Национальная академия наук Кыргызской Республики

ISSN 0130-6553

Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям

ВЫПУСК 47

Бишкек • Илим • 2014

А. СОПУЕВ, Т.Ы. СААДАЛОВ (г. Ош)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПСЕВДОПАРАБОЛО-ГИПРЕБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

В работе установлена однозначная разрешимость задачи сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка в бесконечной области.

1. Постановка задачи. Математическое моделирование прикладных задач, происходящих в неоднородных, кусочно-однородных и смешанных средах, часто сводятся к задачам сопряжения для уравнений в частных производных [1-3]. Однако, задачи сопряжений для неограниченных областей мало исследованы [4, 5].

В работе рассматривается задача сопряжения для псевдопараболического и гиперболического уравнений четвертого порядка в неограниченной области. Такие задачи в неограниченной области изучены в работах [6, 7].

Пусть $D_1 = \{(x,y): 0 < x < +\infty, 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x,y): 0 < x < +\infty, -\infty < y < 0\}$. $D = D_1 \cup D_2$. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ $(r = 0,1,\dots,n;\ s = 0,1,\dots,m)$.

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$L_1(u) \equiv u_{xxyy} + a_1 u_{xxy} + a_2 u_{xyy} + b_1 u_{xx} + b_2 u_{xy} + b_3 u_{yy} + c_1 u_x + c_2 u_y + du = 0, \tag{1}$$

граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u(x,h) = \psi(x),\ 0 \le x < +\infty, \tag{3}$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$L_2(u) \equiv u_{xxxy} + \alpha_1 u_{xxx} + \alpha_2 u_{xxy} + \beta_1 u_{xx} + \beta_2 u_{xy} + \gamma_1 u_x + \gamma_2 u_y + \delta u = 0, \tag{4}$$

граничным условиям

$$u(0,y) = \chi_1(y),\ u_x(0,y) = \chi_2(y),\ u_{xx}(0,y) = \chi_3(y),\ -\infty < y \le 0 \tag{5}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0),\ u_y(x,-0) = u_y(x,+0),\ 0 \le x < +\infty, \tag{6}$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varphi_i$ $(i = 1,2)$, b_j, χ_j $(j = \overline{1,3})$, d, δ, ψ - заданные гладкие функции, причем

$$a_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1),\ a_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+2}(D_1),\ b_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1),$$
$$b_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1),\ b_3 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1),\ c_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1),$$
$$c_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1),\ d \in C(\overline{D}_1),\ \alpha_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{3+0}(D_2), \tag{7}$$

$$\alpha_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2),\ \beta_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2),\ \beta_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_1),$$
$$\gamma_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2),\ \gamma_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2),\ \delta \in C(\overline{D}_2),$$
$$\varphi_i \in C^1[0,h]\ (i = 1, 2),\ \psi \in C^2[0,+\infty),\ \chi_j \in C^1(-\infty,0]\ (j = \overline{1,3}),$$
$$\chi_j(y) = O\left(\frac{1}{|y|^{1+\lambda}}\right) (j = \overline{1,3}),\ y \to -\infty,\ \psi(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\lambda}}\right),\ x \to +\infty,\ \lambda > 0, \tag{8}$$
$$\varphi_i(0) = \chi_i(0)\ (i = 1,2),\ \varphi_1(h) = \psi(0).$$

Уравнения (1) и (4) в силу условий сопряжения (6) являются уравнениями смешанного типа [8].

Введем обозначения:

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \tau(x),\ u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu(x),\ 0 \le x < +\infty. \tag{9}$$

2. Представление решения задачи 1 в области D_1. Сопряженным по Лагранжу оператором для оператора $L_1(u)$ будет

$$L_1^*(u) \equiv \vartheta_{yyxx} - (a_1\vartheta)_{yxx} - (a_2\vartheta)_{yyx} + (b_1\vartheta)_{xx} + (b_2\vartheta)_{yx} + (b_3\vartheta)_{yy} - (c_1\vartheta)_x - (c_1\vartheta)_y + d\vartheta.$$

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \vartheta L_1(u) - u L_1^*(\vartheta) = \{[\vartheta_{\eta\eta} - (a_1\vartheta)_\eta + b_1\vartheta]u_\xi - \\ -[\vartheta_{\eta\eta\xi} - (a_1\vartheta)_{\eta\xi} - (a_2\vartheta)_{\eta\eta} + (b_1\vartheta)_\xi + (b_2\vartheta)_\eta - c_1\vartheta]u\}_\xi - \\ -\{\vartheta_\eta u_{\xi\xi} + (a_2\vartheta)_\eta u_\xi + (b_3\vartheta)_\eta - [u_{\xi\xi\eta} + a_1 u_{\xi\xi} + a_2 u_{\xi\eta} + b_2 u_\xi + b_3 u_\eta + c_2 u]\vartheta\}_\eta. \end{aligned} \tag{10}$$

Введем функцию Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, являющаяся решением следующей задачи:

$$L_1^*(\vartheta) = 0,\ (\xi,\eta) \in D_1^* = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < x,\ 0 < \eta < y\}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = 0, \\ &\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = \omega_1(\xi,\eta;x), \\ &\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y} = 0, \\ &\vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y} = \omega_2(\xi,\eta;y), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\omega_1(\xi,\eta;x)$, $\omega_2(\xi,\eta;y)$, определяются как решения задач Коши

$$\begin{aligned} &\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,y;x,\eta) - [a_1(x,\eta)\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)]_\eta + b_1(x,\eta)\vartheta_\xi(x,y;x,\eta) = 0,\ 0 \le \eta \le y, \\ &\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y} = 0,\ \vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y} = 1, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\vartheta_{\xi\xi\eta}(x,y;\xi,y) - [a_2(\xi,y)\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)]_\xi + b_3(\xi,y)\vartheta_\eta(x,y;\xi,y) = 0,\ 0 \le \xi \le x, \\ &\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = 0,\ \vartheta_{\eta\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Интегрируя тождество (10) по области D_1^* и учитывая свойства функции Римана, получим представление решения уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и (9):

$$u(x,y) = A_1(x,y)\varphi_1(y) - \vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_2(y) + \int_0^y [B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta) - C_2(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta +$$

$$+\int_0^x [\vartheta(x,y;\xi,0)\nu''(\xi) - D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi) + a_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\nu'(\xi) - E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi) + \tag{15}$$

$$+ b_3(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\nu(\xi) - E_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi ,$$

где

$A_1(x,y) = \vartheta_{\eta\xi}(x,y;0,y) - a_2(0,y)\vartheta_\eta(x,y;0,y),$

$B_1(x,y;\eta) = \vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta) - a_1(0,\eta)\vartheta_\eta(x,y;0,\eta) + [b_1(0,\eta) - a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta(x,y;0,\eta),$

$C_1(x,y;\eta) = \vartheta_{\eta\eta\xi}(x,y;0,\eta) - a_1(0,\eta)\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta) - a_2(0,\eta)\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta) +$

$+[b_1(0,\eta) - a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_\xi(x,y;0,\eta) + [b_2(0,\eta) - a_{1\xi}(0,\eta) - 2a_{2\eta}(0,\eta)]\vartheta_\eta(x,y;0,\eta) +$

$+[b_{1\xi}(0,\eta) + b_{2\eta}(0,\eta) - c_1(0,\eta) - a_{2\eta\eta}(0,\eta - a_{1\xi\eta}(0,\eta)]\vartheta(x,y;0,\eta),$

$D_1(x,y;\xi) = \vartheta_\eta(x,y;\xi,0) - a_1(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$

$E_1(x,y;\xi) = a_2(\xi,0)\vartheta_\eta(x,y;\xi,0) + [a_{2\eta}(\xi,0) - b_2(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0),$

$F_1(x,y;\xi) = b_3(\xi,0)\vartheta_\eta(x,y;\xi,0) + [b_{3\eta}(\xi,0) - c_2(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0).$

Функция Римана удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta) = (\xi - x)(\eta - y) + \int_x^\xi A(\xi,\eta;\xi_1)\vartheta(x,y;\xi_1,\eta)d\xi_1 +$$

$$+\int_y^\eta B(\xi,\eta;\eta_1)\vartheta(x,y;\xi,\eta_1) - \int_x^\xi d\xi_1 \int_y^\eta C(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\vartheta(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1,$$

где

$A(\xi,\eta;\xi_1) = a_2(\xi_1,\eta) - (\xi - \xi_1)b_3(\xi_1,\eta),\ B(\xi,\eta;\eta_1) = a_1(\xi,\eta_1) - (\eta - \eta_1)b_1(\xi,\eta_1),$

$C(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1) = b_2(\xi_1,\eta_1) - (\xi - \xi_1)c_2(\xi_1,\eta_1) - (\eta - \eta_1)c_1(\xi_1,\eta_1) + (\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1)d(\xi_1,\eta_1).$

Отсюда найдем

$$\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta) = \eta - y + A(\xi,\eta;\xi)\vartheta(x,y;\xi,\eta) + \int_x^\xi A_\xi(\xi,\eta;\xi_1)\vartheta(x,y;\xi_1,\eta)d\xi_1 +$$

$$+\int_y^\eta B_\xi(\xi,\eta;\eta_1)\vartheta(x,y;\xi,\eta_1)d\eta_1 + \int_y^\eta B(\xi,\eta;\eta_1)\vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta_1)d\eta_1 -$$

$$-\int_y^\eta C(\xi,\eta;\xi,\eta_1)\vartheta(x,y;\xi,\eta_1)d\eta_1 - \int_x^\xi d\xi_1 \int_y^\eta C_\xi(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\vartheta(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1.$$

Полагая $\xi = x,\ y = h$, из предыдущего получим

$$\vartheta_\xi(x,h;x,\eta) = \eta - h + \int_h^\eta B(x,\eta;\eta_1)\vartheta_\xi(x,h;x,\eta_1)d\eta_1 ,$$

решение которого имеет вид

$$\vartheta_\xi(x,h;x,\eta) = \eta - h + \int_h^\eta R(x,\eta;\eta_1)(\eta_1 - h)d\eta_1, \tag{16}$$

где $R(x,\eta;\eta_1)$ - резольвента ядра $B(x,\eta;\eta_1)$.

Осуществляя интегрирование по частям во втором интеграле (15), будем иметь

$$u(x,y) = D_{1\xi}(x,y;x)\tau(x) - \vartheta_\xi(x,y;x,0)\nu(x) + A_1(x,y)\varphi_1(y) - \vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_2(y) +$$

$$+\int_0^x [N_1(x,y;\xi)\nu(\xi) - M_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi + \int_0^y [B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta) - C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta +$$

$$+ D_1(x,y;0)\varphi_2(0) + E(x,y)\varphi_1(0) - \vartheta(x,y;0,0)\varphi_2'(0) + V(x,y)\varphi_1'(0), \tag{17}$$

где

$M_1(x,y;\xi) = D_{1\xi\xi}(x,y;\xi) - E_{1\xi}(x,y;\xi) + F_1(x,y;\xi),$

$N_1(x,y;\xi) = \vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0) - a_2(\xi,0)\vartheta_\xi(x,y;\xi,0) + [b_3(\xi,0) - a_{2\xi}(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0),$

$E(x,y) = E_1(x,y;0) - D_{1\xi}(x,y;0),$

$V(x,y) = \vartheta_\xi(x,y;0,0) - a_2(0,0)\vartheta(x,y;0,0).$

3. Вывод соотношений между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Используя условия (3), из (17) получим соотношение

$$D_{1\xi}(x,h;x)\tau(x) - \vartheta_\xi(x,h;x,0)\nu(x) =$$

$$= \int_0^x [M_1(x,h;\xi)\tau(\xi) - N_1(x,h;\xi)\nu(\xi)]d\xi + \Psi(x), \tag{18}$$

где

$$\Psi(x) = \psi(x) - A_1(x,h)\varphi_1(h) + \vartheta_\eta(x,h;0,h)\varphi_2(h) + [D_{1\xi}(x,h;0) - E_1(x,h;0)]\varphi_1(0) -$$

$$- D_1(x,h;0)\varphi_2(0) - [\vartheta_\xi(x,h;0,0) - a_2(0,0)\vartheta(x,h;0,0)]\varphi_1'(0) + \vartheta(x,h;0,0)]\varphi_2'(0) -$$

$$-\int_0^h [B_1(x,h;\eta)\varphi_2(\eta) - C_1(x,h;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta.$$

Устремляя y к нулю в (4) и учитывая обозначения (6), имеем

$$\nu'''(x) + \alpha_1(x,0)\tau'''(x) + \alpha_2(x,0)\nu''(x) + \beta_1(x,0)\tau''(x) + \beta_2(x,0)\nu'(x) +$$

$$+ \gamma_1(x,0)\tau'(x) + \gamma_2(x,0)\nu(x) + \delta(x,0)\tau(x) = 0,\ 0 < x < +\infty.$$

Отсюда проинтегрировав трижды по x в пределах от 0 до x, получим другое соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x) = \int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^x H_2(x,\xi)\nu(\xi)d\xi + \frac{1}{2}k_1x^2 + k_1x + \varphi_1'(0), \tag{19}$$

где

$$H_1(x,\xi) = -\beta_1(\xi,0) + (x - \xi)[2\beta_{1\xi}(\xi,0) - \gamma_1(\xi,0)] -$$

$$-\frac{1}{2}(x - \xi)^2[\beta_{1\xi\xi}(\xi,0) + \delta(x,0)],$$

$$H_2(x,\xi) = -\alpha(\xi,0) + (x - \xi)[2\alpha_\xi(\xi,0) - \beta_2(\xi,0) -$$

$$-\frac{1}{2}(x - \xi)^2[\alpha_{\xi\xi}(\xi,0) - \beta_{2\xi}(\xi,0) + \gamma_\xi(\xi,0)],$$

$$k_1 = \chi_3'(0) - \alpha_x(0,0)\varphi_1'(0) + \alpha(0,0)\varphi_2'(0) + \beta_1(0,0)\varphi_2(0) -$$

$$- \beta_{1x}(0,0)\varphi_1(0) - \beta_2(0,0)\varphi_1'(0) + \gamma_1(0,0)\varphi_1(0),$$

$$k_1 = \beta_1(0,0)\varphi_1(0) + \alpha(0,0)\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0).$$

Обращая уравнение (19), как интегральное уравнение Вольтерра второго рода, будем иметь

$$\nu(x)=\nu_0(x)+\int_0^x K_0(x,\xi)\tau(\xi)d(\xi), \tag{20}$$

где

$$K_0(x,\xi)=H_1(x,\xi)+\int_\xi^x R(x,t)H_1(t,\xi)dt,$$

$$\nu_0(x)=\frac{1}{2}k_1x^2+k_2x+\varphi_1'(0)+\int_0^x[\frac{1}{2}k_1\xi^2+k_2\xi+\varphi_1'(0)]R(x,\xi)]d\xi.$$

4. Сведение задачи к интегральному уравнению. Исключая $\nu(x)$ из (17) и (20), получим

$$D_{1\xi}(x,h;x)\tau(x)=\Psi_1(x)+\int_0^x K_1(x,\xi)\tau(\xi)d(\xi), \tag{21}$$

где

$$K_1(x,\xi)=M_1(x,h;\xi)+\vartheta_\xi(x,h;x,0)K_0(x,\xi)-\int_\xi^x N_1(x,h;t)K_0(t,\xi)dt,$$

$$\Psi_1(x)=\Psi_0(x)+\vartheta_\xi(x,h;x,0)\nu_0(x)-\int_0^x N_1(x,h;x)\nu_0(\xi)d\xi,$$

$$D_{1\xi}(x,h;x)=1+\int_0^h b_1(x,\eta_1)\vartheta_\xi(x,h,x,\eta_1)d\eta_1.$$

С учетом (16) будем иметь представление

$$D_{1\xi}(x,h;x)=1+\int_0^h b_1(x,\eta)(\eta-h)d\eta-\int_0^h d\eta\int_\eta^h b_1(x,\eta)R(x,\eta;\eta_1)(\eta_1-h)d\eta_1\,.$$

Если

$$\forall x\in[0,\ell]:\ D_{1\xi}(x,h;x)\neq 0, \tag{22}$$

то уравнение (16) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, допускающего единственное решение.

Определив $\tau(x)$ по формуле (20), найдем $\nu(x)$.Тогда решение задачи 1 в области D_1 определяется по формуле (15).

5. Решение задачи 1 в области D_2. С помощью функции Римана решение задачи 1 в области D_2 можно представить в виде

$$u(x,y)=\tau(x)+\int_0^x A_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^y[\vartheta_1(x,y;0,\eta)\chi_3'(\eta)+B_2(x,y;\eta)\chi_2'(\eta)+$$

$$+\beta_1(0,\eta)\vartheta_1(x,y;0,\eta)\chi_2(\eta)+D_2(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)+E_2(x,y;\eta)\chi_1(\eta)d\eta,$$

где

$$A_2(x,y;\xi)=-\vartheta_{1\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0)+[\alpha(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)]_{\xi\xi}-[\beta_2(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0)]_\xi+$$

$$+\gamma_2(\xi,0)\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$

$$B_2(x,y;\eta)=-\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta)+\alpha(0,\eta)\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$

$$D_2(x,y;\eta)=\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;0,\eta)-\alpha(0,\eta)\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta)+[\beta_1(0,\eta)-\alpha_\xi(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$

$$E_2(x,y;\eta)=-\beta_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta)+[\gamma_1(0,\eta)-\beta_{1\xi}(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta).$$

Здесь $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана, которая является решением следующей задачи [9]:

$$\vartheta_{1\xi\xi\xi\eta}-(\alpha\vartheta_1)_{\xi\xi\eta}+(\beta_1\vartheta_1)_{\xi\xi}+(\beta_2\vartheta_1)_{\xi\eta}-(\gamma_1\vartheta_1)_\xi-(\gamma_2\vartheta_1)_\eta+\delta\vartheta_1=0,$$

$$\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\ y\le\eta\le 0,$$

$$\vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\ y\le\eta\le 0,$$

$$\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=1,\ y\le\eta\le 0,$$

$$\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\omega(x,y;\xi),\ y\le\eta\le 0,$$

а $\omega(x,y;\xi)=\vartheta(x,y;\xi,y)$ определяется как решение задачи Коши:

$$\vartheta_{1\xi\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[\alpha(\xi,y)\vartheta_1(x,y;\xi,y)]_{\xi\xi}+$$

$$+[\beta_2(\xi,y)\vartheta_1(x,y;\xi,y)]_\xi-\gamma_2(\xi,y)\vartheta_1(x,y;\xi,y)=0,$$

$$\vartheta_1(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,$$

$$\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1.$$

ПРИМЕР 1. Пусть $a_i=c_i=\alpha_i=\beta_i=\gamma_i=0(i=1,2)$, $b_3=d=\delta=0$. Тогда функции $\nu(x)$ и $\tau(x)$ имеют вид:

$$\nu(x)=\chi_1'(0)+x\chi_2'(0)+\frac{1}{2}x^2\chi_3'(0),\ 0\le x<+\infty,$$

$$\tau(x)=\psi(x)-h\nu(x)+[\varphi_2(0)-\varphi_1(h)+h\chi_2'(0)]x+$$

$$+\varphi_1(0)-\varphi_2(h)+h\chi_1'(0),\ 0\le x<+\infty.$$

Функции Римана определяются в явном виде:

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=(\xi-x)(\eta-y),\ (x,y)\in D_1,$$

$$\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2}(\xi-x)^2,\ (x,y)\in D_2.$$

Поэтому решение задачи 1 определяется по формулам:

$$u(x,y)=\tau(x)+y\nu(x)+x\varphi_1(y)+\varphi_2(y)-x\varphi_2(0)-y\chi_1'(0)-xy\chi_2'(0)-\varphi_1(0),\ (x,y)\in D_1,$$

$$u(x,y)=\tau(x)+\chi_1(y)+x\chi_2(y)+\frac{1}{2}x^2\chi_3(y)-\chi_1(0)-x\chi_2(0)-\frac{1}{2}x^2\chi_3(0),\ (x,y)\in D_2,$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия (7), (8) и (22), то решение задачи 1 существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Лемешевский С.В., Матус П.П.* Разностные схемы для задачи о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Сибирск. матем. журн. – 1988. – Т. 39, № 4. – С. 954 - 962.
2. *Нахушева В.А.* Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой // Автореф. дисс. … докт. физ.-мат. наук. – Таганрог. 2008. – 30 с.
3. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
4. *Жегалов В.И.* Некоторые задачи для уравнения смешанно-составного типа в бесконечной области // Тр. семинара по краевым задачам. – 1972. – Вып. 9. – С. 75 – 85.
5. *Крикунов Ю.М.* О некоторых задачах для уравнения М.А. Лаврентьева // Изв. вузов. Математика. – 1961. – №6(25). – С. 60-70.
6. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
7. *Саадалов Т.Ы.* О задаче сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка // Изв. Томск. политехн. ун-та. Матем. и мех. Физика. – 2014. – Т. 325, №2. – С. 22 - 28.
8. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
9. *Асылбеков Т.Д.* Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2002. – 121 с.

Т.Ы. САДАЛОВ (г. Ош)

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Доказана однозначная разрешимость задачи сопряжения для линейного гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка, когда на линии сопряжения задаются нелокальные условия, содержащие интегральные члены.

1. Постановка задачи. Задачи с нелокальным условием сопряжения для уравнений в частных производных часто используется в качестве математической модели процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [1, 2].

В работе рассматриваются краевые задачи для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения на общей границе рассматриваемых областей.

Пусть D означает прямоугольник, с вершинами $A_0(0,h)$, $A_1(0,-h_1)$, $B_1(\ell,-h_1)$, $B_0(\ell,h)$ $(h,\ h_1,\ell>0)$, а $D_1=D\cap(y>0)$, $D_2=D\cap(y<0)$. $J=\{(x,y):0<x<\ell,y=0\}$ - общая граница областей D_1 и D_2. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s$ $(r=0,1,\ldots,n;\ s=0,1,\ldots,m)$.

ЗАДАЧА 1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$\begin{aligned}L_1(u)\equiv u_{xxyy}+a_1(x,y)u_{xxy}+a_2(x,y)u_{xyy}+b_1(x,y)u_{xx}+b_2(x,y)u_{xy}+\\+b_3(x,y)u_{yy}+c_1(x,y)u_x+c_2(x,y)u_y+d(x,y)u=f_1(x,y),\end{aligned}\qquad(1)$$

граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,\qquad(2)$$

$$u(x,h)=\psi(x),\ 0\le x\le \ell,\qquad(3)$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$\begin{aligned}L_2(u)\equiv u_{xxxy}+\alpha_1(x,y)u_{xxx}+\alpha_2(x,y)u_{xxy}+\beta_1(x,y)u_{xx}+\\+\beta_2(x,y)u_{xy}+\gamma_1(x,y)u_x+\gamma_2(x,y)u_y+\delta(x,y)u=f_2(x,y),\end{aligned}\qquad(4)$$

граничным условиям

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ \ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ \ u_{xx}(0,y)=\chi_3(y),\ \ -h_1\le y\le 0\qquad(5)$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,+0)=\rho(x)u_y(x,-0)+\int_0^x\theta(x,\xi)u_y(\xi,-0)d\xi+r(x),\qquad(6)$$

где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i\,(i=1,2)$, $b_j, \chi_j\,(j=\overline{1,3})$, $\varphi_1,\varphi_2,d,\delta,\psi,\rho,\theta,r$ - заданные функции, причем