Национальная академия наук Кыргызской Республики

ISSN 0130-6553

Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям

Выпуск 47

Бишкек • Илим • 2014

ЗАВЕРЯЮ
Ученый секретарь
ОшТУ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Лемешевский С.В., Матус П.П.* Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Сибирск. матем. журн. – 1988. – Т. 39, № 4. – С. 954 - 962.
2. *Нахушева В.А.* Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой // Автореф. дисс. … докт. физ.-мат. наук. – Таганрог. 2008. – 30 с.
3. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
4. *Жегалов В.И.* Некоторые задачи для уравнения смешанно-составного типа в бесконечной области // Тр. семинара по краевым задачам. – 1972. – Вып. 9. – С. 75 – 85.
5. *Крикунов Ю.М.* О некоторых задачах для уравнения М.А. Лаврентьева // Изв. вузов. Математика. – 1961. – №6(25). – С. 60-70.
6. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
7. *Саадалов Т.Ы.* О задаче сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка // Изв. Томск. политехн. ун-та. Матем. и мех. Физика. – 2014. – Т. 325, №2. – С. 22 - 28.
8. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
9. *Асылбеков Т.Д.* Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2002. – 121 с.

Т.Ы. САДАЛОВ (г. Ош)

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка, когда на линии сопряжения задаются нелокальные условия, содержащие интегральные члены.

1. Постановка задачи. Задачи с нелокальным условием сопряжения для уравнений в частных производных часто используется в качестве математической модели процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [1, 2].

В работе рассматриваются краевые задачи для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения на общей границе рассматриваемых областей.

Пусть D означает прямоугольник, с вершинами $A_0(0,h)$, $A_1(0,-h_1)$, $B_1(\ell,-h_1)$, $B_0(\ell,h)$ $(h,\ h_1,\ell>0)$, а $D_1 = D\cap(y>0)$, $D_2 = D\cap(y<0)$. $J=\{(x,y): 0<x<\ell,\ y=0\}$ - общая граница областей D_1 и D_2. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s$ $(r=0,1,\dots,n;\ s=0,1,\dots,m)$.

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$L_1(u)\equiv u_{xxyy} + a_1(x,y)u_{xxy} + a_2(x,y)u_{xyy} + b_1(x,y)u_{xx} + b_2(x,y)u_{xy} + \\ + b_3(x,y)u_{yy} + c_1(x,y)u_x + c_2(x,y)u_y + d(x,y)u = f_1(x,y), \tag{1}$$

граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{2}$$

$$u(x,h)=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{3}$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$L_2(u)\equiv u_{xxxy} + \alpha_1(x,y)u_{xxx} + \alpha_2(x,y)u_{xxy} + \beta_1(x,y)u_{xx} + \\ + \beta_2(x,y)u_{xy} + \gamma_1(x,y)u_x + \gamma_2(x,y)u_y + \delta(x,y)u = f_2(x,y), \tag{4}$$

граничным условиям

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ u_{xx}(0,y)=\chi_3(y),\ -h_1\le y\le 0 \tag{5}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,+0)=\rho(x)u_y(x,-0)+\int\theta(x,\xi)u_y(\xi,-0)d\xi + r(x), \tag{6}$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i\ (i=1,2)$, $b_i, \chi_i\ (i=1,2,3)$, $\varphi_i, d, \delta, \psi, \rho, \theta, r$ - заданные функции, причем

$$a_i,\ c_i(i=1,2),\ b_j(j=\overline{1,3}),\ d,\ a_{1xx},\ a_{2xy},\ b_{1x},\ b_{2x},\ b_{3y},\ c_{1x},\ c_{2y}\in C(\overline{D_1}),$$
$$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2),\delta,f_2,\alpha_{1xx},\alpha_{2xx},\beta_{1x},\beta_{2xy},\gamma_{1x},\gamma_{2x},\theta_{xx}\in C(\overline{D_2}),\rho,r\in C^2[0,\ell], \tag{7}$$
$$\varphi_1,\varphi_2\in C^2[0,h],\ \psi\in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3\in C^1[-h_1,0],$$
$$\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \varphi_2(0)=\chi_2(0),\ \varphi_2(h)=\psi(0).$$

Отметим, что прямые $x=const$ и $y=const$ являются двукратными характеристиками уравнения (1), а для уравнения (4) прямая $y=const$ является трехкратной, прямая $x=const$ - простой характеристикой. Таким образом, уравнение (1) в области D_1 имеет две двукратные характеристики, а уравнение (4) в области D_2 имеет одну трехкратную и одну простую характеристику. Так как условия сопряжения задаются на общей границе J, то уравнения (1) и (4) являются уравнения смешанного типа [3].

Задача 1 в случае, когда $\rho(x)\equiv 1,\ \theta(x,\xi)\equiv 0,\ r(x)\equiv 0$, рассмотрена в [4].

Введем следующие обозначения:
$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,$$
$$u_y(x,+0)=\nu_1(x),\ u_y(x,-0)=\nu_2(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{8}$$
где $\tau(x),\ \nu_1(x),\ \nu_2(x)$ - пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из второго условия (6) получим
$$\nu_1(x)=\rho(x)\nu_2(x)+\int\limits_0^x\theta(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi+r(x). \tag{9}$$

Рассмотрим задачу Гурса для уравнения (1) с условиями (2) и
$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,+0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le\ell. \tag{10}$$

Решение этой задачи построим с помощью функции Римана. Для этого интегрируя тождество
$$\vartheta L_1(u)-uL_1^*(\vartheta)=\{[\vartheta_{\eta\eta}-(a_1\vartheta)_\eta+b_1\vartheta]u_\xi-$$
$$-[\vartheta_{\eta\eta\xi}-(a_1\vartheta)_{\eta\xi}-(a_2\vartheta)_{\eta\eta}+(b_1\vartheta)_\xi+(b_2\vartheta)_\eta-c_1\vartheta]u\}_\xi-$$
$$-\{\vartheta_\eta u_{\xi\xi}+(a_2\vartheta)_\eta u_\xi+(b_3\vartheta)_\eta-[u_{\xi\xi\eta}+a_1u_{\xi\xi}+a_2u_{\xi\eta}+b_2u_\xi+b_3u_\eta+c_2u]\vartheta\}_\eta$$
по области $D_1^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,\ 0<\eta<y\}$ и используя формулу Грина, будем иметь:
$$\iint\limits_{D_1^*}\vartheta L_1(u)-uL_1^*(\vartheta)d\xi d\eta=\oint\limits_{\partial D_1^*}\{\vartheta_\eta u_{\xi\xi}+(a_2\vartheta)_\eta u_\xi+(b_3\vartheta)_\eta-$$
$$-[u_{\xi\xi\eta}+a_1u_{\xi\xi}+a_2u_{\xi\eta}+b_2u_\xi+b_3u_\eta+c_2u]\vartheta\}d\xi+\{[\vartheta_{\eta\eta}-(a_1\vartheta)_\eta+b_1\vartheta]u_\xi-$$
$$-[\vartheta_{\eta\eta\xi}-(a_1\vartheta)_{\eta\xi}-(a_2\vartheta)_{\eta\eta}+(b_1\vartheta)_\xi+(b_2\vartheta)_\eta-c_1\vartheta]u\}d\eta,$$
где
$$L_1^*(u)\equiv\vartheta_{\eta\eta\xi\xi}-(a_1\vartheta)_{\eta\xi\xi}-(a_2\vartheta)_{\eta\eta\xi}+(b_1\vartheta)_{\xi\xi}+(b_2\vartheta)_{\eta\xi}+(b_3\vartheta)_{\eta\eta}-(c_1\vartheta)_\xi-(c_1\vartheta)_\eta+d\vartheta.$$

Введем функцию Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, которая определяется следующим образом:

$$L_1^*(\vartheta)=0,\ (\xi,\eta)\in D_1^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,\ 0<\eta<y\},$$
$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,$$
$$\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\omega_1(\xi,\eta;x),$$
$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=0,$$
$$\vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\omega_2(\xi,\eta;y),$$
где $\omega_1(\xi,\eta;x),\ \omega_2(\xi,\eta;y)$ определяются как решения задач Коши
$$\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,y;x,\eta)-[a_1(x,\eta)\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)]_\eta+b_1(x,\eta)\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)=0,\ 0\le\eta\le y,$$
$$\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1,$$
$$\vartheta_{\xi\xi\eta}(x,y;\xi,y)-[a_2(\xi,y)\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)]_\xi+b_3(\xi,y)\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)=0,\ 0\le\xi\le x,$$
$$\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_{\eta\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1.$$
Решение такой задачи существует и единственно [3]. Вычисляя криволинейные интегралы по границам области D_1^* и учитывая свойства функции Римана, будем иметь следующее представление:
$$u(x,y)=A_1(x,y)\varphi_1(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_2(y)+\int\limits_0^y[B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta)-$$
$$-C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta+\int\limits_0^x[\vartheta(x,y;\xi,0)\nu_1''(\xi)-D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi)+$$
$$+a_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\nu_1'(\xi)-E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi)++b_3(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\nu_1(\xi)- \tag{11}$$
$$-F_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^y\vartheta(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\xi,$$
где
$$A_1(x,y)=\vartheta_{\eta\xi}(x,y;0,y)-a_2(0,y)\vartheta_\eta(x,y;0,y),$$
$$B_1(x,y;\eta)=\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta(x,y;0,\eta),$$
$$C_1(x,y;\eta)=\vartheta_{\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)-$$
$$-a_2(0,\eta)\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_\xi(x,y;0,\eta)+$$
$$+[b_2(0,\eta)-a_{1\xi}(0,\eta)-2a_{2\eta}(0,\eta)]\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)+$$
$$+[b_{1\xi}(0,\eta)-a_{1\xi\eta}(0,\eta)-a_{2\eta\eta}(0,\eta)+b_{2\eta}(0,\eta)-c_1(0,\eta)]\vartheta(x,y;0,\eta),$$
$$D_1(x,y;\xi)=\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)-a_1(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$$
$$E_1(x,y;\xi)=a_2(\xi,0)\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)+[a_{2\eta}(\xi,0)-b_2(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0),$$
$$F_1(x,y;\xi)=b_3(\xi,0)\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)+[b_{3\eta}(\xi,0)-c_2(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0),$$
а $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (1) [3].

Используя условие (3), из (9) получаем соотношение для функции $\tau(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области D_1:

$$\int_0^{\ell}[\vartheta(x,h;\xi,0)\nu_1''(\xi)-D_1(x,h;\xi)\tau''(\xi)+a_2(\xi,0)\vartheta(x,h;\xi,0)\nu_1'(\xi)+ \tag{12}$$

$$-E_1(x,h;\xi)\tau'(\xi)+b_1(\xi,0)\vartheta(x,h;\xi,0)\nu_1(\xi)-F_1(x,h;\xi)\tau(\xi)]d\xi=\Phi(x),$$

где

$$\Phi(x)=\psi(x)-A_1(x,h)\varphi_1(h)+\vartheta_\eta(x,h;0,h)\varphi_2(h)-$$

$$-\int_0^h[B_1(x,h;\eta)\varphi_2(\eta)-C_1(x,h;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta-\int_0^x d\xi\int_0^h\vartheta(x,h;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям в (12), учитывая свойства функции $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ и условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\tau'(0)=\varphi_2(0),\ \nu_1(0)=\varphi_1'(0),\ \nu_1'(0)=\varphi_2'(0),$$

имеем

$$D_{1\xi}(x,h;x)\tau(x)-\vartheta_\xi(x,h;x,0)\nu_1(x)=\int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+ \tag{13}$$

$$+\int_0^x H_2(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi+\Phi_1(x),$$

где $H_1(x,\xi)=D_{1\xi\xi}(x,h;\xi)-E_{1\xi}(x,h;\xi)+F_1(x,h;\xi),$

$$H_2(x,\xi)=-\vartheta_{\xi\xi}(x,h;\xi,0)+a_2(\xi,0)\vartheta_\xi(x,h;\xi,0)+[a_{2\xi}(\xi,0)-b_3(\xi,0)]\vartheta(x,h;\xi,0),$$

$$\Phi_1(x)=\Phi(x)-[\vartheta_\xi(x,h;0,0)-a_2(0,0)\vartheta(x,h;0,0)]\phi_1'(0)+\vartheta(x,h;0,0)\phi_2'(0)+$$

$$+[D_{1\xi}(x,h;0)-E_1(x,h;0)]\phi_1(0)-D_1(x,h;0)\phi_2(0).$$

С другой стороны, с учетом постановки задачи 1 и устремляя y к нулю, из уравнения (4) получаем

$$\nu_2'''(x)+\alpha_1(x,0)\tau'''(x)+\alpha_2(x,0)\nu_2''(x)+\beta_1(x,0)\tau''(x)+$$

$$+\beta_2(x,0)\nu_2'(x)+\gamma_1(x,0)\tau'(x)+\gamma_2(x,0)\nu_2(x)+\delta(x,0)\tau(x)=f_2(x,0).$$

Интегрируя это уравнение и учитывая условия согласования $\nu_2(0)=\chi_1'(0),\ \nu_2'(0)=\chi_2'(0),\ \nu_2''(0)=\chi_3'(0)$, имеем

$$\nu_2(x)+\alpha(x,0)\tau(x)=\int_0^x H_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x H_4(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi+g_1(x), \tag{14}$$

где

$$H_3(x,\xi)=\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{1\xi\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{1\xi\xi}(\xi,0)+\gamma_{1\xi}(\xi,0)-\delta(\xi,0)]-$$

$$-(x-\xi)[3\alpha_{1\xi\xi}(\xi,0)-2\beta_{1\xi}(\xi,0)+\gamma_1(\xi,0)]+3\alpha_{1\xi}(\xi,0)-\beta_1(\xi,0),$$

$$H_4(x,\xi)=-\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)-\beta_{2\xi}(\xi,0)+\gamma_2(\xi,0)]+$$

$$+(x-\xi)[2\alpha_{2\xi}(\xi,0)-\beta_2(\xi,0)]-\alpha_2(\xi,0),$$

$$g_1(x)=\{\frac{1}{2}[\alpha_{1xx}(0,0)-\beta_{1x}(0,0)]x^2-[2\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)]x+\alpha_1(0,0)\}\chi_1(0)-\{\frac{1}{2}[\alpha_{1x}(0,0)-$$

$$\beta_1(0,0)]x^2-\alpha_1(0,0)x\}\chi_2(0)+\frac{1}{2}\alpha_1(0,0)\chi_3(0)x^2-\{\frac{1}{2}[\alpha_{2x}(0,0)-\beta_2(0,0)]x^2-$$

$$\alpha_2(0,0)x-1\}\chi_1'(0)+[x+\frac{1}{2}\alpha_2(0,0)x^2]\chi_2'(0)+\frac{1}{2}\chi_3'(0)x^2+\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2f_2(\xi,0)d\xi.$$

Обращая интегральное уравнение (14) относительно $\nu_2(x)$, приходим к следующему соотношению:

$$\nu_2(x)=-\alpha_1(x,0)\tau(x)+\int_0^x H_5(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g_2(x), \tag{15}$$

где $H_5(x,\xi)=H_4(x,\xi)-\alpha_1(\xi,0)R(x,\xi)+\int_\xi^x R(x,t)H_4(t,\xi)dt,\ \ g_2(x)=g_1(x)+$

$+\int_0^x R(x,\xi)g_1(\xi)d\xi$, а $R(x,\xi)$ - резольвента ядра $H_4(x,\xi)$.

С учетом (15) из условия сопряжения (9) имеем

$$\nu_1(x)=-\alpha_1(x,0)\rho(x)\tau(x)+\int_0^x H_6(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g_3(x), \tag{16}$$

где $H_6(x,\xi)=\rho(x)H_5(x,\xi)-\theta(x,\xi)\alpha_1(\xi,0)+\int_\xi^x\theta(x,t)H_5(t,\xi)dt,\ \ g_3(x)=\rho(x)g_2(x)+$

$+\int_0^x\theta(x,\xi)g_2(\xi)d\xi+r(x).$

Исключив $\nu_1(x)$ из соотношений (13) и (16), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau_1(x)=\int_0^x K(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+g(x), \tag{17}$$

где

$$\rho_1(x)=1+[\alpha_1(x,0)\rho(x)-2a_1(x,0)]\vartheta_\xi(x,h;x,0)-\int_0^h b_1(x,t)\vartheta_\xi(x,h;x,t)dt,$$

$$K(x,\xi)=H_1(x,\xi)-\alpha_1(\xi,0)\rho(\xi)H_2(x,\xi)+\vartheta_\xi(x,h;x,0)H_6(x,\xi)+$$

$$+\int_\xi^x H_2(x,t)H_6(t,\xi)dt,\ \ g(x)=\Phi_1(x)+\vartheta_\xi(x,h;x,0)g_3(x)+\int_0^x H_2(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Нетрудно заметить, что если

$$\forall x\in[0,\ell]:\ \rho_1(x)\neq 0, \tag{18}$$

то уравнение (13) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

В частности, если $\alpha_1(x,0)\rho(x)-2a_1(x,0)=0,\ b_1(x,y)=0$, то $\rho(x)=1$, и, следовательно, условие (18) выполняется.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall(x,y)\in D_1: b_1(x,y)-a_{1x}(x,y)\leq 0, \tag{19}$$

то $\quad\forall\eta\in[0,h):\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)<0.$ (20)

Тогда нетрудно заметить, что если

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) \geq 0, \forall x \in [0,\ell] : \alpha_1(x,0)\rho(x) - 2a_1(x,0) \leq 0, \tag{21}$$

то $\forall x \in [0,\ell] : \rho(x) \geq 1$.

Следовательно, при выполнении условий (19) и (21) интегральное уравнение (17) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив $\tau_1(x)$ из уравнения (17), будем знать и $\nu_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 имеет вид (8), а в области D_2 определяется по формуле

$$u(x,y) = \vartheta_{1\xi\xi}(x,y;x,0)\tau_1(x) + \int_0^x A_3(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^y [\vartheta_1(x,y;0,\eta)\chi_3'(\eta) + \alpha_1(0,\eta)\vartheta_1(x,y;0,\eta)\chi_3(\eta) - B_3(x,y;\eta)\chi_2'(\eta) + \tag{22}$$

$$+C_3(x,y;\eta)\chi_3(\eta) + D_3(x,y;\eta)\chi_1'(\eta) + E_3(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta,$$

где $A_3(x,y;\xi) = \vartheta_{1\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0) - \alpha_2(\xi,0)\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,0) + [\beta_2(\xi,0) -$

$-2\alpha_{2\xi}(\xi,0)]\vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,0) + [\beta_{2\xi}(\xi,0) - \gamma_2(\xi,0) - \alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$

$B_3(x,y;\eta) = \vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) - \alpha_2(0,\eta)\vartheta_1(x,y;0,\eta),$

$C_3(x,y;\eta) = \alpha_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) + [a_{1\xi}(0,\eta) - \beta_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$

$D_3(x,y;\eta) = \vartheta_{1\xi\xi}(x,y;0,\eta) - \alpha_2(0,\eta)\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) - [\alpha_{2\xi}(0,\eta) - \beta_2(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$

$E_3(x,y;\eta) = \alpha_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;0,\eta) + [2\alpha_{1\xi}(0,\eta) - \beta_1(0,\eta)]\times$

$\times\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) + [\alpha_{1\xi\xi}(0,\eta) - \beta_{1\xi}(0,\eta) + \gamma_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$

а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана [5] для уравнения (4).

ТЕОРЕМА 1. Если выполняются условия (7), (19) и (21), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (11) и (22) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушева В.А.* Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестн. СамГТУ. Сер. ФМН. – 2006. – Вып. 42. – С. 11-34.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
3. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
4. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
5. *Асылбеков Т.Д.* Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2002. – 121 с.

А.Б. УРДАЛЕТОВА (г. Бишкек)

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЯТИДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1. К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится большинство задач вычислительной математики. Для этих задач характерным является большое число уравнений в соответствующей системе, что исключает возможность использования для ее решения известного из курса линейной алгебры метода Крамера. В работе [1] для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей авторами был предложен алгоритм, сочетающий рекуррентную структуру метода Гаусса с формулами Крамера (в дальнейшем KG-алгоритм). В предлагаемой работе подобный подход используется для решения систем уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов.

Рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей:

$$\begin{cases} c_1x_1 + d_1x_2 + e_1x_3 = f_1; \\ b_2x_1 + c_2x_2 + d_2x_3 + e_2x_4 = f_2; \\ a_kx_{k-2} + b_kx_{k-1} + c_kx_k + d_kx_{k+1} + e_kx_{k+2} = f_k; \quad k = 3,4,\dots,N-2; \\ a_{N-1}x_{N-3} + b_{N-1}x_{N-2} + c_{N-1}x_{N-1} + d_{N-1}x_N = f_{N-1}; \\ a_Nx_{N-2} + b_Nx_{N-1} + c_Nx_N = f_N. \end{cases} \tag{1}$$

Первые итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) были разработаны еще в XIX веке.

Это широко известные методы простой итерации такие, как метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя.

Однако с появлением в XX столетии ЭВМ и их интенсивное проникновение, в первую очередь, в научно-практическую деятельность человека, привело к резкому ускорению разработок и модификаций разнообразных вычислительных методов решения систем линейных уравнений. В частности, применение вычислительных методов оказалось особенно эффективным для решения задач теплообмена, динамики жидкостей, магнитной гидродинамики, переноса зарядов и многих других.

Современные методы решения подобных задач сводятся, как правило, к разностной аппроксимации многомерных дифференциальных уравнений, что в свою очередь, приводит к построению СЛАУ, матрица которой имеет большую