



## Лекция 1 (1 час)

**Тема:** Введение. Экономико-математическая модель.

### План

1. Введение.
2. Задача использования сырья
3. Задача составления диеты

**1. Экономико-математическая модель** – математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта. Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений. Использование математического моделирования в экономике позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область экономической информации, интенсифицировать экономические расчеты.

Можно выделить три основных этапа проведения экономико-математического моделирования. На *первом этапе* ставятся цели и задачи исследования, проводятся качественное описание объекта в виде экономической модели. На *втором этапе* формируется математическая модель изучаемого объекта, осуществляется выбор методов исследования, проводится программирование модели, подготавливается исходная информация. На *третьем, основном, этапе* экономико-математического моделирования осуществляется анализ математической модели.

Ниже рассматриваются примеры экономико-математических моделей.

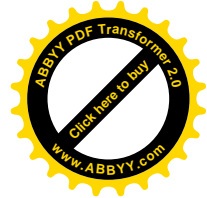
### 2. Задача использования сырья.

Для изготовления двух видов продукции  $P_1$ ,  $P_2$  используют три вида сырья:  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в табл.1. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 1

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		$P_1$	$P_2$
$S_1$	20	2	5
$S_2$	40	8	5
$S_3$	30	5	6
Прибыль от ед. прод.		50	40

Обозначим через  $x_1$  количество единиц продукции  $P_1$ , а через  $x_2$  - количество единиц продукции  $P_2$ . Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений



$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \end{cases}$$

которая показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить имеющихся запасов. Если продукция  $P_1$  не выпускается, то  $x_1=0$ ; в противном случае  $x_1>0$ . То же самое получаем и для продукции  $P_2$ . Таким образом, на неизвестные  $x_1$  и  $x_2$  должно быть наложено ограничение неотрицательности:  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Реализация  $x_1$  единиц продукции вида  $P_1$  и  $x_2$  единиц продукции вида  $P_2$  дает соответственно  $50x_1$  и  $40x_2$  с. прибыли, суммарная прибыль  $Z= 50x_1+40x_2$ .

Условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому  $x_1$  и  $x_2$  (план выпуска продукции) могут быть и дробными числами, следовательно, задача имеет бесконечное множества вариантов планов (значений  $x_1$  и  $x_2$ , которые удовлетворяют системе ограничений). Необходимо найти такие неотрицательные значения  $x_1$  и  $x_2$ , при которых функция  $Z$  достигает максимума, т.е. найти максимальное значение линейной функции  $Z=50x_1+40x_2$  при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построенная линейная называется функцией цели и совместно с системой ограничений образует математическую модель рассматриваемой экономической задачи.

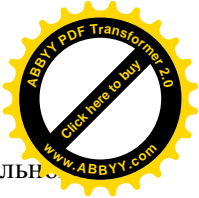
Задачу использования сырья можно легко обобщить, если при выпуске  $n$  видов продукции используются  $m$  видов сырья. Обозначим через  $S_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) виды сырья;  $b_i$  –запасы сырья  $i$ -го вида;  $P_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) –виды продукции;  $a_{ij}$  –количество единиц  $i$ -го сырья, идущего на изготовление единицы  $j$ -й продукции;  $C_j$  –величину прибыли, получаемой при реализации единицы  $j$ -й продукции. Пусть  $x_j$  –количество единиц  $j$ -й продукции, которое необходимо произвести. Тогда математическую модель задачи можно представить в следующем виде.

Найти максимальное значение линейной функции  $Z=C_1x_1+C_2x_2+\dots+C_nx_n$  (1) при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \\ b_i \geq 0, i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (3)$$

### 3.Задача составления рациона.



При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 9 ед. питательного вещества  $S_1$ , не менее 8 ед. вещества  $S_2$  и не менее 12 ед. вещества  $S_3$ . Для составления рациона используют два вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 2

Табл.2

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	Корм I	Корм II
$S_1$	3	1
$S_2$	1	2
$S_3$	1	6
Стоимость 1 кг корма	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Для составления математической модели обозначим через  $x_1$  и  $x_2$  соответственно количество килограммов корма I и II в дневном рационе. Принимая во внимание значения, приведенные в табл.1.3, и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

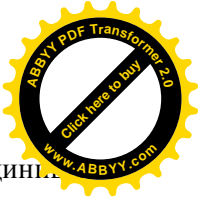
получаем систему ограничений  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Если корм I не используется в рационе, то  $x_1=0$ ; противном случае  $x_1>0$ . Аналогично имеем  $x_2 \geq 0$ , т.е. должно выполняться условие неотрицательности переменных:  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

Цель данной задачи –добиться минимальных затрат на дневной рацион, поэтому общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции  $Z=4x_1+6x_2$ . Задача является многовариантной,  $x_1$  и  $x_2$  могут принимать бесконечное множество значений. Из этого множества следует выбрать такие  $x_1$  и  $x_2$ , при которых функция  $Z$  принимает минимальное значение. Таким образом, необходимо найти минимальное значение линейной функции  $Z=4x_1+6x_2$  при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задачу составления рациона можно обобщить, если предусмотреть в рационе  $m$  видов питательных веществ в количестве не менее  $b_i, i=1, \dots, m$ , ед. и использовать  $n$  видов кормов. Для составления математической модели задачи обозначим через  $a_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ , количество



единиц  $i$ -го питательного вещества, содержащегося в единице  $j$ -го корма;  $C_j$  – стоимость единицы  $j$ -го корма;  $x_j$  – количество единиц  $j$ -го корма в дневном рационе.

Необходимо найти минимальное значение линейной функции  $Z=C_1x_1+C_2x_2+\dots+C_nx_n$  при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$
$$b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$$

Рассматривая приведенные задачи и их математические модели, нетрудно заметить, что если потребовать, чтобы в процессе производства какое-то сырье использовалось полностью или в дневном рационе должно содержаться точное количество единиц какого-нибудь питательного вещества, то ограничение для этого сырья (питательного вещества) можно выразить в виде уравнения.

Таким образом, системы ограничений в зависимости от условий задачи могут содержать не только линейные неравенства, но и линейные уравнения. При решении систем линейных неравенств с  $n$  неизвестными приходится сталкиваться с большими трудностями, поэтому от неравенств переходят к равенствам и решают систему линейных уравнений. Этот метод широко применяют при решении задач линейного программирования.