**Лекция 9 (1 часа)**

**Тема:** Система случайных величин

**План**

1. Система случайных величин

***РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН*.**

Пусть *Х = (Х*1, *Х*2,…,*Х*n*)* – совокупность (или система) случайных величин.

*Функцией распределения системы случайных величин* называется вероятность совместного выполнения неравенств , , *k* = 1, 2, ..., *n*.

Свойства функции распределения аналогичны свойствам функции распределения одномерной случайной величины. Например, для системы двух случайных величин X и Y:

1) *F(х*,*у)* – неубывающая функция своих аргументов;

2) ;

3) , где *F*1(*x*), *F*2(*y*) – функции распределения компонент *X* и *Y*;

4) .

 Пример 1. Бросают две игральные кости. Cлучайная величина *X* принимает значение 1, если сумма выпавших очков четна, и равняется 0, если сумма нечетна. Cлучайная величина *Y* принимает значения 1 или 0, если произведение выпавших очков четно или нечетно. Совместное распределение (*X,Y*) можно задать в виде таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|    *X**Y* | 0 | 1 | Распределение *Y* |
| 01 | 01/2 | ¼¼ | 1/43/4 |
| Распределение *X* | 1/2 | ½ |  |

Функция распределения вектора (*X,Y*)



Функции распределения компонент:   ♦

Если функция распределения *F(х*,*y)* системы случайных величин (*X,Y*) дифференцируема, то ее вторую смешанную частную производную называют *плотностью распределения ,* вектор (*X*,*Y*) в этом случае называют *непрерывным случайным вектором.* Отсюда, .

Cвойства плотности распределения непрерывного случайного вектора вытекают из свойств функции распределения:

1) ;

2) .

3) т.к. , то .

Замечание. Чтобы найти вероятность попадания непрерывного двумерного случайного вектора в область *D*, надо аналогично одномерному случаю проинтегрировать двумерную плотность распределения по области *D*:

.

Пример 2. Распределение двумерной случайной величины задается плотностью

** (распределение Коши).

Найдем функцию распределения *F*(*x*, *y*):



Определим вероятность попадания случайной точки (*X*, *Y*) в квадрат *R*.



**

Плотность компоненты *X*

 , .♦

 **ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.**

*Моментом порядка* (*k*,*s*) *cистемы* (*X*,*Y*)называется математическое ожидание произведения

.

Для дискретных случайных величин

 если ряд сходится абсолютно.

Для непрерывных случайных величин , где

 - плотность распределения системы (*X*, *Y*), если интеграл существует.

Пример 3. Моментом порядка (1, 0) является математическое ожидание случайной величины *X*, а моментом порядка (0, 1) – математическое ожидание случайной величины *Y*. Cовокупность (*MX*, *MY*) геометрически представляет собой координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание вектора (*X*, *Y*).♦

*Центральным моментом* порядка (*k*, *s*) cистемы (*X*, *Y*) называется математическое ожидание произведения 

.

Пример 4. Центральным моментом порядка (2, 0) является дисперсия *X*, а центральным моментом порядка (0, 2) – дисперсия *Y. DX* и *DY* характеризуют рассеивание вектора (*X, Y*) в направлении осей *ОХ* и *ОY.* ♦

Момент порядка (1,1)  называется *ковариацией* случайных величин *X* и *Y*.

Утверждение 1. Ковариацию можно считать по формуле 

Доказательство:

 ♣

Утверждение 2. Дисперсия суммы случайных величин *X* и *Y* равна

.

Доказательство.

♣

*Коэффициентом корреляции* случайных величин *X* и *Y* называется , где  – средние квадратические отклонения случайных величин *X* и *Y*.

 **НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ.**

 Нормальное распределение на плоскости – это нормальное распределение для системы двух случайных величин *X* и *Y*.

*Нормальное распределение на плоскости* задается плотностью

**.

Распределение зависит от пяти параметров: . Выясним их смысл. Для этого найдем плотности компонент *X* и *Y*:

; 

Cлучайные величины *X* и *Y* имеют нормальное распределение c параметрами  и  cоответственно.

 Cледовательно, .

Посчитаем ковариацию компонент *X* и *Y*.



Отсюда следует, что параметр *r* совпадает с коэффициентом корреляции *X* и *Y*:

.

Геометрически плотность двумерного нормального закона представляет собой “холм”, вершина которого находится над точкой (). В сечении поверхности плотности плоскостями, параллельными оси , получаются кривые, подобные гауссовым кривым. В сечениях плоскостями, параллельными плоскости *XOY*, получаются эллипсы. Уравнения эллипсов: . Эти эллипсы называются эллипсами рассеивания, а оси этих эллипсов (общие для всех эллипсов) называются главными осями рассеивания (η и ξ).

