$$= \max_{-3\le t\le -1} \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{\left|\sqrt[3]{x_n^2(t)} + \sqrt[3]{x_n(t)x_0(t)} + \sqrt[3]{x_0^2(t)}\right|} \le$$

$$\le \left(\max_{-3\le t\le -1} \frac{1}{\left|\sqrt[3]{x_n^2(t)} + \sqrt[3]{x_n(t)x_0(t)} + \sqrt[3]{x_0^2(t)}\right|} + 1 \right) \times$$

$$\times \|x_n - x_0\|_{C[-3;-1]} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Получаем, что оператор A является непрерывным по Гейне.

Список литературы

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – 7-е изд. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 572 с.

2. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев — учебное пособие, М.: Высш. школа, 1982. —271 с.

Щербакова Ксения Владиславовна, студентка 4 курса физико-математического факультета Воронежского государственного педагогического университета, г. Воронеж, РФ

Научный руководитель – Петросян Гарик Гагикович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики Воронежского государственного педагогического университета, г. Воронеж, РФ

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ДВОЙНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Эркебаев У.З.

DOI: 10.12737/15784

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго

порядка, с двумя неизвестными переменными, в кольце. Асимптотическое разложение решения, представляющее собой ряд Пюизё, обосновано принципом максимума.

Ключевые слова: задача Дирихле, модифицированные функции Бесселя, малый параметр, метод погранфункций, бисингулярное возмущение.

Исследуем задачу Дирихле

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-a)^3u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$u(a,\varphi,\varepsilon)=0,\quad u(b,\varphi,\varepsilon)=0, \tag{2}$$

где $D=\{(\rho,\varphi)|\ a<\rho<b,\ 0<\varphi\leq 2\pi\}$, $0<a<b$ – const, $f=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(\rho,\varphi)$, $f_k\in C^{(\infty)}(\overline{D})$.

Решение задачи Дирихле (1)-(2) существует и единственно, при $0<\varepsilon$. Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи, при $\varepsilon\to 0$.

Асимптотическое разложение строится новым методом, который отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательного асимптотического ряда полностью вносятся во внутренние разложения, а от классического метода пограничных функций здесь пограничные функций убывают не экспоненциально, а степенным характером.

Уравнение (1) по терминологии А.М. Ильина называется бисингулярно возмущенным, т.е. задача с двойной особенностью. Действительно, первая сингулярность очевидна, что решение предельное уравнения не может удовлетворять граничному условию (2). Чтобы показать вторую особенность (сингулярность), рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1)-(2), которого построим методом малого параметра:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi),\ \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим простую рекуррентную систему уравнений, решение, которого имеет вид:

$$u_0(\rho,\varphi)=-f_0(\rho,\varphi)/(\rho-a)^3,\quad u_k(\rho,\varphi)=-(f_k(\rho,\varphi)-\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi))/(\rho-a)^3,\ k\in\mathbf{N}.$$

Если $f_0(a,\varphi)\neq 0$, то $u_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty)}\left(\overline{D}\setminus\{(a,\varphi)\}\right)$, т.е. все эти функции $u_k(\rho,\varphi)$ имеют нарастающие особенности:

$$u_k(\rho,\varphi)=O\left((\rho-a)^{-3-5k}\right),\ k=0,1,2,...,\ \text{при } \rho\to a.$$

Следовательно, задача (1)-(2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности, при $\rho\to a$. Кроме этого ряд (3) теряет асимптотический характер, при $|\rho-a|<\varepsilon^{1/5}$.

Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=V(\rho,\varphi,\varepsilon)+W(\tau,\varphi,\mu)+Q(\eta,\varphi,\lambda), \qquad (4)$$

где $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$ – регулярное внешнее решение; $W(\tau,\varphi,\mu)=\sum\limits_{k=-3}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$ – погранслойное решение, в окрестности границы $\rho=a$, $\tau=(\rho-a)/\mu$, $\varepsilon=\mu^5$; $Q(\eta,\varphi,\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\lambda^k Q_k(\eta,\varphi)$– классическое погранслойное решение, в окрестности границы $\rho=b$, $\eta=(b-\rho)/\lambda$, $\varepsilon=\lambda^2$.

Учитывая граничное условие (2) имеем:

$$W(0,\varphi,\mu)=-V(a,\varphi,\mu^5),\ W(\tau,\varphi,\mu)\to 0,\ \text{при } \tau\to+\infty; \qquad (5)$$

$$Q(0,\varphi,\lambda)=-V(b,\varphi,\lambda^2),\ Q(\eta,\varphi,\lambda)\to 0,\ \text{при } \eta\to+\infty. \qquad (6)$$

Подставляя (4) в (1) получим:

$$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-a)^3V(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon)-h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D, \qquad (7)$$

$$\mu^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\mu\partial}{(a+\tau\mu)\partial\tau}+\frac{\mu^2\partial^2}{(a+\tau\mu)^2\partial\varphi^2}-\tau^3\right)W(\tau,\varphi,\mu)=h(\tau\mu,\varphi,\mu),\ (\tau,\varphi)\in D_1, \qquad (8)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-\frac{\lambda\partial}{(b-\eta\lambda)\partial\eta}+\frac{\lambda^2\partial^2}{(b-\eta\lambda)^2\partial\varphi^2}-(b-a-\eta\lambda)^3\right)Q(\eta,\varphi,\lambda)=0,\ (\eta,\varphi)\in D_2, \qquad (9)$$

где $D_1=\{(\tau,\varphi)|\ 0<\tau<+\infty,\ 0<\varphi\le 2\pi\}$, $D_2=\{(\eta,\varphi)|\ 0<\eta<+\infty,\ 0<\varphi\le 2\pi\}$.

Здесь, по идее метода, ввели вспомогательный асимптотический ряд $h(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)$, которую определим ниже.

Учитывая, что $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$, из (7) для функции $v_k(\rho,\varphi)$ получим:

$v_0(\rho,\varphi)=-(f_0(\rho,\varphi)-h_0(\rho,\varphi))/(\rho-a)^3$, $v_k(\rho,\varphi)=-(f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi))/(\rho-a)^3$.

Пусть $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$, $v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0$, тогда $v_k(\rho,\varphi)\in C^{(\infty)}(\overline{D})$, когда $h_k(\rho,\varphi)=g_{k,0}(\varphi)+g_{k,1}(\varphi)(\rho-a)+g_{k,2}(\varphi)(\rho-a)^2$, $k=0,1,\ldots$, $g_{k,j}(\varphi)=\dfrac{\partial^j g_k(a,\varphi)}{j!\partial\rho^j}$, $j=0,1,2$.

Из соотношении (9) и (6) для функции $Q_k(\eta,\varphi)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 Q_k}{\partial\eta^2}-(b-a)^3 Q_k=3(b-a)\eta(\eta Q_{k-2}-(b-a)Q_{k-1})+\frac{\partial Q_{k-1}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 Q_{k-2}}{\partial\varphi^2},$$

$$Q_k(0,\varphi)=\begin{cases}-v_m(b,\varphi), \text{ при } k=2m\\ 0, \text{ при } k=2m+1, m\in \mathrm{N}\end{cases},\quad \lim_{\eta\to+\infty} Q_k(\eta,\varphi)=0,\ k=0,1,2,\ldots. \quad (10)$$

Задачи (10) имеют единственные решения $Q_k(\eta,\varphi)\in C^{\infty}(\overline{D}_2)$ и при $\eta\to+\infty$, $Q_k(\eta,\varphi)=O(e^{-\eta\sqrt{(b-a)^3}})$.

Из (8) и (5) для функции $w_k(\tau,\varphi)$ составляем задачи:

$$Lw_{5k-3+j}=\tau^j g_{k,j}(\varphi)-\frac{\partial w_{5k-4+j}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w_{5k-5+j}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2},\ w_{5k-3+j}(0,\varphi)=0,\ j=0,1,2.$$

$$Lw_{5k}=-\frac{\partial w_{5k-1}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w_{5k-2}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2},\ w_{5k}(0,\varphi)=-v_k(a,\varphi).$$

$$Lw_{5k+1}=-\frac{\partial w_{5k}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w_{5k-1}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2},\ w_{5k+1}(0,\varphi)=0,\ (\tau,\varphi)\in D_1,\ k=0,1,2,\ldots$$

где $L=\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\tau^3$.

Решения этих задач существуют, единственны, бесконечно дифференцируемы и выражаются через модифицированные функции Бесселя, при $\tau\to+\infty$, справедливы соотношения:

$w_{5k-3+j}(\tau,\varphi)=O(\tau^{-3+j})$ $j=0,1,2$, $w_{5k}(\tau,\varphi)=O(\tau^{-5})$, $w_{5k+1}(\tau,\varphi)=O(\tau^{-4})$, $k=0,1,\ldots$.

Оценим остаточный член разложения. Пусть $R(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)-u_s(\rho,\varphi,\varepsilon)$, где $u_s(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{s}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum\limits_{k=0}^{2s+1}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)+\sum\limits_{k=-3}^{5s+1}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$.

Тогда для $R(\rho,\varphi,\varepsilon)$ получим задачу:

$$\varepsilon\Delta R(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-a)^3 R(\rho,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^{s+1}),\ \varepsilon\to 0,\ (\rho,\varphi)\in D,$$

$$R(a,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^{s+1}),\ R(b,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^{s+1}),\ \varepsilon\to 0.$$

Из принципа максимума следует справедливость оценки $R(\rho,\varphi,\varepsilon)=O(\varepsilon^s)$, $\varepsilon\to 0$, $(\rho,\varphi)\in D$.

Таким образом, нами доказана

Теорема. Если $f(a,\varphi,0)\neq 0$, то для решения задачи (1)-(2) справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{\varepsilon^k}\,Q_k\left(\frac{b-\rho}{\sqrt{\varepsilon}},\varphi\right)+\sum_{k=-3}^{+\infty}\sqrt[5]{\varepsilon^k}\,w_k\left(\frac{\rho-a}{\sqrt[5]{\varepsilon}},\varphi\right),\ \varepsilon\to 0.$$

Эркебаев Улукбек Заирбекович, аспирант кафедры алгебры и геометрии Ошского государственного университета, г. Ош, Кыргызстан

Научный руководитель – Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Уральского государственного педагогического университета, г. Екатеринбург, РФ