**Лекция 7 (2 часа)**

**Тема:** Случайные величины и законы их распределения

**План**

1. Дискретные случайные величины
2. Непрерывные случайные величины

***Дискретная случайная величина***

**Определение. *Случайной величиной*** *называется переменная, которая в результате испытания принимает то или иное числовое значение.*

**Пример.** Число попаданий в мишень при **** выстрелах – случайная величина.

**Пример.** Рост наудачу взятого человека – случайная величина.

**Определение.** *Случайная величина называется* ***дискретной****, если число ее возможных значений конечно или счетно.*

(Напомним, что множество называется *счетным*, если его элементы можно перенумеровать натуральными числами.)

В этом смысле, число попаданий в мишень – пример дискретной случайной величины. Рост человека – непрерывная случайная величина (такие случайные величины будут рассмотрены ниже).

Для обозначения случайных величин будем использовать заглавные буквы латинского алфавита (возможно с индексами), например, и т.п.

**Определение. *Законом распределения*** *дискретной**случайной величины называется такая таблица, в которой перечислены все возможные значения этой случайной величины (без повторений) с соответствующими им вероятностями.*

В общем виде закон распределения для случайной величины, например, :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| : |  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

где  

Из определения закона распределения следует, что события  … ,  образуют полную систему, поэтому (см. следствие из теоремы сложения вероятностей для несовместных событий в §1.6):



т.е.



Данное равенство называется *основным свойством закона распределения.*

**Пример.** Два стрелка одновременно выстреливают в мишень. Вероятность попадания для первого равна 0,6, для второго – 0,8. Составить закон распределения случайной величины – общего числа попаданий в мишень.

**Решение.** Возможные значения данной случайной величины: 0, 1, 2. Так же как в примере из §1.6, через  и  обозначим события, состоящие в попадании в мишень первого и второго стрелков (соответственно). Тогда аналогично упомянутому примеру получаем







Окончательно, закон распределения случайной величины имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| : |  |  |  | 2 |  |
|  |  | 0,44 | 0,48 | 1 |

**Упражнение.** В коробке 3 белых шара и 2 красных. Составить закон распределения случайной величины – числа белых шаров среди 2-х извлеченных шаров.

**Ответ.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 1 | 2 |  |
|  | 0,1 | 0,6 | 0,3 | 1 |

**Пример.** В коробке – 3 белых шара и 2 красных. Шары извлекаются последовательно до появления белого шара. Составить закон распределения случайной величины *Х* – числа извлеченных шаров.

**Решение.** Возможные значения данной случайной величины: 1, 2, 3. Событие  (из коробки будет извлечен один единственный шар) наступает тогда и только тогда, когда первый из шаров оказывается белым, т.к. появление именно белого шара является сигналом к прекращению последующих извлечений (см. условие). Поэтому



 где событие  – первый из извлеченных шаров – белый. Событие  (из коробки будет извлечено ровно 2 шара) наступает тогда и только тогда, когда первый из извлеченных шаров оказывается красным, а второй – белым. Поэтому



где событие  – первый из извлеченных шаров – красный,  – второй шар – белый. Наконец событие  (из коробки будет извлечено 3 шара) наступает тогда и только тогда, когда первый шар – красный, второй – красный и третий – белый. Поэтому



Окончательно искомый закон распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* : |  | 1 | 2 | 3 |  |
|  | 0,6 | 0,3 | 0,1 | 1 |

**Упражнение.** Имея 3 патрона, стрелок стреляет по мишени до первого попадания (или до израсходования патронов). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины *Х* – числа произведенных выстрелов.

**Ответ.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* : |  | 1 | 2 | 3 |  |
|  | 0,8 | 0,16 | 0,04 | 1 |

 **Пример.** Стрелок стреляет в мишень 3 раза. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины *Х* – числа попаданий в мишень.

**Решение.** Возможные значения для числа попаданий: 0, 1, 2, 3. Вероятности того, что случайная величина *Х* примет эти значения вычисляются по формуле Бернулли при   









Окончательно искомый закон распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* : |  | 0 | 1 | 2 | 3 |  |
|  | 0,008 | 0,096 | 0,384 | 0,512 | 1 |

Полученный закон распределения является частным случаем так называемого *биномиального закона распределения* (при  ).

**Определение.** *Случайная величина Х имеет* ***биномиальный закон распределения*** *с параметрами  и , если ее закон распределения имеет вид* :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* : |  | 0 | 1 | 2 | … |  | , |
|  |  |  |  | … |  |

*где вероятности  вычисляются по формуле Бернулли:*

**

* – положительное целое число,  *

В пределе при  и  биномиальное распределение переходит в так называемое распределение Пуассона.

**Определение.** *Говорят, что случайная величина Х имеет* ***распределение Пуассона*** *с параметром , если ее закон распределения имеет вид:*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* : |  | 0 | 1 | 2 | … | , |
|  |  |  |  | *…* |

*где*

*,*

* *– *положительное число.*

Убедимся в том, что для распределения Пуассона выполняется основное свойство закона распределения: . Действительно, имеем



(см. курс математического анализа, разложение функции в ряд Маклорена).

 ***Непрерывная случайная величина***

***Плотность распределения непрерывной случайной величины***

Случайная величина непрерывна, если ее значения полностью заполняют некоторый интервал.

**Определение.** *Случайная величина называется* ***непрерывной****,**если ее функция распределения непрерывна на всей числовой прямой и дифференцируема при всех х за исключением,* *быть может, отдельных значений.*

**Определение. *Плотностью распределения*** *непрерывной случайной величины Х называется такая функция  что вероятность того, что в произвольном испытании значение случайной величины Х окажется принадлежащим некоторому отрезку , вычисляется по формуле*



Принимая во внимание геометрический смысл определенного интеграла, получаем

**Геометрический смысл плотности распределения.** *Вероятность того, что в произвольном испытании значение случайной величины Х окажется принадлежащим некоторому отрезку , численно равна площади  под кривой плотности распределения на данном отрезке*  (см. рис. 1).

*y*

*x*







Рис. 1



**Пример.** Пусть плотность распределения случайной величины *Х* имеет вид:



Найти вероятности:

а) б)  в) 

**Решение.** а)По определению плотности распределения,

****

Вместе с тем, данная плотность распределения задана аналитически по-разному на промежутках  и  отрезка интегрирования. Соответственно, используя свойства определенного интеграла, получаем



По геометрическому смыслу плотности распределения, полученная вероятность численно равна площади под кривой плотности распределения (см. рис. 2) на отрезке , т.е. равна площади фигуры, составленной из отрезка длины 1 и прямоугольника со сторонами  и 0,6.

-1



*у*

*х*

-2

1

-0,4

Рис. 2

б) Неравенство  равносильно тому, что . Учитывая, что на промежутке данная плотность распределения равна 0, получаем



в) Аналогично предыдущим пунктам задачи, имеем



**Свойства плотности распределения**

1. Плотность распределения неотрицательна, т.е.  при всех *х.*
2. Интеграл от плотности распределения на всей числовой прямой равен 1, т.е.

.

(Данное свойство называется *условием нормировки* плотности распределения.)

**Доказательство.** Предположим противное: пусть найдется такой отрезок , что плотность распределения  отрицательна на этом отрезке. Тогда (см. свойства определенного интеграла) имеем



Но, по определению плотности распределения, интеграл, стоящий в левой части последнего неравенства равен . Так как вероятность события не может быть отрицательной, приходим к противоречию, что доказывает справедливость свойства 1.

По определению плотности распределения,



Но событие является достоверным, поэтому его вероятность равна 1. Тем самым доказано свойство 2.

**Парадокс нулевой вероятности**

**Теорема.** *Для непрерывной случайной величины вероятность принять произвольное числовое значение равно нулю.*

**Доказательство.** Пусть **** – произвольное число. События и  – равны, поэтому, по определению плотности распределения, получаем



(см. свойства определенного интеграла).

Из парадокса нулевой вероятности вытекает, что для любой непрерывной случайной величины вероятности попадания в произвольный отрезок числовой оси или в соответствующий полуинтервал (интервал) равны между собой, т.е. справедливо

**Следствие.** *Пусть Х непрерывная случайная величина и * – *произвольные числа. Тогда верно следующее равенство*



**Доказательство.** Очевидно, что



причем события  и – несовместны. Используя последнее равенство и теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получаем



Но, согласно парадоксу нулевой вероятности, .Тем самым доказано первое из трех равенств Следствия.

Доказательство оставшихся двух равенств мы оставляем читателю в качестве упражнения.

**Функция распределения непрерывной случайной величины**

Пусть *Х* – непрерывная случайная величина и− ее плотность распределения. Используя определения функции распределения (см. § 3.4) и плотности распределения, получаем

.

Обратно, если задана функция распределения непрерывной случайной величины, то (см. теорему об интеграле с переменным верхним пределом) плотность распределения этой случайной величины будет определяться равенством



Таким образом, имеется два равноправных способа задания непрерывной случайной величины: с помощью или плотности распределения, или функции распределения.

**Пример.** Пусть плотность распределения непрерывной случайной величины *Х* имеет вид:



Найти функцию распределения.

**Решение.** Пусть . Тогда



Если , то



Если , то



Таким образом, окончательно, искомая функция распределения имеет вид



(см. рис.3).

Рис. 3

*у*

*х*

1

2

