**Лекция 8 (1 часа)**

**Тема:** Числовые характеристики случайных величин

**План**

1. Числовые характеристики ДСВ
2. Числовые характеристики НСВ

***1. Параметры распределения дискретной случайной величины***

Пусть закон распределения дискретной случайной величины *Х* имеет вид

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| : |  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

**Определение. *Математическим ожиданием*** *дискретной случайной величины Х называется число М(Х),* *вычисляемое по формуле*

**

Математическое ожидание случайной величиныесть число около которого группируются значения этой случайной величины.

Механическим аналогом математического ожидания дискретной случайной величины является центр масс (центр тяжести) системы точечных масс: если в точках числовой оси с абсциссами расположены точечные массы , то абсцисса их центра масс находится точно по формуле для , приведенной выше.

**Пример.** Пусть случайная величина *Х*  биномиально распределена с параметрами  и :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* : |  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,008 | 0,096 | 0,384 | 0,512 |

Тогда



**Свойства математического ожидания**

1. *Математическое ожидание постоянной случайной величины равно самой постоянной, т.е.*

*М(С)=С*,

*где С* – *некоторое число.*

(*Постоянной случайной величиной* *С*  называется такая случайная величина, которая принимает единственное значение равное *С* с вероятностью 1.)

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е*.



*где* – *произвольное число.*

1. *Математическое ожидание суммы (разности) случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий этих случайных величин, т.е.*

**

4. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е.*

**

5. *Пусть * *– такие случайные величины, математические ожидания которых равны между собой, т.е.*  *где и а* – *некоторое число. Тогда среднее арифметическое этих случайных величин равно их общему математическому ожиданию, т.е.*

**

Заметим, что свойства 2 – 5 математического ожидания остаются справедливыми также для непрерывных случайных величин.

**Определение. *Дисперсией*** *дискретной случайной величины Х называется число определяемое равенством*

**



Число  является мерой разброса значений случайной величины *Х* около ее математического ожидания.

**Пример.** Пусть случайная величина *Х*  биномиально распределена с параметрами  и . Найдем дисперсию этой случайной величины.

В предыдущем примере найдено, что *М(Х)* = 2,4. Тогда



**Свойства дисперсии**

1. *Дисперсия постоянной случайной величины равна нулю*, *т.е.*

**

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии*, *возводя его при этом в квадрат, т.е.*

**

*где * – *произвольное число.*

1. *Справедливо равенство:*

**

1. *Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих случайных величин*, *т.е.*

**

*где случайные величины Х и Y* – *независимы.*

1. *Пусть случайные величины *– *независимы и где Тогда*

**

**Замечание. ** называется *средним квадратическим отклонением*  случайной величины *Х*  и обычно обозначается через .

Отметим также, что свойство 3 дисперсии более удобно для ее вычисления по сравнению с исходным определением дисперсии.

**Пример.** Пусть закон распределения случайной величины *Х* имеет вид

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X:* |  | 1 | 2 |
|  | 0,6 | 0,4 |

Найти  используя свойство 3 дисперсии.

**Решение.**

****

******

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины называются *параметрами распределения* этой случайной величины.

**Теорема.** *Пусть случайная величина * – б*иномиально распределена с параметрами  и p* , *тогда параметры ее распределения могут быть найдены по формулам:*

**

*Также справедливы равенства*

**

**Пример.** Пусть случайная величина *Х*  биномиально распределена с параметрам и . Тогда

**

Очевидно, что использование формул последней теоремы упрощает и ускоряет вычисление математического ожидания и дисперсии биномиально распределенной случайной величины по сравнению с применением исходных определений для *М(Х)*  и 

***Функция распределения дискретной случайной величины***

**Определение. *Функцией распределения*** *случайной величины Х называется такая функция  значение которой в точке x численно равно вероятности того*, *что в произвольном испытании значение случайной величины* *Х окажется меньше чем х, т.е.*



Данное определение задает функцию распределения не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин.

**Пример.** Пусть закон распределения случайной величины *Х* имеет вид

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X:* |  | 1 | 2 |
|  | 0,3 | 0,7 |

Найти функцию распределения этой случайной величины.

**Решение.** Найдем сначала *F(x)*  для некоторых значений переменной *х.* Например,



так как данная случайная величина не имеет значений меньших нуля, а потому событие (*Х* < 0) для нее является невозможным. Аналогично, при любом значении переменной *х*, которое менее или равно 1,будем иметь  Далее имеем:

**

Аналогично, при любом значении переменной *х* таком, что ,будем иметь 

**

(Или, другими словами, так как все значения данной случайной величины менее 2,5, то событие (*Х* < 2,5) является достоверным, а потому его вероятность равна 1.) Аналогично, при любом значении переменной *х*, которое более или равно 2,будем иметь 

Окончательно имеем:



График найденной функции распределения изображен на рис. 3.

*F* (*x* )

*x*

1

0,3

2

0,7

0,3

1

Рис. 3

**Свойства функции распределения**

1. Функция распределения является неубывающей функцией.
2. Область значений: 
3. Асимптотические свойства:   (другими словами, прямые *у* =0 и *у* =1 являются асимптотами (левой и правой соответственно) графика *y* =*F* (*x* ) ).
4. Вероятность того, что в произвольном испытании значение случайной величины *Х*  будет принадлежать полуинтервалу  где  и  – произвольные числа, вычисляется по формуле

.

**Доказательство.** Значение функции распределения равна вероятности соответствующего события, но область значений вероятности есть отрезок  – тем самым доказано свойство 2.

Используя определение функции распределения, получаем . Но произвольное значение случайной величины принадлежит числовой прямой, поэтому событие является невозможным. Вероятность невозможного события равна нулю (см. § 1.3), поэтому 

Аналогично, учитывая, что событие является достоверным, а вероятность такого события равна 1, получаем 

Нетрудно видеть, что



причем события правой части этого равенства несовместны. Принимая во внимание определение функции распределения и теорему сложении вероятностей для несовместных событий, получаем



что равносильно свойству 4.

**2.Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины**

Формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины аналогичны соответствующим формулам для дискретной случайной величины. Действительно, рассмотрим следующую таблицу.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Дискретная случайная величина | Непрерывная случайная величина |
| Способ описания | Закон распределения | Плотность распределения |
|  |  |  |
|  |  |  |

Таким образом, переходя при записи этих формул от дискретной к непрерывной случайной величине, суммирование заменяется интегрированием по всей числовой оси, а вместо вероятности  используется плотность распределения .

**Пример.** Функция распределения непрерывной случайной величины *Х*  имеет вид:



Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

**Решение.** Для нахождения  и  нам потребуется плотность распределения данной случайной величины (см. приведенные выше формулы). Получаем:



или



Тогда имеем



Геометрически, полученное значение математического ожидания есть абсцисса центра тяжести фигуры под графиком плотности распределения, т.е. абсцисса прямоугольного треугольника *ОАВ*  (см. рис. 4; напомним, что центр тяжести треугольника есть точка пересечения медиан этого треугольника, а медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины).

*В*

*А*

*О*

1,5

*х*

3

2

1





Рис. 4

Завершая решение, найдем дисперсию рассматриваемой случайной величины.



****

***Нормальный закон распределения***

**Определение.** *Непрерывная случайная величина имеет* ***нормальный закон распределения*** *с параметрами  и , если ее плотность распределения имеет вид*

**

Параметры *а* и *σ* нормального закона тесно связаны с параметрами распределения рассматриваемой случайной величины. Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть случайная величина Х имеет нормальный закон распределения с параметрами а и . Тогда*

**

Отметим, что график – результат деформации Гауссовой кривой . Рассмотрим, как изменяется этот график при изменении параметров *а* и  нормального закона.

*x*

*а*





**

Рис. 6





*x*

**

Рис.5

На рис. 5 изображены графики  при одинаковом значении параметра : изменение параметра *а* нормального закона приводит к параллельному переносу графика плотности распределения вдоль оси абсцисс.

На рис. 6 изображены графики  при одинаковом значении параметра *а* : изменение параметра нормального закона приводит к “растяжению” графика вдоль оси ординат при сохранении площади под кривой равной 1 (заметим, что на рис. 6 ).

**Теорема.** *Пусть случайная величина Х имеет нормальный закон распределения с параметрами а и . Тогда справедливы формулы:*







*где *– *функция Лапласа, *– *функция распределения случайной величины Х.*

Заметим, что график функции распределения  нормально распределенной случайной величины получается в результате деформации из графика функции Лапласа (см. рис. 7).

**Пример.** Случайная величина *Х* – ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией равной 16 мк2.



*а*

*y*

1

*x*

Рис. 7



Систематическая ошибка отсутствует. Найти вероятность того, что при одном измерении ошибка:

а) превзойдет по модулю 6 мк;

б) окажется в промежутке от 0,5 до 3,5 мк.

**Решение.** а) Отсутствие систематической ошибки означает, что значения случайной величины *Х*  группируются около нуля, поэтому (см. § 3.3). Искомой является вероятность . Воспользуемся переходом к противоположному событию: . Так как ,

то , т.е. последняя вероятность точно того вида, что может быть вычислена по формуле (2). Используя формулу (2) при , , получаем



Окончательно имеем



б) Искомая вероятность вычисляется по формуле (1) при :



