**Лекция 5 (1 час)**

**Тема:** Схема испытаний Бернулли

**План**

1. Схема испытаний Бернулли

**2**. Формула Пуассона

***Формула Бернулли***

**Пример.** Предполагается произвести 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле считается известной и равной 0,7. Найти вероятность того, что число попаданий в мишень будет:

а) равно 2;

б) не менее 2-х;

в) менее 4-х.

**Решение.** а) Введем обозначения, которые ниже будем использовать в подобных случаях. Число выстрелов по мишени обозначим через *n*  (здесь ), – вероятность попадания в мишень при каждом выстреле, – вероятность промаха при каждом выстреле,  – число попаданий. Требуется найти , эту же вероятность обозначим через . Перебирая все случаи, в которых число попаданий в мишень будет равно 2, получаем



.

В общем случае справедлива

**Теорема.** *Пусть произведено n повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие А наступает с вероятностью p. Тогда вероятность  того, что в этих n испытаниях событие А наступит*  *раз, вычисляется по формуле*

**

*где* – *число сочетаний из* *n по* *,* .

Полученная формула носит название ***формулы Бернулли****.*

Завершим рассмотрение нашего примера.

б) Так как  то, применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем



Первое слагаемое последней суммы найдено в п. а) данного примера. Аналогично для остальных:





Окончательно имеем



в) По аналогии с предыдущим пунктом задания,



т.е. решение требует, вообще говоря, четырех применений формулы Бернулли. Однако возможно и более короткое решение. Действительно, события  и – взаимно противоположны, следовательно



Вероятность  найдена в п. б) примера. Таким образом, получаем



***2.1. Формула Пуассона (редких событий)***

**Теорема.** Пусть произведено n повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие А наступает с вероятностью p , причем

а) число испытаний достаточно велико (;

б) 

Тогда вероятность  того, что в этих n испытаниях событие А наступит  раз, вычисляется по следующей приближенной формуле



Эта формула и называется ***формулой Пуассона.****.*

**Пример.** По каналу связи передано 1000 сигналов. Вероятность ошибки при передаче каждого из сигналов равна 0,005. Найти вероятность того, что неверно передано:

а) 7 сигналов;

б) не менее 4-х сигналов.

**Решение.** а) Воспользуемся формулой Пуассона, т.к. условия ее применимости в данном случае выполнены: число испытаний достаточно велико ** и **Искомое значение  найдем по таблице функции Пуассона при  и  (см. учебник Н.Ш. Кремера, с.556): 

б) Требуется найти , где *m* – число неверно принятых сигналов. Так как  то 

Искать каждое из слагаемых этой суммы и затем выполнять суммирование – такое решение не представляется рациональным из-за большого числа слагаемых и потому, что таблица функции Пуассона не дает искомых значений с требуемой в данном случае точностью. Воспользуемся переходом к противоположному событию: 

Находя вероятности из правой части последнего равенства по таблице функции Пуассона, окончательно получаем



***2.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа***

**Теорема.** *Пусть произведено n повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие А наступает с вероятностью p* *, причем число испытаний достаточно велико (.Тогда вероятность  того, что в этих n испытаниях событие А наступит*  *раз, вычисляется по следующей приближенной формуле*

**

*где * – *функция Гаусса*, * *

**Пример.** Имеется партия деталей, состоящая из 1000 штук. В среднем среди деталей такого вида стандартные детали составляют 90%.Найти вероятность того, что число стандартных деталей в данной партии окажется равным 890.

**Решение.** Число испытаний в данном случае достаточно велико , поэтому локальная теорема Муавра-Лапласа применима. Из условия следует, что вероятность быть стандартной для произвольной детали данной партии равна 

, , . Тогда



По локальной теореме Муавра-Лапласа,

**

Учитывая, что функция Гаусса четная, используя таблицу этой функции (см. учебник Н.Ш. Кремера, с. 553-554), находим  Окончательно, получаем

**

**Свойства функции Гаусса.**

1) Функция Гаусса четна: , поэтому ее график симметричен относительно оси ;

*x*

*y*



Рис.1

2)  при всех , т.е. график  расположен строго выше оси ;

3) , т.е. ось  является горизонтальной асимптотой графика этой функции; на практике полагаем .

Схематично график функции Гаусса изображен на рис. 1.

***2.3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа***

**Теорема.** *Пусть произведено n повторных независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие А наступает с вероятностью p* *, причем число испытаний достаточно велико (.Тогда вероятность того, что число m наступлений события А в этих n испытаниях будет заключено в границах от  до , вычисляется по следующей приближенной формуле*



*где* – *функция Лапласа,* *.*

**Пример.** Каждая из 1000 деталей партии стандартна с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что число стандартных деталей этой партии будет не меньше 880.

**Решение.** Число *n* повторных независимых испытаний в данном случае равно числу деталей в партии (каждая из деталей партии будет проверяться на предмет качества, а в этой проверке и состоит испытание).  поэтому интегральная теорема Муавра-Лапласа применима; неравенство , где – число стандартных деталей в партии, здесь равносильно  поэтому       Тогда





По свойствам функции Лапласа (см. ниже), ,  По таблице функции Лапласа (см. учебник Н.Ш. Кремера, с. 555) находим  Тогда окончательно имеем

*y*

*x*

-1

Рис. 2



1



**Свойства функции Лапласа**

1. Функция Лапласа нечетна: 
2. Функция Лапласа – монотонно возрастающая;
3.   т.е. прямые  и являются горизонтальными асимптотами (правой и левой соответственно) графика ; на практике полагаем  при 

График функции Лапласа схематично изображен на рис. 2.

**Следствия из интегральной теоремы Муавра-Лапласа**

*Пусть выполнены условия применимости интегральной теоремы Муавра-Лапласа.*

**Следствие 1.** *Вероятность того, что число наступлений события А в n повторных независимых испытаниях будет отличаться от величины не более чем на (по абсолютной величине), вычисляется по формуле*

**

**Следствие 2.** *Вероятность того, что доля наступлений события А в n повторных независимых испытаниях будет отличаться от вероятности p наступления этого события в одном испытании не более чем на  (по абсолютной величине), вычисляется по формуле*

**

**Пример.** Подлежат исследованию 1000 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе равна 0,15. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 будет заключено число проб руды с промышленным содержанием металла.

**Решение.** Искомые границы для числа  проб руды с промышленным содержанием металла (из данных 1000 проб) определяются величинами  и  (см. интегральную теорему Муавра-Лапласа). Будем предполагать, что искомые границы симметричны относительно величины , где  и . Тогда ,  для некоторого , и, тем самым, единственной определяющей неизвестной данной задачи становится величина . Из следствия 1 и условия задачи следует, что



По таблице значений функции Лапласа найдем такое , что  

Тогда  и . Окончательно получаем искомые границы:   т.е. с вероятностью 0,9973 число проб руды с промышленным содержанием металла (из данных 1000 проб) попадет в интервал (116; 184).

**Пример.** В лесхозе приживается в среднем 80% саженцев. Сколько саженцев надо посадить, чтобы с вероятностью 0,9981 можно было утверждать, что доля прижившихся саженцев будет находиться в границах от 0,75 до 0,85.

**Решение. ** – вероятность прижиться для каждого из саженцев, . Пусть – необходимое число саженцев (искомая величина данной задачи) и – число прижившихся из них, тогда – доля прижившихся саженцев. По условию,



Данные границы для доли  симметричны относительно величины****, поэтому неравенство  равносильно неравенству 

Следовательно, вероятность 0,9981 – это та самая вероятность, которая вычисляется по следствию 2 из интегральной теоремы Муавра-Лапласа при ,  :

**

По таблице функции Лапласа найдем такое значение , что  Это значение: Тогда



 и



Заметим, что значение  округлено до целых в большую сторону, чтобы обеспечить, как говорят, “запас по вероятности”. Кроме того, видно, что полученное значение  достаточно велико (более 100), поэтому применение интегральной теоремы Муавра-Лапласа для решения данной задачи было возможно.