

Национальная академия наук Кыргызской Республики

ISSN 0130-6553

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО ИНТЕГРО-
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ

ВЫПУСК 47

Бишкек • Илим • 2014



ЗАВЕРЯЮ
Членский секретарь
ОшТУ *Усар* Усарова С.О.

решения систем сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.....	80
16. А.А. ТАЛИЕВ. Сингулярно возмущенные уравнения с функциями - коэффициентами при линейных неизвестных функциях, имеющих разрывы второго рода.....	92
17. К.Б. ТАМПАГАРОВ. Метод характеризующих функций исследования асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексной плоскости	98
18. З.К. ИМАНАЛИЕВ, Б.Ы. АШИРБАЕВ. Декомпозиция в дискретной задаче оптимального управления с малым шагом.....	103
19. З.К. ИМАНАЛИЕВ, Б.Ы. АШИРБАЕВ. Матричная формула для линейной однородной системы разностных уравнений с малым шагом.....	107
20. А.С. ОМУРАЛИЕВ, С. КУЛМАНБЕТОВА. Асимптотика решения параболической задачи с двукратной точкой спектра.....	109
21. А. С. ОМУРАЛИЕВ, Э. Д. АБЫЛАЕВА. Асимптотика решения параболической задачи со стационарной фазой.....	120
22. А.Б. БАЙЗАКОВ, Т.Р. КЫДЫРАЛИЕВ. О применении метода преобразования решений к исследованию разрешимости начальной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.....	129
23. Т.Т. IAKIMANSKAIA, S.N. SKLIAR. An adaptive numerical method for nonlinear nonstationary convection-diffusion problems.....	134
24. Э.А. МАМАЗИЕВА. Исследование решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными.....	137
25. Н.К. АРКАБАЕВ. Задача сопряжения для уравнений третьего порядка с интегральными условиями.....	142
26. К.Б. МАТАНОВА, А.О. МАМЫТОВ. Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка.....	147
27. А.СОПУЕВ, Т.Ы.СААДАЛОВ. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в бесконечной области.....	152
28. Т.Ы.СААДАЛОВ. Задача с нелокальным условием сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка.....	159
29. А.Б. УРДАЛЕТОВА. Решение систем алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов.....	165

30. А. АСАНОВ, М.М. ГАШАРОВ. Приближенное вычисление интеграла Стильтьеса обобщенным методом Эйлера.....	170
31. М.ИМАНАЛИЕВ, М.АСАНКУЛОВА, А. ЖУСУПБАЕВ. Оптимизация добычи и распределение сырья между потребителями по договору.....	177
32. М.АСАНКУЛОВА. Задача распределения сырья между потребителями с учетом договорных условий.....	182
33. А. СУЛТАНКУЛ КЫЗЫ. Задача размещения перерабатывающих предприятий сырья с нелинейной разрывной целевой функцией.....	189
34. К.ИШМАХАМЕТОВ. О некоторых классах счетно совершенных отображений.....	195
35. К.ИШМАХАМЕТОВ. Об отображениях типа компактности.....	200



КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПСЕВДОПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

В работе установлена однозначная разрешимость задачи сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка в бесконечной области.

1. Постановка задачи. Математическое моделирование прикладных задач, происходящих в неоднородных, кусочно-однородных и смешанных средах, часто сводятся к задачам сопряжения для уравнений в частных производных [1-3]. Однако, задачи сопряжений для неограниченных областей мало исследованы [4, 5].

В работе рассматривается задача сопряжения для псевдопараболического и гиперболического уравнений четвертого порядка в неограниченной области. Такие задачи в неограниченной области изучены в работах [6, 7].

Пусть $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, -\infty < y < 0\}$. $D = D_1 \cup D_2$. Через C^{***} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ ($r = 0, 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, m$).

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{1+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D , уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xyy} + a_1 u_{yy} + a_2 u_{xy} + b_1 u_{xx} + b_2 u_{xy} + b_3 u_{yy} + c_1 u_x + c_2 u_y + du = 0, \quad (1)$$

граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x, h) = \psi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (3)$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xyy} + \alpha_1 u_{yy} + \alpha_2 u_{xy} + \beta_1 u_{xx} + \beta_2 u_{xy} + \gamma_1 u_x + \gamma_2 u_y + \delta u = 0, \quad (4)$$

граничным условиям

$$u(0, y) = \chi_1(y), \quad u_x(0, y) = \chi_2(y), \quad u_{xx}(0, y) = \chi_3(y), \quad -\infty < y \leq 0 \quad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0), \quad u_y(x, -0) = u_y(x, +0), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (6)$$

где $a, c, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$ ($i = 1, 2$), b, χ ($j = \overline{1, 3}$), d, δ, ψ - заданные гладкие функции, причем

$$\begin{aligned} a_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1), \quad a_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), \\ b_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), \quad b_1 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+0}(D_1), \\ c_2 \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1), \quad d \in C(\bar{D}_1) \cap C^{0+0}(D_1), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2), \quad \beta_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2), \quad \beta_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2),$$

$$\gamma_1 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \quad \gamma_2 \in C(\bar{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2), \quad \delta \in C(\bar{D}_2),$$

$$\varphi_i \in C^1[0, h] \quad (i = \overline{1, 2}), \quad \psi \in C^2[0, +\infty), \quad \chi_j \in C^1(-\infty, 0] \quad (j = \overline{1, 3}),$$

$$\chi_j(y) = O\left(\frac{1}{|y|^{1+j}}\right) \quad (j = \overline{1, 3}), \quad y \rightarrow -\infty, \quad \psi(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\lambda}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \lambda > 0, \quad (8)$$

$$\varphi_i(0) = \chi_i(0) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad \varphi_i(h) = \psi(0).$$

Уравнения (1) и (4) в силу условий сопряжения (6) являются уравнениями смешанного типа [8].

Введем обозначения:

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \tau(x), \quad u_y(x, -0) = u_y(x, +0) = \nu(x), \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (9)$$

2. Представление решения задачи 1 в области D_1 . Сопряженным по Лагранжу оператором для оператора $L_1(u)$ будет

$$L_1^*(u) \equiv \mathcal{G}_{yyx} - (a_1 \mathcal{G})_{yx} - (a_2 \mathcal{G})_{xy} + (b_1 \mathcal{G})_{xx} + (b_2 \mathcal{G})_{xy} + (b_3 \mathcal{G})_{yy} - (c_1 \mathcal{G})_x - (c_2 \mathcal{G})_y + d \mathcal{G}.$$

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{G} L_1(u) - u L_1^*(\mathcal{G}) = \{[\mathcal{G}_{\eta\eta} - (a_1 \mathcal{G})_{\eta} + b_1 \mathcal{G}] u_{\xi} - \\ - [\mathcal{G}_{\eta\xi} - (a_1 \mathcal{G})_{\eta\xi} - (a_2 \mathcal{G})_{\eta\eta} + (b_1 \mathcal{G})_{\xi} + (b_2 \mathcal{G})_{\eta} - c_1 \mathcal{G}] u_{\xi} - \\ - [\mathcal{G}_{\eta} u_{\xi\xi} + (a_2 \mathcal{G})_{\eta} u_{\xi} + (b_3 \mathcal{G})_{\eta} - [u_{\xi\xi\eta} + a_1 u_{\xi\xi} + a_2 u_{\xi\eta} + b_2 u_{\xi} + b_3 u_{\eta} + c_2 u] \mathcal{G}\}_{\eta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем функцию Римана $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$, являющаяся решением следующей задачи:

$$L_1^*(\mathcal{G}) = 0, \quad (\xi, \eta) \in D_1^* = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < x, 0 < \eta < y\}, \quad (11)$$

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 0,$$

$$\mathcal{G}_{\xi}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = \omega_1(\xi, \eta; x), \quad (12)$$

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = 0,$$

$$\mathcal{G}_{\eta}(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = \omega_2(\xi, \eta; y),$$

где $\omega_1(\xi, \eta; x)$, $\omega_2(\xi, \eta; y)$, определяются как решения задач Коши

$$\mathcal{G}_{\eta\xi}(x, y; x, \eta) - [a_1(x, \eta) \mathcal{G}_{\xi}(x, y; x, \eta)]_{\eta} + b_1(x, \eta) \mathcal{G}_{\xi}(x, y; x, \eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq y, \quad (13)$$

$$\mathcal{G}_{\xi}(x, y; x, \eta)|_{\eta=y} = 0, \quad \mathcal{G}_{\eta}(x, y; x, \eta)|_{\eta=y} = 1,$$

$$\mathcal{G}_{\xi\xi}(x, y; \xi, y) - [a_2(\xi, y) \mathcal{G}_{\eta}(x, y; \xi, y)]_{\xi} + b_3(\xi, y) \mathcal{G}_{\eta}(x, y; \xi, y) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq x, \quad (14)$$

$$\mathcal{G}_{\eta}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad \mathcal{G}_{\eta\xi}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1.$$

Интегрируя тождество (10) по области D_1^* и учитывая свойства функции Римана, получим представление решения уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и (9):

$$u(x, y) = A_1(x, y) \varphi_1(y) - \mathcal{G}_{\eta}(x, y; 0, y) \varphi_2(y) + \int_0^y [B_1(x, y; \eta) \varphi_2(\eta) - C_2(x, y; \eta) \varphi_1(\eta)] d\eta +$$



$$+ \int_0^{\xi} [\mathcal{A}(x, y; \xi, 0) \nu'(\xi) - D_1(x, y; \xi) \tau'(\xi) + a_2(\xi, 0) \mathcal{A}(x, y; \xi, 0) \nu'(\xi) - E_1(x, y; \xi) \tau'(\xi) + b_3(\xi, 0) \mathcal{A}(x, y; \xi, 0) \nu(\xi) - E_1(x, y; \xi) \tau(\xi)] d\xi, \quad (15)$$

где

$$A_1(x, y) = \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, y) - a_2(0, y) \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, y),$$

$$B_1(x, y; \eta) = \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta) \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{1\eta}(0, \eta)] \mathcal{A}(x, y; 0, \eta),$$

$$C_1(x, y; \eta) = \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, \eta) - a_1(0, \eta) \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, \eta) - a_2(0, \eta) \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, \eta) + [b_1(0, \eta) - a_{1\eta}(0, \eta)] \mathcal{A}(x, y; 0, \eta) + [b_2(0, \eta) - a_{1z}(0, \eta) - 2a_{2\eta}(0, \eta)] \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, \eta) + [b_{1z}(0, \eta) + b_{2\eta}(0, \eta) - c_1(0, \eta) - a_{2\eta_1}(0, \eta) - a_{1z\eta}(0, \eta)] \mathcal{A}(x, y; 0, \eta),$$

$$D_1(x, y; \xi) = \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; \xi, 0) - a_1(\xi, 0) \mathcal{A}(x, y; \xi, 0),$$

$$E_1(x, y; \xi) = a_2(\xi, 0) \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; \xi, 0) + [a_{2\eta_1}(\xi, 0) - b_2(\xi, 0)] \mathcal{A}(x, y; \xi, 0),$$

$$F_1(x, y; \xi) = b_3(\xi, 0) \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; \xi, 0) + [b_{3\eta_1}(\xi, 0) - c_2(\xi, 0)] \mathcal{A}(x, y; \xi, 0).$$

Функция Римана удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\mathcal{A}(x, y; \xi, \eta) = (\xi - x)(\eta - y) + \int_x^{\xi} A(\xi, \eta; \xi_1) \mathcal{A}(x, y; \xi_1, \eta) d\xi_1 + \int_y^{\eta} B(\xi, \eta; \eta_1) \mathcal{A}(x, y; \xi, \eta_1) d\eta_1 - \int_x^{\xi} d\xi_1 \int_y^{\eta} C(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \mathcal{A}(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1,$$

где

$$A(\xi, \eta; \xi_1) = a_2(\xi_1, \eta) - (\xi - \xi_1) b_3(\xi_1, \eta), \quad B(\xi, \eta; \eta_1) = a_1(\xi, \eta_1) - (\eta - \eta_1) b_1(\xi, \eta_1),$$

$$C(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = b_2(\xi_1, \eta_1) - (\xi - \xi_1) c_2(\xi_1, \eta_1) - (\eta - \eta_1) c_1(\xi_1, \eta_1) + (\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1) d(\xi_1, \eta_1).$$

Отсюда найдем

$$\mathcal{A}_z(x, y; \xi, \eta) = \eta - y + A(\xi, \eta; \xi) \mathcal{A}(x, y; \xi, \eta) + \int_x^{\xi} A_z(\xi, \eta; \xi_1) \mathcal{A}(x, y; \xi_1, \eta) d\xi_1 + \int_y^{\eta} B_z(\xi, \eta; \eta_1) \mathcal{A}(x, y; \xi, \eta_1) d\eta_1 + \int_x^{\xi} B(\xi, \eta; \eta_1) \mathcal{A}_z(x, y; \xi, \eta_1) d\eta_1 - \int_y^{\eta} C(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \mathcal{A}(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1 - \int_x^{\xi} d\xi_1 \int_y^{\eta} C_z(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \mathcal{A}(x, y; \xi_1, \eta_1) d\eta_1.$$

Полагая $\xi = x, y = h$, из предыдущего получим

$$\mathcal{A}_z(x, h; x, \eta) = \eta - h + \int_h^{\eta} B(x, \eta; \eta_1) \mathcal{A}_z(x, h; x, \eta_1) d\eta_1,$$

решение которого имеет вид

$$\mathcal{A}_z(x, h; x, \eta) = \eta - h + \int_h^{\eta} R(x, \eta; \eta_1)(\eta_1 - h) d\eta_1, \quad (16)$$

где $R(x, \eta; \eta_1)$ - резольвента ядра $B(x, \eta; \eta_1)$.

Осуществляя интегрирование по частям во втором интеграле (15), будем иметь

$$u(x, y) = D_{1z}(x, y; x) \tau(x) - \mathcal{A}_z(x, y; x, 0) \nu(x) + A_1(x, y) \varphi_1(y) - \mathcal{A}_{\eta_1}(x, y; 0, y) \varphi_2(y) + \int_0^{\xi} [N_1(x, y; \xi) \nu(\xi) - M_1(x, y; \xi) \tau(\xi)] d\xi + \int_0^{\eta} [B(x, y; \eta) \varphi_2(\eta) - C_1(x, y; \eta) \varphi_1(\eta)] d\eta + D_1(x, y; 0) \varphi_2(0) + E(x, y) \varphi_1(0) - \mathcal{A}(x, y; 0, 0) \varphi_2'(0) + F(x, y) \varphi_1'(0), \quad (17)$$

где

$$M_1(x, y; \xi) = D_{1z}(x, y; \xi) - E_{1z}(x, y; \xi) + F_1(x, y; \xi),$$

$$N_1(x, y; \xi) = \mathcal{A}_{z\eta_1}(x, y; \xi, 0) - a_2(\xi, 0) \mathcal{A}_z(x, y; \xi, 0) + [b_3(\xi, 0) - a_{2z}(\xi, 0)] \mathcal{A}(x, y; \xi, 0),$$

$$E_1(x, y) = E_1(x, y; 0) - D_{1z}(x, y; 0),$$

$$F_1(x, y) = \mathcal{A}_z(x, y; 0, 0) - a_2(0, 0) \mathcal{A}(x, y; 0, 0).$$

3. Вывод соотношений между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Используя условия (3), из (17) получим соотношение

$$D_{1z}(x, h; x) \tau(x) - \mathcal{A}_z(x, h; x, 0) \nu(x) = \int_0^{\xi} [M_1(x, h; \xi) \tau(\xi) - N_1(x, h; \xi) \nu(\xi)] d\xi + \Psi(x), \quad (18)$$

где

$$\Psi(x) = \psi(x) - A_1(x, h) \varphi_1(h) + \mathcal{A}_{\eta_1}(x, h; 0, h) \varphi_2(h) + [D_{1z}(x, h; 0) - E_1(x, h; 0)] \varphi_1(0) - D_1(x, h; 0) \varphi_2(0) - [\mathcal{A}_z(x, h; 0, 0) - a_2(0, 0) \mathcal{A}(x, h; 0, 0)] \varphi_1'(0) + \mathcal{A}(x, h; 0, 0) \varphi_2'(0) - \int_0^{\eta} [B_1(x, h; \eta) \varphi_2(\eta) - C_1(x, h; \eta) \varphi_1(\eta)] d\eta.$$

Устремляя y к нулю в (4) и учитывая обозначения (6), имеем

$$\nu'''(x) + \alpha_1(x, 0) \tau'''(x) + \alpha_2(x, 0) \nu''(x) + \beta_1(x, 0) \tau''(x) + \beta_2(x, 0) \nu'(x) + \gamma_1(x, 0) \tau'(x) + \gamma_2(x, 0) \nu(x) + \delta(x, 0) \tau(x) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

Отсюда проинтегрировав трижды по x в пределах от 0 до x , получим другое соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x) = \int_0^{\xi} H_1(x, \xi) \tau(\xi) d\xi + \int_0^{\xi} H_2(x, \xi) \nu(\xi) d\xi + \frac{1}{2} k_1 x^2 + k_1 x + \varphi_1'(0), \quad (19)$$

где

$$H_1(x, \xi) = -\beta_1(\xi, 0) + (x - \xi)[2\beta_{1z}(\xi, 0) - \gamma_1(\xi, 0)] -$$

$$-\frac{1}{2}(x - \xi)^2 [\beta_{1z}(\xi, 0) + \delta(x, 0)],$$

$$H_2(x, \xi) = -\alpha(\xi, 0) + (x - \xi)[2\alpha_z(\xi, 0) - \beta_2(\xi, 0) -$$

$$-\frac{1}{2}(x - \xi)^2 [\alpha_{zz}(\xi, 0) - \beta_{2z}(\xi, 0) + \gamma_2(\xi, 0)],$$

$$k_1 = \chi_1'(0) - \alpha_1(0, 0) \varphi_1'(0) + \alpha(0, 0) \varphi_2'(0) + \beta_1(0, 0) \varphi_2(0) - \beta_{1z}(0, 0) \varphi_1(0) - \beta_2(0, 0) \varphi_1'(0) + \gamma_1(0, 0) \varphi_1(0),$$

$$k_2 = \beta_1(0, 0) \varphi_1(0) + \alpha(0, 0) \varphi_1'(0) + \varphi_2'(0).$$

Обращая уравнение (19), как интегральное уравнение Вольтерра второго рода, будем иметь

$$v(x) = v_0(x) + \int_0^x K_0(x, \xi) \tau(\xi) d(\xi), \quad (20)$$

где

$$K_0(x, \xi) = H_1(x, \xi) + \int_{\xi}^x R(x, t) H_1(t, \xi) dt,$$

$$v_0(x) = \frac{1}{2} k_1 x^2 + k_2 x + \varphi'(0) + \int_0^x \left[\frac{1}{2} k_1 \xi^2 + k_2 \xi + \varphi'(0) \right] R(x, \xi) d\xi.$$

4. Сведение задачи к интегральному уравнению. Исключая $v(x)$ из (17) и (20), получим

$$D_{1z}(x, h; x) \tau(x) = \Psi_1(x) + \int_0^x K_1(x, \xi) \tau(\xi) d(\xi), \quad (21)$$

где

$$K_1(x, \xi) = M_1(x, h; \xi) + \mathcal{G}_z(x, h; x, 0) K_0(x, \xi) - \int_{\xi}^x N_1(x, h; t) K_0(t, \xi) dt,$$

$$\Psi_1(x) = \Psi_0(x) + \mathcal{G}_z(x, h; x, 0) v_0(x) - \int_0^x N_1(x, h; x) v_0(\xi) d\xi,$$

$$D_{1z}(x, h; x) = 1 + \int_0^h b_1(x, \eta) \mathcal{G}_z(x, h, x, \eta) d\eta.$$

С учетом (16) будем иметь представление

$$D_{1z}(x, h; x) = 1 + \int_0^h b_1(x, \eta) (\eta - h) d\eta - \int_0^h d\eta \int_0^h b_1(x, \eta) R(x, \eta; \eta) (\eta - h) d\eta.$$

Если

$$\forall x \in [0, \ell]: D_{1z}(x, h; x) \neq 0, \quad (22)$$

то уравнение (16) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, допускающего единственное решение.

Определив $\tau(x)$ по формуле (20), найдем $v(x)$. Тогда решение задачи I в области D_1 определяется по формуле (15).

5. Решение задачи I в области D_2 . С помощью функции Римана решение задачи I в области D_2 можно представить в виде

$$u(x, y) = \tau(x) + \int_0^x A_2(x, y; \xi) \tau(\xi) d\xi + \int_0^y [\mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta) \chi'_2(\eta) + B_2(x, y; \eta) \chi'_2(\eta) + \beta_1(0, \eta) \mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta) \chi_2(\eta) + D_2(x, y; \eta) \chi'_1(\eta) + E_2(x, y; \eta) \chi_1(\eta)] d\eta,$$

где

$$A_2(x, y; \xi) = -\mathcal{G}_{1zz}(x, y; \xi, 0) + [\alpha(\xi, 0) \mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)]_{zz} - [\beta_2(\xi, 0) \mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0)]_z + \gamma_2(\xi, 0) \mathcal{G}_1(x, y; \xi, 0),$$

$$H_1(x, y; \eta) = -\mathcal{G}_{1z}(x, y; 0, \eta) + \alpha(0, \eta) \mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta),$$

$$D_1(x, y; \eta) = \mathcal{G}_{1zz}(x, y; 0, \eta) - \alpha(0, \eta) \mathcal{G}_{1z}(x, y; 0, \eta) + [\beta_1(0, \eta) - \alpha_z(0, \eta)] \mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta),$$

$$E_2(x, y; \eta) = -\beta_2(0, \eta) \mathcal{G}_{1z}(x, y; 0, \eta) + [\gamma_1(0, \eta) - \beta_{1z}(0, \eta)] \mathcal{G}_1(x, y; 0, \eta).$$

Здесь $\mathcal{G}_i(x, y; \xi, \eta)$ - функция Римана, которая является решением следующей задачи [9]:

$$\mathcal{G}_{1zzz} - (\alpha \mathcal{G}_1)_{zz} + (\beta_1 \mathcal{G}_1)_{zz} + (\beta_2 \mathcal{G}_1)_{zz} - (\gamma_1 \mathcal{G}_1)_z - (\gamma_2 \mathcal{G}_1)_z + \delta \mathcal{G}_1 = 0,$$

$$\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=0} = 0, \quad y \leq \eta \leq 0,$$

$$\mathcal{G}_{1z}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 0, \quad y \leq \eta \leq 0,$$

$$\mathcal{G}_{1zz}(x, y; \xi, \eta)|_{\xi=x} = 1, \quad y \leq \eta \leq 0,$$

$$\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)|_{\eta=y} = \omega(x, y; \xi), \quad y \leq \eta \leq 0,$$

а $\omega(x, y; \xi) = \mathcal{G}(x, y; \xi, y)$ определяется как решение задачи Коши:

$$\mathcal{G}_{1zzz}(x, y; \xi, y) - [\alpha(\xi, y) \mathcal{G}_1(x, y; \xi, y)]_{zz} + [\beta_2(\xi, y) \mathcal{G}_1(x, y; \xi, y)]_z - \gamma_2(\xi, y) \mathcal{G}_1(x, y; \xi, y) = 0,$$

$$\mathcal{G}_1(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0, \quad \mathcal{G}_{1z}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 0,$$

$$\mathcal{G}_{1zz}(x, y; \xi, y)|_{\xi=x} = 1.$$

ПРИМЕР 1. Пусть $a_i = c_i = \alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0 (i = 1, 2)$, $b_3 = d = \delta = 0$.

Тогда функции $v(x)$ и $\tau(x)$ имеют вид:

$$v(x) = \chi'_1(0) + x \chi'_2(0) + \frac{1}{2} x^2 \chi'_3(0), \quad 0 \leq x < +\infty,$$

$$\tau(x) = \psi(x) - h v(x) + [\varphi_2(0) - \varphi_1(h) + h \chi'_2(0)] x + \varphi_1(0) - \varphi_2(h) + h \chi'_1(0), \quad 0 \leq x < +\infty.$$

Функции Римана определяются в явном виде:

$$\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = (\xi - x)(\eta - y), \quad (x, y) \in D_1,$$

$$\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2} (\xi - x)^2, \quad (x, y) \in D_2.$$

Поэтому решение задачи I определяется по формулам:

$$u(x, y) = \tau(x) + y v(x) + x \varphi_1(y) + \varphi_2(y) - x \varphi_2(0) - y \chi'_1(0) - x y \chi'_2(0) - \varphi_1(0), \quad (x, y) \in D_1,$$

$$u(x, y) = \tau(x) + \chi_1(y) + x \chi_2(y) + \frac{1}{2} x^2 \chi_3(y) - \chi_1(0) - x \chi_2(0) - \frac{1}{2} x^2 \chi_3(0), \quad (x, y) \in D_2,$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия (7), (8) и (22), то решение задачи I существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Лемешевский С.В., Матус П.П. Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Сибирск. матем. журн. – 1988. – Т. 39, № 4. – С. 954 – 962.
2. Нахушева В.А. Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой // Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Таганрог. 2008. – 30 с.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
4. Жегалов В.И. Некоторые задачи для уравнения смешанно-составного типа в бесконечной области // Тр. семинара по краевым задачам. – 1972. – Вып. 9. – С. 75 – 85.
5. Крикунов Ю.М. О некоторых задачах для уравнения М.А. Лаврентьева // Изв. вузов. Математика. – 1961. – №6(25). – С. 60-70.
6. Джурраев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
7. Саадалов Т.Ы. О задаче сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка // Изв. Томск. политехн. ун-та. Матем. и мех. Физика. – 2014. – Т. 325, №2. – С. 22 - 28.
8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
9. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2002. – 121 с.



ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка, когда на линии сопряжения задаются нелокальные условия, содержащие интегральные члены.

1. Постановка задачи. Задачи с нелокальным условием сопряжения для уравнений в частных производных часто используется в качестве математической модели процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [1, 2].

В работе рассматриваются краевые задачи для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения на общей границе рассматриваемых областей.

Пусть D означает прямоугольник, с вершинами $A_0(0, h)$, $A_1(0, -h)$, $B_1(\ell, -h)$, $B_0(\ell, h)$ ($h, h_1, \ell > 0$), а $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$. $J = \{(x, y) : 0 < x < \ell, y = 0\}$ - общая граница областей D_1 и D_2 . Через $C^{m,n}$ обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r,s} / \partial x^r \partial y^s$ ($r = 0, 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, m$).

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xyy} + a_1(x, y)u_{xy} + a_2(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + b_3(x, y)u_{xx} + c_1(x, y)u_x + c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = f_1(x, y), \quad (1)$$

граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x, h) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xyy} + \alpha_1(x, y)u_{xy} + \alpha_2(x, y)u_{yy} + \beta_1(x, y)u_{xx} + \beta_2(x, y)u_{yy} + \gamma_1(x, y)u_x + \gamma_2(x, y)u_y + \delta(x, y)u = f_2(x, y), \quad (4)$$

граничным условиям

$$u(0, y) = \chi_1(y), \quad u_x(0, y) = \chi_2(y), \quad u_{xx}(0, y) = \chi_3(y), \quad -h_1 \leq y \leq 0 \quad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0), \quad u_x(x, +0) = \rho(x)u_x(x, -0) + \int_0^{\ell} \theta(x, \xi)u_x(\xi, -0)d\xi + r(x), \quad (6)$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i=1, 2)$, $b_j, \chi_j (j=1, 3)$, $\varphi_1, \varphi_2, d, \delta, \psi, \rho, \theta, r$ - заданные функции, причем