**Лекция 2 (2 часа)**

**Тема:** Различные подходы к понятию вероятности. Элементы комбинаторики.

**План**

1. Различные подходы к понятию вероятности.
2. Элементы комбинаторики

***Классическое определение вероятности***

**Определение.** *Пусть некоторое испытание имеет n исходов, причем эти исходы*

*а) попарно несовместимы;*

*б) единственно возможны;*

*в) равновозможны*

*и наступлению события А благоприятствует  исходов из Тогда вероятность наступления события А (в одном испытании) определяется по формуле*

**

**Пример.** В коробкеимеется 10 хороших деталей и 5 бракованных. Наудачу из коробки извлекается одна деталь. Найти вероятность наступления события *А –* извлеченная деталь – хорошая.

**Решение.** Общее число исходов  равно полному числу деталей в коробке. Извлечению хорошей детали благоприятствует исходов из общего числа (число хороших деталей). Тогда



**Пример.** Одновременно бросаются три монеты. Найти вероятность того, что на двух из них выпадет “орел”.

**Решение.** Для удобства будем предполагать, что монеты некоторым образом занумерованы.Единичным исходом здесь является совокупный результат по трем монетам (другими словами, для того, чтобы задать единичный исход, надо сказать, *что* выпало на первой монете, на второй и на третьей). Перечислим возможные исходы (см. Таблицу 1, в которой выпадение “орла” на соответствующей монете обозначено буквой “О”, “решки” – “Р”). Видно, что общее число исходов равно 8. Число  благоприятствующих исходов равно 3 – это исходы с номерами 2, 3, 5 Таблицы 1. Тогда .

**Пример.** В коробке 6 белых шаров и 8 красных. Наудачу одновременно извлекаются 3 шара. Найти вероятность, того, что среди них будут:

а) два белых шара;

б) не менее двух белого.

**Решение.** а) Для удобства будем предполагать, что имеющиеся шары некоторым образом перенумерованы. Пусть, например, белые шары имеют номера 1, 2, … ,6 красные – 7, 8 , … ,14. Тогда единичным исходом является произвольная тройка номеров: , , …, . ( Оставляем читателю в качестве упражнения проверку того, что данные исходы удовлетворяют всем условиям классического определения вероятностей.)

Тогда общее число *n* исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 3 номера из имеющихся 14-ти номеров. Напомним, что такое число равно соответствующему числу сочетаний:

.

(В общем случае,



*равно числу способов, которыми можно выбрать s объектов из k имеющихся объектов*.) Таким образом,

=

Найдем теперь число *m*  исходов, благоприятствующих появлению двух белых шаров среди трех извлеченных. Число способов, которыми можно выбрать 2 шара из имеющихся 6-ти белых шаров, равно . Но число благоприятствующих исходов с фиксированной парой белых шаров равно числу способов, которыми можно выбрать оставшийся красный шар в тройку, т.е. равно . Поэтому



Окончательно имеем



где *А* – событие состоящее в том, что среди трех отобранных шаров ровно 2 белых шара.

б) Полное число *n*  исходов найдено в п. а). Число троек, в которых не менее 2-х белых шаров, равно сумме троек с двумя белыми шарами и троек с тремя белыми шарами:



Окончательно имеем



где *В* – событие состоящее в том, что среди трех отобранных шаров не менее 2-х белых шаров.

***Статистическое определение вероятности***

Пусть проведено *N* испытаний, в которых некоторое событие *A* наступает  раз. Тогда отношение ****** называется *частостью (долей)* наступления события *A*  в  *N* испытаниях.

**Определение.** *Пусть условия проведения некоторого испытания можно в точности воспроизвести неограниченное число раз. Тогда* ***вероятностью****наступления события A (в одном испытании) называется такое число, около которого группируются значения частости* ****** *при неограниченном увеличении числа испытаний N .*

Символически это определение можно записать в виде



Отметим практическое следствие данного определения: если нас интересует значение вероятности наступления некоторого события *,* то производят достаточно большое число испытаний *N,*  по их результатам определяют значение частости ****** и затем полагают



(Более подробно обоснование такого подхода будет рассмотрено ниже: см. Закон больших чисел, теорему Бернулли.)

Также статистическое определение вероятности имеет следующее важное

**Следствие (область возможных значений вероятности события).** *Значение вероятности произвольного события  заключено в границах от 0 до 1, т.е.*

**

**Доказательство.** Очевидно, что



Выполняя почленное деление последнего неравенства на , получаем



Переходя теперь к пределу при , имеем



1. На данном уроке мы коснёмся элементов***комбинаторики***, которые потребуются для дальнейшего изучения [**теории вероятностей**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html). Следует отметить, что комбинаторика является самостоятельным разделом высшей математики и по данной дисциплине написаны увесистые учебники, содержание которых, порой, ничуть не легче абстрактной алгебры.

В узком смысле комбинаторика – это подсчёт различных комбинаций, которые можно составить из некоторого множества дискретных объектов. Под объектами понимаются какие-либо обособленные предметы или живые существа – люди, звери, грибы, растения, насекомые и т.д. При этом комбинаторику совершенно не волнует, что множество состоит из тарелки манной каши, паяльника и болотной лягушки. Принципиально важно, что эти объекты поддаются перечислению – их три (дискретность) и существенно то, что среди них нет одинаковых.

С множеством разобрались, теперь о комбинациях. Самыми распространёнными видами комбинаций являются перестановки объектов, их выборка из множества (сочетание) и распределение (размещение). Давайте прямо сейчас посмотрим, как это происходит:

***Перестановки, сочетания и размещения без повторений***

**Перестановками** называют комбинации, состоящие из одних и тех же zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image023 **различных**объектов и отличающиеся только порядком их расположения. Количество всех возможных перестановок выражается формулой zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image025

Отличительной особенностью перестановок является то, что в каждой из них участвует**ВСЁ** множество, то есть, **все** zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image023_0000 объектов.

**Задача 1**

Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

**Решение**: используем формулу количества перестановок:

zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image027

**Ответ**: 120 способами

**Задача 2**

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

***Сочетания***

**Сочетаниями** называют различные комбинации из zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image029 объектов, которые выбраны из множества zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image031 различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image029_0000элементов, в которой не важен их порядок (расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле

zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image033.

***Задача 3***

В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

**Решение**: прежде всего, снова обращаю внимание на то, что по логике условия, детали считаются **различными**– даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы (в этом случае их можно, например, пронумеровать).

В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей, в которой не имеет значения их «дальнейшая судьба» – грубо говоря, «просто выбрали 4 штуки и всё». Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество:

zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image035

Здесь, конечно же, не нужно ворочать огромные числа zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image037.   
В похожей ситуации я советую использовать следующий приём: в знаменателе выбираем наибольший [**факториал**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf) (в данном случае zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image039) и сокращаем на него дробь. Для этого числитель следует представить в виде zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image041. Распишу очень подробно:

zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image043

 способами можно взять 4 детали из ящика.

**Ответ**: 1365 способами

Формуле zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image033_0000 необходимо уделить самое пристальное внимание, поскольку она является «хитом» комбинаторики. При этом полезно понимать и без всяких вычислений записывать «крайние» значения: zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image046. Применительно к разобранной задаче:

zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image048 – единственным способом можно взять ни одной детали;  
zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image050 способами можно взять 1 деталь (любую из пятнадцати);  
zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image052 способами можно взять 14 деталей (при этом какая-то одна из 15 останется в ящике);  
zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image054 – единственным способом можно взять все пятнадцать деталей.

***Задача 4***

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

***Размещения***

**Размещениями** называют различные комбинации из zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image029_0001объектов, которые выбраны из множества zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image031_0000 различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком. Количество размещений рассчитывается по формуле zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image058

***Задача 5***

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

**Решение**: для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками: **\*\*\***

Комбинации будем считать по разрядам – слева направо:

В разряд сотенможно записать любую из zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image090 цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9).  Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в разряд десятков («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр: zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image080_0000.

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

**Итого, существует**: zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image093 трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведение zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij_clip_image095 расшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру в разряд сотен**и** 10 способами выбрать цифру в разряд десятков **и** 2 способами вразряд единиц»

Или ещё проще: «**каждая** из 9 цифр в разряде сотенкомбинируется **с каждой** из 10 цифрразряда десятков **и с каждой** из двух цифр в разряде единиц».

**Ответ**: 180