ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Лекция 4 (2 часа)

Тема: Симплекс метод решения задачи линейного программирования

План

1. Построение опорных планов
2. Условия оптимальности
3. Алгоритм симплекс метода

Симплексный метод позволяет, исходя из известного опорного плана задачи, за конечное число шагов получить ее оптимальный план. Каждый из шагов состоит в нахождении нового плана, которому соответствует меньшее значение линейной функции, чем значение этой функции в предыдущем плане. Процесс продолжают до тех получения оптимального плана. Если задача не обладает планами или ее линейная функция не ограничена на многограннике решений, то симплексный метод позволяет установить это в процессе решения.

1. Построение опорных планов Пусть поставлена задача линейного программирования. Найти минимальное значение функции $Z=C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n$$

$$b_i \ge 0, i = 1,\ldots,m$$

Предположим сначала, что система ограничений задачи содержит m единичных векторов, причем без ограничения общности можно положить, что единичными являются первые m векторов. Тогда необходимо минимизировать линейную функцию

$Z=C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n$ (1) при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n \qquad (3).$$

Запишем систему (2) в векторной форме: $x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_mA_m+x_{m+1}A_{m+1}+\ldots+x_nA_n=A_0$, (4)

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \ldots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторы $A_1, A_2,\ldots,A_m$ –линейно независимые единичные векторы m-мерного пространства. Они и образуют базис этого пространства. Поэтому в разложении (4) за базисные неизвестные выбираем $x_1, x_2,\ldots,x_m$, свободные неизвестные $x_{m+1},\ldots,x_n$ приравниваем нулю и, учитывая, что $b_i \ge 0, i = 1,\ldots,m$, а векторы $A_1,A_2,\ldots,A_m$ –единичные, получаем первоначальный план:

$X_0=(x_1=b_1, x_2=b_2,\ldots,x_m=b_m, x_{m+1}=0,\ldots,x_n=0)$ (5).

Плану (5) соответствует разложение $x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_mA_m=A_0$, (6), где векторы $A_1, A_2,\ldots,A_m$ – линейно независимы, следовательно, построенный первоначальный план является и опорным.

Рассмотрим, как исходя из первоначального опорного плана (5), можно построить второй опорный план. Векторы $A_1, A_2,\ldots,A_m$ образуют базис в m-мерном пространстве, поэтому каждый из данных n векторов соотношения (4) можно разложить по векторам базиса, причем единственным образом: $A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i, j = 1,\ldots,n.$

Предположим, что для некоторого вектора, не входящего в базис, например, для вектора A_{m+1}, положителен хотя бы один из коэффициентов $x_{i,m+1}$ в разложении $x_{1,m+1}A_1+x_{2,m+1}A_2+\ldots+x_{m,m+1}A_m=A_{m+1}$ (7).

Зададимся некоторой величиной $\theta > 0$ (пока неизвестной), умножим на нее обе части равенства (7) и вычтем результат почленно из равенства (6). Получаем

$$(x_1-\theta x_{1,m+1})A_1+(x_2-\theta x_{2,m+1})A_2+\ldots+(x_m-\theta x_{m,m+1})A_m+\theta A_{m+1}=A_0 \qquad (8).$$

Таким образом, вектор $X_1=(x_1-\theta x_{1,m+1};x_2-\theta x_{2,m+1};\ldots,x_m-\theta x_{m,m+1};0;0;\ldots;0)$ является планом, если его компоненты неотрицательны.

Так как $\theta > 0$,то все компоненты вектора X_1, в которые входят неположительные $x_{i,m+1}$, неотрицательны. Поэтому надо рассмотреть только компоненты, включающие положительные $x_{i,m+1}$, т.е. необходимо определить такое $\theta > 0$, при котором для всех $x_{i,m+1}<0$ $x_i-\theta x_{i,m+1}\geq 0$ (9).

Из (8) получаем $\theta \leq x_i / x_{i,m+1}$, следовательно, вектор X_1 –план задачи для любого θ, удовлетворяющего условию $0<\theta\leq \min\dfrac{x_i}{x_{i,m+1}}$ (10), где минимум берется по i, для которых $x_{i,m+1}>0$.

Опорный план не может содержать $m+1$ положительных компонент, поэтому в плане X_1 необходимо обратить в нуль по крайней мере одну из компонент. Положим в (10), что

$\theta=\theta_0=\min\dfrac{x_i}{x_{i,m+1}}$ (11), тогда компонента плана X_1, для которой достигается минимум, обращается в нуль. Пусть эта компонента стоит на первом месте, т.е. $\theta_0=\min\dfrac{x_i}{x_{i,m+1}}=\dfrac{x_1}{x_{1,m+1}}$.

Подставляя значение θ_0 в (9), имеем

$$(x_1-\frac{x_1}{x_{1,m+1}}x_{1,m+1})A_1+(x_2-\frac{x_1}{x_{1,m+1}}x_{2,m+1})A_2+\ldots+(x_m-\frac{x_1}{x_{1,m+1}}x_{m,m+1})A_m+\frac{x_1}{x_{1,m+1}}A_{m+1}=A_0,$$

откуда получаем разложение $x_2'A_2+x_3'A_3+\ldots+x_m'A_m+x_{m+1}'A_{m+1}=A_0$, которому соответствует новый опорный план: $X_1=(0,x_2',x_3',\ldots x_m',x_{m+1}',0,\ldots,0)$, где $x_i'=x_i-\theta_0 x_{i,m+1}, i=2,3,\ldots,m, x_{m+1}'=\theta_0$.

Исключение одного вектора из базиса и включение вместо него другого с помощью θ_0 соответствуют переходу от одного базиса к другому, поэтому система векторов $A_2, A_3,\ldots,A_m,A_{m+1}$ линейно независима и является новым базисом.

Для определения следующего опорного плана необходимо любой вектор, не входящий в базис $A_2, A_3,\ldots,A_m,A_{m+1}$, разложить по векторам этого базиса, а затем определить такое $\theta_0>0$, при котором исключался бы один из векторов этого базиса.

Таким образом, процесс получения новых опорных планов заключается в выборе вектора, который подлежит включению в базис, и определении вектора, подлежащего исключению из базиса. Критерий, используемый для определения вектора, который включается в базис, является одним из основных элементов симплексного метода.

Таким образом, если система ограничений задачи линейного программирования при неотрицательных свободных членах содержит единичный базис, то без дополнительных вычислений можно получить первоначальный опорный план, а также коэффициенты разложения векторов по векторам базиса.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Пример. Построить опорный план задачи $Z_{\min} = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6$ при

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 - 2x_6 = 5 \\ x_2 + 3x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 6 \\ x_3 - 4x_4 - x_5 + 2x_6 = 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1,...,6.$, а затем перейти к другому опорному плану.

Решение. Запишем систему в векторной форме: $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4+A_5x_5+A_6x_6=A_0$.

За базис выбираем систему векторов A_1, A_2, A_3, так как эти векторы единичные и линейно независимые. Базисными неизвестными являются неизвестные x_1,x_2,x_3. Приравнивая нулю свободные неизвестные $x_4=x_5=x_6=0$, получаем первоначальный план: $X_0=(x_1=5;\ x_2=6;\ x_3=3;\ x_4=0;\ x_5=0;\ x_6=0)$. Этому плану соответствует разложение $5A_1+6A_2+3A_3=A_0$ (12). Чтобы перейти к другому опорному плану, возьмем любой вектор, не входящий в базис, но имеющий хотя бы одну положительную компоненту, например A_4, и разложим его по базису. Так как базис единичный, то коэффициентами разложения вектора A_4 по векторам базиса являются компоненты вектора A_4, т.е. $2A_1+3A_2-4A_3=A_4$ (13). В разложении вектора имеются два положительных коэффициента. Умножая последнее соотношение на $\theta > 0$ и вычитая из (12), получим $(5-2\theta)A_1 + (6-3\theta)A_2 + (3+4\theta)A_3 + \theta A_4 = A_0$ (14). Для исключения какого-нибудь вектора из разложения (14) определяем $\theta_0 = \min(5/2, 6/3) = 6/3 = 2.$ Подставляя значение $\theta_0 = 2$ в (14), исключаем из разложения вектор A_2; в результате получаем второе разложение: $A_1+11A_3+2A_4=A_6$, которому соответствует опорный план $X_1=(x_1=1;\ x_2=0;\ x_3=11;\ x_4=2;\ x_5=0;\ x_6=0)$. Теперь вместо вектора A_4 возьмем вектор A_5, который имеет следующее разложение в первоначальном базисе: $-3A_1-2A_2-A_3=A_5$ (15). Умножая (2.18) на $\theta > 0$ и вычитая из (12), получаем разложение $(5+3\theta)A_1 + (6+2\theta)A_2 + (3+\theta)A_3 + \theta A_5 = A_0$, из которого ни при каком $\theta > 0$ нельзя исключить ни один из векторов.

План $X_1 = (5+3\theta, 6+2\theta, 3+\theta, 0, \theta, 0)$, где $\theta > 0$, не является опорным, так как содержит четыре положительные компоненты и соответствует внутренней точке многогранника решений. Если этот план подставить в линейную функцию $Z(X)$, то получим $Z(X_1) = -4 - 2\theta.$ Выбирая значение θ сколь угодно большим, получим сколь угодно малое значение функции, т.е. линейная функция не ограничена на многограннике решений.

2.Условия оптимальности. Предположим, что задача линейного программирования (1)-(3) обладает планами и каждый ее опорный план невырожден. В этом случае для опорного плана (5) имеем:

$x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_mA_m=A_0$, (16)

$x_1C_1+x_2C_2+\ldots+x_mC_m=Z(X_0)$, (17) где все $x_i>0$, а $Z(X_0)$ – значение линейной функции, соответствующее этому плану.

Разложение любого вектора A_j по векторам данного базиса $A_1, A_2, \ldots, A_m$ единственное:

$x_{1j}A_1+x_{2j}A_2+\ldots+x_{mj}A_m=A_j,\ j=1,\ldots,n,$ (18) поэтому разложению вектора A_j в базисе соответствует и единственное значение линейной функции

$x_{1j}C_1+x_{2j}C_2+\ldots+x_{mj}C_m=Z_j,\ j=1,\ldots,n,$ (19) где Z_j – значение линейной функции, если в нее вместо неизвестных подставить соответствующие коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса.

Обозначим через C_j коэффициент линейной функции, соответствующий вектору A_j.

Тогда, если для некоторого вектора A_j выполняется условие $Z_j-C_j>0$, то план X_0 не является оптимальным, и можно построить такой план X, для которого выполняется неравенство $Z(X)<Z(X_0)$.

Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j, $j=1,\ldots,n,$ в данном базисе удовлетворяют условию $Z_j - C_j \leq 0$, (20), то план X_0 является оптимальным.

Неравенства (20) являются *условием оптимальности* плана задачи, решаемой на отыскание минимального значения линейной функции, а значения Z_j-C_j называются *оценками* плана.

Таким образом, *для того чтобы план задачи на отыскание минимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неположительными.*

Для задачи линейного программирования (1)-(3), заключающейся в отыскании максимального значения линейной функции, справедлива следующая предложения.

Если для некоторого вектора A_j выполняется условие Z_j-C_j<0, то план X_0 не является оптимальным, и можно построить такой план X, для которого выполняется условие $Z(X)>Z(X_0)$.

Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j, $j=1,\ldots,n$, в данном базисе удовлетворяют условию $Z_j - C_j \geq 0$, (21), то план X_0 является оптимальным.

Неравенства (21) - условие оптимальности плана задачи на отыскание максимального значения линейной функции. Таким образом, *для того чтобы план задачи на отыскание максимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неотрицательными.*

3. Алгоритм симплексного метода. Начиная с исходного опорного плана задачи можно получить последовательность опорных планов, завершающихся оптимальным планом.

Рассмотрим задачи линейного программирования (1)-(3) на отыскание минимального значения линейной функции, опорный план которой $X_0=(x_1=b_1,\ x_2=b_2,\ldots,x_m=b_m,\ x_{m+1}=0,\ldots,x_n=0)$ определяется системой m-мерных единичных векторов $A_1,A_2,\ldots,A_m$. Для исследования этого опорного плана на оптимальность необходимо векторы A_j, $j=1,\ldots,n$, системы (2) разложить по векторам базиса $A_1,A_2,\ldots,A_m$ и подсчитать значения оценок Z_j-C_j. Базис является единичным, поэтому коэффициентами разложения вектора A_j по базису служат его компоненты, т.е. $x_{ij}=a_{ij}$, $i=1,\ldots m$, $j=1,\ldots,n$. Дальнейшие вычисления удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана, записать в симплексную таблицу (табл. 2.1). В столбце C базиса запишем коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0 – первоначальный опорный план X_0, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах A_j, $j=1,\ldots,n$, записываем коэффициенты разложения j-го вектора по базису, обозначаемые в дальнейшем через X_j.

В $(m+1)$-й строке в столбце A_0 записываем значения линейной функции $Z(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j –значения оценок Z_j-C_j. Функции $Z(X_0)$ и $Z_j=Z(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию соответственно компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса, поэтому в табл. 2.1 можно получить как скалярное произведение:

$Z(X_0) = C_б X_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i$, $\quad Z_j = C_б X_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij},\ j = 1,\ldots,n,$ где C_i –коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса. После составления табл. 1 просматриваем $(m+1)$-ю строку. Если для всех $j=1,\ldots,n$ разности $Z_j - C_j \leq 0$, то опорный план X_0 оптимальный и минимальное значение линейной функции равно $Z(X_0)$. Предположим, что одна из оценок $Z_j - C_j > 0$; тогда план X_0 не является оптимальным и, включая в базис вектор, соответствующий этой оценке, можно построить другой опорный план, которому соответствует меньшее значение линейной функции. Если положительных оценок несколько, то в базис должен быть включен вектор, которому соответствует $\max[\theta_{0j}(Z_j - C_j)]$, где максимум берется по тем j, для которых $Z_j - C_j > 0$ и θ_{0j} определяется для каждого j. Это дает возможность на данном шаге перейти к вершине многогранника решений, связанной с наибольшим уменьшением линейной функции и в большинстве случаев приводящей к уменьшению количества итераций, что при решении задачи «вручную» позволяет быстрее получить оптимальное решение. При решении задачи на компьютере вектор, подлежащий включению в базис, выбирается по $max(Z_j$-$C_j)$. Если имеется несколько одинаковых максимальных значений $\theta_{0j}(Z_j - C_j)$, то из соответствующих им векторов включается в базис прежде всего вектор, которому соответствует $min\ C_j$. Если хотя бы для одной положительной оценки $Z_j - C_j > 0$ коэффициенты разложения x_{ij} соответствующего вектора неположительны, то линейная функция не ограничена на многограннике решений и, выбирая θ, ее значение можно сделать сколь угодно малым; многогранник решений в этом случае представляет собой неограниченную многогранную область.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Таблица 1 Первая симплексная таблица

I	Базис	C базиса	A_0	C_1	C_2	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_k	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	x_1	1	0	…	0	…	0	$x_{1,m+1}$	…	x_{1j}	…	x_{1k}	…	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2	0	1	…	0	…	0	$x_{2,m+1}$	…	x_{2j}	…	x_{2k}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
L	A_l	C_l	x_l	0	0	…	1	…	0	$x_{l,m+1}$	…	x_{lj}	…	x_{lk}	…	x_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
M	A_m	C_m	x_m	0	0	…	0	…	1	$x_{m,m+1}$	…	x_{mj}	…	x_{mk}	…	x_{mn}
M+1	Z_j-C_j		Z_0	0	0	…	0	…	0	Z_{m+1}-C_{m+1}	…	Z_j-C_j	…	Z_k-C_k	…	Z_n-C_n

Пусть $\max \theta_{0j}(Z_j - C_j) = \theta_{0k}(Z_k - C_k)$, т.е. максимальное значение достигается для k-го вектора, $m < k \le n$. Тогда в базис включается вектор A_k и исключается вектор, которому соответствует $\theta_{0k} = \min(x_i / x_{ik}),\ x_{ik} > 0$.

Допустим, что $\theta_{0k} = \min(x_i / x_{ik}) = x_l / x_{lk}$ достигается для вектора базиса, состоящего в l-й строке; тогда вектор A_l исключается из базиса. Элемент x_{lk} называется разрешающим, а столбец и строка, на пересечении которых он находится, -направляющими. Новому опорному плану соответствует базис, состоящий из векторов $A_1,\dots,A_{l-1},A_k,A_{l+1},\dots,A_m$. Чтобы вычислить новый опорный план и проверить его на оптимальность, необходимо все векторы A_0, A_j, $j=1,\dots,n$, разложить по векторам базиса. Первоначальный базис был единичным $(A_1, A_2,\dots,A_m)=E$, поэтому

$$A_0=x_1A_1+\dots+x_lA_l+\dots+x_mA_m, \qquad (22)$$

$$A_k=x_{1k}A_1+\dots+x_{lk}A_l+\dots+x_{mk}A_m, \qquad (23)$$

$$A_j=x_{1j}A_1+\dots+x_{lj}A_l+\dots+x_{mj}A_m. \qquad (24)$$

Из (23) имеем $A_l=1/x_{1k}(A_k-x_{1k}A_1-\dots-x_{mk}A_m)$ (25)

Подставляя выражение A_l в (22), получаем

$$A_0 = x_1 A_1 + \dots + x_l [\frac{1}{x_{lk}}(A_k - x_{1k} A_1 - \dots - x_{mn} A_m)] + \dots + x_m A_m, \text{ или}$$

$$A_0 = (x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k}) A_1 + \dots + \frac{x_l}{x_{lk}} A_k + \dots + (x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk}) A_m.$$

Таким образом, новый опорный план $X_0 = (x_1', x_2', \dots, x_k', \dots, x_m')$ вычисляется по формулам

$$\begin{cases} x_i' = x_i - \dfrac{x_l}{x_{lk}} x_{ik},\ i \ne l \\ x_k' = \dfrac{x_l}{x_{lk}},\ i = l \end{cases} \qquad (26)$$

Подставляя в (25) в (24), получаем разложение вектора A_j по векторам нового базиса:

$$A_j = x_{1j}' A_1 + \dots + x_{kj}' A_k + \dots + x_{mj}' A_m, \text{ где } \begin{cases} x_{ij}' = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik},\ i \ne l \\ x_{kj}' = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}},\ i = l \end{cases} \qquad (27)$$

Объединяя (26) и (27), находим, что новый опорный план и разложения векторов в новом баз...

при $j=0,1,\dots,n$ определяются по формулам $\begin{cases} x_{ij}' = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, \ i \neq l \\ x_{lj}' = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}, \ i = l \end{cases}$ (28).

Таким образом, чтобы получить коэффициенты разложения векторов A_0, A_j, $j=1,\dots,n$, по векторам нового базиса, значения оценок нового опорного плана и значение линейной функции, нужно разделить все элементы направляющей строки на разрешающий элемент, и с помощью этой преобразованной строки, составить симплексную таблицу (табл. 2). Формулы

$Z(X_0) = C_б X_0$; $Z_j - C_j = C_б X_j - C_j$ (29) используют для контроля за правильностью произведенных вычислений.

Таблица 2 Вторая симплексная таблица

I	Базис	С базиса	A_0	C_1	C_2	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_k	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	x_1'	1	0	…	x_{1l}'	…	0	$x_{1,m+1}'$	…	x_{1j}'	…	0	…	x_{1n}'
2	A_2	C_2	x_2'	0	1	…	x_{2l}'	…	0	$x_{2,m+1}'$	…	x_{2j}'	…	0	…	x_{2n}'
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
L	A_k	C_k	x_k'	0	0	…	x_{ll}'	…	0	$x_{l,m+1}'$	…	x_{lj}'	…	1	…	x_{ln}'
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
M	A_m	C_m	x_m'	0	0	…	x_{ml}'	…	1	$x_{m,m+1}'$	…	x_{mj}'	…	0	…	x_{mn}'
$m+1$	Z_j-C_j		Z_0'	0	0	…	$Z_l' - C_l$	…	0	$Z_{m,m+1}' - C_{m+1}$	…	$Z_j' - C_j$	…	0	…	$Z_n' - C_n$

Если в табл. 2 в (m+1)-й строке все оценки $Z_j - C_j \le 0$, то полученный план X_0 является оптимальным; если же имеются положительные оценки, то отыскивает следующий опорный план. Процесс продолжают либо до получения оптимального плана, либо до установления неограниченности линейной функции решаемой задачи. Если среди оценок оптимального плана нулевые только оценки, соответствующие базисным векторам, то это говорит о единственности оптимального плана. Если же нулевая оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что оптимальный план не единственный.

Действительно, пусть некоторому A_{m+1}, не входящему в базис, соответствует оценка Z_{m+1}-$C_{m+1}=0$. Включим этот вектор в базис и по $\theta_{0,m+1}$ какой-то вектор исключим из базиса. В результате получим новый опорный план, которому соответствует то же значение линейной функции, что и в первоначальном оптимальном плане, т.е. линейная функция достигает оптимума в двух угловых точках многогранника решений, но тогда она достигает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих угловых точек. Таким образом в этом случае задача линейного программирования обладает бесконечным множеством оптимальных планов.

Теперь решаем задачу линейного программирования на отыскание максимального значения линейной функции.

При невыполнении условия оптимальности (21) в базис включают в первую очередь тот вектор, которому соответствует $\min \theta_{0j}(Z_j - C_j)$, где минимум берется по тем j, для которых $Z_j - C_j < 0$. Если минимальных оценок несколько, то в базис прежде всего включают вектор, которому соответствует $\max C_j$. В остальном симплексный процесс аналогичен процессу, имеющему место при отыскании минимального значения линейной функции.

Пример. Решим с помощью симплексного метода следующую задачу линейного программирования.

Найти минимальное значение линейной функции $Z=x_1-x_2-3x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

Решение. Первоначальный опорный план рассмотренным методам находится сразу только при неотрицательных правых частях системы ограничений, поэтому умножим второе неравенство на (-1) и перейдем от неравенств к равенствам, прибавляя к левым частям неотрицательные дополнительные переменные:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,6.$$

Запишем систему в векторной форме: $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4+A_5x_5+A_6x_6=A_0$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы A_4, A_5, A_6 выберем за базис первоначального опорного плана, свободные неизвестные x_1, x_2, x_3 приравниваем нулю. В результате получим первоначальный опорный план $X_0=(x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=0;\ x_4=1;\ x_5=2;\ x_6=5)$, которому соответствует разложение $x_4A_4+x_5A_5+x_6A_6=A_0$.

Для проверки плана X_0 составляем первую симплексную таблицу (табл. 3) и подсчитываем значение $Z(X_0)$ и оценок Z_j-C_j. Имеем: $Z(X_0)=C_6X_0=0$; $Z_1=C_6X_1=0;\ Z_2=C_6X_2=0;\ Z_3=C_6X_3=0;\ Z_1-C_1=0-1=-1;\ Z_2-C_2=0+1=1;\ Z_3-C_3=0+3=3.$

Таблица 3

i	Базис	С базиса	A_0	$C_1=1$	$C_2=-1$	$C_3=-3$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	1	2	-1	1	1	0	0
2	A_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0
3	A_6	0	5	3	0	1	0	0	1
$m+1$	Z_j-C_j		0	-1	1	3	0	0	0

Для векторов базиса оценки равны нулю. Среди полученных оценок имеются две положительные: $Z_2-C_2=1>0$ и $Z_3-C_3=3>0$. Это означает, что первоначальный опорный план не является оптимальным и его можно улучшить, включив в базис вектор, которому соответствует $\max \theta_{0j}(Z_j - C_j) > 0$. Среди коэффициентов разложения векторов A_2 и A_3 по базису имеются положительные, поэтому $\theta_{02} > 0$ и $\theta_{03} > 0$, которые исключают из базиса хотя бы один из векторов, существуют. Найдем эти значения: $\theta_{02} = 2/2$; $\theta_{03} = \min(1/1, 5/1) = 1/1 = 1$; $\theta_{02}(Z_2 - C_2) = 1 \cdot 1 = 1$; $\theta_{03}(Z_3 - C_3) = 1 \cdot 3 = 3$; $\max(1;3) = 3$. Следовательно, разрешающим элементом служит число 1, стоящее на пересечении первой строки и третьего столбца, первая строка и третий столбец являются направляющими; необходимо вектор A_3 включить в базис, а вектор A_4 исключить.

Составим вторую симплексную таблицу (табл. 4).

Подсчитаем новые элементы направляющей строки. Для этого старые элементы направляющей строки разделим на разрешающий элемент (на 1) и с помощью этой строки произведем одно преобразование по методу полных исключений, т.е. сложим со второй строкой, вычтем из третьей, умножим на 3 и вычтем из (m+1)-й строки. В результате получим все элементы табл. 4. Правильность проведенных вычислений проверяем по формулам (29).

В табл.4 получен второй опорный план $X_0^{(1)}=(x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=1;\ x_4=0;\ x_5=3;\ x_6=4)$, которому соответствует значение линейной функции $Z(X_0^{(1)})=-3$.

Таблица 4

i	Базис	С	A_0	1	-1	-3	0	0	0

		базиса		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	*-3*	*1*	*2*	*-1*	*1*	*1*	*0*	*0*
2	A_5	*0*	*3*	*-2*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
3	A_6	*0*	*4*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*0*	*1*
M+1	Z_j-C_j		*-3*	*-7*	*4*	*0*	*-3*	*0*	*0*

В *(m+1)*-й строке Z_2-C_2=3+1=4>0, значит, план $X_0^{(1)}$ не является оптимальным и вектор A_2 подлежит включению в базис.

Определяем $\theta_{02} = \min(3/1, 4/1) = 3/1.$ Число 1, стоящее на пересечении второго столбца и второй строки, разрешающий элемент, вектор A_5 исключается из базиса. Составляем таблицу, в которой в последней итерации получен оптимальный план (табл. 5).

Так как в *(m+1)-й* строке четвертой итерации все оценки неположительные, то план $X_0^{(3)}=(x_1=1/3;\ x_2=11/3;\ x_3=4)$ – оптимальный и ему соответствует $Z_{min}(X_0^{(3)})=-46/3$. На основании оценок в *(m+1)*-й строке можно заключить, что оптимальный план для данной задачи является единственным, так как нулевые оценки соответствуют только векторам, входящим в базис. В столбцах A_4, A_5, A_6 записана матрица, из которой перестановкой первой и третьей строк получаем обратную матрицу для векторов базиса.

Таблица 5

i	Базис	С базиса	A_0	*1*	*-1*	*-3*	*0*	*0*	*0*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	*-3*	*4*	*0*	*0*	*1*	*2*	*1*	*0*
2	A_2	*-1*	*3*	*-2*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
3	A_6	*0*	*1*	*3*	*0*	*0*	*-2*	*-1*	*1*
m+1	Z_j-C_j		*-15*	*1*	*0*	*0*	*-7*	*-4*	*0*
1	A_3	*-3*	*4*	*0*	*0*	*1*	*2*	*1*	*0*
2	A_2	*-1*	*11/3*	*0*	*1*	*0*	*-1/3*	*1/3*	*2/3*
3	A_1	*1*	*1/3*	*1*	*0*	*0*	*-1/2*	*-1/3*	*1/3*
m+1	Z_j-C_j		*-46/3*	*0*	*0*	*0*	*-19/3*	*-11/3*	*-1/3*

Составим симплексную таблицу (табл. 6) для задачи линейного программирования, условия которой приведены в пункте 1.

Таблица 6

I	Базис	С базиса	A_0	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-2*	*1*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	*1*	*5*	*1*	*0*	*0*	*2*	*-3*	*-2*
2	A_2	*-1*	*6*	*0*	*1*	*0*	*3*	*-2*	*4*
3	A_3	*-1*	*3*	*0*	*0*	*1*	*-4*	*-1*	*2*
m+1	Z_j-C_j		*-4*	*0*	*0*	*0*	*3*	*2*	*-9*

На основании полученных оценок заключаем, что первоначальный опорный план не является оптимальным и его можно улучшить за счет включения в базис одного из векторов: A_4 и A_5. Все коэффициенты разложения вектора A_5 по векторам базиса отрицательные, следовательно, для него не существует такого $\theta_0 > 0,$ которое исключало бы один из базисных векторов. Поэтому линейная функция рассматриваемой задачи не ограничена на многогранника решений.