МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

Диссертационный совет К 01.15.504

На правах рукописи

УДК 517.928

ХАЛМАТОВ АНВАР АВАЗОВИЧ

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош-2015

Диссертационная работа выполнена на кафедре “Математика, физика и методика преподавания” Кыргызско-Узбекского университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент НАН КР
Алымкулов Келдибай

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор ***Алыбаев Курманбек Сарманович***

кандидат физико-математических наук,
доцент ***Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич***

Ведущая организация: Институт теоретической и прикладной математики

Национальной Академии Наук Кыргызской Республики, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Защита диссертации состоится «18» декабря 2015 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета К 01.15.504 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском Государственном университете и институте природных ресурсов южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета по адресу: Кыргызстан, 723500, г. Ош, ул. Ленина 331.

Автореферат разослан “16” декабря 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного
Совета, к.ф.-м.н. Папиева Т.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Асимптотический анализ постоянно растет в силу своей внутренней потребности, например, в теории чисел распределение простых чисел оценка числа простых чисел, в теории вероятностей законы больших чисел и.т.д, а также под влиянием различных прикладных задач небесной механики, радиофизики, механики жидкостей и газа, квантовой механики, математической биофизики, медицины и других прикладных исследований. К этому разделу также относится терии возмущений (пертурбаций) дифференциальных уравнений. Впервые такие регулярно возмущенные уравнения возникли в небесной механике. И в теории возмущений возник классический метод разложения по малому параметру решений дифференциальных уравнений, если эти уравнения зависят от малого параметра регулярным образом. Так как если исходное, изучаемое дифференциальное уравнение зависит от малого параметра аналитически (или достаточно гладко), то решение этого уравнения является также аналитической функцией по малому параметру (гладкой функцией, т.е. разлагается в ряд Тейлора с остаточным членом). В теорию классического метода возмущений большой вклад внес французский математик Анри Пуанкаре (Jules Henri Poincaré).

Он, впервые дал строгое определение асимптотического ряда.

В изучении вопросов обтекания тел механики жидкостей и газа возникли сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, родоначальником появления этой теории, по видимому, был немецкий механик Людвиг Прандтль (Ludwig Prandtl).

Решения сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при производной не зависят от малого параметра регулярным образом. Поэтому при построении асимптотики решения этих уравнений возникают определенные трудности, в связи понижением порядка или появлением особой точки соответствующего невозмущенного уравнения.

Кроме того, в радиофизике также, возник сингулярно возмущенное уравнение Ван-дер-Поля (Vander Pol- датский инженер).

По словам известных математиков К. Фридрихса (K.Friedrich) и Л. Сегал (L.Segel) “асимптотическое описание является прекрасным математическим инструментом анализа явлений природы и имеет глубокое значение для прикладной математики и вычислительной математики”.

Поэтому, разработка методов построения асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений вызывает большой интерес для прикладных исследований.

Возмущенные сингулярные дифференциальные уравнения можно делить на три класса. К первому классу можно отнести дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных, что при нулевом значении малого параметра порядок рассматриваемого уравнения понижается. Такие уравнения исследованы в трудах Л. Прандтля, Г.Биркгофа, М.Нагумо, И.С.Градштейна, К.Фридрихса, В.Вазова, А.Н.Тихонова, А.Эрдейи, Н.Левинсона, А.Б.Васильевой, В.Ф.Бутузова, М.Иманалиева, О'Малли, Е.Ф.Мищенко, Л.С.Понтрягина, Ван Дайка, Дж.Коула, С.А.Ломова, К.А.Касымова, А.М. Ильина, В.П.Маслова, Н.Х.Розова, П.С.Панкова, Каримова С., Какишова К., Алыбаева К.С. и др.

Теорема существовании решений таких уравнений доказана А.Н.Тихоновым. Разложения асимптотических решений этих уравнений получены А.Б. Васильевой, В.Вазовым(W.Wasov), Й.Сибуйа (Y.Sibua) методом сращивания внешнего и внутреннего решений (МСВИВР).

Параллельно с МСВИВР разрабатывался метод составных разложений (method of composite expansion) или метод погранслоя. Начало этого метода были положены в работах Ж.И.Латта (J.E. Latta) и Е. Бромберга. Систематически МСВИВР был применен Л.А.Люстерником, М.И. Вишиком для линейных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных. Этот метод для сингулярно возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (в частности и для сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений) был разработан М. Иманалиевым.

Для представления равномерно точного решения на всем рассматриваемом отрезке для сингулярно возмущенных уравнений разработаны следующие методы:

1. Метод погранфункций, или его зарубежное составное разложение (the method of composite expansion) представляет решения сингулярно возмущенных уравнений в виде суммы асимптотического ряда, функций зависящих от исходной и «быстрой» переменных.

2. Метод сращивания внешнего и внутреннего разложений решения. Для разработки этого метода большой вклад внесли С. Каплун (S.Kaplun), М. Ван-Дайком (M.VanDyke), Дж. Коул (J.D.Cole), А.М.Ильин, В.Г.Мазья, С.А. Назаров, Б.А. Пламеневский и др.

Метод сращивания (МС) обоснован А.М.Ильиным.

Метод сращивания Ван-Дайка упрощен К.Алымкуловым и в результате чего разработан новый метод структурного сращивания (МСС).

3. Метод ВКБ (Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна) или метод метод Лиувилля-Грина, который применяется к уравнениям второго прядка с большим параметром.

4. Метод регуляризации Ломова, который обычно применяется для линейных сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при старших производных.

Второй класс сингулярно возмущенных уравнений начал изучать английский математик и механик М.Дж. Лайтхилл (M.J.Lighthil).

Ко второму классу можно отнести такие возмущенные уравнения, которые при нулевом значении малого параметра порядок уравнений не понижается, однако, у невозмущенного уравнения появляется особая точка. Классический метод малого параметра, для построения асимптотики решений таких уравнений не применим, так как с увеличением порядка приближения по малому параметру в окрестности особой точки их особенность возрастают и перестают приближаться к точному решению. Это явление напоминает «бисингулярную задачу» или «задачу с точкой поворота».

Изучению второго класса особых возмущений, кроме работ М.Дж. Лайтхилла, посвящены работы В.Вазова, И.Сибуйя, и К.Ж.Такахаси, К.Комстока (C.Comstok), П.Хабетса (P.Habets), Цянь-Сюэ-сена, М.Ф.Притуло, Дж. Темпла и других.

К третьему классу можно отнести сингулярно возмущенные уравнения с малым параметром, которые рассматриваются на бесконечном отрезке времени. К такому классу относится, в частности, модельные уравнения Лагерстрома.

$$v''(r)+\frac{k}{r}v'(r)+v(r)v'(r)+\beta(v'(r))^2=0,\ v(\varepsilon)=0,\ v(\infty)=1,$$

где $0<\varepsilon<<1,\ k\in N,\ 0<<\beta - \textit{числовой параметр}.$

<u>Цель работы</u>

1. Разработать аналог метода погранфункций для сингулярно возмущенного модельного уравнения Лайтхилла, с регулярными особыми точками.

2. Разработать новый аналитический метод равномерного разложения для сингулярно возмущенного модельного уравнения Лайтхилла, который дает обобщенный асимптотический ряд Пуанкаре.

<u>Методы исследования</u>. Применяются: метод полной математической индукции, метод преобразований, идеи метода структурного сращивания и метода погранфункций. Используются различные оценки сингулярных интегралов.

<u>Научная новизна</u>. 1. Впервые получены равномерные асимптотические приближения модельного уравнения Лайтхилла с помощью обобщенного метода погранфункций. Отметим, что ранее метод погранфункций применялись только для уравнений с малым параметром при старших производных, в случае асимптотической устойчивости решения быстрого времени, которые не содержат особые точки.

2. Создан новый метод при помощи которого получены обобщенные асимптотические разложения Пуанкаре, который обобщает метод структурного сращивания и метод погранфункций.

<u>Теоретическая и практическая ценность</u>. Настоящая работа, хотя носит теоретический характер, но ее результаты могут найти приложение в механике жидкостей и газа, в квантовой механике и других областях техники и науки. А также созданные в диссертации методы могут быть применены к другим сингулярно возмущенным уравнениям с особыми точками.

<u>Основные положения, выносимые на защиту</u>.

1. Впервые получены равномерные асимптотические приближения модельного уравнения Лайтхилла с помощью обобщенного метода погранфункций. Оценка остаточных членов являются более точными, чем в методе структурного сращивания.

2. Разработан новый метод для получения равномерных асимптотических разложений решений модельного уравнения Лайтхилла в новой постановке задачи Коши, который является более общим чем, метод погранфункций. Этот метод дает обобщенный асимптотический ряд Пуанкаре для решения.

Апробация результатов. Результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на семинарах: - на городском семинаре математиков г.Ош (рук. проф. К. Алымкулов);

- на конференции посвященной 70-летию проф. Б. Арапова 2013 г (г.Ош);
- на конференции посвященной 20-летию КРСУ;
- на конференции посвященной 20-летию КУУ.

Публикации по теме диссертации

Основное содержание настоящей работы опубликовано в девяти статьях [1-9]. В работах [5-7] К. Алымкулову принадлежит постановка проблемы, а автору – доказательства теорем.

Структура и обьем работы. Диссертационная работа состоит из трех глав, содержащих 11 параграфов и списка использованных литератур, всего 85 страниц. Нумерация формул трехзначная: первая цифра указывает на номер главы, вторая номер параграфа, третья на номер формулы.

Краткое содержание работы

В первой главе приводится обзор известных результатов.

В [1] Лайтхилл для создания своего метода изучил следующее модельное уравнение

$$(x+\varepsilon u(x))\frac{du(x)}{dx}=-q(x)u(x)+r(x),\ u(1)=b, \tag{1}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $0\le x\le 1$ – независимая переменная, a – известная постоянная, $q(x), r(x)\in C^{\omega}[0,1]$ – аналитические функции на отрезке [0;1], $u(x)$ – известная функция.

Для невозмущенного уравнения (1), где $\varepsilon=0$:

$$Lu_0(x):=x\frac{du(x)}{dx}+q(x)u_0(x)=r(x),\ u_0(1)=b, \tag{2}$$

точка $x=0$ является регулярной особой точкой.

Решение задачи (2) представляется в виде:

$$u_0(x)=x^{-q_0}w(x), \tag{3}$$

где

$$P(x)=\exp\{\int_1^x (q_0-q(s))s^{-1}ds\}\in C^{\omega}[0,1], w(x)=P(x)[w_0+\int_0^x s^{q_0-1}P^{-1}(s)r(s)ds]\in C^{\omega}[0,1],$$

$$A=\int_0^1 P^{-1}(s)s^{q_0-1}r(s)ds,\ w_0=(b-A)P(0).$$

Предполагается, что $w_0\neq 0$. Тогда из (3) видно, что $u_0(x)$ - не является гладкой в точке $x=0$, поэтому если искать решение задачи (1)-(2) обычным *классическим методом малого параметра* в виде:

[1]Lighthill M.J., A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid // Phil. Magazine. –1949. – No. 40. - P.1179-1201.

$$u(x)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2 u_2(x)+..., \tag{4}$$

тогда для определения функций $u_k(x)$ получим следующие уравнения:

$$Lu_1(x)=-u_0(x)\frac{du_0(x)}{dx},\quad u_1(1)=0, \tag{5.1}$$

$$Lu_2(x)=-u_0(x)\frac{du_1(x)}{dx}-\frac{du_0(x)}{dx}u_1(x),\quad u_2(1)=0, \tag{5.2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Lu_n(x)=-\sum_{\substack{i+j=n-1\\ i,j\geq 0}}u_i(x)\frac{du_j(x)}{dx},\quad u_n(1)=0. \tag{5.n}$$

Как видно, из правой части уравнения (5.1) особенность функций в правой части увеличивается в точке $x=0$.

Задача (5.1) запишется в виде:

$$Lu_1(x)\sim w_0^2u_k(x)\sim O\left(x^{-q_0-(q_0+1)k}\right),x\to 0,\quad k=1,2,3,...\ x^{-3},\ x\to 0.$$

Поэтому, отсюда имеем

$$u_1(x)\sim -\frac{q_0w_0^2}{q_0+1}x^{-2q_0-1},\ x\to 0.$$

Видно, что особенность функции $u_1(x)$ усиливается в точке $x=0$. Можно показать, что

$$u_k(x)\sim O\left(x^{-q_0-(q_0+1)k}\right),x\to 0,\quad k=1,2,3,...\ .$$

Поэтому, решение (4) представляется в виде

$$u(x)\sim x^{-q_0}\left[w_0+\alpha_1\left(\varepsilon x^{-(q_0+1)}\right)+\alpha_2\left(\varepsilon x^{-(q_0+1)}\right)^2+...+\alpha_n\left(\varepsilon x^{-(q_0+1)}\right)^n+...\right],\ x\to 0. \tag{6}$$

где $\alpha_k=const$. Из (6) видно, это решение является асимптотическим приближением задачи (1), только на отрезке $(\varepsilon^{1/(q_0+1)},1]$.

Значит, обычным методом малого параметра мы не решим задачу (1). Поэтому Лайтхилл предложил искать решение задачи (1) в виде:

$$u(\xi)=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2 u_2(\xi)+..., \tag{7}$$
$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2 x_2(\xi)+...\ .$$

Подставляя (7) в (1) для определения известных функций $u_k(\xi), x_k(\xi)$ получаем одно уравнение, такое что, чтобы функции $u_{k+1}(\xi), x_{k+1}(\xi)$ были менее сингулярны, чем $u_k(\xi), x_k(\xi)$.

Обоснованию метода Лайтхилла посвящены работы В.Вазова, Сибуйя и Тахакаси, когда $p(x),q(x),r(x)\in C^{\infty}[0,1]$, ХабетсаР. при $p(x),q(x),r(x)\in C^2[0,1]$.

Притуло, Мартин, Ашер предложили алгебраический вариант метода Лайтхилла. Однако, К.Комсток [2] на примерах, а затем К. Алымкулов [3] в общем случае показали, что в применении метода Лайтхилла возникает лишнее условие:

---

[2] Comstok C., The Poincare-Lighthill perturbation technique and its generalizations // SIAM Review. - 1972. - V.14, № 3. – P. 433-443.

[3] Алымкулов К., Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. - Бишкек: Илим, 1992. - 138 с.

$$x\frac{du_0(x)}{dx}\neq 0,\ x\in[0,1]. \qquad (8)$$

Темпл Дж. на примере предложил идею униформизации задачи (1). К. Алымкулов в общем случае доказал, что проблема (1) эквивалентна к следующей униформизованной задаче:

$$\xi\frac{du(\xi)}{d\xi}=-q(x(\xi))u(\xi)+r(x(\xi)),\ u(1)=b, \qquad (9)$$

$$\xi\frac{dx(\xi)}{d\xi}=x(\xi)+\varepsilon u(\xi),\ x(1)=1.$$

где $\xi\in[\xi_0(\varepsilon),1]=J(\varepsilon),\ 0<\xi_0(\varepsilon),\ \xi_0(0)=0$.

Это уравнение единственным образом определяет решение (3). Конечно, чтобы уравнение (1) и (4) были эквивалентны, должно выполнятся условие: $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\neq 0$. Отметим, что в этом методе устраняется лишнее условие Вазова.

Например, в [3] доказана следующая

Теорема 1.1 Пусть $q(x), r(x)\in C^\infty[0,1], q(0)=m\in N, w_0>0$. Тогда

1) решение задачи (4) представимо в виде (7), который сходится равномерно на отрезке $J(\varepsilon)$;

2) точке $x=0$ соответствует точка $J(\varepsilon)=o\left(\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}\right)>0$;

3) $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\neq 0$ при $\xi\in\left[J(\varepsilon),1\right]$.

Замечание 1. Из условия 3) этой теоремы вытекает, что уравнения (1) и (4) эквивалентны.

Замечание 2. Если $w_0<0$, то $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)=0$ при $0<\xi=\xi_0(\varepsilon)$ и $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\neq 0$ при $(\xi_0(\varepsilon),1]$, т.е. решение задачи (1) не существует на отрезке $[0,1]$.

Туркманов Ж.К. применил метод униформизации к модельному уравнению Лайтхилла в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет слабую особую точку, и к некоторым возмущенным интегро-дифференциальным уравнениям.

Жээнтаева Ж.К. применяя метод структурного сращивания для возмущенного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой построила явные равномерные приближения асимптотики решения начальной задачи Коши.

Зулпукаров А.З. применил метод структурного сращивания для получения асимптотики решений краевых задач бисигулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка, т.е. для уравнений с малым параметром при старших производных, в случае когда невозмущенное уравнение имеет точку поворота (слабую особую точку – модельное уравнение Коула и регулярную особую точку).

Абдуллаева Ч.Х. обобщила метод униформизации к уравнениям вида

$$(x+\varepsilon u'(x))u''(x)+q(x)u'(x)+p(x)u(x)=r(x),$$

$$u(1)=u^{(0)},\ u'(1)=u^{(1)}.$$

где $u^{(0)},u^{(1)}$ – заданные постоянные, $0<\varepsilon<<1$ – малый параметр, $x\in[0,1]$ –независимая переменная, $u(x)$ – неизвестная функция.

Через У обозначено условие: $p(x),q(x),\ r(x)\in C^{\infty}[0,1]$.

В §2.1 мы сталкиваемся с решением алгебраического трансцендентного уравнения

$$\alpha\varepsilon\ln y^{-1}=y, \tag{10}$$

где $0<\varepsilon<<1$, y – неизвестная величина. За нулевое приближение этого уравнения берем $o<y_0=\varepsilon\ln\varepsilon^{-1}<<1,\ \varepsilon\to 0$.

Решение уравнения (10) представляется в виде

$$y=\left[\alpha\varepsilon\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right](1+z), \tag{11}$$

где

$$z=-\mu_2-\mu_1\sum\nolimits_{\substack{i+j=1\\ i,j\geq 0}}^{\infty}a_{ij}\mu_1^i\mu_2^j, \tag{12}$$

здесь a_{ij} – определенные коэффициенты, а μ_1,μ_2 – введенные малые параметры

$$\mu_1=\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1},\ \mu_2=\frac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\ln\ln\frac{1}{\varepsilon},\ \varepsilon\to 0. \tag{13}$$

Причем ряд для z сходится при малых μ_1,μ_2. Из (11)-(12) получаем главную асимптотику решения уравнения (10):

$$y\sim\alpha\varepsilon\ln\frac{1}{\alpha\varepsilon},\quad \varepsilon\to 0. \tag{14}$$

<u>Обзор результатов полученных в данной диссертации</u>

Во второй главе метод погранфункций обобщается для сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла с регулярой особой точкой.

Доказаны следующие теоремы

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие У 2.1 $r_0<0$. Тогда решение задачи (1.1.1) представимо в виде асимптотического ряда

$$u(x)=x_0^{-1}\pi_{-1}(t)+\pi_0(t)+u_0(x)+(\pi_1(t)+u_1(x))x_0+(\pi_2(t)+u_2(x))x_0^2+ \\ +\ldots+(\pi_n(t)+u_n(x))x_0^n+R_{n+1}(x,\mu)\mu^{n+1}, \tag{15}$$

где

$$\left|R_n(x,\mu)\right| \le l, \forall x\in\left[0,1\right], \varepsilon x_0^{-1} = (\ln\frac{1}{\varepsilon})^{-1} = \mu, \quad x = x_0 t\,,\ \varepsilon x_0^{-1} = \frac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} = \mu,\ x = x_0 t\,,$$

где $x_0 = x_0(\varepsilon)$ решение уравнения $\dfrac{\varepsilon\,(\ln x_0^{-1})}{x_0} = 1$.

Пример 2.1

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x) = r_0,\ u(1) = b. \tag{16}$$

Асимптотика решения задачи (16) представляется в виде

$$u(x) = x_0^{-1}\pi_{-1}(t) + b + r_0 + O(x_0),\ \varepsilon\to 0. \tag{17}$$

Теорема 2.2 Пусть выполнено условие У и $q_0 = 1/2$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде асимптотического ряда

$$u(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + (\pi_1(t) + u_1(x))\mu + (\pi_2(t) + u_2(x))\mu^2 + \ldots + (\pi_n(t) + u_n(x))\mu^n + \ldots,$$
$$t = x/\mu^2,\quad \varepsilon = \mu^3, \tag{18}$$

Пример 2.2

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = x,\ u(1) = b, \tag{19}$$

Асимптотика решения задачи (19) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t) + \frac{2}{3}x + \pi_0(t) + O(\mu),\ x = \mu^2 t,\ \varepsilon = \mu^3,\ \mu\to 0.$$

Теорема 2.3 Пусть выполнено условие У и $q_0 = p/q$, $p,q\in N; p<q.$ Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде асимптотического ряда

$$u(x) = \mu^{-p}\pi_{-p}(t) + \ldots + \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + (\pi_1(t) + u_1(x))\mu + (\pi_2(t) + u_2(x))\mu^2 +$$
$$+ \ldots + (\pi_n(t) + u_n(x))\mu^n + \ldots,$$
$$t = x/\mu^q,\quad \varepsilon = \mu^{p+q}, \tag{20}$$

где $u_k(x)\in C^{(\infty)}[0,1],\quad \Pi_k(t)\in C^{(\infty)}[0,1/\mu]$.

Пример 2.3

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x) + \frac{p}{q}u(x) = x,\ u(1) = b. \tag{21}$$

Асимптотика решения задачи (21) можно записать в виде

$$u(x) = \frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t) + \frac{q}{p+q}x + \pi_0(t) + O(\mu),\ x = \mu^q t,\ \varepsilon = \mu^{p+q},\ \mu\to 0.$$

Теорема 2.4 Пусть выполнено условие У и $q_0 = 1$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде ряда

$$u(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + u_0(x) + (\pi_1(t) + u_1(x))\mu + (\pi_2(t) + u_2(x))\mu^2 + \ldots + (\pi_n(t) + u_n(x))\mu^n + \ldots,$$
$$t = x/\mu,\quad \varepsilon = \mu^2, \tag{22}$$

где $u_k(x)\in C^{\infty}[0,1]$, $\Pi_k(t)\in C^{\infty}[0,1/\mu]$. Отметим, что $\pi_k(t)=\pi_k(t,\mu)$, т.е. $\pi_k(t)$ зависит также от μ, но эту зависимость мы для краткости не пишем.

Пример 2.4: Рассмотрим уравнение

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x)+u(x)=1,\quad u(1)=b. \tag{23}$$

Это уравнение интегрируется точно

$$u(x)=\varepsilon^{-1}\left[-x+\sqrt{x^2+2b_0\varepsilon+\varepsilon^2 b^2+2\varepsilon x}\right],$$

где $b_0=b-1$. Если $b_0>0$, то решение задачи (23) существует на отрезке $[0,1]$, что подтверждается теоремой 2.

Уравнение для $\pi_{-1}(t)$ имеет вид

$$(t+\pi_{-1}(t))\pi'_{-1}(t)+\pi_{-1}(t)=0,\quad \pi_{-1}(1/\mu)=b\mu.$$

Решение этой задачи представляется в виде

$$\pi_{-1}(t)=-t+\sqrt{t^2+2b+b^2\mu^2},$$

Уравнение для $u_0(x)$ имеет решение $u_0(x)=1\in C^{\infty}[0,1]$. Далее

$$\pi_0(t)=\frac{-\pi_{-1}(t)+b\mu}{t+\pi_{-1}(t)},\quad u_k(x)=0,\quad (k=1,2,\ldots),$$

причем $b=b_0$. Асимптотика решений задачи (23) представляется в виде

$$u(x)=\frac{\pi_{-1}(x/\mu)}{\mu}+1+\pi_0(x/\mu)+o(\mu),\quad (\forall x\in[0,1]),\quad \mu\to 0.$$

Теорема 2.5 Пусть выполнено условие У и $q_0=m,\ m\in N$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде ряда

$$\begin{aligned}u(x)&=\mu^{-m}\pi_{-m}(t)+\mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t)+\ldots+\mu^{-2}\pi_{-2}(t)+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\pi_0(t)+\\&u_0(x)+(\pi_1(t)+u_1(x))\mu+(\pi_2(t)+u_2(x))\mu^2+\ldots+(\pi_n(t)+u_n(x))\mu^n+\ldots,\end{aligned} \tag{24}$$

где $t=x/\mu,\quad \varepsilon=\mu^{m+1}, u_k(x)\in C^{\infty}[0,1],\quad \Pi_k(t)\in C^{\infty}[0,1/\mu]$.

Пример 2.5

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x)+mu(x)=\beta x,\ u(1)=b. \tag{25}$$

Асимптотика решения задачи (25) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t)+\frac{\beta}{1+m}x+\pi_0(t)+O(\mu),\ x=\mu^m t,\ \varepsilon=\mu^{m+1},\ \mu\to 0.$$

Теорема 2.6 Пусть выполнено условие У и $q_0=p/q,\ p,q\in N; p>q$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде ряда

$$\begin{aligned}u(x)&=\mu^{-m}\pi_{-m}(t)+\mu^{-m+1}\pi_{-m+1}(t)+\ldots+\mu^{-2}\pi_{-2}(t)+\mu^{-1}\pi_{-1}(t)+\pi_0(t)+\\&u_0(x)+(\pi_1(t)+u_1(x))\mu+(\pi_2(t)+u_2(x))\mu^2+\ldots+(\pi_n(t)+u_n(x))\mu^n+\ldots,\end{aligned} \tag{26}$$

где $t=x/\mu^q$, $\varepsilon=\mu^{p+q}$, $u_k(x)\in C^{\infty}[0,1],\quad \Pi_k(t)\in C^{\infty}[0,1/\mu]$.

Пример 2.6

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x)+\frac{p}{q}u(x)=x,\ u(1)=b,\ p>q. \tag{27}$$

Асимптотика решения задачи (27) можно записать в виде

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t)+\frac{q}{p+q}x+\pi_0(t)+O(\mu),\ x=\mu^q t,\ \varepsilon=\mu^{p+q},\ \mu\to 0.$$

В третьей главе разработан новый асимптотический метод Пуанкаре для сингулярно возмущенной задачи Лайтхилла с регулярной особой точкой.

Доказаны следующие теоремы

Теорема 3.1 Пусть выполнено условие У и $q_0=1,\ a>0$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде обобщенного асимптотического ряда Пуанкаре

$$u(x)=\frac{1}{\mu}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+\ldots+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right], \tag{28}$$

где $R_n\left(x/\mu,\mu\right)=O(1),\ \forall t\in\left[0,\mu\right]$.

Пример 3.1

$$(x+\varepsilon y(x))y'(x)+y(x)=1, u(0)=a\neq 0. \tag{29}$$

Асимптотика решения задачи (29) имеет вид

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\mu}\left[-t+\sqrt{t^2+\mu^2}+\frac{\mu t}{\sqrt{t^2+\mu^2 a^2}}-\frac{\mu^2 t}{2\sqrt{\left(t^2+\mu^2 a^2\right)^3}}+O\left(\mu^3\right)\right],\ \mu\to 0. \tag{30}$$

Теорема 3.2 Пусть выполнено условие У и $q_0=m,\ m\in N$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде обобщенного асимптотического ряда Пуанкаре

$$u(x)=\frac{1}{\mu^m}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+\ldots+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right], \tag{31}$$

где $R_n\left(x/\mu,\mu\right)=O(1),\forall t\in\left[0,\mu\right],\varepsilon^{m+1}=\mu\ \forall t\in\left[0,\mu\right]$.

Пример 3.2

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x)+mu(x)=\beta x, u(0)=a>0,\ \beta\in R. \tag{32}$$

Асимптотика решения этой задачи запишется в виде

$$y(x)=\frac{1}{\mu^m}\left[z_0(t)+\mu^n z_n(t)+O\left(\mu^{m+1}\right)\right],\ x=\mu t,\ \varepsilon=\mu^{m+1},\mu\to 0,$$

где $z_0(t)$ определяется неявно из соотношения

$$t=c_0 z_0^{-1/m}-\frac{1}{1+m}z_0,\ c_0=\alpha\mu^{1+m},\ \alpha=\frac{1}{1+m}a^{1+\frac{1}{m}}.$$

Причем $\left|z_m(t)\right|\le l.$

Теорема 3.3 Пусть выполнено условие У и $q_0=p/q,\ p,q\in N,\ p>q,\ a>0$. Тогда, решение задачи (1.1.1) представляется в виде обобщенного асимптотического ряда Пуанкаре

$$u(x) = \frac{1}{\mu^{p+q}}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right) + \mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right) + \ldots + \mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right) + \mu^{n+1} R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right], \tag{33}$$

где $\quad R_n\left(x/\mu, \mu\right) = O(1), \forall t \in \left[0, \mu\right], \varepsilon^{p+q} = \mu \ \forall t \in \left[0, \mu\right].$

Пример 3.3

$$x + \varepsilon u(x) u'(x) + \frac{p}{q} u(x) = \beta x, \ u(0) = a > 0, \ \beta \in R, \ p > q, \ p, q \in N. \tag{34}$$

Асимптотика решения этой задачи запишется в виде

$$y(x) = \frac{1}{\mu^{p+q}}\left[z_0(t) + \mu^{p+q} z_{p+q}(t) + O\left(\mu^{p+q+1}\right)\right], \ x = \mu t, \ \varepsilon = \mu^{p+q+1}, \mu \to 0,$$

где $z_0(t)$ определяется неявно из соотношения

$$t = c_0 z_0^{-q/(p+q)} - \frac{q}{p+q} z_0, \ c_0 = \alpha \mu^{1+p+q}, \ \alpha = \frac{q}{p+q} a^{1+\frac{q}{p}}.$$

Причем $\left|z_{p+q}(t)\right| \le l.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан аналог метода погранфункций для сингулярно возмущенного модельного уравнения Лайтхилла, с регулярными особыми точками.

2. Разработан новый аналитический метод равномерного разложения для сингулярно возмущенного модельного уравнения Лайтхилла, который дает обобщенный асимптотический ряд Пуанкаре.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс второго порядка в регулярной особой точке [Текст] /А.А. Халматов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Вып. 43. – Бишкек, 2010. – С. 89-94.
2. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс порядка три вторых в регулярной особой точке/ К. Алымкулов, А.А. Халматов // Вестник КНУ. – Бишкек, 2011. – С.39-42.
3. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс третьего порядка в регулярной особой точке [Текст] /А.А. Халматов // Вестник КНУ. – Бишкек, 2011. – С. 303-307.
4. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Математические заметки. Россия. – Москва, 2012. – С.95-96. – Impackt factor 0,4.
5. Khalmatov, A.A. A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point [Text] / K. Alymkulov, A.A. Khalmatov // ISSN 0001-4346, Mathematical Notes, Vol. 92, No. 6. – Moscow, 2012. – P. 117–121. – Impackt factor 0,4.
6. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке[Текст] /А.А. Халматов//Вестник ОшГУ. – Вып 3. – Ош, 2012. – С.157-162.
7. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс дробного порядка в регулярной особой точке [Текст]/А.А. Халматов // Вестник ОшГУ. . – Вып. 1. – Ош, 2013. – С.285-290.
8. Халматов, А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс порядка четыре третьих в регулярной особой точке [Текст] /А.А. Халматов //Вестник КУУ. Наука. Образование. Техника. – Вып. 4. – Ош, 2013. – С. 34-38.

9. Халматов, А.А. Метод продолжения параметров для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой [Текст] /К. Алымкулов, Б. Азимов, А.А. Халматов // Вестник ОшГУ. – Вып. 3. – Ош, 2014. – С.17-22.

10. Халматов, А.А. Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой[Текст] /К. Алымкулов, А.А. Халматов //Труды международной научной конференции посвященной 20-летию образования Кыргызско-Узбекского университета. – Вып. 4. – Ош, 2014. – С. 119-121.

11. Khalmatov, A.A. About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill [Text] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov *-International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR*) Volume 3, Issue X, July 2015. – P.54-64. – Impackt factor 4.433

Халматов Анвар Авазовичтин 01.01.02 – «Дифференциалдык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаттык окумуштуулук даражасына изденүү максатында жазылган «Сингулярдык козголгон өзгөчө чекиттүү теңдеменин чечиминин асимптотикасы» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: асимптотикалык катар, сингулярдык козголгон теңдеме, регулярдуу өзгөчө чекит, чекаралык функция усулу, униформизация усулу, структуралык жалгаштыруу усулу, математикалык индукция усулу.

Изилдөөнүн обьектиси. Сингулярдуу козголгон, регулярдуу өзгөчө чекиттүү биринчи тартиптеги Лайтхилдин теңдемесинин Коши маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикасын тургузуу.

Изилдөөнүн максаты:

– биринчи тартиптеги сингулярдуу козголгон регулярдуу өзгөчө чекиттүү Лайтхиллдин теңдемеси үчүн Коши маселесин асимптотикасын тургузуу үчүн жалпыланган чекаралык функция методун иштеп чыгуу;

– Лайтхиллдин теңдемеси үчүн тиешелүү козголгон теңдемесинин өзгөчө чекитте коюлган жаны Коши маселесин изилдөө;

Изилдөөнүн методдору: чекаралык функция усулу, униформизация усулу, структуралык жалгаштыруу усулу, математикалык индукция усулу, өзгөчө интегралдарды баалоо усулу.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары:

Биринчи жолу биринчи тартиптеги сингулярдуу козголгон регулярдуу өзгөчө чекиттүү Лайтхиллдин моделдик теңдемеси үчүн Коши маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы жалпыланган чекаралык функция усулу менен тургузулду. Чекаралык функция усулу ушул убакка чейин бир гана кичине параметри эң жогорку тартиптеги туундунун алдында турган өзгөчө козголгон дифференциалдык теңдемелер үчүн гана колдонулуп келинген.

Структуралык жалгаштыруу жана жалпыланган чекаралык функция методдорун жалпылаган жаны метод иштелип чыккан жана ал жаны коюлган маселенинин чечиминин бир калыптагы Пуанкаре түрүндөгү асимптоикалык катарын тургузууга колдонулган.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Халматова Анвара Авазовича на тему “**Об асимптотике решения сингулярно возмущенного уравнения с особыми точками**” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление”.

Ключевые слова: асимптотический ряд, асимптотический ряд Пуанкаре, сингулярное возмущенное уравнение, регулярная особая точка, метод погранфункций, метод униформизации, метод структурного сращивания, метод математической индукции.

Объект исследования. Построение равномерной асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой.

Цель исследования:

– для построения равномерных представлений асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой разработать обобщенный метод погранфункций;

– изучить новую проблему для уравнения Лайтхилла, когда начальная задача ставится в особой точке соответствующего невозмущенного уравнения.

Методы исследования: метод погранфункций, метод униформизации, метод структурного сращивания, метод математической индукции, метод оценки сингулярных интегралов.

Научная новизна:

1. Впервые получены равномерные асимптотические приближения модельного уравнения Лайтхилла с помощью обобщенного метода погранфункций. Отметим, что ранее метод погранфункций применялись только для уравнений с малым параметром при старших производных в случае асимптотической устойчивости решения быстрого времени.

2. Создан новый метод, который обобщает метод структурного сращивания и обобщенный метод погранфункций, применимый для получения равномерного асимптотического разложения типа Пуанкаре для решения новой постановки задачи.

SUMMARY

Dissertation “**About on an asymptotic of the solution of the singularly perturbed equation with singular points**» of Khalmatov Anvar Avazovich for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.02 – «Differential equations, dynamical systems and optimal control»

Key words: asymptotic series, the regular singular point, the singularly perturbed equation, method of boundary functions, method of uniformization, method of structural matching, method of mathematical induction.

Object of research. The construction of the uniform asymptotical solution of the Cauchy problem for first order singular perturbed equation of Lighthill with the regular singular point.

Research aim:

– for construction of the uniform representative of the asymptotical solution of the Cauchy problem for first order singular perturbed equation of Lighthill to develop generalized method of boundary functions;

– investigate new problem for the equation of Lighthill when the Cauchy problem will set on the singular point of the corresponding unperturbed equation.

Research methods: the method of boundary functions, the method of uniformization, the method of structural matching, the method of mathematical induction, The estimation of the singulary integrals.

Scientific novelty:

– first time by method of the generalized boundary function was constructed the uniform approximation of the solution of the Cauchy problem for first order singular perturbed equation of Lighthill with regular singular point;

– develop new method, that is generalized as method of boundary functions and as the method of structural matching and this one was applied for construction of the uniform asymptotical expansion of the new problem.