ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Лекция 3 (2 часа)

Тема: Графический метод решения задач линейного программирования

План

1. Область применения
2. Примеры задач, решаемых графическим методом

1. Область применения

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, т.е. ограничения содержат две переменные.

Найти минимальное значение функции $Z=C_1x_1+C_2x_2$ (1)

при
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots \\ a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad (3).$$

Допустим, что система (2) при условии (3) совместна и ее многоугольник решений ограничен. Каждое из неравенств (2) и (3), определяет полуплоскость с граничной прямой: $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$, $i=1,\dots,m$, $x_1=0$, $x_2=0$. Линейная функция (1) при фиксированных значениях Z является уравнением прямой линии $C_1x_1+C_2x_2=const$. Построим многоугольник решений системы ограничений (2) и график линейной функции (1) при $Z=0$ (рис.1). Тогда поставленной задаче линейного программирования можно дать следующую интерпретацию. Найти точку многоугольника решений, в которой прямая $C_1x_1+C_2x_2=const$ –опорная и функция Z при этом достигает минимума.

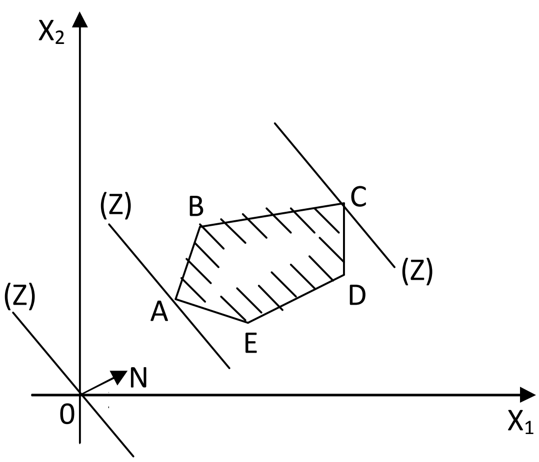

Рис. 1

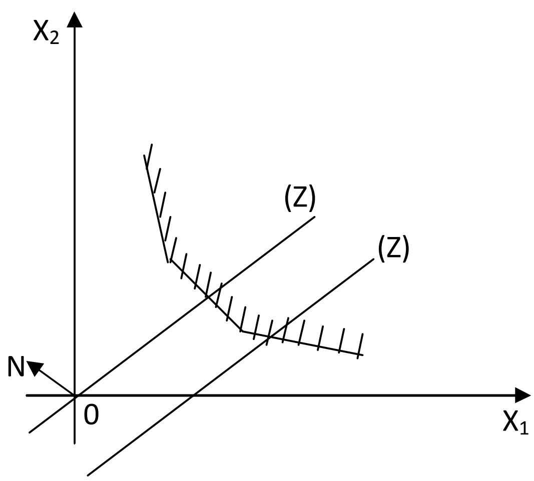

Рис. 2

Значения $Z=C_1x_1+C_2x_2$ возрастают в направлении вектора $N=(C_1,C_2)$, поэтому прямую Z передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора N.

Из рис.1 следует, что прямая дважды становится опорной по отношению к многоугольнику решений (в точках A и C), причем минимальное значение принимает в точке A. Координаты точки $A(x_1;x_2)$ находим, решая систему уравнений прямых AB и AE.

Если многоугольник решений представляет собой неограниченную многоугольную область, то возможны два случая.

Случай 1. Прямая $C_1x_1+C_2x_2=const$, передвигаясь в направлении вектора N или противоположно ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной к нему. В этом случае линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу. (рис. 2).

Случай 2. Прямая, передвигаясь, все же становится опорной относительно многоугольника решений. Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограниченной снизу, ограниченной снизу и неограниченной сверху, либо ограниченной как снизу, так и сверху.

2. Примеры задач, решаемых графическим методом

Решим графическим методом задачи использования сырья и составления рациона, условия приведены в предыдущей теме.

Задача использования сырья. Найти максимальное значение линейной функции $Z=50x_1+40x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 20 \\ 8x_1+5x_2 \le 40 \\ 5x_1+6x_2 \le 30 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Решение. Построим многоугольник решений (рис.3). Для этого в системе координат x_1Ox_2 на плоскости изобразим граничные прямые

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 = 20 \quad (L_1) \\ 8x_1+5x_2 = 40 \quad (L_2) \\ 5x_1+6x_2 = 30 \quad (L_3) \end{cases}$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

Взяв какую-нибудь точку, например, начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство (эти полуплоскости на рис. 3 показаны стрелками). Многоугольником решений данной задачи является ограниченный пятиугольник $OABCD$.

Для построения прямой $50x_1+40x_2=0$ строим радиус-вектор $N=(50;40)=10(5;4)$ и через точку O проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую $Z=0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора N. Из рис. 3 следует, что опорной по отношению к многоугольнику решений эта прямая становится в точке C, где функция Z принимает максимальное значение. Точка C лежит на пересечении прямых L_2 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$. Оптимальный план задачи: $x_1 = 90/23 \approx 3{,}9,\ x_2 = 40/23 \approx 1{,}7.$ Подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию, получаем $Z_{\max} = 50 \cdot 3{,}9 + 40 \cdot 1{,}7 \approx 260{,}3.$

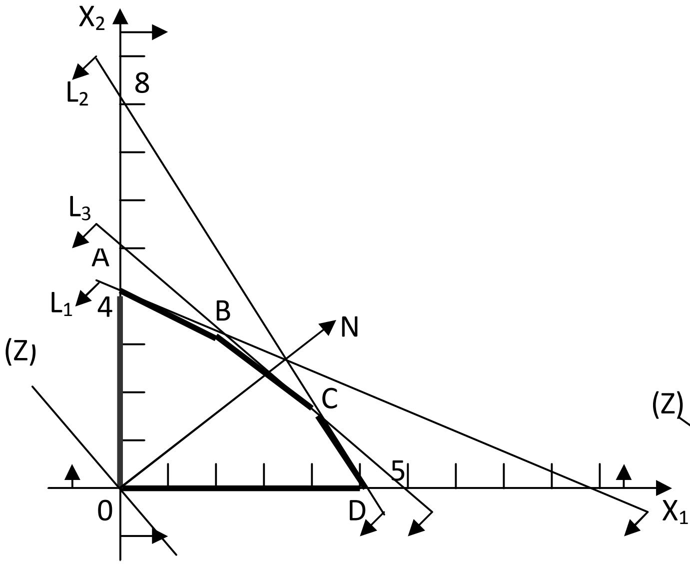

Рис.3

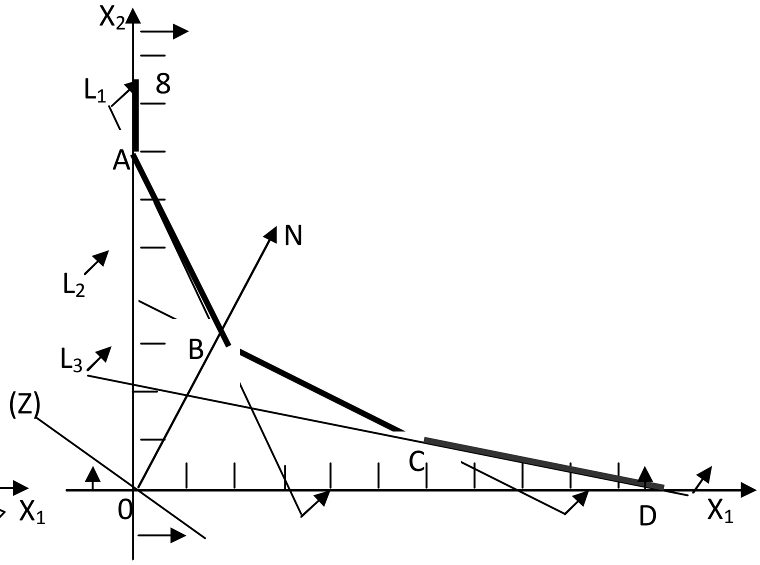

Рис. 4

Таким образом, для того чтобы получить максимальную прибыль в размере 260,3с., необходимо запланировать производство 3,9 ед. продукции P_1 и 1,7 ед. продукции P_2.

Задача составления рациона. Найти минимальное значение линейной функции $Z=4x_1+6x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Решение. Построим многоугольник решений (рис.4). Для этого в системе координат x_1Ox_2 на плоскости изобразим граничные прямые

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \ (L_1) \\ x_1 + 2x_2 = 8 \ (L_2) \\ x_1 + 6x_2 = 12 \ (L_3) \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

и установим, какую полуплоскость определяет каждое неравенство относительно граничной прямой. В результате получим неограниченную многоугольную область с угловыми точками *A, B, C, D*.

Построим вектор $N=(4,6)$ и прямую $4x_1+6x_2=0$ (Z). Перемещаем прямую Z параллельно самой себе в направлении вектора N. Из рис. 4 следует, что она впервые коснется многогранника решений и станет опорной по отношению к нему в угловой точке B; если прямую перемещать далее в направлении вектора N, то значения линейной функции на многограннике решений возрастут, значит, в точке В линейная функция принимает минимальное значение.

Точка B лежит на пересечении прямых L_1 и L_2; для определения ее координат решим систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$. Имеем $x_1=2,$ $x_2=3$. Подставляя найденные значения в линейную функцию, получаем, $Z_{\min} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26.$

Для того чтобы обеспечить минимум затрат (26с. в день), необходимо дневной рацион составить из 2 кг корма I и 3 кг корма II.