**Лекция 3 (1 час)**

**Тема:** Формулы алгебры событий. Несовместимые и независимые события.

**План**

1. Несовместимые и независимые события
2. Алгебра событий
3. **Определение.** Если события А п В не могут произойти одновременно в результате одного испытания (иными словами, если АВ — невозможное событие), то их называют несовместимыми, и тогда р(АВ) = 0. Если же события могут произойти в результате одного испытания, то их называют совместимыми.

**Пример.** Испытание – извлечение карты из колоды. Если событие *А –* извлечена карта красной масти, событие *В –* извлечена карта черной масти, то *А* и *В –* несовместны.

**Пример.** Пусть по мишени производится 3 выстрела и *m* – число попаданий в мишень. Тогда события, например,  и  – несовместны.

**Определение.** *События  называются* ***единственно возможными*** *для некоторого испытания, если в результате испытания хотя бы оно из них обязательно наступает.*

**Пример.** Пусть испытание – бросание игральной кости.    Тогда события *А* и *В –* единственно возможны (т.к. не существует такого исхода бросания игральной кости, при котором ни *А,* ни *В* не наступило). Напротив, *А* и *С* не являются единственно возможными (т.к. при выпадении “6” ни *А,* ни *С*  не наступают).

**Определение*.*** *Говорят, что события  образуют* ***полную систему (группу),***  *если эти события попарно несовместимы и единственно возможны.*

**Пример.** Пусть испытание – бросание игральной кости. Тогда события  образуют полную систему.

**Пример.** Пусть по мишени производится 3 выстрела и *m* – число попаданий в мишень. Тогда события, например,  образуют полную систему.

Заметим, что при заданном типе испытания полная система событий определена, вообще говоря, неоднозначно.

**Определение.** *Если два события образуют полную систему, то они называются парой* ***взаимно противоположных*** *событий.*

Если одно из событий такой пары обозначено, скажем, через , другое будет обозначено 

**Пример.** Пусть испытание – бросание монеты. Тогда события *А* – выпадение “орла” и *В*  – выпадение “решки” являются взаимно противоположными ().

**Пример.** Пусть по мишени производится 3 выстрела, и *m* – число попаданий в мишень. Тогда события, например,  и  – взаимно противоположны.

**Определение.** Два события называются **независимыми,** если вероятность наступления одного из них не зависит от того, считается ли другое событие наступившим или нет.

***Операции над событиями***

**Определение. Суммой** событий А и В называется такое событие , которое считается наступившим тогда и только тогда, когда наступило или событие А, или событие В, или оба эти события вместе.

**Пример.** Пусть испытание – извлечение карты из колоды, а следующие события состоят в извлечении: А – карты красной масти, В – картинки, D – числовой карты. Если в результате конкретного испытания из колоды достали, например, “семерку” крестей то событие А+В не наступило, а события  и  наступили.

**Пример.** Пусть по мишени производится 3 выстрела, m – число попаданий в мишень   , . Тогда .

**Определение. Произведением** событий А и В называется такое событие , которое считается наступившим тогда и только тогда, когда события А и В наступили одновременно.

**Пример.** Пусть испытание состоит в бросании игральной кости.  . Тогда  и .

**Замечание 2.** Произвольные события А и В являются несовместимыми тогда и только тогда, когда ∅.

**Основные теоремы теории вероятностей**

**Теорема сложения вероятностей.**



Важным частным случаем этой теоремы является

**Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.** Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей, т.е.



**Доказательство.** Так как события А и В несовместны, то их произведение равно невозможному событию, т.е. АВ = ∅. Поскольку вероятность невозможного события равна нулю, то из теоремы сложения вероятностей следует требуемое утверждение.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо для любого числа попарно несовместных событий: вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо для любого числа попарно несовместных событий: вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей.

**Следствие.** Пусть события образуют полную систему, тогда сумма их вероятностей равна 1 т.е.



**Доказательство.** Из определения полной системы следует, что события , в частности, являются единственно возможными, поэтому . Тогда



Вероятность достоверного события равна 1. События , в частности, являются попарно несовместными. Тогда из теоремы сложения вероятностей для несовместных событий следует требуемое утверждение.

Данное следствие при  представляет важное свойство противоположных событий: сумма вероятностей взаимно противоположных событий равна 1, т.е.



**Определение. Условной вероятностью**  называется вероятность наступления события А в предположении наступления события В.

**Определение.** Два события называются **независимыми,** если вероятность наступления одного из них не зависит от того, считается ли другое событие наступившим или нет.

Данное определение равносильно следующему:

события А и В независимы ⇔ 

**Теорема (**необходимое и достаточное условие независимости событий**).** События А и В независимы тогда и только тогда, когда



**Теорема умножения вероятностей.**

|  |
| --- |
| ……………………………………….. |

**Теорема умножения вероятностей для независимых событий.** *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей, т.е.*

.

Аналогичное утверждение справедливо для любого числа независимых событий.

**Пример.** Два стрелка одновременно выстреливают в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет:

а) одна пробоина;

б) хотя бы одна пробоина.

**Решение.** а) Прежде всего, укажем, когда может наступать интересующее нас событие, перебирая все возможные варианты.

В мишени будет одна пробоина

тогда и только тогда, когда

первый стрелок попал и второй стрелок промахнулся

или

первый стрелок промахнулся и второй стрелок попал.

Пусть событие *А –* в мишени будет одна пробоина, событие * –* первый стрелок попал, событие * –* второй стрелок попал. Тогда – первый стрелок промахнулся,

– второй стрелок промахнулся. “Тогда и только тогда, когда” соответствует отношению равенства событий. Соединительный союз “или” соответствует операции сложения событий. Соединительный союз “и” соответствует умножению событий. Тогда фраза русского языка, в которой мы перечислили все возможности для наступления события *А,* равносильна следующему символическому равенству



Откуда следует равенство вероятностей



Так как события  и  несовместны, то, применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, приходим к равенству



События , и , попарно независимы, поэтому, применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, получаем



По условию,  и Тогда, по свойству взаимно противоположных событий (см. следствие из теоремы сложения вероятностей для несовместных событий, ),  и  Окончательно имеем



б) Пусть  – число попаданий в мишень, тогда искомой является вероятность  (заметим, что слова “хотя бы один”, “не менее чем один”, “по-крайней мере один” являются синонимами). Событие равносильно тому, что число попаданий в мишень будет равно 1 или 2, т.е.



Тогда, учитывая несовместность событий  и , получаем



 (см. п. а) данного примера). Событие  (два попадания в мишень) наступает тогда и только тогда, когда первый стрелок попадет в мишень и второй стрелок попадет, т.е.

.

Поэтому



(см. теорему умножения вероятностей для независимых событий). Окончательно имеем



Отметим, что эта задача допускает и другое решение. Так как события и взаимно противоположны, то

.

Но  Следовательно



**Пример.** В коробке лежат4 белых шара и 6 красных. Наудачу, один за другим из коробки извлекается 2 шара. Найти вероятность того, что среди них будет:

а) один красный шар;

б) менее 2-х красных шаров.

**Решение.** а) Пусть событие А – среди двух извлеченных шаров – ровно один красный. Это событие наступает тогда и только тогда, когда первый из извлеченных шаров – красный, а второй – белый или первый шар – белый, а второй – красный. Напомним, что соединительный союз “или” соответствует сложению событий, союзы “и”, “а” соответствуют умножению событий. Тогда описание всех возможностей наступления события А равносильно следующему формальному равенству

,

где  () – первый (второй) шар – красный,  () – первый (второй) шар – белый. События  и  – несовместны, поэтому, используя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем

.

Применяя теперь теорему умножения вероятностей, приходим к равенству

.

Для вычисления вероятностей из правой части последнего равенства используем классическое определение вероятности. Тогда



б) Пусть m – число красных шаров среди двух извлеченных. Тогда искомой является вероятность  Очевидно, что , и  (см. п. а) данного примера). Вместе с тем, событие  – среди извлеченных шаров нет красных – равносильно тому, что первый шар окажется белым и второй – также белым, т.е. , поэтому



Окончательно имеем



Заметим, что вероятность может быть также найдена по-другому. События и  взаимно противоположны, поэтому



Но



Тогда

