ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Лекция 1 (1 час)

Тема: Введение. Экономико-математическая модель.

План

1. Введение.
2. Задача использования сырья
3. Задача составления диеты

1.*Экономико-математическая модель* – математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта. Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений. Использование математического моделирования в экономике позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область экономической информации, интенсифицировать экономические расчеты.

Можно выделить три основных этапа проведения экономико-математического моделирования. На *первом этапе* ставятся цели и задачи исследования, проводятся качественное описание объекта в виде экономической модели. На *втором этапе* формируется математическая модель изучаемого объекта, осуществляется выбор методов исследования, проводится программирование модели, подготавливается исходная информация. На *третьем, основном, этапе* экономико-математического моделирования осуществляется анализ математической модели.

Ниже рассматриваются примеры экономико-математических моделей.

2. Задача использования сырья.

Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используют три вида сырья: S_1, S_2 и S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в табл.1. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 1

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от ед. прод.		50	40

Обозначим через x_1 количество единиц продукции P_1, а через x_2 -количество единиц продукции P_2. Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

которая показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить имеющихся запасов. Если продукция P_1 не выпускается, то $x_1=0$; в противном случае $x_1>0$. То же самое получаем и для продукции P_2. Таким образом, на неизвестные x_1 и x_2 должно быть наложено ограничение неотрицательности: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2. Реализация x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 дает соответственно $50x_1$ и $40x_2$ с. прибыли, суммарная прибыль $Z= 50x_1+40x_2$.

Условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому x_1 и x_2 (план выпуска продукции) могут быть и дробными числами, следовательно, задача имеет бесконечное множества вариантов планов (значений x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений). Необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2, при которых функция Z достигает максимума, т.е. найти максимальное значение линейной функции $Z=50x_1+40x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Построенная линейная называется функцией цели и совместно с системой ограничений образует математическую модель рассматриваемой экономической задачи.

Задачу использования сырья можно легко обобщить, если при выпуске n видов продукции используются m видов сырья. Обозначим через S_i $(i=1,\dots,m)$ виды сырья; b_i –запасы сырья i-го вида; P_j $(j=1,\dots,n)$ –виды продукции; a_{ij} –количество единиц i-го сырья, идущего на изготовление единицы j-й продукции; C_j –величину прибыли, получаемой при реализации единицы j-й продукции. Пусть x_j –количество единиц j-й продукции, которое необходимо произвести. Тогда математическую модель задачи можно представить в следующем виде.

Найти максимальное значение линейной функции $Z=C_1x_1+C_2x_2+\dots+C_nx_n$ (1) при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots \\ a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, j = 1,\dots,n$$
$$b_i \ge 0, i = 1,\dots m \qquad (3)$$

3.Задача составления рациона.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 9 ед. питательного вещества S_1, не менее 8 ед. вещества S_2 и не менее 12 ед. вещества S_3. Для составления рациона используют два вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 2 Табл.2

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	Корм I	Корм II
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Стоимость 1 кг корма	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Для составления математической модели обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество килограммов корма I и II в дневном рационе. Принимая во внимание значения, приведенные в табл.1.3, и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Если корм I не используется в рационе, то $x_1=0$; противном случае $x_1>0$. Аналогично имеем $x_2 \geq 0$, т.е. должно выполняться условие неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Цель данной задачи –добиться минимальных затрат на дневной рацион, поэтому общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции $Z=4x_1+6x_2$. Задача является многовариантной, x_1 и x_2 могут принимать бесконечное множество значений. Из этого множества следует выбрать такие x_1 и x_2, при которых функция Z принимает минимальное значение. Таким образом, необходимо найти минимальное значение линейной функции $Z=4x_1+6x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \; .$$

Задачу составления рациона можно обобщить, если предусмотреть в рационе m видов питательных веществ в количестве не менее b_i, $i=1,\ldots,m$, ед. и использовать n видов кормов. Для составления математической модели задачи обозначим через a_{ij}, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, количество

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

единиц i-го питательного вещества, содержащегося в единице j-го корма; C_j –стоимость единицы j-го корма; x_j –количество единиц j-го корма в дневном рационе.

Необходимо найти минимальное значение линейной функции $Z=C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots \\ a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n$$

$$b_i \geq 0, i = 1,\ldots m$$

Рассматривая приведенные задачи и их математические модели, нетрудно заметить, что если потребовать, чтобы в процессе производства какое-то сырье использовалось полностью или в дневном рационе должно содержаться точное количество единиц какого-нибудь питательного вещества, то ограничение для этого сырья (питательного вещества) можно выразить в виде уравнения.

Таким образом, системы ограничений в зависимости от условий задачи могут содержать не только линейные неравенства, но и линейные уравнения. При решении систем линейных неравенств с n неизвестными приходится сталкиваться с большими трудностями, поэтому от неравенств переходят к равенствам и решают систему линейных уравнений. Этот метод широко применяют при решении задач линейного программирования.