

Таким образом, вектор A_i , соответствующей компоненте $x_i < 0$, следует исключить из базиса исходной задачи, а вектор, соответствующий отрицательной оценке, - включить в базис двойственной задачи.

Для выбора вектора, включаемого в базис исходной задачи, просматриваем l -ю строку: если в ней не содержатся $x_{ij} < 0$, то линейная функция двойственной задачи не ограничена на многограннике решений, а исходная задача не имеет решений. Если же некоторые $x_{ij} < 0$, то для столбцов, содержащих эти отрицательные значения, вычисляем $\theta_{0j} = \min(x_i / x_{ij}) \geq 0$ и определяем вектор, соответствующий $\max \theta_{0j}(Z_j - C_j)$ при решении исходной задачи на минимум и $\min \theta_{0j}(Z_j - C_j)$ при решении исходной задачи на максимум. Этот вектор и включаем в базис исходной задачи. Вектор, который необходимо исключить из базиса исходной задачи, определяется направляющей строкой.

Если $\theta_{0j} = \min(x_i / x_{ij}) = 0$, т.е. $x_i = 0$, то x_{ij} берется за разрешающий элемент только в том случае, если $x_{ij} > 0$. Такой выбор разрешающего элемента на данном этапе не приводит к увеличению количества отрицательных компонент вектора X . Процесс продолжаем до получения $X \geq 0$; при этом находим оптимальный план двойственной задачи, следовательно, и оптимальный план исходной задачи.

В процессе вычислений по алгоритму двойственного симплексного метода условие $Z_j - C_j \leq 0$ можно не учитывать до исключения всех $x_i < 0$, затем оптимальный план находится обычным симплексным методом. Это удобно использовать, если все $x_i < 0$; тогда к переходу к плану исходной задачи за одну итерацию необходимо θ_{0j} определить не по минимуму, а по максимуму отношений, т.е. $\theta_{0j} = \max(x_i / x_{ij}) > 0$.

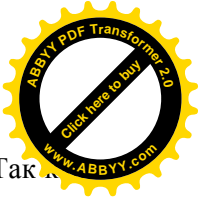
Двойственным симплексным методом можно решать задачи линейного программирования, системы ограничений которых при положительном базисе содержат свободные члены любого знака. Этот метод позволяет уменьшить количество преобразований системы ограничений, а также размеры симплексной таблицы. Рассмотрим применение двойственного симплексного метода на примерах.

Пример 1. Найти минимальное значение линейной функции $Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Решение. Умножим второе неравенство на -1 и преобразуем неравенства в уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$



Составим первую симплексную таблицу (табл. 1), выбрав за базис векторы A_4 и A_5 . Так как $x_2 = -5 < 0$, то просматриваем коэффициенты второй строки. Среди них два отрицательных коэффициента, стоящие в столбцах, соответствующих векторам A_1 и A_3 . Имеем:

$$\theta_{01} = \min(4/1, -5/-1) = 4/1, \theta_{01}(Z_1 - C_1) = 4/1 \cdot 2 = 8,$$

$$\theta_{03} = -5/-1 = 5, \theta_{03}(Z_3 - C_3) = 5 \cdot (-5) = -25.$$

Исходная задача решается на отыскание минимального значения линейной функции, поэтому в базис исходной задачи надо включить вектор, которому соответствует $\max \theta_{0j}(Z_j - C_j) = \max(-25, 8) = 8$, т.е. вектор A_1 с разрешающим элементом 1, вектор A_4 исключаем из базиса.

Таблица 1

I	Базис	C базиса	A_0	2	3	6	3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	4	1	1	-1	1	0
2	A_5	0	-5	-1	5	-1	0	1
M+1	$Z_j - C_j$		0	2	-1	-5	0	0

Таблица 2

I	Базис	C базиса	A_0	-2	1	5	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	-2	4	1	1	-1	1	0
2	A_5	0	-1	0	6	-2	1	1
m+1	$Z_j - C_j$		-8	0	-3	-3	-2	0
1	A_1	-2	9/2	1	-2	0	1/2	-1/2
2	A_3	5	1/2	0	-3	1	-1/2	-1/2
M+1	$Z_j - C_j$		-13/2	0	-12	0	-7/2	-3/2

В результате одного полного исключения получаем табл. 2, где в последней итерации найден оптимальный план исходной задачи:

$$X^* = (9/2, 0, 1/2), Z_{min} = -13/2$$

и двойственной задачи:

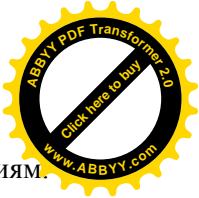
$$Y^* = (7/2, 3/2), f_{max} = -13/2.$$

Для получения плана двойственной задачи было необходимо $Z_j + C_j$, соответствующие векторам первоначального базиса, умножить на -1, так как исходная и двойственная задачи симметричны.

Пример 2. Найти минимальное значение линейной функции $Z = -3x_1 + 2x_2 - 4x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$



Решение. Умножаем неравенства системы ограничений на -1 и переходим к уравнениям.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = -7 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Решение приведено в табл. 3, причем разрешающий элемент в первой итерации выбран по $\theta_{0j} = \max(x_i / x_{ij}) > 0$, что позволило во второй итерации перейти к опорному плану исходной задачи и в дальнейшем решать задачу обычным симплексным методом.

Таблица 3

i	Базис	C базиса	A ₀	3	2	-1	0	0
				A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
1	A ₄	0	-4	-1	-1	2	1	0
2	A ₅	0	-7	-3	-1	4	0	1
M+1	Z _j -C _j		0	-3	-2	4	0	0
1	A ₁	3	4	1	1	-2	-1	0
2	A ₅	0	6	0	2	-2	-3	1
M+1	Z _j -C _j		12	0	1	-2	-3	0
1	A ₁	3	3/2	1	0	-1	1/2	-1/2
2	A ₂	2	5/2	0	1	-1	-3/2	1/2
M+1	Z _j -C _j		19/2	0	0	-1	-3/2	-1/2

Оптимальный план исходной задачи $X^* = (3/2, 5/2, 0)$, $Z_{min} = 19/2$.

Задачи симметричные, поэтому оптимальный план двойственной задачи $Y^* = (3/2, 1/2)$, $f_{max} = 19/2$.