

Национальная академия наук Кыргызской Республики

ISSN 0130-6553

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО ИНТЕГРО-
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ

ВЫПУСК 47

Бишкек • Илим • 2014



ЗАВЕРЯЮ

секретарь

Усарова

Усарова С.О.

решения систем сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.....	80
16. А.А. ТАЛИЕВ. Сингулярно возмущенные уравнения с функциями - коэффициентами при линейных неизвестных функциях, имеющих разрывы второго рода.....	92
17. К.Б. ТАМПАГАРОВ. Метод характеризующих функций исследования асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексной плоскости.....	98
18. З.К. ИМАНАЛИЕВ, Б.Ы. АШИРБАЕВ. Декомпозиция в дискретной задаче оптимального управления с малым шагом.....	103
19. З.К. ИМАНАЛИЕВ, Б.Ы. АШИРБАЕВ. Матричная формула для линейной однородной системы разностных уравнений с малым шагом.....	107
20. А.С. ОМУРАЛИЕВ, С. КУЛМАНБЕТОВА. Асимптотика решения параболической задачи с двукратной точкой спектра.....	109
21. А. С. ОМУРАЛИЕВ, Э. Д. АБЫЛАЕВА. Асимптотика решения параболической задачи со стационарной фазой.....	120
22. А.Б. БАЙЗАКОВ, Т.Р. КЫДЫРАЛИЕВ. О применении метода преобразования решений к исследованию разрешимости начальной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.....	129
23. Т.Т. IAKIMANSKAIA, S.N. SKLIAR. An adaptive numerical method for nonlinear nonstationary convection-diffusion problems.....	134
24. Э.А. МАМАЗИАЕВА. Исследование решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными.....	137
25. Н.К. АРКАБАЕВ. Задача сопряжения для уравнений третьего порядка с интегральными условиями.....	142
26. К.Б. МАТАНОВА, А.О. МАМЫТОВ. Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка.....	147
27. А. СОПУЕВ, Т.Ы. СААДАЛОВ. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в бесконечной области.....	152
28. Т.Ы. СААДАЛОВ. Задача с нелокальным условием сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка.....	159
29. А.Б. УРДАЛЕТОВА. Решение систем алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов.....	165

30. А. АСАНОВ, М.М. ГАШПАРОВ. Приближенное вычисление интеграла Стильтьеса обобщенным методом Эйлера.....	170
31. М.ИМАНАЛИЕВ, М.АСАНКУЛОВА, А. ЖУСУПБАЕВ. Оптимизация добычи и распределение сырья между потребителями по договору.....	177
32. М.АСАНКУЛОВА. Задача распределения сырья между потребителями с учетом договорных условий.....	182
33. А. СУЛТАНКУЛ КЫЗЫ. Задача размещения перерабатывающих предприятий сырья с нелинейной разрывной целевой функцией.....	189
34. К.ИШМАХАМЕТОВ. О некоторых классах счетно совершенных отображений.....	195
35. К.ИШМАХАМЕТОВ. Об отображениях типа компактности.....	200



ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Лемешевский С.В., Матус И.П. Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Сибирск. матем. журн. – 1988. – Т. 39, № 4. – С. 954 - 962.
2. Нахушева В.А. Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой // Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Таганрог. 2008. – 30 с.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
4. Жегалов В.И. Некоторые задачи для уравнения смешанно-составного типа в бесконечной области // Тр. семинара по краевым задачам. – 1972. – Вып. 9. – С. 75 – 85.
5. Крикунов Ю.М. О некоторых задачах для уравнения М.А. Лаврентьева // Изв. вузов. Математика. – 1961. – №6(25). – С. 60-70.
6. Джурсаев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
7. Саадалов Т.Ы. О задаче сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка // Изв. Томск. политехн. ун-та. Матем. и мех. Физика. – 2014. – Т. 325, №2. – С. 22 - 28.
8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
9. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2002. – 121 с.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка, когда на линии сопряжения задаются нелокальные условия, содержащие интегральные члены.

1. Постановка задачи. Задачи с нелокальным условием сопряжения для уравнений в частных производных часто используется в качестве математической модели процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [1, 2].

В работе рассматриваются краевые задачи для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения на общей границе рассматриваемых областей.

Пусть D означает прямоугольник, с вершинами $A_0(0, h)$, $A_1(0, -h_1)$, $B_1(\ell, -h_1)$, $B_0(\ell, h)$ ($h, h_1, \ell > 0$), а $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$. $J = \{(x, y) : 0 < x < \ell, y = 0\}$ - общая граница областей D_1 и D_2 . Через $C^{m,n}$ обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s} / \partial x^r \partial y^s$ ($r = 0, 1, \dots, n$; $s = 0, 1, \dots, m$).

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap [C^{2+1}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xxxx} + a_1(x, y)u_{xxx} + a_2(x, y)u_{xx} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u + b_3(x, y)u_y + c_1(x, y)u_x + c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = f_1(x, y), \quad (1)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ u(x, h) &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \end{aligned} \quad (2)$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xxxx} + \alpha_1(x, y)u_{xxx} + \alpha_2(x, y)u_{xx} + \beta_1(x, y)u_x + \beta_2(x, y)u_y + \gamma_1(x, y)u_x + \gamma_2(x, y)u_y + \delta(x, y)u = f_2(x, y), \quad (4)$$

граничным условиям

$$u(0, y) = \chi_1(y), \quad u_x(0, y) = \chi_2(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0), \quad u_x(x, -0) = u_x(x, +0) + \int_{\xi}^x \rho(\xi, -0) d\xi + r(x), \quad (6)$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \rho, \theta, r$ ($i = 1, 2$) - заданные функции, причем



$$a_i, c_i (i=1,2), b_j (j=\overline{1,3}), d, a_{1m}, a_{2m}, b_{1m}, b_{2m}, c_{1r}, c_{2r} \in C(\overline{D_1}),$$

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i=1,2), \delta, f_i, \alpha_{1m}, \alpha_{2m}, \beta_{1m}, \beta_{2m}, \gamma_{1r}, \gamma_{2r}, \theta_{1m} \in C(\overline{D_2}), \rho, r \in C^1[0, \ell], \quad (7)$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0, h], \psi \in C^2[0, \ell], \chi_1, \chi_2, \chi_3 \in C^1[-h, 0],$$

$$\varphi_1(0) = \chi_1(0), \varphi_2(0) = \chi_2(0), \varphi_2(h) = \psi(0).$$

Отметим, что прямые $x=const$ и $y=const$ являются двукратными характеристиками уравнения (1), а для уравнения (4) прямая $y=const$ является трехкратной, прямая $x=const$ - простой характеристикой. Таким образом, уравнение (1) в области D_1 имеет две двукратные характеристики, а уравнение (4) в области D_2 имеет одну трехкратную и одну простую характеристику. Так как условия сопряжения задаются на общей границе J , то уравнения (1) и (4) являются уравнения смешанного типа [3].

Задача 1 в случае, когда $\rho(x) \equiv 1, \theta(x, \xi) \equiv 0, r(x) \equiv 0$, рассмотрена в [4].

Введем следующие обозначения:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$u_x(x, +0) = v_1(x), \quad u_x(x, -0) = v_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (8)$$

где $\tau(x), v_1(x), v_2(x)$ - пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из второго условия (6) получим

$$v_1(x) = \rho(x)v_2(x) + \int_0^x \theta(x, \xi)v_2(\xi)d\xi + r(x). \quad (9)$$

Рассмотрим задачу Гурса для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_x(x, +0) = v_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (10)$$

Решение этой задачи построим с помощью функции Римана. Для этого интегрируя тождество

$$\mathcal{G}L_1(u) - uL_1^*(\mathcal{G}) = \{[\mathcal{G}_{\eta\eta} - (a_1\mathcal{G})_{\eta} + b_1\mathcal{G}]u_{\xi} -$$

$$- [\mathcal{G}_{\eta\xi} - (a_1\mathcal{G})_{\eta\xi} - (a_2\mathcal{G})_{\eta\eta} + (b_1\mathcal{G})_{\xi} + (b_2\mathcal{G})_{\eta} - c_1\mathcal{G}]u_{\xi} -$$

$$- \{\mathcal{G}_{\xi\xi}u_{\eta\eta} + (a_2\mathcal{G})_{\eta}u_{\xi} + (b_1\mathcal{G})_{\eta} - [u_{\xi\xi} + a_1u_{\xi\xi} + a_2u_{\xi\xi} + b_2u_{\xi} + b_3u_{\eta} + c_2u]\mathcal{G}\}_{\eta}$$

по области $D_1^* = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}$ и используя формулу Грина, будем иметь:

$$\iint_{D_1^*} \mathcal{G}L_1(u) - uL_1^*(\mathcal{G})d\xi d\eta = \oint_{\partial D_1^*} \{\mathcal{G}_{\eta}u_{\xi\xi} + (a_2\mathcal{G})_{\eta}u_{\xi} + (b_3\mathcal{G})_{\eta} -$$

$$- [u_{\xi\xi} + a_1u_{\xi\xi} + a_2u_{\xi\xi} + b_2u_{\xi} + b_3u_{\eta} + c_2u]\mathcal{G}\}d\xi + \{[\mathcal{G}_{\eta\eta} - (a_1\mathcal{G})_{\eta} + b_1\mathcal{G}]u_{\xi} -$$

$$- [\mathcal{G}_{\eta\xi} - (a_1\mathcal{G})_{\eta\xi} - (a_2\mathcal{G})_{\eta\eta} + (b_1\mathcal{G})_{\xi} + (b_2\mathcal{G})_{\eta} - c_1\mathcal{G}]u\}d\eta,$$

где

$$L_1^*(u) \equiv \mathcal{G}_{\eta\xi\xi} - (a_1\mathcal{G})_{\eta\xi\xi} - (a_2\mathcal{G})_{\eta\xi\xi} + (b_1\mathcal{G})_{\xi\xi} + (b_2\mathcal{G})_{\eta\xi} + (b_3\mathcal{G})_{\eta\eta} - (c_1\mathcal{G})_{\xi} - (c_2\mathcal{G})_{\eta} + d\mathcal{G}.$$

Введем функцию Римана $\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta)$, которая определяется следующим образом:

$$L_1^*(\mathcal{G}) = 0, \quad (\xi, \eta) \in D_1^* = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, 0 < \eta < y\},$$

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 0,$$

$$\mathcal{G}_x(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \omega_1(\xi, \eta; x),$$

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = 0,$$

$$\mathcal{G}_y(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = \omega_2(\xi, \eta; y),$$

где $\omega_1(\xi, \eta; x), \omega_2(\xi, \eta; y)$ определяются как решения задач Коши

$$\mathcal{G}_{\eta\eta\xi}(x, y; x, \eta) - [a_1(x, \eta)\mathcal{G}_x(x, y; x, \eta)]_{\eta} + b_1(x, \eta)\mathcal{G}_x(x, y; x, \eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq y,$$

$$\mathcal{G}_x(x, y; x, \eta)|_{\eta=0} = 0, \quad \mathcal{G}_{\eta\xi}(x, y; x, \eta)|_{\eta=0} = 1,$$

$$\mathcal{G}_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) - [a_2(\xi, y)\mathcal{G}_y(x, y; \xi, y)]_{\xi} + b_1(\xi, y)\mathcal{G}_y(x, y; \xi, y) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq x,$$

$$\mathcal{G}_y(x, y; \xi, y)|_{\xi=0} = 0, \quad \mathcal{G}_{\eta\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=0} = 1.$$

Решение такой задачи существует и единственно [3]. Вычисляя криволинейные интегралы по границам области D_1^* и учитывая свойства функции Римана, будем иметь следующее представление:

$$u(x, y) = A_1(x, y)\varphi_1(y) - \mathcal{G}_y(x, y; 0, y)\varphi_2(y) + \int_0^y [B_1(x, y; \eta)\varphi_2(\eta) -$$

$$- C_1(x, y; \eta)\varphi_1(\eta)]d\eta + \int_0^x [\mathcal{G}(x, y; \xi, 0)v_2'(\xi) - D_1(x, y; \xi)\tau'(\xi) +$$

$$+ a_1(\xi, 0)\mathcal{G}(x, y; \xi, 0)v_1'(\xi) - E_1(x, y; \xi)\tau'(\xi) + b_1(\xi, 0)\mathcal{G}(x, y; \xi, 0)v_1(\xi) -$$

$$- F_1(x, y; \xi)\tau(\xi)]d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y \mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\xi, \quad (11)$$

где

$$A_1(x, y) = \mathcal{G}_{\eta\xi}(x, y; 0, y) - a_2(0, y)\mathcal{G}_y(x, y; 0, y),$$

$$B_1(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{\eta\eta}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta)\mathcal{G}_y(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{1\eta}(0, \eta)]\mathcal{G}(x, y; 0, \eta),$$

$$C_1(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta)\mathcal{G}_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) -$$

$$- a_2(0, \eta)\mathcal{G}_{\eta\xi}(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{1\eta}(0, \eta)]\mathcal{G}_x(x, y; 0, \eta) +$$

$$+ [b_1(0, \eta) - a_{1\xi}(0, \eta) - 2a_{2\eta}(0, \eta)]\mathcal{G}_y(x, y; 0, \eta) +$$

$$+ [b_{1\xi}(0, \eta) - a_{1\xi\xi}(0, \eta) - a_{2\eta\xi}(0, \eta) + b_{2\eta}(0, \eta) - c_1(0, \eta)]\mathcal{G}(x, y; 0, \eta),$$

$$D_1(x, y; \xi) = \mathcal{G}_y(x, y; \xi, 0) - a_1(\xi, 0)\mathcal{G}(x, y; \xi, 0),$$

$$E_1(x, y; \xi) = a_2(\xi, 0)\mathcal{G}_y(x, y; \xi, 0) + [a_{2\eta}(\xi, 0) - b_2(\xi, 0)]\mathcal{G}(x, y; \xi, 0),$$

$$F_1(x, y; \xi) = b_1(\xi, 0)\mathcal{G}_y(x, y; \xi, 0) + [b_{1\eta}(\xi, 0) - c_2(\xi, 0)]\mathcal{G}(x, y; \xi, 0),$$

а $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана для уравнения (1) [3].

Используя условие (3), из (9) получаем соотношение для функции $\tau(x)$ и $v_1(x)$, принесенное из области D_1^* :

$$\int_0^1 [\vartheta(x, h; \xi, 0)v_1''(\xi) - D_1(x, h; \xi)\tau'(\xi) + a_2(\xi, 0)\vartheta(x, h; \xi, 0)v_1'(\xi) + E_1(x, h; \xi)\tau'(\xi) + b_1(\xi, 0)\vartheta(x, h; \xi, 0)v_1(\xi) - F_1(x, h; \xi)\tau(\xi)]d\xi = \Phi(x), \quad (12)$$

где

$$\Phi(x) = \psi(x) - A_1(x, h)\varphi_1(h) + \vartheta_\eta(x, h; 0, h)\varphi_2(h) - \int_0^h [B_1(x, h; \eta)\varphi_2(\eta) - C_1(x, h; \eta)\varphi_1(\eta)]d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^h \vartheta(x, h; \xi, \eta)f_1(\xi, \eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям в (12), учитывая свойства функции $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ и условия согласования

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau'(0) = \varphi_2(0), v_1(0) = \varphi_1'(0), v_1'(0) = \varphi_2'(0),$$

имеем

$$D_{1\xi}(x, h; x)\tau(x) - \vartheta_\xi(x, h; x, 0)v_1(x) = \int_0^1 H_1(x, \xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^1 H_2(x, \xi)v_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x), \quad (13)$$

где $H_1(x, \xi) = D_{1\xi}(x, h; \xi) - E_{1\xi}(x, h; \xi) + F_1(x, h; \xi)$,

$$H_2(x, \xi) = -\vartheta_{\xi\xi}(x, h; \xi, 0) + a_2(\xi, 0)\vartheta_\xi(x, h; \xi, 0) + [a_{2\xi}(\xi, 0) - b_3(\xi, 0)]\vartheta(x, h; \xi, 0),$$

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) - [\vartheta_\xi(x, h; 0, 0) - a_2(0, 0)\vartheta(x, h; 0, 0)]\phi_1'(0) + \vartheta(x, h; 0, 0)\phi_1'(0) + [D_{1\xi}(x, h; 0) - E_1(x, h; 0)]\phi_1(0) - D_1(x, h; 0)\phi_2(0).$$

С другой стороны, с учетом постановки задачи I и устремляя u к нулю, из уравнения (4) получаем

$$v_2''(x) + \alpha_1(x, 0)\tau''(x) + \alpha_2(x, 0)v_2'(x) + \beta_1(x, 0)\tau'(x) + \beta_2(x, 0)v_2'(x) + \gamma_1(x, 0)\tau'(x) + \gamma_2(x, 0)v_2(x) + \delta(x, 0)\tau(x) = f_2(x, 0).$$

Интегрируя это уравнение и учитывая условия согласования $v_2(0) = \chi_1'(0)$, $v_2'(0) = \chi_2'(0)$, $v_2''(0) = \chi_3'(0)$, имеем

$$v_2(x) + \alpha(x, 0)\tau(x) = \int_0^1 H_3(x, \xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^1 H_4(x, \xi)v_2(\xi)d\xi + g_1(x), \quad (14)$$

где

$$H_3(x, \xi) = \frac{1}{2}(x - \xi)^2 [\alpha_{1\xi\xi}(\xi, 0) - \beta_{1\xi}(\xi, 0) + \gamma_{1\xi}(\xi, 0) - \delta(\xi, 0)] - (x - \xi)[3\alpha_{1\xi}(\xi, 0) - 2\beta_{1\xi}(\xi, 0) + \gamma_1(\xi, 0)] + 3\alpha_{1\xi}(\xi, 0) - \beta_1(\xi, 0),$$

$$H_4(x, \xi) = -\frac{1}{2}(x - \xi)^2 [\alpha_{2\xi\xi}(\xi, 0) - \beta_{2\xi}(\xi, 0) + \gamma_2(\xi, 0)] + (x - \xi)[3\alpha_{2\xi}(\xi, 0) - \beta_2(\xi, 0)] - \alpha_2(\xi, 0),$$

$$g_1(x) = \left\{ \frac{1}{2}[\alpha_{1xx}(0, 0) - \beta_{1x}(0, 0)]x^2 - [2\alpha_{1x}(0, 0) - \beta_1(0, 0)]x + \alpha_1(0, 0) \right\} \chi_1(0) - \left\{ \frac{1}{2}[\alpha_{2x}(0, 0) - \beta_{2x}(0, 0)]x^2 - [2\alpha_{2x}(0, 0) - \beta_2(0, 0)]x + \alpha_2(0, 0) \right\} \chi_2(0) + \int_0^1 \vartheta(x, h; \xi, 0)f_2(\xi, 0)d\xi.$$

$$\left\{ \frac{1}{2}[\alpha_{2xx}(0, 0) - \beta_{2x}(0, 0)]x^2 - [2\alpha_{2x}(0, 0) - \beta_2(0, 0)]x + \alpha_2(0, 0) \right\} \chi_2(0) + \left\{ \frac{1}{2}[\alpha_{3xx}(0, 0) - \beta_{3x}(0, 0)]x^2 - [2\alpha_{3x}(0, 0) - \beta_3(0, 0)]x + \alpha_3(0, 0) \right\} \chi_3(0) + \int_0^1 (x - \xi)^2 f_2(\xi, 0)d\xi.$$

Обращая интегральное уравнение (14) относительно $v_2(x)$, приходим к следующему соотношению:

$$v_2(x) = -\alpha_1(x, 0)\tau(x) + \int_0^1 H_5(x, \xi)\tau(\xi)d\xi + g_2(x), \quad (15)$$

где $H_5(x, \xi) = H_4(x, \xi) - \alpha_1(\xi, 0)R(x, \xi) + \int_0^1 R(x, t)H_4(t, \xi)dt$, $g_2(x) = g_1(x) + \int_0^1 R(x, \xi)g_1(\xi)d\xi$, а $R(x, \xi)$ - резольвента ядра $H_4(x, \xi)$.

С учетом (15) из условия сопряжения (9) имеем

$$v_1(x) = -\alpha_1(x, 0)\rho(x)\tau(x) + \int_0^1 H_6(x, \xi)\tau(\xi)d\xi + g_3(x), \quad (16)$$

где $H_6(x, \xi) = \rho(x)H_5(x, \xi) - \theta(x, \xi)\alpha_1(\xi, 0) + \int_0^1 \theta(x, t)H_5(t, \xi)dt$, $g_3(x) = \rho(x)g_2(x) + \int_0^1 \theta(x, \xi)g_2(\xi)d\xi + r(x)$.

Исключив $v_1(x)$ из соотношений (13) и (16), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau_1(x) = \int_0^1 K(x, \xi)\tau_1(\xi)d\xi + g(x), \quad (17)$$

где

$$\rho_1(x) = 1 + [\alpha_1(x, 0)\rho(x) - 2\alpha_1(x, 0)]\vartheta_\xi(x, h; x, 0) - \int_0^h b_1(x, t)\vartheta_\xi(x, h; x, t)dt,$$

$$K(x, \xi) = H_1(x, \xi) - \alpha_1(\xi, 0)\rho(\xi)H_5(x, \xi) + \vartheta_\xi(x, h; x, 0)H_6(x, \xi) + \int_0^1 H_2(x, t)H_6(t, \xi)dt,$$

$$g(x) = \Phi_1(x) + \vartheta_\xi(x, h; x, 0)g_1(x) + \int_0^1 H_2(x, \xi)g_1(\xi)d\xi.$$

Нетрудно заметить, что если

$$\forall x \in [0, \ell]: \rho_1(x) \neq 0, \quad (18)$$

то уравнение (17) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

В частности, если $\alpha_1(x, 0)\rho(x) - 2\alpha_1(x, 0) = 0$, $b_1(x, y) = 0$, то $\rho(x) = 1$, и, следовательно, условие (18) выполняется.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall (x, y) \in D_1: b_1(x, y) - a_1(x, y) \leq 0, \quad (19)$$

то $\forall \eta \in [0, h]: \vartheta(x, y; x, \eta) < 0$.

Тогда нетрудно заметить, что если

$$\forall (x, y) \in \bar{D}_1 : b_1(x, y) \geq 0, \forall x \in [0, \ell] : \alpha_1(x, 0)\rho(x) - 2a_1(x, 0) \leq 0, \quad (21)$$

то $\forall x \in [0, \ell] : \rho(x) \geq 1$.

Следовательно, при выполнении условий (19) и (21) интегральное уравнение (17) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив $\tau_1(x)$ из уравнения (17), будем знать и $v_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 имеет вид (8), а в области D_2 определяется по формуле

$$u(x, y) = \mathcal{G}_{1\zeta\zeta}(x, y; x, 0)\tau_1(x) + \int_0^x A_3(x, y; \xi)\tau_1(\xi)d\xi + \int_0^y [\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta)\chi'_1(\eta) + \alpha_1(0, \eta)\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta)\chi_1(\eta) - B_3(x, y; \eta)\chi'_1(\eta) + C_3(x, y; \eta)\chi_1(\eta) + D_3(x, y; \eta)\chi'_1(\eta) + E_3(x, y; \eta)\chi_1(\eta)]d\eta, \quad (22)$$

где $A_3(x, y; \xi) = \mathcal{G}_{1\zeta\zeta}(x, y; \xi, 0) - \alpha_2(\xi, 0)\mathcal{G}_{1\zeta\zeta}(x, y; \xi, 0) + [\beta_2(\xi, 0) - 2\alpha_{2\zeta}(\xi, 0)]\mathcal{G}_{1\zeta}(x, y; \xi, 0) + [\beta_{2\zeta}(\xi, 0) - \gamma_2(\xi, 0) - \alpha_{2\zeta\zeta}(\xi, 0)]\mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)$,
 $B_3(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{1\zeta}(x, y; 0, \eta) - \alpha_2(0, \eta)\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta)$,
 $C_3(x, y; \eta) = \alpha_1(0, \eta)\mathcal{G}_{1\zeta}(x, y; 0, \eta) + [\alpha_{1\zeta}(0, \eta) - \beta_1(0, \eta)]\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta)$,
 $D_3(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{1\zeta\zeta}(x, y; 0, \eta) - \alpha_2(0, \eta)\mathcal{G}_{1\zeta}(x, y; 0, \eta) - [\alpha_{2\zeta}(0, \eta) - \beta_2(0, \eta)]\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta)$,
 $E_3(x, y; \eta) = \alpha_1(0, \eta)\mathcal{G}_{1\zeta\zeta}(x, y; 0, \eta) + [2\alpha_{1\zeta}(0, \eta) - \beta_1(0, \eta)] \times \times \mathcal{G}_{1\zeta}(x, y; 0, \eta) + [\alpha_{1\zeta\zeta}(0, \eta) - \beta_{1\zeta}(0, \eta) + \gamma_1(0, \eta)]\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta)$,

а $\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана [5] для уравнения (4).

ТЕОРЕМА 1. Если выполняются условия (7), (19) и (21), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (11) и (22) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушева В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестн. СамГТУ. Сер. ФМН. – 2006. – Вып. 42. – С. 11-34.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
3. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
4. Джурраев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Душанбе, Фран. 2000. – 144 с.
5. Асылбеков Т.Д. Начальное-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дисс. канд. физ.-мат. наук. 01.01.02. – Бишкек, 2002. – 121 с.



А.Б. УРДАЛЕТОВА (г. Бишкек)

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЯТИДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1. К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится большинство задач вычислительной математики. Для этих задач характерным является большое число уравнений в соответствующей системе, что исключает возможность использования для ее решения известного из курса линейной алгебры метода Крамера. В работе [1] для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей авторами был предложен алгоритм, сочетающий рекуррентную структуру метода Гаусса с формулами Крамера (в дальнейшем КГ-алгоритм). В предлагаемой работе подобный подход используется для решения систем уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов.

Рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей:

$$\begin{cases} c_1x_1 + d_1x_2 + e_1x_3 = f_1; \\ b_2x_1 + c_2x_2 + d_2x_3 + e_2x_4 = f_2; \\ a_kx_{k-2} + b_kx_{k-1} + c_kx_k + d_kx_{k+1} + e_kx_{k+2} = f_k; \quad k = 3, 4, \dots, N-2; \\ a_{N-1}x_{N-1} + b_{N-1}x_{N-2} + c_{N-1}x_{N-1} + d_{N-1}x_N = f_{N-1}; \\ a_Nx_{N-2} + b_Nx_{N-1} + c_Nx_N = f_N. \end{cases} \quad (1)$$

Первые итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) были разработаны еще в XIX веке.

Это широко известные методы простой итерации такие, как метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя.

Однако с появлением в XX столетии ЭВМ и их интенсивное проникновение, в первую очередь, в научно-практическую деятельность человека, привело к резкому ускорению разработок и модификаций разнообразных вычислительных методов решения систем линейных уравнений. В частности, применение вычислительных методов оказалось особенно эффективным для решения задач теплообмена, динамики жидкостей, магнитной гидродинамики, переноса зарядов и многих других.

Современные методы решения подобных задач сводятся, как правило, к равномерной аппроксимации многомерных дифференциальных уравнений, что в свою очередь, приводит к построению СЛАУ, матрица которой имеет большую