Лекция 5 (3 часа)

Тема: Теория двойственности в ЛП. Постановка двойственной задачи.

План

1.Понятие двойственности

2.Двойственный симплекс метод

1. Понятие двойственности.

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной.* Первоначальная задача называется *исходной.*

Связь исходной и двойственной задач состоит в том, что коэффициенты C_j функции цели исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи, свободные члены b_i системы ограничений исходной задачи служат коэффициентами функции цели двойственной задачи, а матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Решение двойственной задачи может быть получено из решения исходной и наоборот.

В качестве примера рассмотрим задачу использования ресурсов. Предприятия имеет m видов ресурсов в количестве b_i, $i=1,\dots,m$, единиц, из которых производится n видов продукций. Для производства 1 ед. j-й продукции расходуется a_{ij} ед. i-го ресурса, а ее стоимость составляет C_j ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий ее максимальный выпуск в стоимостном выражении. Обозначим через x_j, $j=1,\dots,n$, количество ед. j-й продукций. Тогда исходную задачу сформулируем так.

Найти вектор $X=(x_1, x_2,\dots,x_n)$, который удовлетворяет ограничениям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1,\dots,n$$

и доставляет максимальное значение линейной функции $Z=C_1x_1+C_2x_2+\ldots+C_nx_n$.

Оценим ресурсы, необходимые для изготовления продукции. За единицу стоимости ресурсов примем единицу стоимости выпускаемой продукции. Обозначим через y_i, $i=1,\dots,m$, стоимость единицы i-го ресурса. Тогда стоимость всех затраченных ресурсов, идущих на изготовление единицы j-й продукции, равна $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j$. Стоимость затраченных ресурсов не может быть меньше стоимости окончательного продукта, поэтому должно выполняться неравенство $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \ge C_j, j = 1,\dots,n.$ Стоимость всех имеющихся ресурсов выразится величиной $\sum_{i=1}^{m} b_1 y_i$.

Итак, двойственную задачу можно сформулировать следующим образом.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Найти вектор $Y=(y_1, y_2,\ldots,y_m)$, который удовлетворяет ограничениям

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq C_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq C_n \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = 1,\ldots,m$$

и доставляет минимальное значение линейной функции $f=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m$.

Рассмотренные исходная и двойственная задачи могут быть **экономически интерпретированы** следующим образом.

Исходная задача. Сколько и какой продукции x_j, $j=1,\ldots,n$ необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях C_j, $j=1,\ldots,n$, единицы продукции и размерах имеющихся ресурсов b_i, $i=1,\ldots,m$, максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении.

Двойственная задача. Какова должна быть цена единицы каждого из ресурсов, чтобы при заданных количествах ресурсов b_i и величинах стоимости единицы продукции C_j минимизировать общую стоимость затрат?

Переменные y_i называются оценками или *учетными, неявными ценами.*

2 Двойственный симплексный метод

Для получения решения исходной задачи можно перейти к двойственной и, используя оценки ее оптимального плана, определить оптимальное решение исходной задачи.

Переход к двойственной задаче не обязателен, так как если рассмотреть первую симплексную таблицу с единичным дополнительным базисом, то легко заметить, что в столбцах записана исходная задача, а в строках –двойственная. Причем оценками плана исходной задачи являются C_j, а оценками плана двойственной задачи – b_i. Решим двойственную задачу по симплексной таблице, в которой записана исходная задача; найдем оптимальный план двойственной задачи, а вместе с ним и оптимальный план исходной задачи. Этот метод носит название двойственного симплексного метода.

Необходимо решить исходную задачу линейного программирования, поставленную в общем виде: минимизировать функцию $Z=CX$ при $AX = A_0, X \geq 0$. Тогда в двойственной задаче необходимо максимизировать функцию $f=YA_0$ при $YA \leq C$. Допустим, что выбран такой базис $D=(A_1, A_2,\ldots,A_l,\ldots,A_m)$, при котором хотя бы одна из компонент вектора $X=D^{-1}A_0=(x_1, x_2,\ldots,x_l,\ldots,x_m)$ отрицательная (например, $x_l<0$), но для всех векторов A_j выполняется соотношение $Z_j - C_j \leq 0, j = 1,\ldots,n.$ Тогда $Y=C_{баз}D^{-1}$ –план двойственной задачи. Этот план не оптимальный, так как, с одной стороны, при выбранном базисе X содержит отрицательную компоненту и не является планом исходной задачи, а с другой стороны, оценки оптимального плана двойственной задачи должны быть неотрицательными.

Таким образом, вектор A_l, соответствующей компоненте $x_l<0$, следует исключить из базиса исходной задачи, а вектор, соответствующий отрицательной оценке, - включить в базис двойственной задачи.

Для выбора вектора, включаемого в базис исходной задачи, просматриваем l-ю строку: если в ней не содержатся $x_{lj}<0$, то линейная функция двойственной задачи не ограничена на многограннике решений, а исходная задача не имеет решений. Если же некоторые $x_{lj}<0$, то для столбцов, содержащих эти отрицательные значения, вычисляем $\theta_{0j} = \min(x_i / x_{ij}) \geq 0$ и определяем вектор, соответствующий $\max \theta_{0j}(Z_j - C_j)$ при решении исходной задачи на минимум и $mn\theta_{0j}(Z_j - C_j)$ при решении исходной задачи на максимум. Этот вектор и включаем в базис исходной задачи. Вектор, который необходимо исключить из базиса исходной задачи, определяется направляющей строкой.

Если $\theta_{0j} = \min(x_i / x_{ij}) = 0$, т.е. $x_i=0$, то x_{ij} берется за разрешающий элемент только в том случае, если $x_{ij}>0$. Такой выбор разрешающего элемента на данном этапе не приводит к увеличению количества отрицательных компонент вектора X. Процесс продолжаем до получения $X \geq 0$; при этом находим оптимальный план двойственной задачи, следовательно, и оптимальный план исходной задачи.

В процессе вычислений по алгоритму двойственного симплексного метода условие $Z_j - C_j \leq 0$ можно не учитывать до исключение всех $x_i<0$, затем оптимальный план находится обычным симплексным методом. Это удобно использовать, если все $x_i<0$; тогда к переходу к плану исходной задачи за одну итерацию необходимо θ_{0j} определить не по минимуму, а по максимуму отношений, т.е. $\theta_{0j} = \max(x_i / x_{ij}) > 0$.

Двойственным симплексным методом можно решать задачи линейного программирования, системы ограничений которых при положительном базисе содержат свободные члены любого знака. Этот метод позволяет уменьшить количество преобразований системы ограничений, а также размеры симплексной таблицы. Рассмотрим применение двойственного симплексного метода на примерах.

Пример 1. Найти минимальное значение линейной функции $Z=-2x_1+x_2+5x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Решение. Умножим второе неравенство на -1 и преобразуем неравенства в уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1,\ldots,5.$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Составим первую симплексную таблицу (табл. 1), выбрав за базис векторы A_4 и A_5. Так как $x_2=-5<0$, то просматриваем коэффициенты второй строки. Среди них два отрицательных коэффициента, стоящие в столбцах, соответствующих векторам A_1 и A_3. Имеем:

$$\theta_{01} = \min(4/1, -5/-1) = 4/1, \theta_{01}(Z_1 - C_1) = 4/1 \cdot 2 = 8,$$

$$\theta_{03} = -5/-1 = 5, \theta_{03}(Z_3 - C_3) = 5 \cdot (-5) = -25.$$

Исходная задача решается на отыскание минимального значения линейной функции, поэтому в базис исходной задачи надо включить вектор, которому соответствует $\max \theta_{0j}(Z_j - C_j) = \max(-25{,}8) = 8$, т.е. вектор A_1 с разрешающим элементом 1, вектор A_4 исключаем из базиса.

Таблица 1

I	Базис	С базиса	A_0	2	3	6	3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	4	1	1	-1	1	0
2	A_5	0	-5	-1	5	-1	0	1
$M+1$	Z_j-C_j		0	2	-1	-5	0	0

Таблица 2

I	Базис	С базиса	A_0	-2	1	5	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	-2	4	1	1	-1	1	0
2	A_5	0	-1	0	6	-2	1	1
$m+1$	Z_j-C_j		-8	0	-3	-3	-2	0
1	A_1	-2	$9/2$	1	-2	0	$½$	$-1/2$
2	A_3	5	$½$	0	-3	1	$-1/2$	$-1/2$
$M+1$	Z_j-C_j		$-13/2$	0	-12	0	$-7/2$	$-3/2$

В результате одного полного исключения получаем табл. 2, где в последней итерации найден оптимальный план исходной задачи:

$X^*=(9/2,\ 0,\ ½),\ Z_{min}=-13/2$

и двойственной задачи:

$Y^*=(7/2,\ 3/2),\ f_{max}=-13/2.$

Для получения плана двойственной задачи было необходимо Z_j+C_j, соответствующие векторам первоначального базиса, умножить на -1, так как исходная и двойственная задачи симметричны.

Пример 2. Найти минимальное значение линейной функции $Z=-3x_1+2x_2-4x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1{,}2{,}3.$$

Решение. Умножаем неравенства системы ограничений на -1 и переходим к уравнениям:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = -7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,\ldots,5.$$

Решение приведено в табл. 3, причем разрешающий элемент в первой итерации выбран по $\theta_{0j} = \max(x_i / x_{ij}) > 0,$ что позволило во второй итерации перейти к опорному плану исходной задачи и в дальнейшем решать задачу обычным симплексным методом.

Таблица 3

i	Базис	С базиса	A_0	*3*	*2*	*-1*	*0*	*0*
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	*0*	*-4*	*-1*	*-1*	*2*	*1*	*0*
2	A_5	*0*	*-7*	*-3*	*-1*	*4*	*0*	*1*
M+1	Z_j-C_j		*0*	*-3*	*-2*	*4*	*0*	*0*
1	A_1	*3*	*4*	*1*	*1*	*-2*	*-1*	*0*
2	A_5	*0*	*6*	*0*	*2*	*-2*	*-3*	*1*
M+1	Z_j-C_j		*12*	*0*	*1*	*-2*	*-3*	*0*
1	A_1	*3*	*3/2*	*1*	*0*	*-1*	*½*	*-1/2*
2	A_2	*2*	*5/2*	*0*	*1*	*-1*	*-3/2*	*1/2*
M+1	Z_j-C_j		*19/2*	*0*	*0*	*-1*	*-3/2*	*-1/2*

Оптимальный план исходной задачи $X^*=(3/2, 5/2, 0)$, $Z_{min}=19/2$.

Задачи симметричные, поэтому оптимальный план двойственной задачи $Y^*=(3/2, ½)$, $f_{max}=19/2$.