} мм.рт.ст.) напылялись металлы. Кроме этого на некоторые образцы в качестве контактов наносились аквадаговые или серебряные пасты.

На приведены основные параметры пленок

Таблица 1.

N	№ пл.	6	8	12	14	16	17	20
	t ⁰ C	150	180	210	230	250	300	350
,	V,B	200	220	310	480	610	600	470
7	V',B	21	33	38	43	50	48	41

V – АФ напряжение, V' – фотоэлектретные напряжение.

Литература

- 1. Арапов Б. Мирзамахмудов Т. и др. Фотоэлектретное состояние в пленках CdTe + Zn. Вестник ОшГУ, №3. 2005. С. 97-98.
- 2. Мирзамахмудов Т. Фотоэлектрические явление в полупроводниках и оптоэлектроника. Сб. Ташкент, «Фан», 1972. С. 136.
- 3. Мирзамахмудов Т. Образование и исследование фотоэлектрических явлений в полупроводниковых пленках. Ташкент, «Фан», 1976. С. 197.

УДК: 537.86.535.343

Каденова Б.А., ОшГУ kadenova66@mail.ru

Моделирование процессов радиационных дефектов в ЩГК

Бул жумушта катуу телолордогу иондоштуруучу нурдануу процесстеринин өнүгүүсү жана ал процесстердин математикалык жазылышы берилген.

В данной работе описаны процессы, развивающиеся в твердых телах е при взаимодействии его с ионизирующим излучением, и математическое описание этих процессов.

In this work the processes developing in a solid body at its interaction with ionizing radiation and mathematical the description of these processes are described.

Ключевые слова: пороговую энергию, локальный нагрев материала, дифференциальным сечением, радиационного дефектообразования.

Радиационное дефектообразование — это многосторонний процесс, включающий в себя упругие и неупругие взаимодействия бомбардирующих частиц излучения с атомами (ионами) твердого тела, каскады атомных (ионных) соударений, диффузию атомов (ионов) вещества, процессы эволюции дефектной структуры, различного рода



деформации материалов и т.д., приводящие к изменению их свойств. Общая картина радиационного дефектообразования в материалах представлена на рисунке 1,1 [1].

Облучающие частицы, при взаимодействии с материалом, смещают атомы (ионы) из узлов кристаллической решетки, передавая им часть своей энергии. Если эта энергия превышает пороговую энергию смещения E_d , характерную для данного вещества, то атом (ион) оказывается выбитым из узла решетки, образуется так называемый первично выбитый атом (ПВА). При дальнейших столкновениях первично выбитых атомов с атомами решетки образуются вторичные частицы, рождающие, в свою очередь третичные и т.д. В результате образуется каскад движущихся атомов (ионов) (рис.1.2).

В области облучаемого твердого тела, по которому прошел каскад (каскадной области), возникает большое количество (до нескольких тысяч) френкелевских пар, и происходит локальный нагрев материала. В результате прохождения каскада вокруг мест соударений облучающей частицы с атомами (ионами) вещества возникает сложная по составу область (эмбриональное повреждение материала), состоящая из зон обеднения и обогащения.

Картину развития радиационного каскада от момента возникновения первично выбитых атомов до образования в этой области твердого тела характерных структур можно представить в виде схемы, изображенной на рисунке 1.3 [1, 2].



Рис. 1.1. Схема основных стадий радиационной повреждаемости материалов. І динамическая стадия; ІІ диффузионная стадия; ІІІ эволюции стоков.

Рис. 1.2. Схема развития каскада движущихся атомов (ионо вакансия, *крестик* – междоузельный атом).



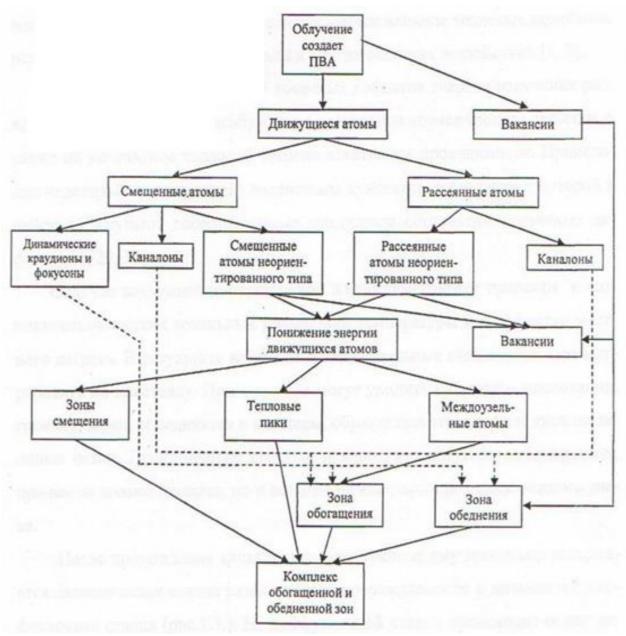
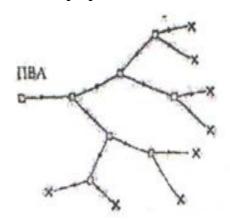


Рис. 1.3. Схема процессов при развитии каскадов движущихся атомов (ионов)



При больших потоках облучения возрастает вероятность прохождения облучения, возрастает вероятность прохождения каскада движущихся атомов по уже поврежденным



участкам кристалла. Каждое послекаскадное распределение дефектов по размерам в пространстве, образовавшееся за время 10^{-13} - 10^{-14} с, стремится прийти в равновесие с окружающей кристаллической решеткой. Но при облучении потоками частиц высокой плотности по этому неустановившемуся дефектному состоянию может пройти новый каскад атом-атомных соударений, причем его эволюция будет осложнена. На все эти процессы накладывается влияние тепловых клебаний решетки, механических напряжений и других внешних воздействий [1, 3].

Одновременно с генерацией точечных дефектов энергия излучения расходуется на ионизацию и возбуждение электронов атомов (ионов) решетки, а также на увеличение тепловой энергии электронов проводимости. Происходит перестройка электронной подсистемы кристалла, в результате которой в действие вступают дополнительные механизмы образования точечных дефектов [1, 4, 5].

Сильное возбуждение электронной подсистемы может привести к возникновению резких локальных повышений температуры и к эффектам местного нагрева. В результате вакансии и междоузельные атомы начинают мигрировать по кристаллу. При этом они могут уходить на стоки- дислокации, границы зерен, объединяться в кластеры, образуя при этом поры и дислокационные петли. Разноименные дефекты при встрече могут рекомбинировать, причем не только попарно, но и попадая на кластеры противоположного знака.

После прохождения каскада и сопутствующих ему процессов завершается динамическая стадия радиационной повреждаемости и начинается диффузионная стадия (рис. 1.3). На диффузионной стадии происходит отжиг дефектов, что приводит к изменению первичной (эмбриональной) дефектной структуры, сформированной в каскадных областях. При этом устанавливаются диффузионные распределения точечных дефектов и образуются их скопления благодаря реакциям исчезновения дефектов, как в результате рекомбинации, так и в результате ухода на стоки (поверхность кристалла, границы зерен, дислокации, трещины) и образования кластеров [1, 6].

В последствии дефекты эволюционируют под действием внешних факторов (облучения, температуры, деформации), что, в свою очередь, приводит к изменению макроскопических свойств материалов под облучением.

Таким образом, из всего вышесказанного видно, что все три стадии радиационного дефектообразования тесно связаны одна с другой, и математические описание радиационного на этих стадиях.

Поскольку в процессе радиационного дефектообразования происходит взаимодействие частиц пучка излучения с большим числом частиц вещества, то при рассмотрении данного явления и при математическом его описании необходимо использовать статистический поход, в основе которого лежит вероятность протекания того или иного процесса взаимодействия. За меру плотности вероятности события при взаимодействии частиц излучения с атомами (ионами) твердого тела принято сечение (дифференциальное, парциальное, полное) реакции, или, иначе, взаимодействия или рассеяния [6].

$$\sigma = m'/\varphi \tag{1}$$

где σ – эффективное сечение взаимодействия; т' – число взаимодействий в единицу времени.

Нами в работах [7, 9] рассмотрено моделирование процессов радиационного дефектообразования в щелочно-галоидных кристаллах. В данной работе рассматривается математическое моделирование процесса образования концентрационно-деформационные структуры в твердом теле. При моделировании возникновения нелинейных деформационно-концентрационных структур в облучаемых твердых телах



рассматривались нелинейные задачи, описывающие кооперативное динамическое поведение взаимосвязанных и взаимообусловленных полей деформаций, концентрации локального беспорядка и температуры среды. Скорость генерации дефектов Q_6 потоком электронов определяется уравнением в работе [10]:

$$Q_{\delta} = y_d[1 + \varepsilon(E)] \cdot \varphi \tag{2}$$

где $\varphi = n \cdot x$ - плотность потока электронов (п-пространственная плотность частиц потока; υ - скорость движения электронов с энергиями E_1); r (E) - каскадная функция Торенса-Робинсона-Норгета (E - средняя энергия, переданная ионам решетки электронами с энергией E_1 ; y_d -сечение образования смещений, рассчитываемое по формуле Маккинли-Фешбаха. Для потока электронов сечение смещения равно:

$$\sigma_{d} = \frac{4\pi a_{0}^{2} z^{2} E_{R}^{2}}{m^{2} c^{4}} \cdot \frac{1 - \beta^{2}}{\beta^{4}} \cdot \left(\frac{E_{m}}{E_{d}} - 1\right) - \beta^{2} \ln \frac{E_{m}}{E_{d}} + \frac{2\pi \beta z}{137} \left(\frac{E_{m}}{E_{d}}\right)^{0.5} - 1 - \ln \frac{E_{m}}{E_{d}}$$
(3)

 $\beta = \frac{\upsilon}{c}$, $E_{\scriptscriptstyle m} = \frac{2(E_{\scriptscriptstyle 1} + 2mc^{\scriptscriptstyle 2})}{Mc^{\scriptscriptstyle 2}} E_{\scriptscriptstyle 1}$ максимальная энергия, которую способен передать иону электрон с энергией $E_{\scriptscriptstyle 1}$; m - масса электрона; M - масса иона решетки; z-заряд иона решетки; $E_{\scriptscriptstyle R}$ - энергия Ридберга; $a_{\scriptscriptstyle 0}$ - радиус атома водорода. В общем случае дифференциальное сечение взаимодействия определяется как отношение числа взаимодействий в единицу времени к плотности потока φ - количеству частиц, падающих нормально на единицу площади за единицу времени, при этом рассеянные частицы имеют энергию в интервале от E до E+dE [10-11].

$$d\sigma = dm'(E)/\varphi \tag{4}$$

Дифференциальное сечение рассчитывается для разных типов облучения с учетом особенностей взаимодействия быстрых частиц с атомами (ионами) твердого тела. В случае облучения кристалла моноэнергетическими электронами упругое рассеяние электронов с энергией порядка мегаэлектронвольт описывается дифференциальным сечением релятивистского резерфордовского рассеяния в кулоновском поле точечного ядра. Это формула была получена Моттом без учета экранирования. Она довольно сложна, и при расчетах пользоваться ею затруднительно, поэтому на практике применяют приближенную формулу Маккинли и Фешбаха. Дифференциальное сечение процесса передачи атому (иону) энергии отдачи между Е и Е+dE в приближении Маккинли и Фешбаха представляется следующее формулой:

$$d\sigma = \frac{4\pi Z^2 e}{m^2 c^4} \cdot \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \cdot \frac{E_m}{E} \cdot \left\{ 1-\beta^2 \frac{E}{E_m} + \frac{\pi Z\beta}{137} \cdot \left[\left(\frac{E}{E_m} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{E}{E_m} \right] \right\}$$
(5)

где Z - порядковый номер рассеивающего атома (иона), е и т-соответственно заряд и масса покоя электрона, с - скорость света, $\beta = \upsilon/c, \upsilon$ - скорость электрона, E_m - максимально



возможная энергия, которую электрон может передать атому (иону), определяемая из соотношения:

$$E_m = \frac{2E_e}{Mc^2} \left(E_e + mc^2 \right) \tag{6}$$

где M - масса рассеивающего атома (иона). E_e - энергия электрона, m - масса электрона. Погрешность вычислений по формуле (5) для Z<40 не превышает 1%, а значит, может использоваться и для щелочно-галоидных кристаллов.

Литература

- 1. Трушин Ю.В. Физическое материаловедение. СП б.: Наука, 2000. С. 286.
- 2. Зеленский В.Ф., Неклюдов И.М., Черняев Т.П. Радиационные дефекты и распухание металлов. Киев: Наук, думка. 1988. С. 296-298.
- 3. Павлов П.В., Хохлов А.Ф. Физика твердого тела. М.: Высш. шк., 2000. С. 494.
- 4. Матковский А.О., Сугак С.Б., Убизский С.Б., Шпотюк Е.А., Черный Е.А., Вакив Н.М., Мокрицкий В.А. Воздействие ионизурующих излучений на материалы электронной техники. Под. ред. проф.А.О. Матковского. Львов: Свит, 1994. С. 212
- 5. Яловец А.П. Радиационная физика твердого тела. Челяб. гос. университет. 1999. С. 83.
- 6. Пайнс Д. Элементарные возбуждения в твердых телах. М.: Мир. 1965.
- 7. Каденова Б.А. «Моделирование процессов упорядоченных структур радиационных дефектов в ЩГК». Наука и новые технологии. Бишкек, 2011. № 5. С. 3-5.
- «Моделирование Каденова Б.А. процессов радиационного дефектообразования щелочно-галоидных // кристаллах». Материалы «Информационные технологии конференции математическое И моделирование в науке, технике и образовании», посвященной 70-летию академика А. Жайнакова. Известия КГТУ им. И. Раззакова, – Бишкек, 2011. №24. – С.
- 9. Каденова Б.А., Арапов Б., Садырова М. Моделирование процессов радиационного дефектообразования в ионных кристаллах. Вестник ОшГУ. Ош, 2012. №3. С. 172-178.
- 10. Каденова Б.А. «Моделирование образования упорядоченных структур мелких скоплений радиационных дефектов в ЩГК». Вестник ОшГУ, I выпуск. 2012. №2. С. 199-202.

УДК: 728.38:621.397

Шамшиев Т.С., КГУ им. И. Арабаева

Исследование записи голограмм цифровой и аналоговой информации на вращающийся диск

Бул илимий иште цифралык жана аналогдук голограмманы жаздыруу алдындагы анализдик маалымат каралган. Удаалаш убакыт боюнча голограмманы жаздыруу иштелип чыккан. Фотополимерди алып жүрүүчү айланма дискте жазылган убактылуу чоңдуктарды экспонирлөө, пайда болуу жана фиксирлөө учурлары үчүн каралат. Айнек подложка жактан каралганда коргоочу пленканын бузулушу азыраак болору байкалган.



Ачкыч сөздөр: фотополимерди алып жиришчи, голограмманын сандык маалыматы, голограмманын аналогдук маалыматы, фотополимерди алып жүрүүчү диске жазуу, ультра кызгылт, айнек подложкасы.

В данной научной работе рассмотрен анализ при записи голограмм цифрой и аналоговой информации. Был отработан последовательный режим записи. Временные величины экспонирования, проявления и фиксирования для случая записи в ФПН на вращающем диске. Также было замечено, что при фиксации со стороны стеклянной подложки коробление защитной пленки происходит намного меньше.

Ключевые слова: фотополимеризующий носитель, цифровой информации голограмм, аналоговая информация голограмм, запись в фотополимеризующий носитель на вращающем диске, ИК- излучения, стеклянная подложка.

In this paper we consider the scientific analysis of the hologram recording digit and analog information. I was worked out the serial recording mode. The time value of exposure, development and fixation in the case of records in FPI on a rotating disk. It was also observed that the fixing side of the glass substrate warpage protective film is much less.

Key words: photopolymerization media, digital information holograms, analog information holograms recorded in a photopolymerizable medium FPI on a rotating disk, IR radiation, the glass substrate.

При записи голограмм цифрой и аналоговой информации, в отличие от записи голограмм плоского волнового фронта, появляется множество факторов, влияющия на качество записываемых голограмм. Поэтому исследование влияние таких факторов является очень важным для получения качественной записи. В данном случае исследования проводились на голографической установке, оптическая схема которой приведена на рис. 1. Рассмотрим работу схемы. Пучок аргонового лазера 1, отражаясь от зеркала 2, делится светоделителем 3 на предметный и опорный пучки. Опорный пучок с помощью зеркала 11 направляется на ФП слой 12. Предметный пучок после отражения от зеркала 4 попадает на микро линзу 6. Расщепленный пучок коллемируется линзой 7 и проходит через транспарант 8, далее свет, несущий информацию транспаранта, фокусируется объективом 10 на ФПН 13. С обратной стороны на носитель попадает ИКизлучение **СО₂**-лазера 17, которое фокусируется ИК-линзой 15. Временем подачи интерференционной картины и фиксации управляет микроконтроллер БК-01 с помощью прерывателей 5 и 16. В экспериментах использовалась фотополимеризующаяся среда OMNIDEX 352 Американской фирмы DUPONT. Был отработан последовательный режим записи. Временные величины экспонирования, проявления и фиксирования для случая записи в ФПН на вращающем диске показаны на диаграмме рис. 2. Из диаграммы видно, происходит экспонирование световым потоком сначала модулированной записываемой страницей в течение 9 с, и проявление поверхности в течение 4 с. После проявления осуществляется фиксирование излучением ИК-лазера с интенсивностью 165 ^{Вт}/см² в течение 40мс. Следует обратить внимание на то, что этот режим отработан для записи в дисковый ФПН при фиксировании со стороны подложки. Такой режим был определен из многочисленных экспериментов и теоретически обоснован.

С целью определения причин некачественной записи голограмм цифровой и аналоговой информации были проведены следующие эксперименты: 1) на ФПН подавалось только импульсы проявления и фиксации, без подачи интерференционной картины; 2) ИК-излучение подавалось не совсем точно, отклонение составляло 0,01-0,3 мм; 3) ИК- излучение подавалось со стороны ФП-слоя.В эксперименте (1) оказалось, что визуально отличия от обычной записи почти нет, т.е. происходит очерчивание области, на которую производилось действие, очень похожое на запись информации.



В эксперименте (2) было получено подтверждение того, что при записи голограмм цифровой и аналоговой информации вследствие малых размеров сфокусированных предметного и теплового лучей их настройка должна быть более точной, чем при записи плоского волнового фронта. Эксперимент показал, что при отклонении ИК-луча уже на 0,05 мм голограмма записывались заметно слабее. В эксперименте (3) было выявлено, что размер задействованной области уменьшился. Теоретически это можно объяснить с помощью рис. 3.(а, б).

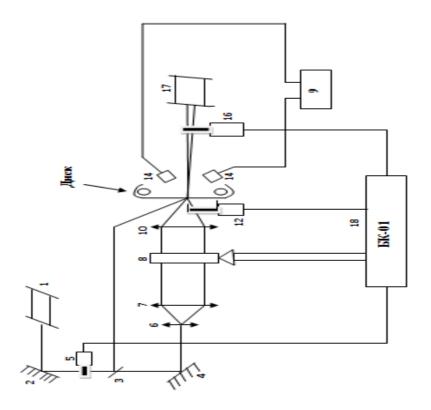


Рис. 1. Оптическая схема записи голограмм: 1-HeNe лазер; 2, 4, 11-зеркала; 3-светоделитель; 5, 16-прерыватели; 6-микролинза; 7-коллимируящая линза; 8-транспарант; 9-осцилограф запоминающий; 10-объектив; 12-коронатор; 13-ФТП-носитель; 14-фотоприемник; 15-ИК линза; 17- $\mathbf{CO}_{\mathbf{2}}$ -лазер; 18-контролер БК-01.

Все дело в том, что при передаче теплового луча со стороны подложки тепло в носителе распространяется не прямолинейно, а создает некоторый фронт, ширина которого больше диаметра ИК-луча. Таким образом, когда этот фронт достигает фотополимеризующего слоя, его размер немного превышает.



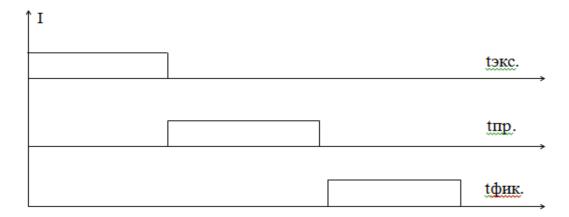


Рис. 2. Диаграмма режима записи голограмм

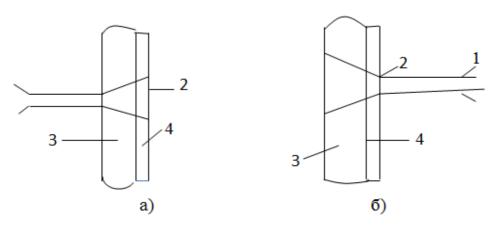


Рис. 3. Размер задействованной области носителя в зависимости от способа подачи ИК излучения: 1-ИК луч; 2-область задействованная при записи; 3-подложка; 4-ФП слой; а) излучение подается со стороны подложки, б) излучение подается со стороны ФП-слоя его диаметр падающего на подложки ИК-луча и размер записываемой голограммы.

В результате чего интенсивному тепловому воздействию подвергается площадь гораздо большая, чем та, которая необходима для проявления скрытого изображения. Если в указанной площади окажется соседняя голограмма, то качество ее изображения может испортиться. Следовательно, для качественной записи голограммы необходимо записывать с шагом, который определяется из размеров указанной площади, что, в свою очередь, ведет к уменьшению плотности.

Также было замечено, что при фиксации со стороны стеклянной подложки коробление защитной пленки происходит намного меньше. В данном случае для того. Чтобы фиксировать, при такой же мощности излучения, по времени нагрева больше, чем при проявлении со стороны $\Phi\Pi$ – слоя. Это можно объяснить, вероятно тем, что глубина проникновения ИК-излучения длиной 10,6 мкм в стекло очень мала (микронный диапазон), т.е. преобладающая часть излучения при фиксации со стороны подложки поглощается в поверхностном слое, что приводит к сильному разогреву подложки, а нагрев пленки происходит через теплопроводность. Напротив, при подаче излучения ${\bf CO_2}$ — лазера со стороны фотополимеризующего слоя большая мощность теплового потока теряется непосредственно на нагрев слоя. Стоит также отметить, что при нагреве со стороны регистрирующего слоя времени, необходимого для фиксирования



изображения, требуется меньше, чем при нагреве со стороны подложки. На основе описанных экспериментов были сделаны следующие выводы:

- 1) Размер задействованной площади зависит не только от размера подаваемых пучков лазера, но и от того, какая площадь на носителе подвергается интенсивному тепловому воздействию. Как один из вариантов увеличения плотности записи, предложено подавать ИК излучение со стороны фотополимеризующего слоя.
- 2) Для качественной записи голограмм цифровой и аналоговой информации намного повышаются требования к точности фокусировки не только предметного и опорного лучей, но и луча $\mathbf{CO}_{\mathbf{z}}$ лазера;
- 3) При подаче ИК излучения со стороны подложки коробление защитной основы происходит намного меньше, следовательно, увеличивается срок службы ФПН.
- 4) Известно, что при построении оптических схем ГЗУ больше внимание уделяется сохранению величины оптического сигнала. Обычно запись голографической информации происходит по схеме, приведенной на рис. 1. В данном случае предметный пучок подается на носитель в сфокусированном виде, который можно пояснить с помощью рис. 4, часть энергии опорного пучка (область 2) теряется вследствие того, что его фронт, подающий на ФПН, гораздо шире фронта сфокусированного предметного интерферирует только часть опорного пучка, которая пучка и, следовательно, перекрывается предметным (область 1). А так как для получения максимальной дифракционной эффективности голограмм существует оптимальное соотношение этих лучей в области их интерферирования, т.е. в область 1, то при делении луча лазера на предметный и опорный приходится производить деление таким образом, чтобы большая часть излучения отклонилась в сторону опорного пучка, где, как было показано, большая мощность излучения не используется. Для того чтобы избежать таких потерь, было предложено фокусировать также опорный луч. В этом случае, как видно из рис. 5, область 2, которая была показана на рис. 4, исчезает и остается только область 1, т.е. в данном случае потерь энергии такого рода (причем обычно значительных), не происходит. Еще одной проблемой при записи голографической информации является получение расширенного коллимированного пучка с равномерным распределением интенсивности. В схеме рис. 1 расширение предметного пучка осуществляется с помощью микро линзы, которая на выходе обычно снабжается диафрагмой. Но, тем не менее, качество расширенного пучка, получаемого таким образом, не является наилучшим. Основной недостаток - это неравномерное распределение интенсивности расширенного пучка, что особенно негативно сказывается на записи аналоговых голограмм, где обычно присутствуют различные степени градаций яркости записываемых изображений. Чтобы избежать этого недостатка было использовано волокно (рис. 6). Излучение вводится в волокно с помощью юстировочного устройства 2. Входной торец волокна 3 снабжен линзой 1 с малым фокусным расстоянием, при этом удавалось вводить до 60 излучения. На выходе волокна получается расширенный луч с равномерным распределением интенсивности, по качеству намного превышающее распределение интенсивности, получаемое с помощью микролинзы. Следует оговориться, что при определении указанных зависимостей подбирались режимы записи с различными параметрами, отвечающие задачам получения максимальной дифракционной эффективности в каждом отдельном эксперименте.



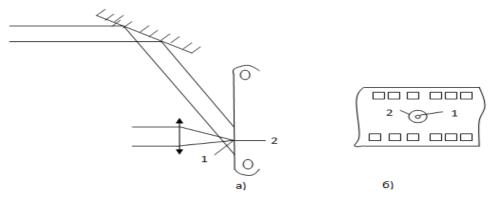


Рис. 4. Распределение оптической энергии при несфокусированном опорном луче: а) схема подачи лучей: б) области засветки объектным и опорным лучами.

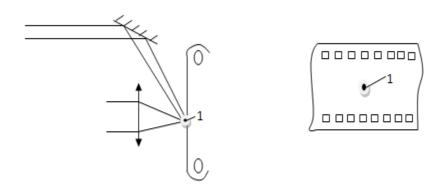


Рис. 5. Распределение оптической энергии при подаче сфокусированного опорного луча: а) схема подачи лучей; б) область засветки объектным и опорным лучами.

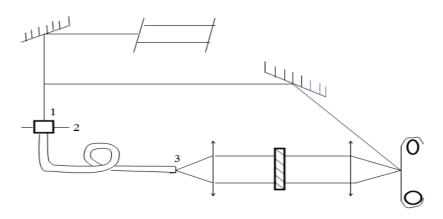


Рис. 6. Схема получения расширенного луча с использованием волоконного световода.

Литература

- 1. Запись голограмм на непрерывно движущийся фототермопластический носитель. Сорока С.И., Ратников С.И. Фундаментальные основы оптической памяти и среды. Респ. меж. вед. науч. сб. 1981. Вып. 12. С. 47-54.
- 2. Сорока С.И. Исследование процессов и разработка аппаратуры записи цифровой информации на фототермопластический носитель. Автореферат дис. канд. тех. наук. Минск, 1982.
- 3. Методы оптической обработки информации: Сборник научных трудов. Л., С. 72-100.



- 4. Баязитов Р.М., Хайбулин И.Б., Зарипов М.М. Лазерный нагрев тонких пленок на поглощательных подложках // Физика и химия обработки материалов. 1979, №2. С. 14-17.
- 5. Нагрев двухпленочной структуры излучением лазера // Григоров Ф.З. Физика и химия обработки материалов. 1977, №4. С. 14-22.

УДК: 539.5.53

Юсупов З.Н., Худжандский Научный центр академии наук Республики Таджикистан, г. Худжанд zarif 1972@mail.ru

Некоторые особенности развития трещины в адгезионном контакте кожа-десмокол-кожа

В лабораторном эксперименте методом видеосъёмки в режиме in situ изучались особенности роста трещины в адгезионном контакте в зависимости от степени повреждения образца. Показано, что рост трещины представляет многостадийный процесс и по мере возрастания повреждённости увеличивается время разрушения, что свидетельствует о возрастании вязкости разрушения контакта.

Ключевые слова: адгезионный контакт, десмокол, кожа, термоцикл, разрушение, прочность, трещины.

The author studied the peculiarities of split growth in the adhesive contact respective of the degree of damages of the paragon; the stuclies bling conducted in laboratory conditions. It is shown that a speit growth is a multistagecl process, increase of damage depend s on time passing that testifies to ductiloty accretion associated with destruction of cintact.

Key words: adhesive – contact, desmokol, skin – skin, thermocycle, destruction, split.

Технологичность организации адгезионных контактов, возможности в широких пределах регулировать (управлять) физические и функциональные свойства таких контактов делает их привлекательными, а порой единственно возможными способами соединения элементов конструкции [1, 2]. Ясно, что работоспособность и долговечность машин и механизмов во многом зависит от прочности и надёжности работы адгезионных контактов элементов конструкции. Поэтому изучение физико-химических вопросов прочности и долговечности адгезионных контактов, в том числе под действием внешних факторов, является актуальной задачей современной науки и технологии.

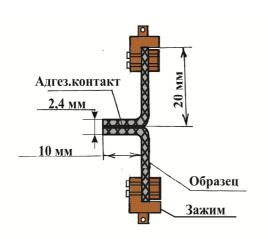
Систематическое исследование длительной прочности адгезионных контактов под действием внешних и эксплуатационных факторов, поиск механизмов образования адгезионых контактов на молекулярном уровне позволяет найти наиболее общие закономерности разрушения контактов [3]. Эти результаты, в конечном итоге, позволяют прогнозировать не только долговечность реальной конструкции, но свойства проектируемого материала или элемента конструкции. Значение исследований этим не ограничивается. На этом пути могут быть найдены наиболее оптимальные технологические приемы организации адгезионных контактов для конкретных адгезионных пар. Это, естественно, стимулирует поиск новых, наиболее эффективных адгезивов и т.д.

В работе исследовалось влияние термоциклов на кинетику разрушения адгезионного контакта кожа-десмакол-кожа. В лабораторном эксперименте методом



видеосъёмки в режиме in situ изучались особенности скорости роста трещины в адгезионном контакте от количества термоциклов. Прямоугольные полоски размером 30 х 10 мм вырезались из натуральной кожи толщиной 1,2-1,4 мм. Затем площадь будущей контактной зоны размером 10x10 мм очищалась наждачной бумагой и на очищенную поверхность кожи наносился клей «Десмокол». Такие кожаные полоски-полуфабрикаты в комнатных условиях выдерживались в течение 15-20 минут. Далее полоски-полуфабрикаты помещались в камеру термостата с температурой $80-90^{\circ}$ С на 30 секунд.

После выдержки в этих условиях приклеенные места полосок прижимали (прессовали) под давлением приблизительно 100 кПа в течение одной минуты.



Приготовленные таким образом образцы (рис.1), хранились в комнатных условиях (20^{0} С, относительной влажности 60%) в течение 24 часов.

Вначале определялась зависимость прочности контакта кожа-кожи от времени выдержки образца в комнатных условиях. Эксперимент показывает нелинейный рост прочности адгезионного контакта с увеличением времени выдержки (рис.2). Можно видеть, что через примерно 3-4 часа наступает насыщение в зависимости «прочность — время выдержки». Максимум адгезионной прочности в данных условиях составляет примерно 32 МПа.

Рис. 1. Вид образца и схема

эксперимента.

Таким образом, в эксперименте найдены температурно-временные условия стабилизации механической прочности данного контакта. Воизбежание сложностей, связанных с изменением свойства контактного слоя, далее образцы исследовались после их стабилизации.

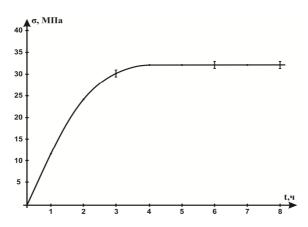


Рис. 2. Влияние времени выдержки при комнатной температуре на прочность адгезионного контакта кожа-кожа

Часть образцов испытывалась в исходном состоянии, а часть из них подвергалась термоциклированию. Испытания образцов проводились при комнатной температуре в условиях активного нагружения ($\dot{\varepsilon}$ =const). Образцы термоциклировались в режиме $20^{0}\mathrm{C} \Rightarrow 50^{0}\mathrm{C}(10\mathrm{мин}) \Rightarrow 20^{0}\mathrm{C}$ (10мин). Влажность термостата при термоциклировании образцов не контролировалась. После 5, 10, 15, 20 циклов образцы подвергались испытанию на раздыр и одновременно с помощью видеокамеры Panasonic-M9000 снимали



развитие процесса разрушения адгезионного контакта. При этом скорость съемки составляла 25 кадров в секунду (рис.3).



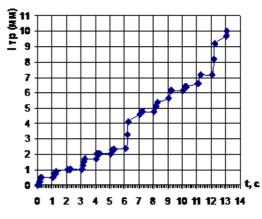




Рис. 3. Примеры видеокадров разрушения контакта кожа-кожа с метками реальной времени деформирования.

Обработка видеоматериала в режиме «стоп кадр» на экране монитора позволяет построить зависимость длины трешины $l_{\rm rp}$ адгезионного контакта от времени активного нагружения (с точностью 0,01 с). Примеры таких графиков для образцов в исходном состоянии и образцов после термоциклирования приведены на рисунке 4. Нетрудно видеть, что рост трещины в адгезионном контакте во всех рассматриваемых случаях представляет многостадийный процесс. Активный рост длины трещины во всех случаях, как правило, прерывается почти её остановкой. Время многократных «остановок» роста трещины в среднем остаётся постоянным и в данном режиме нагружения составляет примерно 0.8-0.9 секунды.





после 20 термоциклов

Рис. 4. Изменение длины адгезионной трещины от времени её роста

Путём обработки зависимости $l_{тp}$ = f (t) дифференциальным методом построили зависимость скорости трещины в адгезионном контакте от времени её роста. Примеры таких графиков приведены на рис. 5. Многостадийность процесса роста трещины в адгезионном контакте хорошо прослеживается и на этих графиках. Пики активности в скорости трещины непременно чередуются зонами «затишья», и такое чередование повторяется многократно во время жизни образца.



Сравнение скорости роста трещины в образцах разной предистории показывает, что в целом по мере увеличения количества термоциклов происходит изменение структуры адгезионного контакта, и это влияет на скорость роста трещины. Эксперимент показывает, что с ростом числа термоциклов происходит увеличение времени разрушения контакта. Так, если для образцов в исходном состоянии время деформирования до полного разрушения составляет в среднем 5-6 секунд, то для термоциклированных (N=20) образцов, это время увеличивается до 12-13 секунд (рис. 5). А это происходит при одинаковом режиме активного нагружения.

Обращает на себя внимание и следующее обстоятельство. С увеличением числа термоциклов происходит изменение активности скорости роста трещины. Так, в образцах прошедших термоциклов по сравнению с исходными образцами последние этапы жизни образца проходят с менее активными пиками скорости роста трещины.

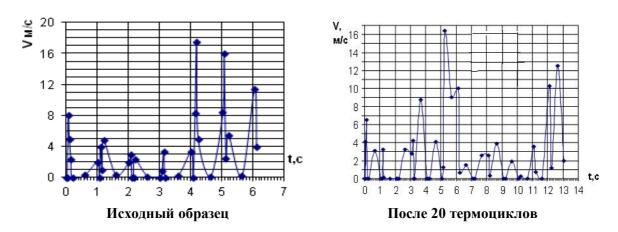


Рис. 5. Изменение скорости магистральной трещины по мере деформирования образца

Анализ полученных результатов прямого слежения за ростом трещины адгезионного контакта для образцов кожа-кожа разной предистории показывает, что с ростом числа термоциклов происходит существенное изменение кинетики разрушения в границе раздела. Эксперимент показывает многостадийность процесса разрушения адгезионного контакта. Многостадийность в росте трещины в данном случае можно объяснить релаксационными процессами в границе раздела, а именно в адгезиве. Ширина горизонтальной ступеньки в зависимости длины трещины от времени деформирования, очевидно, соответствует времени релаксационных процессов, завершение которых приводит к скачкообразному росту трещины. Увеличение времени деформирования по мере роста количества термоциклов связано с увеличением степени повреждаемости в границе раздела.

Возрастание повреждаемости в границе раздела в определённой мере увеличивает вязкость разрушения контакта. А это, как показывает эксперимент, является достаточно мощным фактором диссипации энергии. Вновь образующаяся микротрещина, сталкиваясь с имеющимися дефектами, быстро затупляется и зачастую происходит ее остановка. Это очевидно приводит к возрастанию вязкости разрушения. Следовательно, сам факт предварительного накопления дефектов в теле никак не может быть аргументом ускоренного приближения макроразрушения твёрдого тела.

Литература

- 1. Берлин А.А., Басин В.Е. Основы адгезии полимеров. М.: Химия, 1974. С. 392.
- 2. Зимон А.Д. Что такое адгезия. М.: Наука, 1983. С. 176.
- 3. Регель В.Р., Слуцкер А.И, Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности



твердых тел. - М.: Наука, 1974. - С. 560.

УДК: 621.436.982+629.5.06

Абдалиев У.К., Арзиев Ж.А., Ташполотов Ы. Институт природных ресурсов им. А.С. Джаманбаева Южного отделения НАН КР г.Ош, ОшГУ

Физико-технические основы получения водоэмульсионного топлива

Кавитациялык жана электромагниттик таасир этүү шарттарында суунун молекулаларынын өз ара аракеттенишүүлөрү жана структуралык мүнөздөмөлөрү кандай болот деген суроолор боюнча критикалык шарттардагы жана электр жана магнит талаалары менен аракет эткен учурлардагы суунун абалдары каралды.

Рассматривается состояние воды в критических условиях и в условиях воздействия магнитного и электрического поля нам неминуемо придется коснуться вопроса о том, как изменяются межмолекулярное взаимодействие и характер ближнего упорядочения (структура) в воде в условиях кавитации и электромагнитного воздействия.

During examining the waters condition under the critical condition and under the coercion of the magnetic and electric field inevitablu, we are touched with a question that how the intermolecular interaction is changed and nature of the structure in the water under the cavitational and electromagnetic interactions condition.

Введение. В последние десятилетия особую актуальность приобрело требование экологической чистоты жидких топлив, и появилось еще одно требование, а именно-экономии невосполняемых природных ресурсов, к которым, прежде всего, относится нефть. Оба последние перечисленные требования имеют общемировое значение для обеспечения жизнедеятельности живой природы [1, 2].

В настоящее время исследованием вихревого движения жидкости занимаются некоторые НИИ и научные центры, с целью создания устойчивых топливных смесей на основе двух и более компонентов за счет столкновения встречных потоков жидкости с высокой кинетической и других энергий. Если поток воды пропускать через устройство, создающее турбулентность, то происходит структурирование воды и насыщение её энергией [3, 4].

Материалы и методы получения ВЭТ. В лабораторных условиях приготовление первоначальной водно-бензиновой эмульсии проводили в сосуде емкостью 500 мл, термостатируемой термостатом. Температура воды термостате фиксируется В и регулируется термометром при помощи контактного термометра. газоконденсатный бензин подаются соответственно из разных емкостей путем регулирования их расхода с помощью вентилей. Перемешивание жидких фаз осуществляется с помощью мешалки, которая работает от электродвигателя. В результате получим водо-бензиновую смесь, содержащую 90-95 мас. % воды, 1-10 мас. % бензина.

В дальнейшем для получения водоэмульсионного топлива (ВЭТ) использовали следующую связку: водяной насос выкачивает предварительно подготовленную смесь воды и бензина через отверстия малого сечения сопло Лаваля, и далее эмульсия попадает в гидроударную камеру большего сечения, где и происходит схлопывание пузырьков эмульсии. Эмульсинно-пузырьковая струя направляется под углом на твердую стенку в цилиндрической ёмкости. В цилиндрической ёмкости формируется вихревое образование,



в котором дополнительно образуются кавитационные пузырьки [3, 4], а те что сформировались в кавитационной камере "схлопываются" и делятся на более мелкие пузырьки, которые так же "схлопываются". Как известно, вода не сжимаема, но она очень хорошо разжимаема, с образованием пузырьков. Когда эти пузырьки обратно сжимаются, из-за ускорения возникает высокое давление. При этом молекулы жидкостей, повидимому, соединяются, формируя общёмные кластерные структуры. В результате физико-химические характеристики водо-топливной эмульсии изменяются, так как посредством кавитации жидкофазная эмульсия структурируется.

Наилучшие результаты структурирования ВЭТ получаются при температуре эмульсии в диапазоне $35-42^{0}$ С. Выше $45-55^{0}$ С резко увеличивается время структурирования, а выше 60^{0} С вообще не удаётся. Структуризация воды является стабилизирующим фактором и улучшает воспламеняемость эмульсии.

Поэтому благодаря гидродинамическому кавитационному воздействию водотопливная смесь превращается в «гомогенную суспензию», не расслаивающуюся в течение двух и более суток, в связи с полным перемешиванием воды и небольшого количества нефтяных фракций (бензина).

На практике для быстрого определения состава эмульсий, а также для контроля за качеством продуктов при их производстве часто используют такие оптические свойства, как коэффициент (показатель) преломления. Этот показатель внесен во многие ГОСТы на нефтепродукты и приводится в справочной литературе, так как показатель преломления – очень важная константа не только для индивидуальных веществ, но и для эмульсий (нефтепродуктов), являющихся сложной смесью различных соединений. По показателю преломления можно судить о групповом углеводородном составе топлива, а в сочетании с плотностью и молекулярным весом рассчитать структурно-групповой состав ВЭТ.

В связи с этим, для изучения влияния кластерных структур (разрушение водородных связей и образование ассоциатов) на образование ВЭТ проводили следующий эксперимент: активированную воду под воздействием электрического и магнитного поля смешивали с разной концентрацией бензина марки 92 с целью получения ВЭТ.

Экспериментальная часть. Исследование зависимости показателя преломления эмульсии от концентрации бензина, показанная на рис. 1, свидетельствует о том, что с увеличением соотношения бензина и воды зависимость n=f(c) с нуля до 23 % бензина остается неизменной, затем, начиная с 24% до 37% бензина показатель преломления эмульсии резко возрастает. Далее с 38% до 100% эта зависимость заметно не изменяется.

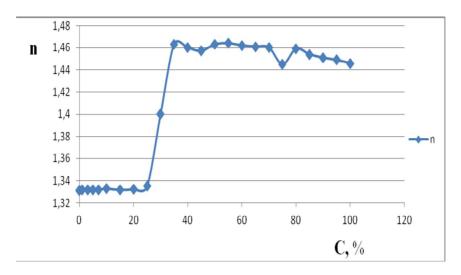


Рис. 1. Зависимость показателя преломления ВЭТ от концентрации бензина марки 92.



Из полученных зависимостей можно сделать вывод, что оптимальной концентрацией бензина для получения ВЭТ является концентрация в пределах 37-40 %.

Как известно, вольт-амперные характеристики (ВАХ) конденсированных систем являются, пожалуй, наиболее доступными для экспериментальных исследований и вместе с тем весьма информативными для определения особенностей генерации, рекомбинации и переноса носителей заряда в этих системах и построения теоретических моделей происходящих процессов в различных системах.

В наших экспериментах процесс получения микро- и наносуспензий совмещался с процессом диспергирования жидкой фазы с дальнейшим процессом образования жидкофазной суспензии.

Эксперименты по изучению влияния электрического поля на эмульсии проводились в системе между электродами: прикладывая к электродам определенное напряжение через токовые контакты измерялся электрический ток.

Измерив напряжение на пластинах и силу тока, используя закон Ома для участка цепи, определили сопротивление (R=U/I) эмульсии, рис.2. Далее, используя формулу ρ =RS/l, определили удельное сопротивление ВТЭ. Тогда удельная проводимость определяется как l/ρ .

В таблице 1 представлены вольт-амперные характеристики суспензии после прохождения через кавитатор и воздействия магнитного поля.

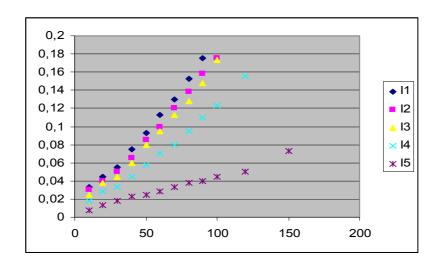


Рис.2. Вольт-амперная характеристика (I=f(U)) суспензии(при различных концентрациях бензина) после кавитации

Таблица 1. Значения токов и напряжения при различных концентрациях бензина в суспензии

	I _{1, A}	$I_{2,A}$	I _{3, A}	I _{4, A}	I _{5, A}
U, B	(20%)	(25%)	(30%)	(35%)	(40%)
10	0,033	0,03	0,025	0,018	0,008
20	0,045	0,04	0,038	0,028	0,013
30	0,055	0,05	0,045	0,033	0,018
40	0,075	0,065	0,06	0,045	0,023
50	0,093	0,085	0,08	0,058	0,025
60	0,113	0,1	0,095	0,07	0,028



70	0,13	0,12	0,113	0,08	0,033
80	0,153	0,138	0,128	0,095	0,038
90	0,175	0,158	0,148	0,11	0,04
100	-	0,175	0,17	0,123	0,045
120	-	-	-	0,155	0,05
150	-	-	-	-	0,073

Таблица 2. Значения токов и напряжения при различных концентрациях бензина в суспензии

Концентраци в воде (n), %	0	1	2	3	4	5	10	100
Nº,	Напряж ение, В		Сила тока, А						
п/п									
	V	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	10	0,032	0,031	0,03	0,027	0,03	0,027	0,027	0
3	10	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,	3,021	0,00	3,0 2 7	0,00	5,0 2 7	·,·= /	Ŭ
	15	0,052	0,05	0,047	0,045	0,047	0,045	0,042	0
4	20	0,072	0,066	0,066	0,059	0,064	0,06	0,057	0
5	25	0,09	0,085	0,082	0,075	0,08	0,075	0,072	0
6	30	0,11	0,1	0,1	0,091	0,097	0,092	0,087	0
7	35	0,127	0,117	0,115	0,105	0,117	0,1	0,1	0
8	40	0,147	0,137	0,132	0,123	0,13	0,122	0,12	0
9	45	0,167	0,154	0,15	0,137	0,147	0,142	0,135	0,003
10	50	0,19	0,17	0,16	0,15	0,16	0,157	0,15	0,003

Обсуждение результатов. На основе полученных данных (табл. 1) можно заметить, что в вольт – амперной характеристике ВЭТ после пропускания через кавитатор выделяются следующие участки: 1- рост тока от напряжения до концентрации бензина в воде до 2 %; 2-обратная зависимость тока от напряжения с 2 до 100% концентрации бензина в воде. В то же время из таблицы 1 видно, что после магнитного воздействия значения сила тока в зависимости от напряжения стабильно уменьшается. Если построить график зависимости тока от концентрации бензина в воде для случая кавитационного и магнитного воздействий, то получиться картина, показанная на рис. 3. Из рис. 3. видно, что существует оптимальная концентрация, начиная с которой влияние кавитации и



магнитного поля незначительны. Точки пересечения(концентрация бензина -2 и 5%, в воде), также, по-видимому, отражают оптимальные соотношения воды и бензина в ВЭТ.

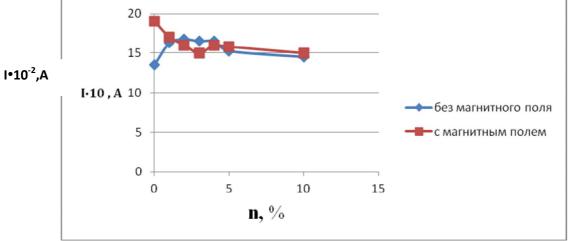


Рис. 3. Зависимость электрического тока от концентрации бензина в суспензии

Таким образом, полученные результаты свидетельствует о влиянии эффекта кавитации и электромагнитного поля на технологии получения и физико-технические свойства ВЭТ.

Литература

- 1. Абдалиев А.У., Ысламидинов А.Ы., Ташполотов Ы., Матмусаев У. Водоэмульсионное топливо: условия получения, особенности и свойства // Наука и новые технологии, Бишкек, 2013. №2 С. 11-17.
- 2. Зейденварг В.Е., Трубецкой К.Н., Мурко В.И., Нехороший И.Х. Производство и использование водоугольного топлива. 2001. С. 163.
- 3. Кнэпп Р., Дэйли ДЖ., Хэммит Ф. Кавитация: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. С. 687.
- 4. Кавитационная технология / В.М. Ивченко, В.А. Кулагин, А.Ф. Немчин; Под. ред. Г.В. Логвиновича. Красноярск: Изд-во КГУ, 1990. С. 200.
- 5. Корнев Я.И., Исаев Ю.Н., Ушаков В.Я., Хаскельберг М.Б., Яворовский Н.А., Колчанова В.А. Влияние распределения электрических полей в реакторе на эффективность электроразрядной обработки воды. // Известия высших учебных заведений. Физика, 2004. №10. С. 89-96.

УДК: 553.43:553.21

Абдуллаева М.Д., д.тех.н., доцент, Аматова Н.С., Каримов А.С. *mairama59@mail.ru*

Исследование минералогического состава нефелинового сиенита Зардалинского месторождения (уч. Молодость).

Баткен облусунун Зардалы кен байлыгындагы нефелин сиенитин минералдык изилдөөлөр, анын көлөмүнүн 70% түзгөн талаа шпаты тобундагы минералдардын 40% нефелин минералдары экендигин аныктады. Бул аларды алюминийди өндүрүш үчүн чийки зат катары колдонууга болоорун көрсөтөт.



Ачкыч сөздөр: нефелин сиенити, талаа шпаты, амфибола, пироксен, гранат, плагиоклаз, элеканализи, магнитик байытуу, гравитациялык байытуу, флотациялык байытуу.

Минералогическое исследование нефелинового сиенита Зардалинского месторождения Баткенской области определило минералы группы полевых шпатов, составляющих в объеме породы до 70%, в том числе 40% минералов нефелина. Это позволяет рассматривать их как сырье для алюминиевой промышленности.

Ключевые слова: нефелиновый сиенит, полевые шпаты, амфибола, пироксен, гранат, плагиоклаз, ситовой анализ, магнитное обогащение, гравитационное обогащение, флотационное обогащение.

В Баткенской области Кыргызстана имеется Зардалинское месторождение нефелиновых сиенитов, запасы которого достигают более 2млрд. тонн. Нефелиновые сиениты – это эффективное сырье для производства ценного металла – алюминия. Как нам известно, в настоящее время нет такой отрасли народного хозяйства, где бы не использовался алюминий. Исходя из сказанного очевидно, что проблема переработки нефелиновых сиенитов Зардалинского месторождения не только остается актуальной, но и приобретает особую важность в условиях современного Кыргызстана [1, 2].

Нами проведена научно-исследовательская работа по исследованию минералогического состава нефелинового сиенита и его обогащения. Исследования проводились в лабораторных условиях на отобранных пробах нефелиновых сиенитов участка «Молодость» Зардалинского месторождения.

С целью изучения раскрываемости минералов и получения технических характеристик проводились поэтапное дробление и ситовой анализ [3, 4]. Результаты ситового анализа пробы ПШ - 1, весом 82,68 г приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты ситового анализа пробы ПШ – 1, весом 82,68 г.

Фракции	Вес фракции (вгр.)	Содержание(в масс.%)
$d_1 = 2_{MM}$,	51,95	62,83
$d_2 = 1_{MM}$,	13,3	16,0
$d_3 = 0.5 MM$,	5,38	6,5
$d_4 = 0.25 \text{MM},$	4,25	5,2
$d_5 = 0,125 \text{MM},$	5,8	7%
$d_6 = 0,0625$ MM	2,0	2,4%
Начальный вес	82,68 г	99,93%

Проведены описания над ситного продукта каждой фракции. <u>Фракция d = 2 мм</u>, вес = 51,95 гр.

Фракция состоит из сростков призматических таблитчатых, пластинчатых зерен полевых шпатов с вростками удлиненных зерен амфибола черного цвета, изометричных зерен пироксена и граната. Пироксен с сильным стеклянным блеском; гранат светлокоричневого цвета. В свободном состоянии находятся мучнисто — белесые таблитчатые кристаллы калиевого полевого шпата — в ед.зн.

Раскрываемость минеральных зерен во фракции очень низкая -1-2 %, нераскрытые сростки составляют до 98 % объема фракций.

Фракция $d_2 = 1$ мм, вес = 13,3 гр.



Фракция состоит из сростков таблитчато-призматических кристаллов полевых шпатов и шестовато вытянутых кристаллов роговой обманки, пироксенов, изометричных зерен пироксена и граната. Сростки кристаллов составляют 90 % объема фракций.

Свободные кристаллы представлены таблитчато-призматическими зернами нефелина и плагиоклаза составляют до 15%. В свободном состоянии также находятся таблитчатые кристаллы сильно разложенного, мучнисто-белесого оттенка калиевого полевого шпата — до 10 знаков.

Раскрываемость минеральных фракций составляет 85-90 %. Встречаются единичные знаки водяно-прозрачного светло-фиолетового с малиновым оттенком кристалла александрита.

Фракция $d_3 = 0.5$ мм, вес = 5.38 гр.

Фракция состоит из сростков призматических таблитчатых зерен полевого шпата с шестоватыми зернами амфиболов и изометричных пироксенов и граната, которые составляют 25 % объемов фракций. В свободном состоянии находятся призматические таблитчатые кристаллы нефелина и плагиоклаза— до 70 %, изометричные зерна пироксена — 5%, зерна амфибола в свободном состоянии единичны. Таблитчатые мучнистого облика зерна калиевого полевого шпата присутствуют до 10 знаков. Раскрываемость фракции — 75 %.

Фракция $d_4 = 0.25$ мм, вес = 4.25 гр.

Фракция состоит из отдельных освободившихся зерен минералов:

- 1) Таблитчато-призматические зерна полевого шпата нефелина и плагиоклаза до 70%.
- 2) В свободном состоянии, изометричные, коротко призматические кристаллы пироксена черного цвета с сильным стеклянным блеском, составляют 10%.
- 3) Шестовато-удлиненные кристаллы амфиболов с совершенной спайностью и тусклым стеклянным блеском, составляют 10%.
 - 4) Мучнисто-белесые кристаллы калиевого шпата составляют до 1 %.
- 5) Нераскрытые сростки полевых шпатов, амфибола, пироксена с гранатом составляют до 5-10 %.

Фракция $d_5 = 0.125$ мм, вес = 5.8 гр.

Фракция представляет собой шлих полностью раскрытых минералов:

- 1) Таблитчато-призматические кристаллы полевых свободном шпатов в состоянии 65-70 %, в том числе нефелина до 40%.
- 2) Удлиненно-шестоватые зерна роговой обманки 15 %.
- 3) Изометричные коротко-призматические пироксенов 5%.
- 4) Мелкие изометричные зерна граната светло-коричневого цвета -5%.
- 5) Мучнистое зерно таблитчатого к.п.ш. 8%.
- 6) Наблюдаются единичные знаки медной зелени, а также единичные кристаллы водянопрозрачного светло фиолетово-розоватого александрита.
- 7) Нераскрытые сростки кристаллов нефелина с зернами амфиболов составляют 2-5 %. Раскрываемость минералов составляет 95-98 %.

Фракция $D_6 = 0.0625$ мм, вес = 2.0 гр. (Шлам)

Полностью раскрытая фракция состоит из свободных кристаллов нефелина, плагиоклаза, калиевого полевого шпата, амфиболов, пироксена, граната и акцессорных минералов.

На основе проведенных исследований сгруппировали фракции по раскрываемости минералов. В таблице 2 приведена группировка фракции по раскрываемости минералов.



Таблица 2. Группировка фракции по раскрываемости минералов пробы ПШ-1, весом 82,68 гр.

Группировки фракции (вмм)	Вес фракции (в гр)	Состояние фракции	Обьем свободных минералов (в масс.%)
d=2 мм	51,95	Нераскрытое	Полевые шпаты ед.зн.
d =0,1 мм	13,3	Раскрытие на 25 %	Полевые шпаты = 10 амфибол - ед.зн.
d = 0,5 мм	5,38	Раскрытие на 50 %	Полевые шпаты = 50 амфибол -10
d = 0,25 мм	4,25	Раскрытие на 90 %	Полевые шпаты = 70, пироксен -5, амфибол-15, гранат - ед.зн.
d = 0,125 мм	5,8	Раскрытие полное	Полевые шпаты = 70, пироксен10,амфибол - 5, гранат - 10зн.
d = 0,0625мм	2,0	Раскрытие полное	Нефелин, плагиоклаз, пироксен, амфибол, гранат, к.п.ш.

Результаты исследований качественно-минералогического состава нефелинового сиенита показали, что:

- во фракциях 0.125мм и 0,0625 мм раскрываемость минералов достигает максимума (до 100%);
- во фракциях 0.125мм и 0,25 мм обнаруживается самое высокое содержание полевых шпатов;
- полевые шпаты довольно хрупкие минералы, поэтому они легко измельчаются и собираются в мелкой фракции с обогащением до 70%.

Далее исследован количественно-минералогический состав нефелинового сиенита (ПШ-1), который выделен по прозрачным шлифам, методом А.А. Глаголева [1].

Результаты исследований количественно-минералогического состава нефелинового сиенита приведены в таблице 3.

Минералы нефелинового сиенита по своим физическим свойствам делятся на две группы:

- минералы полевых шпатов (нефелин, плагиоклаз, калиевый полевой шпат) относятся к минералам не электромагнитной фракции. По удельному весу относятся к легкой фракции с удельным весом $< 2.9 \text{ г/см}^3$;
- минералы группы амфибола, пироксена и граната относятся к электромагнитной фракции, по удельному весу $> 2.9 \text{ г/см}^3$, относятся к тяжелой фракции.



Таблица 3. Количественно-минералогический состав нефелинового сиенита пробы штуфная № 1, 82,68 г.

штуфная № 1, 82,08 г.						
Минералы	Содерж.м ине-рала (в масс.%)	Физические свойства				
		Удельні (в г/с		Магнитность	Морфология минерала	
Нефелин	40	2,5-2,9		тная	Призматические кристаллы	
Плагиоклаз (альбит – олигоклаз)	15	2,5-2,9	ракция	Не электромагнитная фракция	Удлиненно- призматические кристаллы	
Калиевый полевой шпат (микроклин)	15	2,5-2,9	Легкая фракция	Не элект фракция	Таблитчато- призматические кристаллы	
Амфиболы (роговая обманка)	20	3,1-3,3			Удлинено шестоватые тонкие кристаллы	
Пироксены (авгит)	5	3,2-3,6		я фра	Изометричные кристаллы	
Гранат (андродит- гроссуляр)	5	3,3-3,4	Гяжелая фракция	магнитна	Изометричные кристаллы	
Акцессорные минералы	1		Тяжелая	Электромагнитная фракция	Тонкие кристаллы	

Это позволяет построить схему обогащения сырья следующим образом: при обогащении руды нефелинового сиенита полевошпатовый концентрат можно получить путём разделения с помощью гравитационного метода обогащения на легкую и тяжелую фракции. В легкую фракцию отделяются полевошпатовые минералы: нефелин, плагиоклаз, к.п.ш. В тяжелую фракцию уходят минералы группы амфиболов, пироксен, гранат и т.д., которые выводятся из алюмосиликатного сырья с помощью электромагнитной сепарации. Выведение из алюмосиликатного сырья минералов тяжелой фракции облегчает его последующую переработку, так как снижает в нем количество железа и увеличивает процентный выход окиси алюминия [5, 6].

Результаты технического анализа показали, что для раскрываемости минеральных фракции, дробление рудного материала необходимо довести до размеров частиц d=0,125 мм+шлам. В этом случае можно получить удовлетворительный объем полевошпатового концентрата до 70%, после флотационного обогащения.

Таким образом, минералогическое исследование нефелинового сиенита участка «Молодость» Зардалинского массива определило минералы группы полевых шпатов, составляющих в объеме породы до 70%, в том числе 40% минералов нефелина. Это позволяет рассматривать их как сырье для алюминиевой промышленности.

Литература

1. Геология СССР. Том XXV Киргизская ССР. Полезные ископаемые. – М.: «Недра», 1985.



- 2. «Минерально-сырьевая база Кыргызской Республики на рубеже перехода к рыночной экономике». Бишкек: Госгеолагентство, 1998. 3.
- 3. Справочник по обогащению руд. Основные процессы. 2 изд. М., 1993.
- 4. Справочник по обогащению руд. Обогатительные фабрики. 2 изд. М., 1994.
- 5. Классен В. И. Обогащение руд (химического сырья). М., 1999.
- 6. А. Бетехтин. Курс минералогии. Изд. Госгеолиздат. М., 1985.

УДК: 621.311.2

Жороев А.М., ОшГУ

Анализ водных ресурсов Кыргызстана и перспектива использования малых водотоков для выработки электроэнергии на малых и микроГЭС

Макалада Кыргызстан боюнча жалпы географиялык маалымат, суу ресурстары жөнүндө анализ жана изилдөө жүргүзүп, чакан жана микроГЭСтерди жасоо үчүн кичи суулардын агымын колдонуу мүмкүнчүлүктөрү каралган. Ар түрдүү энергетикалык потенциалга ээ болгон кичи сууларга курулган микроГЭСтердин мисалында кичи гидроэнергетиканын өнүгүү перспективасы каралды.

B статье рассмотрены общие географические сведения о Кыргызстане, проведены анализ и исследования водных ресурсов и возможность использования водного потенциала малых горных рек для разработки малых и микроГЭС. Приведена перспективность развития малой гидроэнергетики на примере строительства микроГЭС на малых водотоках с различным энергетическим потенциалом.

In this article general geographical information about Kyrgyzstan is given. This article contains the analysis and investigations of water resources and possibility of using water potential of small rivers for working out small and microHES(hydro-electric-stations) are held. The perspective development of small and minor hydro-energy on the example of construction microHES on small water streams with different energetic potential is considered.

В настоящее время во всем мире уделяется большое внимание использованию возобновляемой энергетики. По прогнозам экспертов ожидается дальнейшее усиление этой тенденции.

Сегодня мировым лидером в области энергопроизводства с использованием возобновляемых источников энергии (ВИЭ) является Китай. Развитие и более широкое применение ВИЭ способствует решению таких актуальных проблем, как проблема экологии, обеспечение населения продовольствием и насыщение энергетического рынка без ущерба природным богатствам.

Кыргызстан является горной страной и расположен в центре азиатского континента, на северо-востоке Центральной Азии между 39^0 и 43^0 северной широты и 69^0 и 80^0 восточной долготы. На севере страна граничит с Казахстаном, на Западе — с Узбекистаном, на юге — с Таджикистаном и на востоке — с Китаем (рис.1) [1].





Рис. 1. Карта Кыргызской Республики

Основная часть территории располагается в пределах Тянь-Шаня, а меньшая часть в пределах Памиро-Алая, который является одним из наиболее высоких горных поднятий земного шара [3]. 89,7% площади – горные территории (Алай, Тянь-Шань и Памир), самая высокая точка – пик Победы (7439м), 10,3% - равнины: на юге – Западный Памиро-Алай (до 4643 м н.у.м), на востоке - Западный Тянь-Шань (до 4482 м н.у.м). межгорные котловины (Ферганская, Чуйская, Таласская, Иссыккульская) [2].

В настоящее время единственным энергоресурсом, производимым в республике в достаточном количестве как для внутреннего потребления, так и для экспорта, является электрическая энергия. Развитие этой отрасли в последние годы сопровождалось увеличением доли электроэнергии, произведенной гидроэлектростанциями, и снижением доли электроэнергии, выработанной тепловыми электростанциями.

В связи с этим, актуальным становится вопрос широкого использования водного потенциала страны для выработки электрической энергии.

Известно, что Кыргызстан располагает значительными запасами водных ресурсов, представленными стоком рек, подземными водами и водами, аккумулированными в ледниках и озерах. В средний по водности год общие водные ресурсы составляют 2458 км³, из них: 47,23 км³ - поверхностный речной сток (величина среднемноголетнего речного стока по разным источникам составляет: от 44,5091 до 51,92 км³), 13 км³ - потенциальные запасы подземных вод, 1745 км³ – озерная вода и 650 км³ – ледники [2].

Всего на территории Кыргызстана насчитывается 8208 ледников различных размеров.

Площадь оледенения составляет 8169,4 км² или 4,2% территории республики. Основные его центры на крайнем востоке, в бассейне реки Сары-Джаз, где расположены крупнейшие долинные ледники, и на юге — Заалайский хребет. Запасы законсервированной в горных ледниках пресной воды оцениваются в 650 км³, что более чем в 12 раз превышает ресурсы стока рек республики [2].

В Кыргызстане насчитывается 1923 озера, общая площадь водной поверхности которых $-6836~{\rm km}^2$. Самые крупные озера Кыргызстана - озеро Иссык-Куль, площадь водной поверхности которого составляет 6236 ${\rm km}^2$, Сон-Куль - площадь которого 275 ${\rm km}^2$, Чатыр-Куль с площадью поверхности 175 ${\rm km}^2$.

Также река Нарын – самая длинная река протяженностью 535 км, река Чаткал длиной 205 км и река Чу, длина которой равна 221 км. Более 3500 рек, протекающих по территории республики, снабжают водой сопредельные государства: Казахстан, Узбекистан, Таджикистан, а также Синьцзян-Уйгурский автономный район Китая [2].



Кроме того, в Кыргызстане имеется 12 искусственных водохранилищ общей площадью $378.2~{\rm km}^2$ и объемом воды $23.41~{\rm km}^3$.

В силу природных условий республики в обеспечении водой орошаемых земель республики участвуют, в основном, малые горные реки, из которых орошается 806 тыс. га (76% наличия орошаемых земель). Из них только 86 тыс. га питаются водой из зарегулированного стока, а 720 тыс.га (89%) орошаются живым не зарегулированным стоком [2].

Учитывая вышесказанное, можно считать, что основной характеристикой, определяющей масштабы развития гидроэнергетики, является гидроэнергетический потенциал рек. Гидроэнергетические ресурсы относятся к возобновляемым источникам энергии, и занимают особое место в структуре природных богатств Кыргызстана они составляют 39% потенциальных гидроресурсов Средней Азии.

По оценке суммарный, технически возможный для освоения энергетический потенциал малой энергетики Кыргызстана составляет 5-8 млрд. кВт электроэнергии в год. Но при этом потенциал гидроэнергетических ресурсов малых рек и водостоков со среднемноголетними расходами от 3 до 50 куб. м/секунд используется всего на 3%.

И вместе с тем наиболее интересным для республики представляется использование энергии малых горных водотоков. В горных водотоках Кыргызстана имеется огромный потенциал механической энергии, используя которую можно получить электрическую энергию. Их потенциал оценивается в 1,6 млн. кВт. В республике освоено промышленное производство микрогидроэлектростанций, которые успешно эксплуатируются с установленной мощностью 1; 5; 16 и 22 кВт [3].

Малая энергетика — это на сегодняшний день наиболее экономичное решение энергетических проблем для территорий, относящихся к зонам децентрализованного электроснабжения. Обеспечение энергией удаленных и энергодефицитных регионов требует значительных затрат. И здесь далеко не всегда выгодно использовать мощности существующей энергосистемы. Гораздо экономичнее развивать мощности малой энергетики, экономический потенциал которой в Кыргызстане намного выше, чем потенциал таких возобновляемых источников энергии, как ветер и биомасса.

По оценке специалистов, в республике можно построить более 60 малых ГЭС с суммарной мощностью до 300 МВт и среднегодовой выработкой до 1,5 млрд. кВт.ч. В настоящее время в республике имеется 9 действующих малых ГЭС с установленной мощностью 38,5 МВт и выработкой около 120 млн. кВт.ч. электроэнергии. Более 18 малых ГЭС, которые были построены в 50-60-х годах, требуют восстановления [1].

На сегодняшний день наиболее экономичным решением энергетических проблем для территорий, относящихся к зонам децентрализованного электроснабжения, является развитие строительства именно микроГЭС.

Однако такой перспективный источник энергии практически не используется, хотя технология его использования не представляет больших трудностей.

В пользу применения малой гидроэнергетики в нашем регионе также говорит то, что современное энергообеспечение почти всегда осуществляется от сетей, техническое состояние которых неудовлетворительное и продолжает ухудшаться.

Поэтому, в условиях богатого гидроэнергетическими ресурсами Кыргызстана, сооружение малых и микроГЭС может быть достаточно экономически эффективным.

В связи с вышеизложенным в настоящее время нами проведена определенная работа по разработке и созданию микроГЭС.

Например, нами построена микроГЭС мощностью 40 кВт в ущелье Чычкан на 241км автодороги Бишкек-Ош. Длина водовода микроГЭС составляет 260 м, диаметр 250 мм и напор составляет 32 м (рис.2). МикроГЭС снабжает электрической энергией



небольшой гостиничный комплекс на 15 человек. Также планируется построить здесь кафе-ресторан на 50-70 человек.

Кроме этого еще установлены 3 микроГЭС мощностями: 5 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Огонек», рис.3), 37 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Форель», рис.4) и 85 кВт в селе Кербен (Аксыйский район, рис.5).





Рис. 2. МикроГЭС мощностью 40 кВт в ущелье Чычкан на 241км автодороги Бишкек-Ош.





Рис. 3. МикроГЭС мощностью 5 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Огонек»)





Рис. 4. МикроГЭС мощностью 37 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Форель»)







Рис. 5. МикроГЭС мощностью 85 кВт в селе Кербен (Аксыйский район)

Заключение. В заключении ОНЖОМ слелать вывол. перспективность использования энергетического потенциала малых водотоков в хозяйственной жизни небольших населенных пунктов, особенно удаленных от больших промышленных предприятий и городов, очевидна. Это подтверждается также тем, что энергетическая политика государства по энергообеспечению страны, по мнению авторитетных энергетиков, должна основываться на конкуренции между энергопроизводителями. В этом случае малая гидроэнергетика могла бы стать достойным конкурентом энергомонополистам за счет низких (более чем в 2-2,5 раза) цен на электроэнергию, невысокой стоимости строительства МГЭС, сравнительно малых сроков окупаемости и других положительных свойств малых гидроэлектростанций. Одной из целей статьи является попытка привлечь внимание общественности и специалистов к столь перспективной области энергетики.

Литература

- 1. Боконбаев К.Д., Родина Е.М., Ильясов Ш.А., Подрезов О.А., Касымова В.М., Абайханова З.А., Джумадылова Ч.К. Климат и окружающая среда. Бишкек, 2003. С. 208.
- 2. Национальный отчет КР в рамках Программы UNEP по содействию и помощи развивающимся странам в выполнении Йоханнесбургского Плана реализации цели «Планы (2005) действий по Интегрированному Управлению Водными Ресурсами и Водосбережению». Бишкек, 2006.
- 3. Возобновляемая энергия. «Солнечная энергетика в России и в мире». (Ежеквартальный бюллетень). М.: 2001.

УДК: 621.373.826.

Иманкулов З.И., к.ф.-м.н., доцент ЖаГУ imankulovz@rambler.ru

Двухволновый Не-Ne лазер с поперечным СВЧ разрядом в магнитном поле

Макалада туурасынан өтө жорку жыштыктагы разряд менен дүүлүктүрүлгөн эки толкундуу Не-Ne лазеринин нуруна бир тектүү эмес магнит талаасынын таасири изилденген. Изилдөө негизинде лазер нурунун кубатуулугу 60% ке чейин көбөйгөндүгү күзөтүлгөн.

В статье исследованы различные параметры когерентного излучения при воздействие магнитного поля с периодической пространственной неравномерностью на активную среду Не-Ne лазера с ПСВЧР излучающего одновременно на двух длинах волн 0,63 и 1,52 мкм. Обнаружено



увеличение мощности излучения лазера до 60 % при незначительном увеличении шумов излучении лазера.

In this paper we investigated various parameters of coherent radiation in the effect of the magnetic field with a periodic spatial non-uniformity of the active medium He-Ne laser emitting at the same time with UHF at two wavelengths, 0.63 and 1.52 microns. An increase in the laser radiation power of up to 60 % with a slight increase in noise emission of the laser.

Двухволновые(λ =0,63 и 3,39 мкм или 0,63 и 1,52 мкм) Не-Ne лазеры [1, 2] на разряде постоянного тока (РПТ) использовались для измерения параметров различных оптических сред, в геофизической рефрактометрии для учета средне интегрального значения группового показателя преломления атмосферы в момент измерений, в доплеровских измерителях двух ортогональных компонент вектора турбулентных потоков, двухволновых светодальномерах [5]. Не-Ne лазеры с длиной волны 1,52 мкм являются оптимальными для пропускания стекловолокном и имеют минимальные потери, но эти лазеры являются высокошумящими [3]. Для когерентной волоконно-оптической связи требуются малошумящие, высокостабильные источники излучения, в качестве которых перспективным является Не-Ne лазеры с поперечным СВЧ разрядом [4, 6]. Применение таких лазеров в прецизионных системах, служащих для измерения малых перемещений и флуктуаций фазы, требует дальнейшего улучшения характеристики ещ излучения для повышения точности измерений. Как показали результаты работ [7, 9], перспективным в этом направлении является Не-Ne лазер с поперечным СВЧ разрядом (ПСВЧР) с воздействием на его активную среду постоянным поперечным магнитным полем. Результаты исследований показали, что Не-Ne лазеры с ПСВЧР в поперечном магнитном поле обладают более высокой мощностью и низким уровнем шумов излучения по сравнению с Не-Ne лазерами с РПТ или продольными ВЧ разрядами [7-9,10]. В связи с этим, большой интерес приобретает исследование различных параметров когерентного излучения при воздействии магнитного поля с периодической пространственной неравномерностью на активную среду Не-Ne лазера с ПСВЧР, излучающего одновременно на двух длинах волн 0,63 и 1,52 мкм.

Для исследования характеристик Не-Ne лазера с ПСВЧР в магнитном поле с периодической пространственной неравномерностью использовали экспериментальную установку, описанную в [10]. Электрический вектор СВЧ поля (Е) располагался перпендикулярно к плоскости поляризации лазерного излучения вызванного из-за брюстеровских окон. Оптический резонатор лазера для получения одновременной генерации в длинах волн λ_1 =0,63 мкм и λ_2 =1,52 мкм состоял из глухого сферического зеркала с радиусом кривизны 2 м и выходного зеркала с коэффициентом отражения 98 % на обеих длинах волн. Для магнитного воздействия на активную среду Не-Ne лазера с ПСВЧР использовался постоянный магнит общей длиной 900 мм, собранный из 36 прямоугольных магнитиков с размерами 5х10х25 мм, который устанавливался параллельно оси разрядной трубки на различных расстояниях от нее в зависимости от необходимой величины напряженности магнитного поля (Н). Для разделения лучей по длинам волн использовалась отражательная дифракционная решетка с периодом 10 мкм. В качестве приемников модулированного по интенсивности лазерного излучения на длинах волн 0,63 мкм и 1,52 мкм, соответственно использовались фотодиоды типа ФД-7К и ФД-7Г. Электрический сигнал с фотодиодов подавался на милливольтметры типа ВЗ-38 с полосой измерения от 10 Гц до 1 МГц. По показаниям милливольтметра определялся сигнал, пропорциональный мощности лазерного излучения.



Путем измерения постоянной $U_=$ и переменной U_\sim составляющих электрического сигнала с фотодиода Φ Д-7 Γ и Φ Д-7K определялась спектральная плотность шумов излучения в ИК и видимом диапазоне по формуле:

$$G(f)=U_{\sim}/U_{=}\Delta f^{1/2}; [\Gamma_{II}^{-1/2}]$$
 (1)

где Δf – полоса пропускания милливольтметра.

Эффективность генерации лазерного излучения определялась по формуле

$$\gamma = P/P_{\Pi} \tag{2}$$

где P - мощность лазерного излучения в относительных единицах, P_{π} - мощность питания двух $CB\Psi$ автогенераторов накачки.

Нами также определялась эффективность воздействия магнитного поля на энергетический режим лазера по формуле:

$$\eta = P_{\rm M}/P \tag{3}$$

где Рм и Р мощность лазерного излучения соответственно при воздействии магнитного поля и без него.

Получены зависимости (рис.1-4) мощности P, спектральной плотности шумов G(f) лазерного излучения, эффективности генерации γ и эффективности воздействия магнитного поля на энергетический режим η лазера на длинах волн 0,63 и 1,52 мкм от напряжения питания CBY автогенераторов накачки без магнитного поля и при воздействии магнитного поля с величиной 150 Θ , соответственно для случаев $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$ и $\mathbf{H} \parallel \mathbf{E}$.

Из рисунка 1 видно, что для случаев **H=0** и **H=150** Э при (**H** \perp **E**) с увеличением напряжения питания от 22 В до 32 В мощность лазерного излучения (на λ =0,63 мкм), соответственно возрастала до 65 и до 78 отн. ед.. Из полученных результатов видно, что воздействие магнитного поля максимально (η \approx 67%) при малых напряжениях питания, т. е. при U_n =22 В, а минимальный прирост мощности излучения (до η \approx 20%) получен при U_n =32 В.

Из рис.1. также видно, что с увеличением напряжения питания СВЧ автогенераторов накачки от 22 до 28 В мощность лазерного излучения возрастает почти линейно, а при дальнейшем увеличении напряжения питания до 32 В наступает некоторое замедление роста мощности. В целом, рост мощности лазерного излучения связан с увеличением концентрации электронов в ПСВЧР, о чем убедительно свидетельствует линейный рост тока, потребляемого СВЧ автогенераторами накачки от источника питания, а также линейное увеличение интенсивности видимого свечения поперечного СВЧ разряда [8, 9]. Линейный ход зависимостей позволяет надеяться, что при модуляции мощности СВЧ накачки можно получить линейную модуляцию мощности лазерного излучения [9].

При увеличении напряжения питания от 22 В до 32 В спектральная плотность шумов лазерного излучения уменьшилась почти в 3,6 раза. Это объясняется увеличением мощности постоянной составляющей лазерного излучения с увеличением мощности СВЧ накачки.

Из рис.1 также видно, что при «безмагнитном» (кривая γ) режиме работы СВЧ автогенераторов накачки с ростом напряжения питания от 22 до 32 В эффективность γ генерации возрастает почти линейно от 3.0 до 16. В этом случае наибольшее значение эффективности генерации γ =16 получалось при U_{Π} =28 В. При воздействии магнитного поля величиной 150 Э, с ростом U_{Π} от 22 до 29В эффективность γ_{M} генерации почти



линейно увеличивается до своего максимального значения $\gamma_{\scriptscriptstyle M}$ =20 а затем происходить некоторое насыщение.

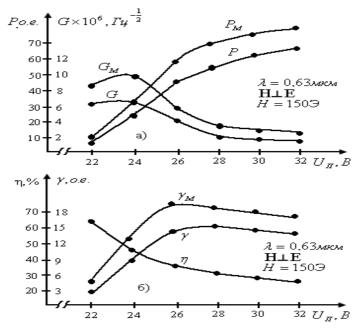


Рис.1. Зависимости Р, Рм, G, Gм, γ , γ_m , η от U_n для длины волны 0,63мкм при H=0 и 150 \ni (H $\perp E$), индекс м соответствует H=150 \ni

Этот график позволяет определить наиболее оптимальный режим работы лазера. Аналогичные результаты были получены для длины волны 1,52 мкм. Из рис. 2. видно, для случаев Н=0 и Н=150 Э (Н LE) с увеличением напряжения питания от 22 до 32 В мощность лазерного излучения на $\lambda = 1.52$ мкм, соответственно, возрастала от 8 до 58 отн. ед. и от 11 до 63 отн. ед.. Из результатов видно, что воздействие магнитного поля максимально(η≈40%) при малых напряжениях питания, т. е. при U_п=22 В, а минимальный прирост мощности излучения (до 10%) получен при напряжении питания 32 В. Из рисунка 2 также видно, что с увеличением напряжения питания СВЧ автогенераторов накачки от 22 до 28 В, мощность лазерного излучения возрастает почти линейно, а затем наступает замедление роста мощности излучения. В данном случае рост мощности излучения также связан с увеличением концентрации электронов в ПСВЧР, о чем убедительно свидетельствует линейный рост тока потребляемого СВЧ автогенераторами накачки от источника питания, а также линейное увеличение интенсивности видимого свечения поперечного СВЧ разряда [8-9]. При увеличении напряжения питания от 22 В до 32 В спектральная плотность шумов лазерного излучения уменьшилась почти в 4,2 раза. Это объясняется увеличением мощности постоянной составляющей лазерного излучения при росте мощности СВЧ накачки. Из рис.3 также видно, что при «безмагнитном» (кривая у) режиме работы СВЧ автогенераторов накачки с ростом напряжения питания от 22 до 32 В эффективность у генерации возрастает почти линейно от 3.0 до 16. В этом случае наибольшее значение эффективности генерации γ =16 получалось при U_{Π} =26 В. При воздействии магнитного поля величиной 150 Θ , с ростом U_{Π} от 22 до 29 Θ эффективность генерации $\gamma_{\rm M}$ почти линейно увеличивается до своего максимального значения $\gamma_{\rm M}=16$ при напряжении питания 26 В, а затем происходит его уменьшение. Исходя из этого, можно определить наиболее оптимальный режим работы лазера. Из рис.1 и 2 видно, что при Н 🗷 (в данном случае излучение имеет только π -компоненту) с воздействием **H** мощность лазерного излучения на обеих длинах (λ =0,63 и 1,52 мкм) возрастает.



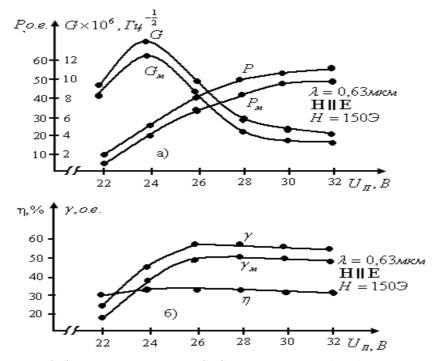


Рис.2. Зависимости Р, Рм, G, Gм, γ , γ_{∞} η от U_n для длины волны 0,63 мкм при H=0 и 150 \ni (HIIE), индекс м соответствует H=150 \ni

Очевидно, что рост мощности излучения связан, в основном, с увеличением концентрации электронов в поперечном СВЧ разряде. Увеличение концентрации электронов связано с искривлением траектории электронов в взаимно ортогональных **H** и **E** полях и соответственно увеличением их частоты соударений с нейтральными атомами.

Из рисунков 3 и 4 видно также, что при HIIE, т. е. когда вектор магнитного поля расположен перпендикулярно плоскости поляризации лазерного излучения (в данном случае лазерное излучение имеет только $\pm \sigma$ -компоненты) с воздействием **H** мощность лазерного излучения на длинах волн 0,63 и 1,52 мкм соответственно уменьшается до 30% и 40%.

Уменьшение мощности излучения лазера обусловлено с раздвижением $\pm \sigma$ - компонент контура усиления.

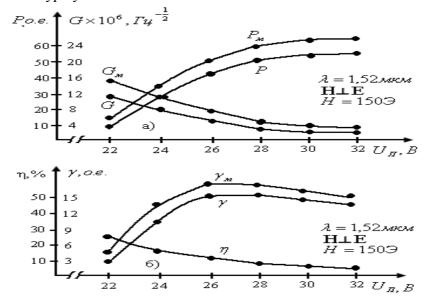


Рис. 3. Зависимости Р, Рм, G, Gм, γ , γ_m , η от U_n для длины волны



1,52 мкм при H=0 и 150 Э (H LE), индекс м соответствует H=150 Э

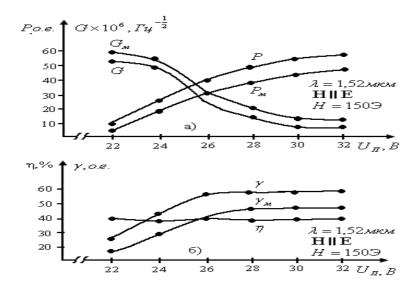


Рис. 4. Зависимости Р, Рм, G, Gм, γ , γ_{M0} η от U_n для длины волны 1,52 мкм при H=0 и 150 \ni (HIIE), индекс м соответствует H=150 \ni

Таким образом, при воздействии магнитного поля (H=1509) с периодической неравномерностью ($\sim40\%$) на активную среду He-Ne лазера с ПСВЧР излучающего одновременно на длинах волн 0.63 и 1.52 мкм достигнуты следующие результаты.

Для случая $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$ (\mathbf{H} перпендикулярно на \mathbf{E}) на длине волны 0,63 мкм мощность излучения лазера максимально возрастает до 60%, а шумы излучения до 20 %. На длине волны λ =1,52 мкм мощность излучения максимально возрастает до 40%, а шумы излучения до 10 %.

Для случая H//E (H параллельно на E) на длине волны λ =0,63 мкм мощность излучения лазера уменьшается до 30%, а шумы излучения почти не меняется. На длине волны λ =1,52 мкм мощность излучения лазера уменьшается до 40%, а шум излучения почти не меняется.

Литература

- 1. Eerkens I.W., Lee W.W. Conf. on Lasers and Elektroopt. (CLEO), Poster Session. May 21-24 (1985).
- 2. Данелейко М. В. Данилов Н. К. и др. Укр. Физ. Журн. 34, (1989), 1668-1670.
- 3. Моршнев С. К., Францессон А. В. Квантовая электрон. 12, (1985), 1786-1807.
- 4. Иманкулов З.И., Мириноятов М.М. Малошумящий одночастотный He-Ne лазер со стабильной мощностью излучения на длине волны 1,52 мкм. Журнал прикладной спектроскопии, т. 64. 1987, С. 116-118.
- 5. Иманкулов З.И., Мириноятов М.М. Двухволновый He-Ne лазер с поперечным СВЧ возбуждением для светодальнометрии. Вестник НУУз. 2002, №2. С. 27-28.
- 6. Иманкулов З.И., Мириноятов М.М., Рихсиева Ш.Т. Влияние поперечного магнитного поля на характеристики He-Ne лазера с поперечным СВЧ разрядом. Квантовая электроника. 1989. Т. 16. N7. С. 1510-1512.
- 7. Мириноятова Д.М., Мириноятов М.М., Усманов Т.Б. Исследование воздействия постоянного магнитного поля на выходные характеристики He-Ne лазера с поперечным СВЧ разрядом. Вестник НУУ3. 2005, № 3. С. 33-35.



- 8. Иманкулов З.И., Мириноятов М.М., Усманов Т.Б. Влияния магнитного поля на мощность и шумы излучения He-Ne лазера с поперечным СВЧ разрядом. Квантовая электроника. 1999. С. 237-238.
- 9. Иманкулов З.И., Доноев Т.А., Кошалив З.А. Экспериментальное исследование модуляционной характеристики излучения одночастотного He-Ne лазера с ПСВЧР. Вестник ЖаГУ, №1 (22), 2009. С. 155-159.
- 10. Иманкулов З.И., Мириноятова Д.М. Исследование воздействия постоянного магнитного поля с периодической неравномерностью на выходные характеристики He-Ne лазера с поперечным СВЧ разрядом. // Вестник ЮО НАН КР. №1, 2013. С. 25-29.

УДК: 621.311.2

Кенжаев И.Г., д.т.н., профессор, Айдарбеков З.Ш., к.т.н, доцент, Исакова К.С., ст. преп., Жумакулов Ж.А., преп., ОшГУ zaripbek2006@rambler.ru

Изучение водных потенциалов Кыргызстана

Макалада Кыргызстанда чакан жана микроГЭСтерди куруу үчүн суу-энергетикалык потенциалын изилдөөнүн жана анализдөөнүн жыйынтыктары келтирилген. Суу агымдарынын деңиз деңгээлинен жогору бийиктикте жайгашкандыгы жана анын жыштыгы боюнча структурасы изилденген.

B статье приведены результаты изучения и анализа водно-энергетического потенциала Кыргызстана для строительства малых и микро Γ ЭС. Обследована структура водотоков по плотности их размещения и высоте над уровнем моря.

The article contains results the study and analysis of water and energy potential of Kyrgyzstan for building small and micro hydropower plants. Examined the structure of watercourses on the density of their location and altitudes above sea level.

Ключевые слова: микро Γ ЭС, водно-энергетический потенциал, гидроэнергетический ресурс, плотность водотоков, напор и расход воды.

Электроснабжение малых рассредоточенных потребителей за счет использования малых и микроГЭС ставит необходимость решения вопросов оценки запасов горных водотоков, изучения характера и особенностей местности, знания гидрологических параметров водотока (расход, перепад и т.д.), анализа и создания базы данных по имеющимся горным водотокам. При этом немаловажное значение имеют вопросы систематизации и классификации водотоков по возможным мощностям, напорам и расходам.

Как известно, основными показателями, позволяющими оценить гидроэнергетический потенциал регионов, являются водность рек и наличие значительных перепадов высот рельефа. Совокупность данных по объему стока местных водотоков, крупных транзитных рек и амплитуде рельефа является достаточной для адекватной оценки потенциальной энергетической мощности работы воды на каждой территории, если при этом не ставить задачи расчета мегаватт потенциальной мощности ГЭС.



Здесь требуется, прежде всего, изучить те водные источники энергии, которые обладают факторами, наиболее благоприятствующими строительству экономичных гидроэлектростанций. Выбор таких объектов может быть существенно облегчен путем предварительного изучения потенциальных водно-энергетических ресурсов [2].

Наиболее важной характеристикой является функция статической закономерности частот вариации конкретных энергетических потоков за определенный период времени.

Для разработки оптимальных путей их использования необходимы достоверные данные о количестве и распределении этих ресурсов по отдельным водотокам республики.

При отнесении водостока к той или иной категории можно исходить из различных его признаков: длины реки, величины водосбора, объема стока, - или же делить реки по возможным масштабам их использования в той или иной отрасли хозяйства, например, гидростанции, глубина русла для судоходного пути, возможная площадь орошения сельскохозяйственных угодий и т.д.

Практическую ценность для народного хозяйства имеет экономический потенциал, т.е. та часть технического потенциала, которую при современном уровне развития энергетики, по экономическим оценкам целесообразно использовать в обозримой перспективе.

Экономический гидропотенциал существенно зависит от изученности рек, удаленности ГЭС от места присоединения, от прогресса в энергетике, особенно от обеспеченности рассматриваемого региона другими энергетическими ресурсами, их качества и стоимости и, конечно, от той роли, которую будет играть данная ГЭС в энергосистеме.

Кыргызстан обладает громадными потенциальными гидроэнергетическими ресурсами, занимая по техническому и экономическому потенциалу третье место среди бывших союзных республик.

Горные хребты, занимающие большую часть территории Кыргызстана, являются богатейшими аккумуляторами влаги, которая в виде талых вод высокогорных снегов и ледников питает многочисленные горные реки, характеризующиеся большими уклонами и значительной водоносностью, что обусловливает богатство Кыргызстана гидроэнергетическими ресурсами.

Высокая удельная энергия рек Кыргызстана создается в основном за счет весьма больших удельных падений рек (уклонов); 40% общей длины рек имеют уклон 0,01; 10% - 0,02 и более. Громадные удельные падения рек определяют превосходство горных рек Кыргызстана над крупнейшими равнинными реками в удельном сосредоточении потенциальной мощности [1].

По разведанным данным, потенциальные гидроэнергетические ресурсы крупных и средних рек Кыргызстана по учтенным 236 рекам были определены в 135,5 млрд. кВт·ч.

Кроме учтенных крупных и средних рек, на территории Кыргызстана имеется большое количество малых рек единичной мощностью менее 2 тыс. кВт. Исчисление потенциальных гидроэнергетических ресурсов (ГЭР) этих рек проводилось методом обобщенного учета, в результате которого суммарная мощность малых рек была установлена в 0,8 млн. кВт со среднегодовой электроэнергией в 0,7 млрд. кВт·ч. Таким образом, суммарные запасы гидроэнергоресурсов Кыргызстана определены в 142,5 млрд. кВт·ч.

В последнее время, исходя из условий некоторой напряженности топливного баланса республики, все более обращают внимание на исследования богатейших и постоянно возобновляемых водно-энергетических ресурсов, обеспечивающих практическую возможность строительства гидроэлектростанций на всей территории республики. Широко разветвленная речная сеть в сочетании с высокогорным рельефом и



исключительным обилием атмосферных осадков определяют чрезвычайно большие потенциальные возможности для получения дешевой электроэнергии.

В росте экономического потенциала Кыргызстана большое значение приобретают горные районы. Здесь находятся несколько тысяч объектов геологии, службы гидрометеосети, сельского, лесного и водного хозяйства.

Одной из важнейших хозяйственных особенностей этих объектов является их рассредоточенность и удаленность от опорных пунктов централизованного электроснабжения, что затрудняет их электрификацию. В связи с этим для электроснабжения рассредоточенных объектов рассматривается целесообразность использования местных энергоресурсов, в частности гидроэнергии.

Обеспеченность объектов Кыргызстана местными гидроэнергоресурсами можно выявить при анализе следующих показателей водотоков:

- плотности их размещения на местности;
- величины энергетических запасов;
- условий освоения запасов гидроэнергии.

Неэлектрифицированные потребители энергии можно считать обеспеченными гидроэнергоресурсами, если плотность размещения водотоков бассейна реки будет не менее $0.4~{\rm km/km^2}$. В этом случае объект находится в непосредственной близости от ручья или реки, и гидроэнергия может быть использована без строительства протяжных электрических сетей.

Обследованиями части горных районов Кыргызстана (площадью 3200 км²) [1] установлено, что здесь плотность нахождения водотоков и высота местности имеют высокую корреляционную связь — чем больше высота местности над уровнем моря, тем выше плотность размещения водотоков (табл. 1).

1 аод Структура плотности волотоков в горных районах

Таблица 1.

	Tepp	итория уча	стка		
Высота над уровнем моря, км	Обследов анная, км ²	В том числе с плотностью более 0, 43 км/км ²		Общая длина водотоков на обследованной	Средняя плотность размещения
		кол-во	%	территории, км	водотоков, км/км ²
До 1	200	6	3	7	0,04
От 1,0 до 1,5	350	142	40	60	0,17
От 1,5 до 2,0	450	376	83	230	0,51
От 2,0 до 2,5	1050	1020	97	593	0,56
От 2,5 до 3,0	700	658	98	390	0,56
От 3,0 до 3,5	400	400	100	270	0,68
Свыше 3,5	150	150	100	147	0,92
Итого:	3200	2779	87	1700	0,53

Из таблицы 1 видно, что водотоками обеспечены объекты, расположенные на высоте: 1,5 км – основная часть; более 3,0 км – практически все.

Речные стоки образуются, главным образом, за счет таяния сезонных снежников. Разные периоды таяния на разных высотах гор определили у рек длительные паводки, которые длятся в целом от марта до сентября. Остальное же время составляет период межени. Наблюдения гидрометеостанций показали, что в зимний период энергетическая мощность малых рек снижается в 4-5 раз относительно среднегодовой.



Вывод: Анализ гидроэнергетических ресурсов Кыргызстана показывает, что сооружение малых и микроГЭС на горных водотоках может быть достаточно экономически эффективным, а для некоторых отдаленных местностей, где для электроснабжения используется ДЭС на дорогом привозном топливе, такие гидроэлектростанции являются единственным средством развития их энергетической базы.

Литература

- 1. Боконбаев К.Д., Родина Е.М., Ильясов Ш.А., Подрезов О.А., Касымова В.М., Абайханова З.А., Джумадылова Ч.К. Климат и окружающая среда. Бишкек: 2003. С. 208.
- 2. Рахимов К.Р., Беляков Ю.П. Гидроэнергетика Кыргызстана. Бишкек: «Текник», 2006.

УДК: 621.311.2

Кенжаев И.Г., д.т.н., профессор, Айдарбеков З.Ш., к.т.н, доцент, Жороев А.М., ст. преп., ОшГУ <u>zaripbek2006@rambler.ru</u>

Опыт внедрения микроГЭСов для отдаленных потребителей и методика расчета их технико-экономических показателей

Макалада борбордоштурулган электр менен камсыздоо тармагынан алыс жайгашкан тоолуу жерлерде микроГЭСтерди орноштуруу боюнча тажрыйбалардын натыйжалары келтирилген. Токтогул районуна караштуу Чычкан капчыгайында орнотулган кубаттуулугу 40 кВт болгон микроГЭСтин мисалында микроГЭСтердин технико-экономикалык көрсөткүчтөрүн эсептөөнүн методикасы келтирилген.

В статье приведен опыт внедрения микроГЭСов в горных местностях, удаленных от централизованного электроснабжения. Приведена методика определения технико-экономических показателей микроГЭС на примере микроГЭС мощностью 40 кВт, установленной в ущелье Чычкан Токтогульского района.

The article presents the experience of implementation of micro hydropower plants in mountainous areas, away from centralized electricity supply. The methodology of determining the technical and economic parameters on the example of micro hydro micro hydro power 40 kW installed in the gorge Chychkan Toktogul district.

Ключевые слова: микроГЭС, механизм, радиально-осевая турбина, асинхронный генератор, гидросооружение, капиталовложение, себестоимость.

Внедрение микроГЭС является сложной задачей и требует решения вопросов, относящихся к его работоспособности, надежности конструкции, выбору оптимальных режимов работы. Механизмы микроГЭС испытывают циклические и случайные воздействия со стороны водяного потока. Это приводит к появлению существенных динамических нагрузок на механизмах устройства [1].

Механическая часть привода микро Γ ЭС состоит из нескольких звеньев и представляет собой сложную кинематическую цепь с большим числом движущихся элементов.



Допустим, что указанная механическая часть состоит из абсолютно жестких, недеформируемых элементов и не содержит воздушных зазоров. При этом движение одного элемента дает полную информацию о движении всех остальных элементов, т.е. функциональные зависимости, соответствующие законам движения всех звеньев кинематической цепи привода, пропорциональны друг другу, и от движения одного элемента можно перейти по заранее известной взаимосвязи между координатами к движению любого другого элемента. Таким образом, движение привода можно рассматривать на каком-либо одном механическом элементе, к которому приведены все внешние моменты или силы, а также все инерционные массы механических звеньев. За такой элемент принимаем вал водяного колеса. В работе [2] проведен расчет вала водяного колеса микроГЭС с учетом принятых выше допущений. При разработке каждого конкретного микроГЭС детали каждого звена подобраны на основании этих расчетов.

Созданные микроГЭС рассчитаны для установки их на деривационных водотоках от предгорных и горных рек.

Ниже приведен некоторый опыт внедрения созданных нами микроГЭС на труднодоступных горных местностях, удаленных от энергосистемы:

- микроГЭС мощностью 40 кВт в ущелье Чычкан на 241 км автодороги Бишкек-Ош;
- микроГЭС мощностью 5 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Огонек»);
- микроГЭС мощностью 37 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Форель»);
- микроГЭС мощностью 85 кВт в селе Кербен (Аксыйский район).



Рис. 1. МикроГЭС 40 кВт в ущелье Чычкан на 241км автодороги Бишкек-Ош







Рис. 2. МикроГЭС мощностью 5 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Огонек»)



Рис. 3. МикроГЭС мощностью 37 кВт в ущелье Чычкан (кафе «Форель»)



Рис. 4. МикроГЭС мощностью 85 кВт в селе Кербен (Аксыйский район)

Предлагаемые микро Γ ЭС просты по конструкции, применяемые материалы доступны. В конструкции микро Γ ЭС с радиально-осевой турбиной используются такие недефицитные и недорогие материалы, как стальной лист, уголок, швеллеры



и трубы различных размеров, которые можно приобрести на любом рынке металлов.

При изготовлении микроГЭС с радиально-осевой турбиной выполняются несложные токарные, фрезерные и сварочные работы.

МикроГЭС с радиально-осевой турбиной (рис. 1-4) состоит из деривационного канала, водозаборного устройства, напорного водовода, помещения для энергоблока, в котором находятся: 2 задвижки, радиально-осевая турбина, маховик, муфта, асинхронный генератор с конденсаторами для самовозбуждения и щит измерительных приборов [3]. Задвижки предназначены для ручного регулирования поступления воды в турбину и аварийного сброса. Водозаборное устройство состоит из шлюза, сороудерживающей решетки, фильтра-отстойника (пескоуловитель), аварийного сброса и воздуховыводящей трубы (вантус).

Для определения технико-экономических показателей созданных микроГЭС нами разработана методика их расчета.

При выполнении технико-экономических расчетов необходимо учитывать капиталовложения в строительство микроГЭС и годовые издержки (затраты) на эксплуатацию микроГЭС.

В капиталовложения включают затраты на предпроектные изыскания, проектные работы совместно с бизнес-планом строительства, приобретение оборудования, технических средств и инвентаря, строительство водозаборного устройства, водовода, помещения микро Γ ЭС, строительно-монтажные работы, изготовление, монтаж и пуск оборудования микро Γ ЭС.

Технические данные построенных микроГЭС сведены в табл. 1.

Таблица 1. Основные технические данные разработанных и внедренных микроГЭС

Наименование микро ГЭС	Предельная мощность, Р _м (кВт)	Напор воды, Н(м)	Расход воды, Q(м³/c)	Стоимость строительства, долл. США
МКГЭС-5 РО	5	8	0,07-0,09	1 300,0
МКГЭС-37 РО	37	40	0,19-0,23	14 900,0
МКГЭС-40 РО	40	43	0,22-0,25	14 750,0
МКГЭС-85РО	85	32	0,56-0,59	16 200,0

На основании приведенных технических данных микроГЭС определим капитальные вложения и стоимость производимой электроэнергии при использовании микроГЭС. При этом использование резервной ДЭС нам не представляется необходимым.

Таблица 2. Капиталовложения в строительство микроГЭС мощностью 40 кВт

Наименование оборудования	Стоимость, в сомах
Агрегаты МКГЭС мощностью 40 кВт, включая асинхронный генератор с конденсаторами, турбину, муфту, задвижки, щит электроприборов	190000,0
Здание ГЭС площадью 10 м ² для размещения агрегатов и	28000,0



электрощита	
Водозаборное устройство и водовод длиной 250 м	320000,0
Линия электропередачи напряжением 380/220 B, длиной 200 м	140000,0
Блок регулирования реактивной мощности (устройство	15000,0
поперечной компенсации)	
Суммарные капитальные вложения	693000,0

Амортизационные отчисления на 1 год эксплуатации согласно общей норме амортизационных отчислений 6,4% в год равны:

 $C_{MKГЭС,AMOРТ} = C_{MKГЭС,KAII} \cdot 0,064 = 693000 \cdot 0,064 = 44352 \text{ сом/год.}$

Оценим сумму расходов на обслуживание МГЭС, сведя статьи расходов в табл. 3 (заработная плата).

Таблица 3.

Состав и зарплата персонала микроГЭС

Должность	Количество	Зарплата на человека в месяц, сом.	Зарплата в год, сом.
Дежурный оперативный персонал: электрик	1	7000,0	84000,0
Сумма зарплаты персонала	1 человек	Зарплата персо С _{зп} = 840	

Итого ежегодные издержки на эксплуатацию:

 $C_{\text{СУМ МКГЭС}} = C_{\text{МКГЭС.АМОРТ}} + C_{3\Pi} = 44352 + 84000 = 128352 \text{ сом/год,}$

Стоимость 1 кВт-ч электроэнергии от микроГЭС:

$$C_{\hat{e}\hat{A}\hat{o}\,/\,\hat{l}\hat{E}\hat{A}\acute{Y}\tilde{N}} = \frac{\tilde{N}_{\tilde{N}\acute{O}\hat{l}\,\,\hat{l}\hat{E}\hat{A}\acute{Y}\tilde{N}}}{W_{\tilde{l}\hat{O}D_{c}\,/\,\tilde{o}\hat{l}\tilde{d}}} = \frac{128352}{40\cdot24\cdot365} = 0.37 \quad \tilde{n}\hat{u} \,/\,\hat{e}\hat{A}\hat{o}\,\cdot\dot{\cdot}.$$

Выводы:

- 1. Опыт внедрения микроГЭС на отдаленных горных местностях показывает, что механизмы микроГЭС испытывают циклические и случайные динамические нагрузки, что требует подбора деталей механической части с учетом запаса прочности.
- 2. Строительство гидросооружений требует тщательного анализа рельефа местности для каждого конкретно внедряемого микроГЭС.
- 3. Предлагаемая методика расчета технико-экономических показателей отличается универсальностью и применима для любых видов малых и микроГЭС.

Литература

- 1. Малая гидроэнергетика. Под ред. Л.П. Михайлова. М.: Энергоатомиздат, 1989.
- 2. Липкин В.И., Богомбаев Э.С. Микро и малые гидроэлектростанции в Кыргызской Республике. Справочное пособие. Бишкек, 2012. С. 116.
- 3. Айдарбеков З.Ш., Жороев А.М., Манасов М.Д. Система стабилизации частоты автономной микроГЭС без регулятора расхода воды. Российская академия естествознания. Энергетические гидросооружения и гидроузлы. // Электронный ресурс/. март, 2011. Режим доступа: www.econf.rae.ru /article/ 5944.



УДК: 662. 997.534.

Кенжаев И.Г., Турсунбаев Ж.Ж., Кудайбердиев Б.Э., ОшГУ

Анализ процессов утилизации биогаза в качестве топлива и характеристика процесса горения

В настоящей статье описана сущность каталических и влажных методов очистки биогаза от вредных компонентов, методика определения необходимого количества воздуха для сжигания единицы объема биогаза и результаты проведенных исследований процесса сжигания биогаза на инжекционных горелках беспламенного типа.

Essence of dry and moist methods of cleaning of biogas from harmful components, methodology of determining the necessary amount of air for incineration of unit of volume of biogas and results undertaken studies of process of incineration of biogas on the injection gas-rings of flameless type is described in the real article.

Ключевые слова: биогаз, биогазовая установка, затвор, газгольдер, абсорбер.

Система энергообеспечения от биоэнергетической установки должна обеспечивать подачу газа потребителям в необходимом объеме и требуемых параметров.

Обычно биогаз выходит из метантенка неравномерно и с малым давлением (до 4 кПа), и с учетом гидравлических потерь в газопроводах этого давления недостаточно для нормального функционирования газосжигающих устройств. К тому же объем газа, вырабатываемого реактором, не соответствует объему газа, расходуемого потребителем в каждый данный момент времени, поэтому обязательным компонентом в КАБЭУ являлся газгольдер.

В зависимости от рабочего давления накапливаемого в них биогаза существуют [1] газгольдеры низкого (рабочее давление 1,7-4,0 кПа), среднего (от 5 кПа до 0,3 Мпа) и высокого (от 0,3 до 1,8 МПа) давления.

Принципиальное различие между газгольдерами низкого и высокого давления заключается в том, что рабочий объем первых является переменным, а давление газа в процессе наполнения или опорожнения остается неизменным или изменяется незначительно (обеспечивается подвижностью конструкций), изометрический объем газгольдеров высокого давления остается постоянным, а давление при наполнении изменяется от начального до рабочего в заранее заданных пределах, определяемых параметрами технологического процесса использования газа.

В практике применения биогаза используются газгольдеры низкого давления, которые в свою очередь, бывают мокрые и сухие. По причине простоты в изготовлении и обслуживании, а также эксплуатационной надежности в технологической схеме комбинированной автономной биоэнергетической установки (КАБЭУ) применяется мокрый газгольдер низкого давления, в котором биогаз скапливается под плавающим колоколом, края которого погружены в жидкость, образуя гидравлический затвор.

Давление газа под колоколом определяется весом жидкости, вытесненной из-под колокола газом или весом самого колокола, и не превышает $5 \text{ к}\Pi a$.

При использовании биогаза в качестве энергоносителя, главным горючим компонентом которого является метан (табл. 1), должна предусматриваться его очистка перед подачей к потребителю.



Очистка биогаза состоит, в основном, в удалении от него сероводорода (H_2S) , а также в необходимых случаях влаги и углекислого газа.

Процесс очистки от влаги состоит в охлаждении биогаза. Это достигается, например, при выполнении части газопроводного тракта в виде подземной трубы. При прохождении биогаза в подземной части трубопровода температура около 10°С является достаточной для конденсации влаги, и когда газ вновь подогревается, содержание влаги в нем существенно уменьшается. Предусматриваемые в нижних точках газового тракта сборники конденсата, рассчитываются на максимально возможное количество жидкости.

Таблица 1.

Усредненный состав биогаза из метантенка

Компоненты биогаза	Химическая формула компонента	Содержание компонентов, %
Метан	CH ₄	4075
Углекислый газ	CO_2	2555
Водяной пар	H_2O	010
Сероводород	H_2S	01
Азот	N_2	05
Кислород	O_2	02
Водород	H_2	01

Сероводород, содержащийся в биогазе, смешиваясь с водяными парами, образует серную и сернистую кислоты, вызывающие коррозию металлических поверхностей газоиспользующего оборудования (скорость коррозии может достигать 0,5...1 мм в год).

Кроме того, при сжигании биогаза H_2S переходит в оксиды серы, и учитывая высокотоксичность H_2S , SO_2 и SO_3 , это является серьезным ограничением использования биогаза в газоиспользующих устройствах.

Наиболее простым и экономичным способом очистки биогаза от сероводорода является каталитический сухой метод (с использованием в качестве катализатора Fe(OH)₃), выражаемый формулой [2]:

$$2\text{Fe}(\text{OH})_3 + 3\text{H}_2\text{S} = \text{Fe}_2\text{S}_3 + 6\text{H}_2\text{O} + 61,92\,\text{Дж}$$
 (1)

Пример практического применения сухой очистки в специальном фильтре приводится в работе [3]. В качестве абсорбера применяется металлическая "губка", состоящая из смеси окиси железа и деревянной стружки. С помощью 0,035 м³ металлической губки из биогаза можно извлечь 3,7 кг серы. Если содержание сероводорода в биогазе составляет 0,2%, то этим объемом металлической губки можно очистить от сероводорода около 2500 м³ газа. Для регенерации губки ее необходимо подержать некоторое время на воздухе.

Минимальная стоимость материалов, простота эксплуатации фильтра и регенерация абсорбера делают этот метод надежным средством для защиты газгольдера, трубопроводов от коррозии и для обеспечения функциональной и эксплуатационной безопасности газоиспользующих устройств.

Отделение CO_2 , представляющего инертный компонент биогаза (не препятствует сжиганию биогаза) может быть осуществлен методом абсорбции в промывочном растворе (в абсорбере при избыточном давлении около 1 МПа CO_2 поглощается водой), и применяется только в крупных установках с высоким объемом выхода газа и утилизации CO_2 .

Расчет процесса горения очищенного от балластов биогаза заключается в определении: количества теоретически и действительно необходимого расхода воздуха; состава и объемов продуктов сгорания; температуры горения биогаза как топлива.



Теоретически необходимое количество воздуха ($V_{B(T)}$, м³) для полного сжигания 1м³ биогаза может быть рассчитана по уравнениям реакций горения метана (как основного горючего компонента биогаза) [4]:

$$CH_4 + 2(O_2 + (79/21)N_3) = CO_2 + 2H_2O + 7,52 N_2$$
 (2)

И составляет
$$V_{B(T)} = 2(1 + (79/21)) = 9.52 \text{м}^3$$
.

Действительный расход воздуха $V_{B(д)}$, м 3 определяется величиной коэффициента избытка воздуха (α), и при α >1 составит $V_{B(д)} = \alpha V_{B(T)}$.

Из уравнения (2) следует, что при сжигании 1 м 3 CH. образуется 1 м 3 CO $_2$, 2 м 3 водяного пара (H $_2$ O) и 7,52 м 3 азота. Таким образом, при сгорании газа с коэффициентом избытка воздуха α =1 получается 10,52 м 3 продуктов сгорания, из них сухих газов - 8,52м 3 .

Состав продуктов сгорания (в % объема) определяется в расчете на сухие газы. Так, содержание CO_2 при α =1 составит (1/8,52)·100=11,7%. Полученная величина называется максимальным содержанием CO_2 и обозначается CO_{2max} . Очевидно, что в условиях сжигания при α >1 содержание CO_2 , в продуктах сгорания снизится.

Величину коэффициента избытка воздуха можно найти по результатам измерения содержания ${
m CO_2}$ в продуктах сгорания из соотношения:

$$\alpha = \frac{79/CO_2}{79/CO_{2 \text{ max}}} = \frac{CO_{2 \text{ max}}}{CO_2}$$
 (3)

Действительный объем продуктов сгорания биогаза ($V_{\Pi\Gamma}$, м³) при $\alpha > 1$ определяется по зависимости

$$V_{III} = V_{III(T)} + (\alpha - 1)V_{B(T)}$$

$$\tag{4}$$

где $V_{\Pi\Gamma(T)}$ -объем газов при теоретических условиях сжигания, м 3 .

Смесь горючего газа и воздуха, состав которой соответствует уравнению реакции горения, называется стехиометрической. Содержание воздуха в стехиометрической смеси определяется по выражению:

$$r_{\rm BO3Д} = \left(\alpha V_{\rm B(T)}\right)\!\!/\!\left(1+\alpha V_{\rm B(T)}\right)\!\!, \qquad$$
и равна $r_{\rm BO3Д} = 89,5\%$, а содержание газа
$$r_{\rm газа} = 100 - r_{\rm BO3Д} = 10,5\% \;.$$

Теоретическая температура горения (T_{Γ},K) газовоздушной смеси метана (калориметрическая или максимальная температура горения) определяется при условии отсутствия отвода теплоты в окружающую среду по формуле /4/:



$$T_{r} = H_{u} / \left\{ c_{p} \left(1 + \alpha V_{B(T)} \right) \right\}$$
 (5)

где H_u – низшая теплота сгорания горючего газа, величина которой для метана равна 36 МДж/м³; с $_p$ – удельная изобарная теплоемкость газов, принимаемая для данной температуры дымовых газов, Дж/(м³К).

Основой большинства бытовых приборов, в которых можно использовать биогаз, являются инжекционные горелки низкого давленияс частичной инжекцией первичного воздуха в количестве 50–60% от теоретически необходимого. По сравнению с другими газами биогазу нужно меньше воздуха для горения. Следовательно, газовые приборы нуждаются в более широких жиклерах для прохождения биогаза.

По данным [3], для полного сгорания 1 литра биогаза необходимо около 5,7 литров воздуха, в то время как для пропана -23,8 литра. При этом согласно [4] теоретическая температура горения газовоздушной смеси метана составляет 2065°C.

Перед использованием бытовой газовой плиты горелки должны быть отрегулированы для достижения компактного голубоватого пламени с самопроизвольной стабилизацией, т.е. негорящие участки горелки должны самостоятельно загораться в течение 2-3 секунд.

Перспективно применение инжекционных горелок беспламенного типа (рис. 1), называемых горелками инфракрасного излучения.

При течении смеси через многочисленные каналы перфорированной керамической насадки 6, температура смеси повышается до 600-800°С, благодаря чему процесс горения протекает практически мгновенно. При этом поверхность керамической пластины раскаляется до 900-1000°С, излучая до 60% лучистой энергии в инфракрасной области спектра. Использование инфракрасной горелки мощностью до 1-2 кВт для сушки плодов и овощей, а также сброженногоэффлюента биогазового реактора являются вполне приемлемыми вариантами эффективной утилизации биогаза в фермерском хозяйстве.

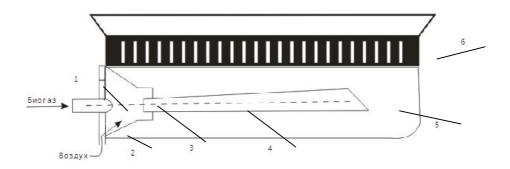


Рис. 1. Биогазовая горелка инфракрасного излучения: 1-сопло горелки; 2-камера всасывания (конфузор); 3-горловина; 4-диффузор; 5-распределительная камера; 6-керамическая насадка горелки

В течение десятилетий производство тепловой энергии из биогаза было почти единственной технической возможностью для применения биогаза.

В последнее время эта возможность применения биогаза успешно вытесняется комбинированным использованием тепловой и электрической энергии.



- 1. Бережковский М.И. Газгольдеры. М., Химия, 1985. С. 196.
- 2. Баадер В., Доне Е., Брендерфер М. Биогаз: теория и практика. // М., Колос, 1982. С. 148.
- 3. Веденев А.Г., Веденева Т.А. Биогазовые технологии в Кыргызской Республике // Бишкек «Евро». 2006. С. 90.
- 4. Кенжаев И.Г., Кудайбердиев Б.Э., Турсунбаев Ж.Ж., Бекбутаев Э.Б. Бытовой отопительно-варочный и электрогенерирующий агрегат. Патент №63. Кыргызской Республики. 2004.

УДК: 621.311.2

Кенжаев И.Г., д.т.н., профессор, Айдарбеков З.Ш., к.т.н, доцент, Жороев А.М., ст. преп., ОшГУ

Технико-экономический анализ микро ГЭС

Макалада Жала-Абад облусуна караштуу Аксы районунун Кербен айылына орнотулган микроГЭСтин мисалында технико-экономикалык эсептөө усулу каралды. Ар түрдүү электр камсыздоо булактарынан алынган электроэнергиянын өздүк нарктарын салыштырмалуу баалоо жүргүзүлдү.

В статье рассмотрена методика расчета технико-экономических показателей микроГЭС на примере микроГЭС, установленной в с. Кербен Аксыйского района Жалал-Абадской области. Произведена сравнительная оценка себестоимости электроэнергии, получаемой от разных источников электроснабжения.

The article describes the method of calculation of technical and economic parameters on the example of micro hydro installed in the village Kerben Aksy district of Jalal-Abad region. The comparative evaluation of the cost of electricity generated by different sources of electricity.

В настоящее время во многих странах мира, в которых имеются труднодоступные местности, не имеющие централизованного электроснабжения, все чаще вместо дизельгенераторных установок (ДГУ) начинают использоваться автономные электрические станции на базе возобновляемых источников энергии [1]:

- ветроэлектрические станции (ВЭС),
- солнечные фотоэлектрические станции (СФЭС),
- микрогидроэлектрические станции (МкГЭС).

В Кыргызстане также проявляется повышенный интерес к разработке автономных энергетических установок для обеспечения электроэнергией отдаленных автономных потребителей, удаленных от централизованных систем электроснабжения. С учетом природно-климатических условий республики из перечисленных выше автономных электростанций предпочтительным для автономного использования является микро и малые Γ ЭС.

В течение ряда лет группа ученых Ошского государственного университета проводит исследовательские работы по разработке, созданию и внедрению МкГЭС различных мощностей. Созданные МкГЭС установлены в ущелье Чычкан Токтогульского района (три микроГЭС мощностями 40 кВт, 37 кВт и 5 кВт) и в селе Кербен Аксыйского района (85 кВт).



Ниже нами проведен технико-экономический анализ МкГЭС на примере микроГЭС мощностью 85 кВт, установленной в селе Кербен Аксыйского района Жалал-Абадской области.

Необходимо отметить, что предлагаемую методику расчета техникоэкономических показателей МкГЭС можно применять для МкГЭС любых мощностей.





Рис. 1. МикроГЭС мощностью 85 кВт в селе Кербен Аксыйского района

В комплект одного агрегата МкГЭС – 45 входят [2]:

- 1. Энергоблок, состоящий из гидротурбины и асинхронного генератора.
- 2. Устройство автоматического регулирования.
- 3. Блок балластной нагрузки.

Разгружая блоки балластной нагрузки двух агрегатов, можно создавать пиковую компенсацию динамической нагрузки с $ДP_{\text{пж}}$ =40 кВт, обеспечивая устойчивость энергосистемы.

На основании приведенных технических данных МкГЭС и используя изложенную выше методику расчета, определим капитальные вложения и стоимость производимой электроэнергии при использовании двухагрегатной МкГЭС. При этом использование резервной ДЭС нам не представляется необходимым.

Таблица 1.1

№	Наименование оборудования	Стоимость	Стоим. на 1 год		
		(y.e.)	эксплуатации		
			(y.e.)		
1.	МкГЭС суммарной мощностью 85 кВт,	2 x 20 800 =	2080,0		
	состоящая из двух агрегатов	41600,0			
2.	Здание ГЭС площадью 15 м ² для	4 960,0	240,0		
	размещения агрегатов и пультовой				
3.	Водозаборное устройство и два водовода	3 440,0	170,0		
	длиной 30÷26 м				
4.	Линия электропередачи длиной 500 м	7 320,0	360,0		
	660/400 В с выходным понижающим				
	трансформатором и КРУ				
	Суммарные капитальные вложения	57 320,0	2 850,0		



Капитальные вложения на элементы системы автономного электроснабжение на базе двухагрегатной микро Γ ЭС представлены в табл.1.1. Ресурс гидроагрегатов и генераторов составляет t_{γ} =20 лет.

Оценим дополнительные статьи расходов для микроГЭС, сведя их в таблицу 1.2.

Таблица 1.2.

Дополнительные статьи расходов для ГЭС

№	Виды работ или расходов	% от капитальных вложений и абсолютные расходы в (у.е.)	Стоимость на 20 лет эксплуатации (у.е.)
1.	Инженерные изыскания, включая трассировку ЛЭП	3,5 %	2 006,0
2.	Маркетинг	4 %	2 293,0
3.	Проектирование помещения ГЭС, разработка комплекса стабилизации напряжения, трассировка водоводов и проектирование водозабора	4,8 %	2 751,0
4.	Транспортные расходы	6 %	3 439,0
5.	Строительные работы здания ГЭС, прокладка ЛЭП	40 % от суммы разделов 2., 4 таб.1.1	4 912,0
6.	Монтаж и отладка всех систем	4,8 %	2 751,0
	Сумма дополнительных расходов	18 152,0	

Амортизационные отчисления на 1 год эксплуатации исходя из нормы амортизации 5% в год равны: $C_{MK\Gamma \ni C.AMOPT} = C_{MK\Gamma \ni C.KA\Pi} \cdot 0.05 = (57\ 320.0+18\ 152.0) \cdot 0.05 = 3\ 773.6\ y.e./год.$

Оценим ежегодные издержки на ремонт (30% от амортизационных отчислений на 1 год эксплуатации):

 $C_{MKГЭС.PEM} = C_{MKГЭС.AMOРТ} \cdot 0.30 = 3773.6 \cdot 0.30 = 1132.08 \text{ у.е./год.}$

Оценим сумму расходов на обслуживание $Mк\Gamma ЭС$, сведя статьи расходов в табл. 1.3. (заработная плата).

Состав и зарплата персонала МкГЭС

Таблица 1.3

№	Должность	Коли-чество	Зарплата на человека в месяц (у.е.)	Зарплата на бригаду в год (у.е.)	
1.	Техник МкГЭС	1	100,0	1 200,0	
Cyn	има зарплаты персонала	1 человек	Зарплата персонала в год С _{зп} =1 20		

Итого ежегодные расходы:

 $C_{\text{СУМ МКГЭС}} = C_{\text{МКГЭС.АМОРТ}} + C_{\text{МКГЭС.РЕМ}} + C_{3\Pi} \cdot 1,03 = 3773,6 + 1132,08 + 1200 = =6105,68$ у.е./год,

где 1,03 — коэффициент, учитывающий начисления на заработную плату (начисления на зарплату составляют 3%).

Стоимость 1 кВт-ч электроэнергии от микроГЭС:



$$C_{\hat{e}\hat{A}\hat{o} \ / \, \hat{I}\hat{E}\hat{A}\acute{Y}\hat{N}} = \frac{\tilde{N}_{\hat{N}\acute{O}\hat{I} \ .\hat{I}\hat{E}\hat{A}\acute{Y}\hat{N}}}{W_{\hat{I}\hat{O}\hat{D} \ / \, \hat{G}\hat{I}\hat{G}}} = \frac{6105.68}{87 \cdot 24 \cdot 365} = 0,008 \quad \acute{o}.\mathring{a}./\,\hat{e}\hat{A}\grave{o} \ \cdot \div.$$

В таблице 1.4 приведена сравнительные себестоимости электроэнергии, получаемая от разных автономных энергоустановок на основе ВИЭ. Данные получены согласно [3].

Составим сравнительную таблицу себестоимости электроэнергии, получаемой от разных источников электроснабжения (таблица 1.4).

Таблица 1.4 Себестоимость электроэнергии, получаемой от разных источников электроснабжения

No	Источник энергии	Себестоимость 1 кВт·ч, у.е.
1.	ДЭС	0,4
2.	СФЭС	0,28
3.	ВЭС	0,0,2
4.	МкГЭС	0,008

Как мы видим из табл. 1.4, себестоимость 1 кВт \cdot ч энергии от микро ГЭС на порядок ниже, чем у других источников питания. Капитальные вложения для микро ГЭС также оказываются наименьшими.

Очевидно, что при замене ДЭС на МкГЭС на каждом кВт·ч экономится сумма $\Delta C = 0.4 - 0.008 = 0.392$ у.е./кВт·ч,

Экономия в год составит:

$$R_{\text{год}} = \Delta C \cdot W_{\text{год.потр.}} = 0.392 \cdot 87 \cdot 24 \cdot 365 = 298 \ 751,04 \ \text{y.e./год}$$

Следовательно, капитальные вложения с учетом дополнительных расходов на проектирование окупаются за срок около двух лет.

Выводы. Разработана методика сравнительного анализа технико-экономических показателей автономных электростанции на базе МкГЭС, позволившая доказать, что использование МкГЭС дает себестоимость электроэнергии почти на порядок меньшую, чем у других источников, со сроком окупаемости капитальных затрат на МкГЭС не превышающем 2,07 года.

При этом себестоимость единицы электрической энергии микро ГЭС мощностью 85 кВт при относительно низких напорах составит в среднем $0{,}008$ у.е./кВт \cdot ч.

Таким образом, можно сделать вывод, что для условий Кыргызстана использование в качестве автономных источников электроснабжения микро ГЭС является наиболее экономичным и требует минимума капитальных затрат.

Литература

- 1. Информационное агентство «Казахстан Сегодня». Бишкек, 2008.
- 2. Вишневский Л.В., Пасс А.Е. Система управления асинхронными генераторными комплексами. Киев-Одесса: Лыбидь, 1990. С. 168.
- 3. Казингуфу П.Л. Системы электрооборудования автономных микроГЭС. Санкт-Петербург, 2006. С. 43.



УДК: 662.997.517.

Кенжаев И.Г., Турсунбаев Ж.Ж., Бекбутаев Э., Мендибаев Д.А., ОшГУ <u>kenjaevig@rambler.ru</u>

Устройство для заполнения тепловой трубы теплоносителем

В настоящей статье приведено описание разработанного авторами устройства для заполнения тепловой трубы теплоносителем, позволяющее повысить точность дозировки теплоносителя в тепловой трубе и увеличить герметичность за счет применяемого конического шпинделя.

This article describes a device developed by the authors to fill the coolant heat pipe that improve the accuracy of dosing of coolant in the heat pipe and to increase tightness by applicable tapered spindle.

Ключевые слова: тепловая труба, коллектор, теплоноситель, теплооблеенних, штунер.

Известно, что в настоящее время разработаны огромное число различных устройств предназначенных для передачи теплоты из источника на расстояния. Из всех разнообразных устройств для передачи теплоты тепловая труба (ТТ) во многих отношениях является наиболее совершенным.

Среди очевидных преимуществ использования TT можно выделить простоту конструкции, исключительную маневренность в работе, легкость регулирования и возможность передачи высоких тепловых потоков на значительное расстояние при малых температурных напорах.

Технология изготовления тепловых труб включает процесс создания вакуума в трубе с последующей заправкой теплоносителем. В этом процессе немаловажное значение имеет точная дозировка теплоносителя в зависимости от объема ТТ. Анализ работы с ТТ показал, что при недостаточной дозировке ухудшается эффективность работы трубы, а в случае передозировки происходит блокировка поверхности конденсатора.

Литературный обзор публикаций по разработке устройств для заполнения тепловых труб теплоносителем показал, что в этом направлении проводятся определенные работы. В работе [1] приведено описание конструкции ТТ, которая соединяется с системой вакуумирования через коллектор с отверстием. В конструкции предусмотрена дозировочная емкость, к которой через вентиль подсоединен заправочный патрубок. Свободный конец патрубка введен внутрь коллектора. В данном случае, за счет непосредственного ввода теплоносителя в тепловую трубу, обеспечивается повышение точности дозировки теплоносителя при заправке, а применение лазерной сварки ведет к уменьшению количества примесей в теплоносителе.

Недостатком описанной конструкции является то, что устройство требует применения сложного технологического оборудования, необходимость использования вакуумного насоса и невозможность определения дозы заправляемого в тепловую трубу теплоносителя.

В работе [2] приведено описание разработанного способа заполнения тепловой трубы теплоносителем, заключающийся в том, что в рабочую трубу вводят теплоноситель путем шприцевания с избытком. При этом теплоноситель проникает в поры капиллярной структуры и вытесняет ранее находившийся в ней воздух. После чего иглу удаляют, а трубу переворачивают и нагревают до тех пор, пока из патрубка образовавшийся пар не выдавит излишки теплоносителя. Затем трубу герметизируют путем пережима конца



патрубка с применением сварки. Однако, при осуществлении процесса герметизации путем пережима конца патрубка с применением холодной сварки, появляется риск разгерметизации тепловой трубы при высоких температурах и давлениях. Также, необходимо отметить, что вышеприведенные способы являются дорогостоящими, высокотехнологичными и требуют больших материальных затрат.

Поэтому целью наших исследований являлось – повышение точности заправки, создание максимального вакуума в полости тепловой трубы, увеличение надежности герметизации и упрощение технологии заполнения теплоносителем тепловых труб.

На основе проведенных исследований нами разработано устройство, обеспечивающее заполнение тепловой трубы теплоносителем. Устройство для заполнения тепловой трубы теплоносителем состоит из тепловой трубы, сетчатого фитиля и измерительной емкости. В конструкции устройства предусмотрен теплообменник, в котором происходит конденсация теплоносителя.

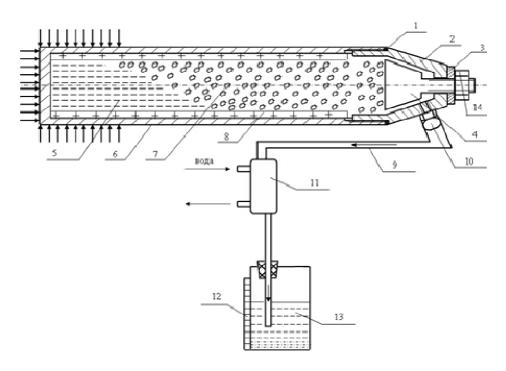


Рис. 1. Устройство для заполнения тепловой трубы теплоносителем 1-прокладка, 2-коническая задвижка, 3-упорная шайба, 4-конический шпиндель, 5-теплоноситель, 6-корпус тепловой трубы, 7-пары теплоносителя, 8-фитиль, 9-отводная труба, 10-штуцер, 11-теплообменник, 12-измерительная емкость, 13-конденсат теплоносителя.

На свободный торец тепловой трубы 6 с предварительно установленным внутри него фитилем 8 ввинчивается коническая задвижка 2 с расположенным внутри него коническим шпинделем 4. Герметичность конической задвижки обеспечивается прокладкой 1, а перемещение конического шпинделя по оси тепловой трубы осуществляется при помощи затяжной гайки 14. В корпусе задвижки 2 предусмотрено отверстие, в которое ввинчивается штуцер 10, предназначенный для заправки тепловой трубы теплоносителем 5 и для отвода воздуха и паров теплоносителя. Пары теплоносителя 7 через отводную трубу 9 попадают в теплообменник 11. Конденсат теплоносителя 13 попадает в измерительную емкость 12.

Заправка теплоносителя 5 в тепловую трубу 6 осуществляется через штуцер 10 с избытком. Затем конец тепловой трубы нагревается, испарившийся теплоноситель выталкивает воздух из полости тепловой трубы 6 через штуцер 10. Пары теплоносителя 7



по отводной трубе 9 попадает в теплообменник 11, где и происходит конденсация теплоносителя. Конденсаты теплоносителя 13 попадают в измерительную емкость 12, которая позволяет определить точность заправки тепловой трубы теплоносителем. При достижении требуемого количества теплоносителя в тепловой трубе при помощи затяжной гайки 14 закрывается отверстие в задвижке поверхностью шпинделя.

По количеству конденсата в измерительной емкости обеспечивается точность заправки тепловой трубы теплоносителем. Корпус задвижки и шпиндель выполнены в виде конуса. При помощи затяжной гайки осуществляется перемещение шпинделя по оси тепловой трубы, что позволяет плотное сопряжение притертых поверхностей шпинделя и корпуса задвижки, вследствие чего происходит обеспечение надежной герметичности тепловой трубы.

Предусмотренная измерительная емкость позволяет определить количество конденсированного избыточного теплоносителя, который создает максимальный вакуум в полости тепловой трубы, а надежность герметизации обеспечивается плотным прилеганием конического шпинделя к притертому корпусу задвижки имеющую такую же форму.

Использование в производстве TT данного устройства для заполнения тепловых труб обеспечивает по сравнению с существующими устройствами следующие преимущества:

- повышает точность заправки тепловой трубы теплоносителем за счет измерительной емкости, в которой по количеству конденсата избыточного теплоносителя можно определить требуемое количество теплоносителя в тепловой трубе;
- в полости тепловой трубы обеспечивается максимальный вакуум за счет вытеснения находящегося в ней воздуха парами нагретого теплоносителя;
- повышает надежность герметизации тепловой трубы за счет взаимного плотного прилегания поверхностей шпинделя и корпуса, имеющие конические формы;
- улучшает технологичность процесса заправки теплоносителем за счет простоты изготовления устройства и отсутствия необходимости применения дополнительного технологического оборудования.

Литература

- 1. Дар.П. Рей Д. Тепловые трубы, пер. с англ. Энергия. М., 1979. С. 272.
- 2. Ивановский М.Н. и др. Технологические основы тепловых труб. Минск Наука и техника. 1976. С. 136.

УДК: 662.997-534-4

Сатыбалдыев А.Б., к.т.н., доцент, ОшТУ sabst@mail.ru
Матисаков Т.К., к.т.н., ОшГУ tugolbai_83@mail.ru
Аттокуров А.К., преподаватель, ОшТУ anarbek84@list.ru

Анализ возможности использования стационарных стандартов по натурным испытаниям солнечных коллекторов для климатических условий города Ош

Ош шаарынын шартындагы күн нурунун агымынын тыгыздыгына жана температурасына анализдер жүргүзүлдү. Суу ысытуучу күн коллекторлорунун жылуулук



мүнөздөмөлөрүн эксперименталдык изилдөөлөрүн өткөрүү үчүн оптималдуу шарттары сунушталды.

Проведен анализ плотности потока солнечного излучения и температуры окружающей среды в условиях г. Ош. Предложены оптимальные условия для проведения экспериментальных исследований тепловых характеристик солнечных коллекторов (СК).

The analysis on the flux of solar radiation and ambient temperature conditions of the city of Osh and offered optimal conditions for experimental studies of thermal performance of solar collectors.

Ключевые слова: плотность потока солнечного излучения, солнечный коллектор, экспериментальное исследование тепловых характеристик солнечных коллекторов.

Основной целью экспериментальных исследований СК является определение его тепловых характеристик, в том числе определение уравнения кривой эффективности и значений параметров технического совершенства СК-оптического коэффициента полезного действия и коэффициента тепловых потерь.

Целью исследований являлась оценка возможности проведения данного рода экспериментов по квазистационарной методике в климатических условиях Кыргызстана. В статье проводится также анализ климатических условий г. Ош, в основном плотности потока солнечного излучения и температуры окружающей среды с точки зрения выполнения минимальных требований стационарных методик по натурным испытаниям СК.

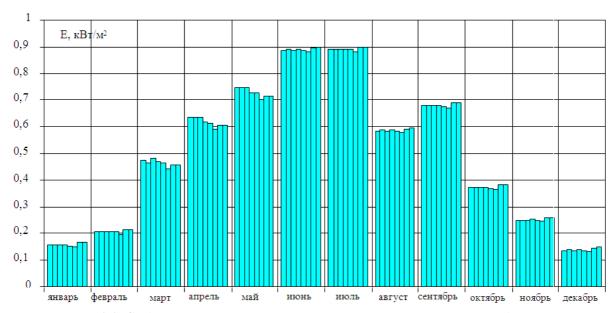


Рис. 1.1. Средняя плотность потока солнечного излучения в период с января по декабрь для г. Ош в 2012 г.



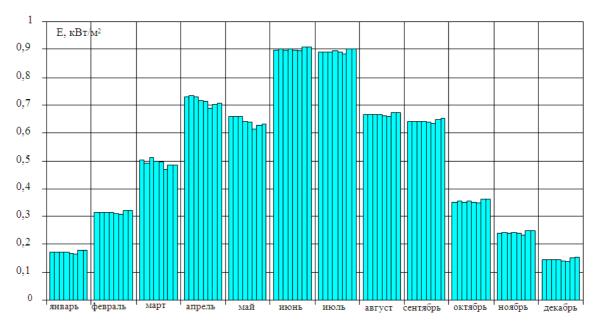


Рис. 1.2. Средняя плотность потока солнечного излучения в период с января по декабрь для г. Ош в 2013 г.

Основным препятствием, усложняющим проведение экспериментальных исследований тепловых характеристик СК, является неустойчивость метеорологических условий.

Неустойчивость метеоусловий наблюдается и в весенние месяцы наиболее благоприятные для проведения данного рода исследований.

Продолжительность солнечного излучения для города Ош составляет 2750 ч/год, средняя годовая облачность по районам составляет 5-6 баллов (степень облачности от 0 (чистое небо) до 8 (полная облачность) [1].

На рис. 1.1 и 1.2 приведены средние плотности потока солнечного излучения в околополуденные часы в 2012 г. и 2013 г. для г. Ош. Гистограммы были построены на основе данных, полученных из метеостанции расположенной в городе Ош.

Анализ результатов полученных нами измерений плотности солнечной радиации показал, что в период времени с марта по октябрь месяцы 2012 г. (245 дней) был 166 день, а в период времени с марта по сентябрь месяцы 2003 г. было 172 дня, во время которых средняя плотность потока солнечного излучения в околополуденные часы (в период с 11^{00} до 14^{00}) превышала $910~{\rm BT/m}^2$.



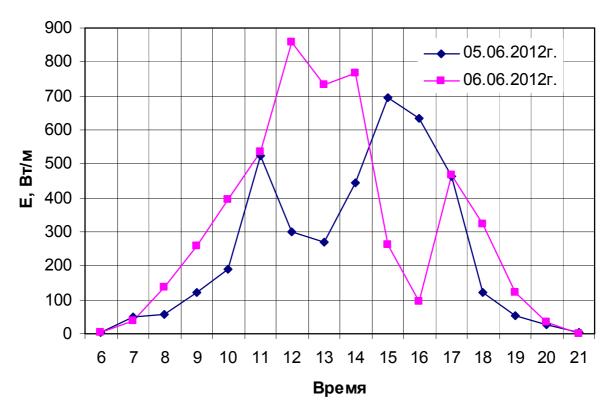


Рис. 1.3. Изменение значений плотности солнечного излучения для двух отдельных дней 05.06.2012 г. и 06.06.2013 г.

Однако следует отметить, что плотность потока солнечного излучения является очень неустойчивым и сильно меняющимся параметром. Даже в дни, которые способствуют проведению исследований по определению тепловых характеристик СК, эксперимент может быть усложнен мгновенными атмосферными помехами. Вызванные облачностью даже небольшие колебания плотности солнечного излучения приводят к нарушению требуемого квазистационарного режима работы СК как перед началом эксперимента (во время необходимой стабилизации коллектора), так и во время его проведения.

Таблица 1.1. Средние месячные температуры воздуха для г. Ош (0 C) [2].

Годы	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	чюль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь	Средне годовых
2000- 2005	-0,5	-1	10,2	9,1	14,6	24	26,4	23,2	21	13,7	5,9	1,9	12,3
2007- 2008	-3,9	4	9,3	14,8	20,8	23,9	25	25	18,7	15,2	6,8	-0,45	13,2
2012	-0,8	3,8	7,1	16,8	18,9	24,8	24,5	24,1	19,6	11	8,2	-0,82	13,1

Период времени с мая по сентябрь месяцы является наиболее приемлемым для проведения натурных испытаний СК из-за соответствующих стандартам значений температуры окружающей среды, которые днем практически постоянно превышают минимальную, требуемую стандартами, температуру.



Литература

- 1. Исманжанов А.И., Сатыбалдиев А.Б., Матисаков Т.К. Численное исследование суточного прихода суммарной солнечной радиации на произвольно ориентированную поверхность. Доклады Международной научно-практической конференции, посвященной 60-летию профессора И.А. Исманжанова. Кыргызско-Узбекский университет. Вып. №3. Ош, 2008. С. 246-248.
- 2. Отчет об оценке возможностей регионального сотрудничества в области использования Возобновляемых источников энергии стран Центрально-Азиатского региона. ЦАРЭС. Бишкек, 2008.

УДК: 553.43:553.21

Турдубаева \mathbb{W}^1 ., Ысманов Э. \mathbb{M}^2 ., Ташполотов Ы 1,2 ., Садыков Э 1,2 , ОшГУ 1 , ИПР ЮО НАН КР 2

Исследование барита Туя-Моюнского месторождения Кыргызстана

Исследован химический состав барита Туя-Моюнского месторождения Ошской области Кыргызской Республики. На основе полученных результатов, барит, находящийся в отвалах горных пород месторождения Туя-Моюн можно использовать как строительный смесь для защиты от радиационных излучений, после технологической переработки барита.

Investigated the chemical composition of the barite Tui-Moyunsk Osh region of the Kyrgyz Republic. Based on these results, barite, which is in the dumps rock deposits Tui-Moyun can be used as a building compound for protection against radiation, after technological processing barite.

Ключевые слова: барит, химический состав барита.

Развитие науки и техники, особенно в области энергетики, космических и ядерных технологий способствуют созданию новых, техногенных источников радиоактивного излучения. Они могут содержать радиоактивные вещества или побочные продукты ядерных реакций (изотопы и др). Эти вещества воздействуют на живую ткань посредством испускаемых ими при распаде альфа-, бета- и гамма- лучей и нейтронов [1].

Для снижения внешнего облучения используются различные физические и химические методы [1]. Основными способами защиты от внешнего облучения являются: (1) защита временем; (2) защита расстоянием; (3) применение защитных экранов; (4) фармакохимическая защита.

В настоящее время, перспективным направлением в области решения задач по обеспечению радиационной безопасности населения является применение композиционных строительных материалов на основе магнезиального вяжущего с добавками шунгита и барита [2]. При использовании барито – бетонных составов на портландцементе для обеспечения должной радиационной безопасности помещений требуется весьма значительная толщина слоя. К тому же баритовые составы на цементном вяжущем в процессе эксплуатации осыпаются, растрескиваются, и потому сами нуждаются в дополнительным защитном покрытии толщиной 1-1,5 мм. Существенно снизить толщину защитного слоя и значительно улучшить его технологические и эксплуатационные характеристики позволяет использование магнезиально – баритовых смесей вместо барито – бетонных составов. Такой материал позволяет создавать экранирующий слой для защиты от ионизирующих излучений, по своим характеристикам превосходит традиционные штукатурки из цемента и барита.



На территории КР зарегестрированно более 40 объектов барита [3] большая часть которых была выявленных попутно при поведении поисково-съемочных работ другого целевого назначения. Из них 15 объектов как наиболее перспективных показанный на регистрационной карте. Три объекта расположены в Чуйской области, девять в Нарынской области, два объекта в Ошской области и один объект в Баткенской области. Специальные поисково-ревизионные работы были проведены только в 1958 году. Балансом запасов учтено только одно месторождение барита «Арсы», на котором запасы барита в контуре полиметаллических руд, при содержании его 10-15 % в рудах в категории C_2 , составляет 122,8 тыс. тонн, запасы руды 1124 тыс. тонн. Детальные разведочные запасы проведены также на месторождения «Табылгаты» и «Тюндюксое. Запасы барита на месторождении «Табылгаты» по категории C₁ составляет 179,6 тыс. тонн, С2 составляет 214,6 тыс. тонн, с содержанием барита от 70,23 до 88,33 %. Запасы барита на «Тюндюкском месторождении» по категории C₁ составляет 41,8 тыс. тонн, по категории С2 составляет 49,4 тыс. тонн. Содержание барита от 75,56 до 93,6 %. Разработка баритовых месторождении возможна открытым способом. Таким образом, общие запасы барита по трем разведанным месторождениям: «Арсы», «Табылгаты» и «Тюндюкское» составляет -227,5 тыс. тонн по категории C_1 и по категории C_2 составляет -405,6 тыс.

На юге Кыргызстана практическое значение имеют три объекта: месторождение «Бель-Урюк», «Каражыгач» и «Туя-Муюн». На территории Ошской области, между городами Наукат и Араван, расположен массив «Туя-Муюн». По левому берегу реки Ятань в массиве «Туя-Муюн» находится самая глубокая пещера Киргизии – «Пропасть Ферсмана», глубиной 219 м. и длиной свыше 4580 м. Пещера эксплуатировалась как месторождение радия, а затем урана в начале 20 века. К концу 50-х годов она была выработана и ликвидирована, входы в штольни были взорваны или замурованы. Общая протяженность карстовых полостей и искусственных выработок в «Пропасти Ферсмана» составляют более 4580 м. Большая «Баритовая пещера» расположена на южной экспозиции массива «Туя-Муюн». Начинается пещера горизонтальной штольней длиной около 20 м. Стены пещеры были практически полностью покрыты мощной корой кальцита, размерами 35-45 см., а также кристаллами кристаллов гидротермального барита. Барит обволакивает стены пещеры в виде гроздьев и карнизов и больших сверкающих кристаллов. При свете лампы можно наблюдать огромные скопления баритовых корок, весом в десятки тонн.

Для отбора проб барита была организованна поездка на баритовое месторождение «Туя-Муюн». На самом крупном отвале бывшего уранового рудника были отобраны образцы кристаллов барита от чисто желтого цвета до темно-коричневого цвета. В зале «Баритовой пещеры» были отобрана проба кристаллов барита из баритовый жилы, барит имел цвет от темно-серого до черного. На отвале были собраны кристаллы барита чисто желтого цвета, весом от 2 до 50-70 грамм. Пробы были испытаны на соответствие требованиям ГОСТ 4682-84.

По технологической схеме получения баритового концентрата соответствующего требованиям ГОСТ 4682-84, баритовую руду подвергают промывке водой, затем руду пропускают через грохот для отделения тяжелой баритовой фракции от легких посторонних фракций породы [4, 5]. Отсортированную руду сначала дробят и затем измельчают чугунными шарами в цилиндрической мельнице. Измельченный барит поступает в цех флотации, где в пульпу баритовой руды добавляют сульфанол, керосин и жидкое стекло, для того чтобы барит приобрел гидрофобные свойства и всплывал на поверхность жидкости при перемешивании в аппарате флотации. Затем полученный баритовый концентрат проходит через ряд промывочных аппаратов для отделения сульфанола, керосина и жидкого стекла от барита, после чего сушится в печах при



температуре $400-450^{0}$ C, снова проходит стадию измельчения, после чего фасуется в тару [6, 7].

Другой способ получения баритового концентрата требует обработки баритовой руды серной кислотой, при этом получают баритовый концентрат наполнительных сортов. Химически состав барита зависит от химического состава баритовой руды и технологического процесса его получения.

Технология переработки баритового концентрата для получения барита сорта «бланфикс» состоит в следующем. Баритовая руда измельчается мокрым способом в цилиндрических мельницах. помощью чугунных шаров работающих классификаторами в замкнутом цикле. Верхний слив классификатора с фракцией барита до 0,06 мм. отделяют от твердой фракции. Затем сырье с влажностью до 30 % загружают в емкость, куда подается баритосодержащий раствор с серной кислотой, которая была использована на второй стадии для обработки баритового сырья. Пульпу подвергают интенсивному перемешиванию 10-20 минут, при соотношений $T: \mathcal{K} = 1: 6.$ Затем пульпу подвергают фильтрации и в тоже емкости подвергают обработке серной кислотой, только более концентрированной. Обработку на второй стадии ведут около 1,5 – 2 часа, при интенсивном перемешивании. Раствор перекачивают в емкость для гидролиза, в воду добавляют азотную кислоту, на этой стадии осадок сульфата бария промывают водой до нейтральной реакции с получением пасты «бланфикса». Обработку барита проводят в две стадии при перемешивании. На первой стадии используется серная кислота с пониженной концентрацией и барии конденсируется перед второй стадией растворения в более концентрированной серной кислоте. Так как обработку влажного барита ведут в 90% серной кислоте, что позволяет получить готовый продукт высокой очистки сорта «бланфикс». Совмещая эти два технологического процесса можно получать барит утяжелитель после размола баритовой руды и после обработки барита химическим путем можно получать барит наполнитель.

Состав элементов-примесей в барите, нами был определен на спектрометре СФ-46 Кадамжайского сурьмяного комбината. Для отделения сульфитной части от баритовой, проба помещалась в кварцевый тигель с добавлением царской водки. После фильтрования сульфитная часть переходила в раствор, а барит в осадок. Навеска барита сплавлялась с содой (соотношение 1:6) при температуре 900 °C. Сплав охлаждался и выщелачивался дистиллированной водой. Полученные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты спектрального и микропримесного анализа состава баритов (масс%)

№,п/п	Химические элементы,	Процентное	Примечание		
	соединения	содержание			
1.	Железо(Fe)	0.4			
2.	Золото (Au)		следы		
3.	Алюминий(Al)	0,02			
4.	Медь (Cu)	0.02			
5.	Свинец (Рь)		следы		
6.	Магний (Mg)	0.23			
7.	Марганец(Mn)	0.03			
8.	BaSO4	56.19			
9.	CaCO3	7.43			
10.	SO_3	9.65			
11.	Fe2O3	3.66			
12.	Цинк		следы		



Выводы:

- 1. Исходя из результатов спектральных и микро-примесных анализов, барит находящийся в отвалах горных пород рудника месторождения Туя-Моюн можно использовать как строительную смесь для защиты от радиационных излучений и в качестве баритового утяжелителя для буровых растворов, после соответствующей технологической переработки.
- 2. Необходимо проведение геолого-минералогических исследований 12 километрового баритового пояса от месторождения «Туя-Муюн» до месторождения «Акташ», расположенное рядом с поселком Алмалык, на предмет разработки баритового месторождения.
- 3. Необходимо провести геологический анализ существующих 20 месторождений барита на юге КР для уточнения: запасов, глубины залегания и мощности баритовых жил для промышленного их использования.

Литература

- 1. Кукушкин В.Д. Аспекты радиационной и электромагнитной безопасности жилых помещений // В.Д. Кукушкин, М.Е. Гошин // Актуальные проблемы инженерного обеспечения в АПК: сб.науч. тр. 30-юбил.научно-практич.конф. Ч2. Ярославль: ЯГСХА, 2007. С. 85-89.
- 2. Барит / под ред. В.П. Петрова, И.С. Делицина. М.: Наука, 1986. С. 245.
- 3. Полезные ископаемые Кыргызстана // www. nado.znate.ru/.Полезные ископаемые.
- 4. 8.А.с. Способ извлечения сульфата бария из природного барита. Госкомитет по изобретениям и открытиям при ГКНТ СССР. Бюллетень № 35 «71».
- 5. Герасимов Н.Н. Добыча и переработка баритового сырья // Горный журнал, 2007. № 3. С.75-79.
- 6. Исследование баритовых руд комплексом физико-химических методов (методические рекомендации) / Т.З. Лыгина, Г.Г. Ахманов, В.В. Власов, Н.Г. Васильев, И.П. Егорова [и др.]. Казань, 2004. С. 79.
- 7. Герасимов Н.Н. Добыча и переработка баритового сырья. // Горный журнал, 2007, №3. С. 75-79.



Правила оформления представляемых рукописей:

- 1. В журнале "Вестник ОшГУ" публикуются обзорные, проблемные, оригинальные экспериментальные и методические работы по: естественно-техническим, общественно-гуманитарным, медико-биологическим направлениям науки.
- 2. Статьи представляются тщательно отредактированными, в 2 экземплярах, напечатанные на одной стороне листа через два интервала (шрифт 14 Times New Roman) на бумаге стандартного формата. К рукописи необходимо приложить диск с файлом статьи в программе Word for Windows или PDF. Рукопись должна иметь направление от учреждения, в котором выполнена работа, подтверждающее, что материалы публикуется впервые. Выписка из протокола заседания кафедры об обсуждении рукописи и рецензия на рукопись.
- 3. При оформлении статьей, содержащих экспериментальные данные, необходимо придерживаться следующей схемы: обзор литературы, обоснование актуальность, цель исследования, методика (материалы и методы), результаты и обсуждения, выводы.
- УДК, строчными буквами фамилии и инициалы авторов, город и место работы, контактные данные (e-mail), название статьи заглавными буквами, аннотация (на кырг., на русск., англ. яз.), ключевые слова (на кырг., на русск., англ. яз.), основной текст;
- Основной текст набирается (**кегль 14**) после пропуска в одну строку (**кегль 12**) от аннотации. Сокращенные названия в тексте должны быть расшифрованы, нумерация формул производится справа в конце строки в круглых скобках (1), ссылки на литературу в квадратных скобках [1]. Формулы и символы (нежирный шрифт) в тексте следует набирать в **редакторе формул Equation Editor**;
- Иллюстрации и таблицы должны иметь названия, законченный вид и располагаться по тексту непосредственно после ссылки. Выравнивание таблиц и рисунков по центру страницы. Названия иллюстраций не должны включаться в поле иллюстраций. Название иллюстраций и таблиц должны быть набраны с использованием шрифта Times New Roman (кегль 12);
- Список литературы в конце статьи с отступом в 1 см от основного текста. Желательно, чтобы последняя страница статьи была полностью заполненной;
- Объем статьи до 10-12 страниц, (страница 1836 знаков), выполненных в формате А4, со ссылкой на литературу; кратких сообщений 5 стр., обзорных и проблемных статьей 18-20 страниц, включая список литературы. К статье необходимо приложить реферат и краткое резюме на кыргызском, русском и английском языках;
- Шрифт Times New Roman, Tamga KIT (кириллица);
- Размер символа 14; межстрочный интервал 2; все поля 25 мм;
- 4. Информация об авторе: Ф.И.О. всех авторов рукописи полностью, место работы, адрес и телефоны (служебный, домашний, мобильный), адрес ел. почты (e.mail).
- 5. Датой поступления рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта статьи, после исправления замечаний рецензента и ответственного редактора. Рукописи статьей редакция не возвращает.
- 1 страница 100 сомов.



«ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИНИН ЖАРЧЫСЫ»

ИЛИМИЙ ЖУРНАЛЫ

Журналдын чыгарууга жооптуу редактор, б.и.д., профессор

Жумабаева Т.Т.

Журналдын чыгарууга жооптуулар:

Комьютердик верстка: Файзуллаева Г.А., Бойтоева С.С., Саттарова К.С.

Дизайн: Нуранов А.Ш., Садиева А.С.

Корректорлор: Мурадымов Н.М., Байсубанов М.Т., Элчиев Ж.Э.

ОшМУнун "Билим" редакциялык басма бөлүмүндө даярдалып, басмадан чыгарылды.

Биздин дарегибиз: 723500, Ош шаары,

Ленин көчөсү, 331.

Байланыш телефондору: (+9963222) 23163, 72061

Факс: (+9963222) 24066

Электрондук дарегибиз: E-mail: <u>nauka-oshsu@mail.ru</u>

Сайт: www.oshsu.kg

<u>Негиздөөчүсү</u> – Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги

Ош мамлекеттик университети

 Басууга берилди: 20.10.2014 ж.
 Форматы: А4

 Көлөмү: 20 б.т.
 Буюртма: №40

 Форматы: 210х297 1/8.
 Нуска: 200 даана

ОшМУ "Билим" редакциялык басма бөлүмү