КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН
БИЛИМ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН УЛУТТУК ИЛИМДЕР АКАДЕМИЯСЫНЫН ТҮШТҮК БӨЛҮМҮНДӨГҮ ЖАРАТЫЛЫШ БАЙЛЫКТАР ИНСТИТУТУ

ДИССЕРТАЦИЯЛЫК КЕҢЕШ К 01.15.504

Кол жазма укугуна ээ
УДК: 517.97; 62-50

Кадиримбетова Айша Казахбаевна

ФРЕДГОЛЬМ ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИ МЕНЕН МУНӨЗДӨЛГӨН ЖЫЛУУЛУК ПРОЦЕССТЕРИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЧЕКТИК БАШКАРУУ

01.01.02 – «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу»

физика-математика илимдеринин кандидаты
илимий даражасын изденип алуунун

ӨЗРЕФЕРАТЫ

Бишкек – 2016

Диссертациялык иш И. Арабаев атындагы Кыргыз Мамлекеттик университетинин «Жогорку математика» кафедрасында аткарылган

Илимий жетекчи: физика-математика илимдеринин доктору, профессор **Керимбеков Акылбек**

Официалдык оппоненттер: физика-математика илимдеринин доктору, доцент **Аширбаева Айжаркын Жоробековна**,

физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент **Абдувалиев Абдыганы Осмонович**

Жетектөөчү мекеме Кыргыз-Түрк «Манас» университети, Кыргызстан, 720044, Бишкек, Ч.Айтматов проспекти, 56

Диссертацияны коргоо Ош мамлекеттик университетинин жана Кыргыз Республикасынын Улуттук Илимдер Академиясынын Түштүк бөлүмүндөгү жаратылыш байлыктар Институтунун алдындагы физика-математика илимдери боюнча кандидаттык илимий даражаны изденип алуучулар үчүн түзүлгөн К 01.15.504 диссертациялык кеңешинин *2016 ж. «23» сентябрь, саат 16^{30}-да*, төмөнкү 723500, Ош ш., Ленин көч., 331 дареги боюнча өтө турган отурумунда болот.

Диссертацияны Ош мамлекеттик университетинин Борбордук китепканасынан окусаңыз болот.

Өэреферат 2016 ж. «*21» июнда* таратылган

Диссертациялык кеңештин
илимий катчысы,
физ.-мат.илим.канд., доцент Бекешов Т. О.

ИЗИЛДӨӨНҮН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Теманын актуалдуулугу. Математикалык формализациясы интегро-дифференциалдык теңдемелерге алып келген маселелер практикада көп кездешет. Мисалы, жылуулук жана диффузиялык, ошондой эле жылуулук нейтрондорунун жылышуу процесстерин башкаруу менен байланышкан маселелер А. И. Егоровдун жана В.С. Владимировдун эмгектеринде келтирилген.

Өткөн кылымдын 60-жылдары А.Г. Бутковскийдин, А. И. Егоровдун, Т. К. Сиразетдиновдун ж.б. эмгектеринде жайылган параметрлүү системаны оптималдуу башкаруу теориясынын негиздери иштелип чыккан. Бирок изилдөөнүн татаалдыгына байланыштуу оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселелери азыраак каралган.

Жайылган параметрлүү системаны оптималдуу башкаруу теориясында сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелеринин чечилишин изилдөө жана алардын чыгарылышын табуунун конструктивдүү ыкмал арын иштеп чыгуу актуалдуу маселелердин бири болуп саналат.

Диссертацияда негизги көңүл Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мунөздөлгөн жылуулук процесстерин сызыктуу эмес чектик башкаруу маселелерин изилдөөгө бурулган. Маселеде сырттан таасир этүүчү күчтүн функциясы башкаруучу параметрлерден сызыктуу эмес көз каранды болгон учур каралган.

Диссертациянын темасынын илимий мекемелерде өткөрүлгөн чоң илимий программалар менен, негизги илимий изилдөө иштери менен байланышы. Диссертация № КР-05 (мамлекеттик регистрациянын номери № 0006988) «Математическое обеспечение процессов управления энерго-массопереносами, происходящими в линиях передач, и продукционными почво-растительными системами» КР Билим жана Илим Министрлигинин илимий долбоорунун чегинде алынган илимий натыйжалардын негизинде жазылган.

Изилдөөнүн максаттары жана маселелери. Диссертациялык иштин максаты - Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мунөздөлгөн жылуулук процесстерин сызыктуу эмес чектик башкаруу маселелерин сырткы күч заттын бир жак учунан (четинен) таасир эткен учурда заттагы жылуулуктун таралышынын абалын изилдөө жана оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышынын жашоосунун жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттарын аныктоо болуп саналат. Ошол максатта төмөнкүдөй маселелер каралган:

– фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мүнөздөлгөн жылуулук процессин башкаруудагы чектик маселенин солгун жалпыланган чыгарылышын табуу;

– тутумдаш чектик маселенин жалпыланган чыгарылышын тургузуу;

– оптималдуу башкаруунун сызыктуу эмес интегралдык теңдемесин алуу жана анын чыгарылышын изилдөө;

– чектик башкаруудагы сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чыгарылышын тургузуу жана анын башкаруу функция, оптималдык процесс жана функционал боюнча жакындаштырылган маанилеринин жыйналуучулугун изилдөө.

Иштин илимий жаңылыгы. Фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин чектик башкаруу мисалында оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселесинин чыгарылышын жана анын жакындоолорун түзүү алгоритми биринчи жолу иштелип чыккан.

Алынган натыйжалар жайылган параметрлүү системаны оптималдуу башкаруу теориясында жаңылык болуп эсептелинет, тагыраак айтканда:

– негизги жана тутумдаш чектик маселелеринин солгун чыгарылыштарынын Фурье коэффициентери фредгольмдун экинчи түрдөгү бир тектүү эмес сызыктуу интегралдык теңдемелеринин чыгарылышы болору такталган;

– оптималдык башкаруу функциясы сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин дифференциалдык барабарсыздык түрүндөгү кошумча шартты канааттандырган чыгаралышы катары аныкталары такталган;

– чектик башкаруу учурунда фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме менен мүнөздөлгөн жылуулук процессин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышка ээ болушунун жеткиликтүү шарттары такталган;

– сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин жакындаштырылган чыгарылыштарын табуунун алгоритми түзүлгөн жана алардын оптималдык башкаруу, оптималдык процесс жана функционал боюнча маселенин так чыгарылышына жыйналуучулугу далилденген.

Теоретикалык и практикалык баалуулугу. Сызыктуу эмес оптималдаштыруунун маселесинин чектик башкаруу функциясы сызыктуу эмес болгон учурдагы жакындаштырылган чыгарылышын табуунун түзүлгөн алгоритмин практикада колдонууга болот. Алынган теориялык маалыматтар жайылган параметрлүү системаларды оптималдуу башкаруу териясында жаңылык болуп саналат жана оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселелерин чыгаруунун конструктивдүү ыкмаларын иштеп чыгууда колдонулушу мүнкүн.

Коргоого сунушталган диссертациянын негизги жоболору:

– негизги жана тутумдаш чектик маселелеринин солгун чыгарылыштарынын Фурье коэффициентерин фредгольмдун экинчи түрдөгү бир тектүү эмес сызыктуу интегралдык теңдемелеринин чыгарылышы катары аныктоо;

– оптималдык башкаруу функциясын сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин дифференциалдык барабарсыздык түрүндөгү кошумча шартты канааттандырган чыгаралышы катары аныктоо;

– чектик башкаруу учурунда фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме менен мүнөздөлгөн жылуулук процессин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышка ээ болушунун жеткиликтүү шарттарын аныктоо;

– сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин жакындаштырылган чыгарылыштарын табуунун алгоритмин аныктоо жана алардын оптималдык башкаруу, оптималдык процесс жана функционал боюнча маселенин так чыгарылышына жыйналуучулугу далилдөө.

Изденүүчүнүн өздүк салымы. Изилдөөнүн негизинде 10 статья, 2 тезис жарыяланган. Авторлордун биргеликте чыгарган иштеринде маселенин коюулушу илимий жетекчиге таандык болсо, негизги жыйынтыктардын далилдөөсү изденүүчү тарабынан алынган.

Диссертациянын жыйынтыктарынын сыноолордон өтүшү. Диссертацияда келтирилген илимий маалыматтар эл аралык конференцияларда, симпозиумдарда жана университеттер ортосундагы, университеттин ичиндеги конференцияларда баяндалган:

– «Башкаруу теориясынын, топологиянын жана оператордук теңдемелердин актуалдуу маселелери» атындагы экинчи Эл аралык илимий конференция. Кыргызстан, Булан-Соготту, 5–7-сентябрь 2013;

– Профессор Р.Усубакуновдун элесине арналган 3- республикалык илимий конференция. Кыргызстан, Бишкек, 17-апрель 2014;

– Анализ жана колдонмо математика боюнча экинчи Эл аралык конференция, Шымкент, Казахстан, 11–13-сентябрь, 2014;

– «Маалымат технологиялары: билим жана илимдеги инновациялар» атындагы эл аралык илимий-практикалык конференция. Казахстан, Актобе, 19–21-февраль, 2015.

– Казахстан Республикасынын президентинин «Нурдуу жол - келечекке жол» аттуу казакстан элине кайрылган жолдомосун ишке ашыруу боюнча негизинде өткөрүлгөн «Илим жана азыркы заман– 2015» республикалык илимий-практикалык конференция. Казахстан, Тараз, 13-март 2015.

Изденүүчүнүн илимий жыйынтыктары Кыргыз-Орус Славян университетинин «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасынын илимий семинарларында үзгүлтүксүз талкууланган (илимий жетекчи – проф. Керимбеков А. К.)

Диссертациянын жыйынтыктарынын басылмаларда толук чагылдырылышы. Диссертациялык изилдөөнүн негизги жыйынтыктары 10 илимий статьяда жана 2 тезисте чагылдырылган, тагыраак айтканда Кыргыз Республикасынын илимий журналдарында – 4, чет мамлекеттик илимий журналдарында – 5, конференциянын материалдарында – 1, алардын ичинен автордун жалгыз өзү чыгарганы – 4.

Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү. Диссертация киришүүдөн, 2 баптан, 8 бөлүмдөн, корутундудан, колдонулган адабияттардын 99 аталыштагы тизмесинен жана тиркемеден турат. Иштин көлөмү компьютерде терилген 106 беттен турат.

Изилдөөнүн мазмуну төмөндөгүдөй ирээтте жазылды.

Биринчи бапта Фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин чектик башкаруу мисалында оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселесинин чыгарылышы башкаруунун сапаты квадраттык функционал менен бааланган учурда изилденди.

1.1 пунктунда башкарылуучу $v(t,x)$ процессинин өзгөрүшүн мүнөздөгөн чектик маселеге эквиваленттүү болгон интегралдык теңдештикти түзүү жана анын негизинде чектик маселенин солгун жалпыланган чыгарылышын тургузуу маселеси каралган. Чектик маселеде $Q=\{0<x<1, 0<t<T\}$ аймагында

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^T K(t,\tau) v(\tau,x) d\tau + g(t,x) \ , \tag{1}$$

түрүндөгү интегро-дифференциалдык теңдемени канааттандырган жана анын чегинде

$$v(0,x) = \psi(x), \ \ 0 < x < 1 \tag{2}$$

баштапкы шартын жана

$$v_x(t,0) = 0, \ \ v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = f[t, u(t)], \ \ 0 < t \le T, \tag{3}$$

чектик шарттарын канааттандырган $v(t,x)$ функциясын табуу талап кылынат. Мында T – убакыттын белгиленген учуру, $K(t,\tau)$ – $D=\{0 \le t \le 1, 0 \le \tau \le 1\}$ аймагында аныкталган жана төмөнкү шартты канааттандырган

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t,\tau) d\tau dt = K_0 < \infty, \tag{4}$$

берилген функция, б. а. $H(D)$ гильберт мейкиндигинин элементи;

$$g(t,x) \in H(Q), \quad \psi(x) \in H(0,1),$$
$$f\left[t,u(t)\right] \in H(0,T), \quad f_u\left[t,u(t)\right] \neq 0 \qquad (5)$$

берилген функциялар, $u(t) \in H(0,T)$ башкаруучу функция, λ – параметр, $\alpha > 0$ туруктуу чондук.

Белгилүү болгондой, (5) шарт аткарылганда (1)-(3) чектик маселеси классикалык чыгарылышка ээ болбойт. Ошондуктан (1)-(3) чектик маселе үчүн солгун жалпыланган чыгарыш түшүнүгү колдонулган. (1) – (3) чектик маселенин бул чыгарылышын

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x), \qquad (6)$$

түрдө издейбиз, мында

$$v_n(t) = \int_0^1 v(t,x) z_n(x) dx$$

Фурье коэффициентери. $v_n(t)$ функциялары фредгольмдун экинчи түрдөгү бир тектүү эмес сызыктуу интегралдык теңдемелеринин чыгарылышы катары б.а.

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t,s) v_n(s) ds + a_n(t). \qquad (7)$$

тендемесинин чыгарылы катары аныкталат.

(7) формуласында $K_n(t,s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau,s) d\tau,$ - ядро,

$$a_n(t) = e^{\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) f\left[\tau, u(\tau)\right]\right) d\tau,$$

бош мүчө болуп саналат. (7)-чи тендеменин чыгарылышы

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t),$$ аныкталат.

Мында $R_n(t,s,\lambda)$ функциясы $K_n(t,s)$ ядросунун резольвентасы болот.

1.2 пунктунда койулган оптималдаштыруу маселесинде квадраттык интегралдык функционалды

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2(t,u(t)) dt, \ \beta > 0, \qquad (8)$$

минималдаштыруу маселеси каралган, мында $\xi(x) \in H(0,1), \ q(t,u(t)) \in H(0,1)$ - берилген функциялар, $q(t,u(t))$ функциясы $u(t)$ функционалдык өзгөрүлмөсү боюнча томпок функция деп саналат.

Жайылган параметрлүү система үчүн максимум принцибин колдонуп, оптималдуу башкаруу функциясы үчүн төмөнкүдөй

$$2\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))\, f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=\omega(t,1), \tag{9}$$

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{q(t,u(t))q_u(t,u(t))}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u>0, \tag{10}$$

шарттарды алабыз. Бул шарттар-оптималдуулук шарттары деп аталат, мында $\omega(t,x)$ функциясы

$$\omega_t+\omega_{xx}+\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau=0,\quad 0<x<1,\quad 0\le t<T,$$
$$\omega(T,x)+2\left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]=0,\quad 0<x<1,$$
$$\omega_x(t,0)=0,\quad \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\quad 0\le t<T.$$

түрүндөгү тутумдаш чектик маселенин жалпыланган чыгарылышы жана ал

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(x),$$

барабардыгы боюнча аныкталат, мында

$R_n(s,t,\lambda)$ – функциясы, $B_n(s,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}K(s,\tau)d\tau$ ядросунун резольвентасы.

1.4 пунктунда (9) жана (10) оптималдуулук шарттары аткарылганда, оптималдуу башкарууга карата төмөнкүдөй

$$\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))\, f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)\, f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_n, \tag{11}$$

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right)-\int_0^T g_n(\tau)\left(e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau,$$

$$G_n(t,\lambda)=z_n(1)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right],$$

$$\tilde{G}_n(t,\lambda)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(1).$$

ызыктуу эмес интегралдык теңдеме алынат.

Сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чыгарылышка ээ болуусун берилген $f[t,u(t)]$ жана $q(t,u(t))$ функциялары үчүн (10) шарт аткарылат деп изилдейбиз. Бул учурда (11) теңдеменин чыгарышын табуу гана калат. Проф. А. Керимбеков сунуштаган методикага таянып, төмөнкүдөй

$$\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))\,f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = p(t). \tag{12}$$

белгилөөсүн жүргүзөбүз.

(10) шарт боюнча (12) барабардыктан $u(t)$ башкаруу функциясы бир маанилүү аныкталат, б. а.

$$u(t) = \varphi(t,\, p(t),\beta). \tag{13}$$

барабардыгын канааттандырган φ функциясы жашайт.

(12) и (13) барабардыктарынын негизинде (11) теңдемесин

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)\, f\left[s,\varphi(s,\,p(s),\beta)\right]ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)h_n \tag{14}$$

түрүндө жазабыз. Анын оператордук формада

$$p(t) = G[\,p(t)] + h(t), \tag{15}$$

мында

$$G[\,p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda)\left[-\int_0^T G_n(s,\lambda)\, f\left[s,\varphi(s,\,p(s),\beta)\right]ds\right]. \tag{16}$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n(t,\lambda)h_n \tag{17}$$

түрүндөгү барабардык болот.

Эми (15) оператордук теңдеменин жалгыз чыгарылышка ээ болуусун изилдейбиз.

Лемма 1.4.2. $h(t)$ функциясы $H(0,T)$ гильберт мейкиндигинин элементи болот.

Лемма 1.4.3. $G[p(t)]$ оператору $H(0,T)$ мейкиндигин өзүнө кото-рот, б. а. $H(0,T)$ гильберт мейкиндигинин элементи болот.

Лемма 1.4.4. Төмөнкү шарттар аткарылсын

$$\|\, f[t,u(t)] - f[t,\overline{u}(t)]\,\|_H \le f_0 \,\|\, u(t) - \overline{u}(t)\,\|_H,\;\; f_0 > 0, \tag{18}$$

$$\|\,\varphi[t,\, p(t),\beta] - \varphi[t,\, \overline{p}(t),\beta]\,\|_H \le \varphi_0(\beta)\,\|\, p(t) - \overline{p}(t)\,\|_H,\; \varphi_0(\beta) > 0. \tag{19}$$

Анда

$$\gamma = \left[2\left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\,\lambda\,|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\right] f_0\varphi_0(\beta) < 1, \tag{20}$$

шарты аткарылганда, $G[p]$ кысуучу оператору болот.

Теорема 1.4.1. (5) и (18)–(19) шарттары аткарылсын. Анда (15) оператордук теңдеме $H(0,T)$ мейкиндигинде жалгыз чыгарылышка ээ болот.

(15) оператордук теңдеменин чыгарылышы удаалаш жакындаштыруу ыкмасы менен табылат, б. а. чыгарылыштын n - жакындоосу төмөнкү формула менен аныкталат

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

мында $p_0(t)$ $H(0,T)$ мейкиндигинин каалагандай элементи, жана төмөнкүдөй барабарсыздык орун алат

$$\| \overline{p}(t) - p_n(t) \|_H \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \| G[p_0(t)] - p_0(t) \|_H .$$

(15) операторлук теңдеменин так чыгарылышы болгон $\overline{p}(t)$ функциясы жакындаштырылган чыгарылыштарынын предели катары табылат, б. а.

$$\overline{p}(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t).$$

Бул чыгарылышты (13) коюп, (11) теңдеменин

$$u^0(t) = \varphi\left[t, \overline{p}(t), \beta\right]$$

изделген чыгарылышын алабыз.

1.5 пунктунда $u^0(t)$ оптималдык башкаруу боюнча $v^0(t,x)$ оптималдык процессти

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^0(t) + \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n^0(s) ds \right) z_n(x),$$

барабардыгы боюнча аныктайбыз, мында

$$a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) f\left[\tau, u^0(\tau)\right] \right) d\tau .$$

(8) функционалдын минималдык мааниси төмөндөгү формула менен эсептелинет

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 \left[v^0(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2(t, u^0(t)) dt.$$

Табылган $\left(u^0(t), v^0(t,x), J[u^0(t)] \right)$ үчилтиги сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин толук чыгарылышын аныктайт.

1. Оптималдык башкаруунун жакындоосу жана алардын жыйналуучулугу.

Оптималдык башкаруунун k-жакындоосу төмөндөгү формула боюнча табылат

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta].$$

Лемма 1.5.1. $\varphi[t, p(t), \beta]$ функциясы $p(t)$ функционалдык өзгөрүлмөсү боюнча Липщицтин шарттын канааттандырсын дейли, б. а.

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \tilde{p}(t), \beta]\|_H \le \varphi_0(\beta)\|p(t) - \tilde{p}(t)\|_H, \ \varphi_0(\beta) > 0.$$

Анда оптималдык башкаруунун k-жакындоосу $u^0(t)$ оптималдык башкаруу функциясы H гильберт мейкиндигинин нормасы боюнча жыйналат.

2. Оптималдык процесстин жакындоолору жана алардын жыйналуучулугу.

Оптималдык процесстин $v^0(t,x)$ жакындоолорун тургузууда төмөнкүдөй үч учурду карайбыз:

2.1. Оптималдык процесстин резольвента боюнча m- жакындоосун

$$v^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^0(t) + \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds\right)z_n(x),$$

формуласы менен аныктайбыз, мында

$$R_n^m(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)$$

$R_n(t,s,\lambda)$ резольвентасынын m- жакындоосу;

2.2. Оптималдык процесстин m, k- жакындоосун

$$v_k^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(k)}(t) + \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x),$$

формуласы менен табабыз, мында

$$a_n^{(k)}(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau) + z_n(1)f\left[\tau, u_k(\tau)\right]\right)d\tau.$$

2.3. Оптималдык процесстин m, k, r- жакындоосун

$$v_k^{m,r}(t,x) = \sum_{n=1}^{r}\left(a_n^{(k)}(t) + \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x).$$

формуласы менен табабыз.

Лемма 1.5.2. Оптималдык процесстин m-жакындоосу $m \to \infty$, $v^0(t,x)$ оптималдык процессине *H(Q)* гильберт мейкиндигинин нормасы боюнча жыйналат.

Лемма 1.5.3. $f[t,u(t)]$ функциясы $u(t)$ функционалдык өзгөрүлмөсү боюнча Липщицтин шартын канааттандырсын,

$$\|f[t,u_1(t)] - f[t,u_2(t)]\|_H \le f_0\|u_1(t) - u_2(t)\|_H.$$

Анда оптималдык процесстин *m, k*-жакындоосу $k \to \infty$ учурда, каалагандай $m = 1, 2, 3, \ldots$ үчүн $v^m(t,x)$ функциясына *H(Q)* мейкиндигинин нормасы боюнча жыйналат.

Лемма 1.5.4. Оптималдык процесстин *k, m, r*-жакындоосу $r \to \infty$ учурда каалагандай *k, m = 1, 2, 3,…* үчүн $v_k^m(t,x)$ функциясына *H(Q)* мейкиндигинин нормасы боюнча жыйналат.

Теорема 1.5.1. Оптималдык процесстин *k, m, r*-жакындоосу $k, m, r \to \infty$ учурда $v^0(t,x)$ функциясына *H(Q)* мейкиндигинин нормасы боюнча жыйналат.

3. Функционалдын минималдык маанисинин жакындоолору жана алардын жыйналуучулугу.

3.1. Резольвента боюнча функционалдын минималдык маанисинин *m*-жакындоосун

$$J_m[u^0(t)] = \int_0^1 \left[v^m(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u^0(t)\right) dt;$$

барабардыгы боюнча аныктайбыз.

3.2. Функционалдын минималдык маанисинин *m, k*-жакындоосун

$$J_m[u_k(t)] = \int_0^1 \left[v_k^m(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u_k(t)\right) dt;$$

барабардыгы боюнча аныктайбыз.

3.3. Функционалдын минималдык маанисинин *m, k, r*- жакындоосун

$$J_m^r[u_k(t)] = \int_0^1 \left[v_k^{m,r}(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u_k(t)\right) dt.$$

барабардыгы боюнча аныктайбыз.

Лемма 1.5.5. $J_m[u^0(t)]$ жакындоосу $m \to \infty$ учурда $J[u^0(t)]$ функционалдын маанисине жыйналат.

Лемма 1.5.6. $J_m[u_k(t)]$ жакындоосу $k \to \infty$ учурда каалагандай *m =1, 2, 3,…* үчүн функционалдын $J_m[u^0(t)]$ маанисине жыйналат.

Лемма 1.5.7. $J_m^r[u_k(t)]$ жакындоосу $r \to \infty$ учурда каалагандай *k, m =1, 2, 3,…* функционалдын $J_m[u_k(t)]$ маанисине жыйналат.

Теорема 1.5.2 $J_m^r[u_k(t)]$ жакындоосу $m, k,\ r \to \infty$ учурда функционалдын $J[u^0(t)]$ маанисине жыйналат.

Экинчи бапта Фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин чектик башкаруу мисалында оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселесинин чыгарылышы башкаруунун сапаты сызыктуу-бөлүкчөлүү функционал менен бааланган учур үчүн изилденди.

2.1 пунктунда оптималдаштыруу маселеси сызыктуу-бөлүкчөлүү функционалды

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u(t)|\, dt, \beta > 0,$$

минималдаштыруу учур үчүн каралат, мында $\xi(x) \in H(0,1)$ –берилген функция, $v\left(T,x\right)$ функциясы (1)-(3) чектик маселесинин чыгарылышы.

Жайылган параметрлүү системаларды оптималдык башкаруу үчүн далилденген максимум принциби боюнча оптималдык башкаруу функциясы төмөнкүдөй шарттар алынган

$$2\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] sign\ u(t) = \omega(t,1),$$

$$\frac{f_{uu}\left[t,u(t)\right] sign\ u(t)}{f_u\left[t,u(t)\right]} > 0,$$

мында $\omega(t,x)$ – тутумдаш чектик маселенин чыгарылышы. Бул шарттар оптималдуулуктун шарттары деп аталат.

2.2 пунктунда 1-оптималдык шарттын негизинде

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] sign\ u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s,u(s)\right] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n, \quad (21)$$

барабардыгынын келип чыгышы көрсөтүлгөн. Бул теңдеме оптималдык башкаруу функциясына карата сызыктуу эмес интегралдык теңдеме болот.

Фредгольм тибиндеги интегралдык теңдеменин чыгарылышы улануу касиетине ээ эместиги белгилүү. Бул абалды эске алуу менен (21) теңдеменин бир маанилүү чыгарылышка ээ болуусун изилдөөдө төмөнкүдөй маселелер келип чыгат:

1 маселе. Эгер $u(t) > 0,\ t \in [0,T]$ болсо, анда «оптималдык» башкаруу функциясы

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s,u(s)\right] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n,$$

интегралдык теңдемесинин оң маанилүү гана чыгарылышы катары аныкталат жана төмөнкүдөй

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{1}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u > 0, \quad t \in [0,T]. \quad (22)$$

кошумча шартты канааттандырышы керек.

2 маселе. Эгер $u(t)<0,\ t\in[0,T]$ болсо, анда «оптималдык» башкаруу функциясы

$$-\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)h_n ,$$

интегралдык теңдемесинин терс маанилүү гана чыгарылышы катары аныкталат жана төмөнкүдөй

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{1}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u<0,\quad t\in\left[0,T\right]. \qquad (23)$$

кошумча шартты канааттандырышы керек.

Эскертүү. (22) жана (23) шарттары бир убакта аткарылбайт. Ошондуктан, оптималдык башкаруу $u^0(t)$ же 1–маселенин, же 2–маселенин гана чыгарылышы боло алат. $u^+(t)$ менен 1-маселенин чыгарылышын, ал эми $u^-(t)$ 2-мисалдын чыгарылышын белгилесек. анда $u^+(t)$ жана $u^-(t)$ функцияларынын оптималдуулугу төмөнкү шарттардан аныкталат:

$$u^0(t)=\begin{cases}u^+(t), & u(t)>0,\quad J[u^+(t)]<J[u^-(t)];\\ u^-(t), & u(t)<0,\quad J[u^-(t)]<J[u^+(t)].\end{cases}$$

Бул маселелердин ар бири I бапта көрсөтүлгөн ыкма боюнча изилденген.

Мына ошентип, сызыктуу-бөлүкчөлүү функционалды минималдаштыруу маселесинде сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселеси спецификалык өзгөчөлүктөргө ээ экендигин көрдүк.

Тиркемеде 1-баптын теориялык корутундуларынын тууралыгын айгинелеген сандык эсептөөлөрдүн жыйынтыктары келтирилген.

КОРУТУНДУ

Диссертацияда парабола тибиндеги Фредгольмдук интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкарылуучу жылуулук процесстери изилденген. Маселеде чектик башкаруу функциясы үчүнчү түрдөгү чектик шартка сызыктуу эмес түрдө катышат жана башкаруунун сапаты квадраттык жана сызыктуу-бөлүкчөлүү функционалдардын минималдык мааниси менен бааланат. Негизги жана тутумдаш чектик маселелерди интегралдык теңдештикке өзгөртүп түзүү жолу менен алардын солгун жалпыланган чыгарылыштарын тургузуунун алгоритми көрсөтүлгөн. Оптималдык башкаруу функциясы канааттандыра турган оптималдуулук шарттары тутумдаш чектик маселенин чыгарылышын кармабаган түргө келтирилген.

Квадраттык функционалды минималдаштыруу учурунда оптималдык чектик башкаруу функциясына карата сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, ал эми сызыктуу-бөлүкчөлүү функционалды минималдаштыруу учурунда сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин өзгөчө түрү алынган. Акыркы теңдеменин чыгарылышы же оң маанидеги, же терс маанидеги гана функция болушу ыктымал. Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин жалгыз чыгарылышка ээ болушунун жеткиликтүү шарттары табылган. Маселенин толук чыгарылшы алынган жана анын жакындоолорунун жыйналуучулугу далилденген.

Алынган жыйынтыктар жайылган параметрлүү системаларды оптималдык башкаруу теориясында жаңылык болуп саналат жана аларды парабола же гипербола тибиндеги Фредгольмдук же Вольтеррдик интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкарылуучу процесстерди сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелеринин чыгарылышын табуунун конструктивдик ыкмаларын иштеп чыгууда колдонууга болот.

ЖАРЫККА ЧЫККАН ЭМГЕКТЕРДИН ТИЗМЕСИ

1. **Кадиримбетова А. К.** Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, Р. Ж. Наметкулова, А. К. Кадиримбетова // Механика и моделирование процессов технологии. – 2012, № 2. – С. 79–86.
2. **Кадиримбетова А. К.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / А. Керимбеков, Р. Ж. Наметкулова, А. К. Кадиримбетова // Тезисы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». – 2013. – С. 50.
3. **Кадиримбетова А. К.** О разрешимости задачи нелинейного граничного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, А. К. Кадиримбетова // Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец. вып. – 2013, № 1. – С. 168–172.
4. **Кадиримбетова А. К.** Решение одной задачи теории нелинейных интегральных уравнений [Текст] / А. Керимбеков, А. К. Кадиримбетова // Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец. вып. – 2013, № 1. – С. 173–176.

5. **Kadirimbetova A. K.** On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations [Текст] / A. Kerimbekov, A. K. Kadirimbetova // Abstract book. Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics, 11–13 September, Shymkent (Kazakhstan). – Shymkent, 2014. – P. 119.
6. **Кадиримбетова А. К.** Приближенное решение задачи нелинейного граничного управления тепловым процессом, описываемым фред-гольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. К. Кадиримбетова //Механика и технологии. – 2015, № 1.–С.34–42.
7. **Кадиримбетова А. К.** Интегральное уравнение оптимального управления в задаче оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / А. К. Кадиримбетова, А. Керимбеков // Вестник АРГУ им. К. Жубанова. – 2015, № 1. – С. 173–178.
8. **Кадиримбетова А. К.** Условия разрешимости интегрального уравнения в задаче управления тепловым процессом, описываемым фред-гольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. К. Кадиримбетова // Вестник КРСУ им. Б. Н. Ельцина. – Бишкек, 2015. Т. 15, № 5. – С. 74–76.
9. **Кадиримбетова А. К.** Приближенное решение задачи управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / А. К. Кадиримбетова // Вестник КРСУ им. Б. Н. Ельцина. – Бишкек, 2015. Т. 15, № 5. – С. 71–73.
10. **Кадиримбетова А. К.** Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, А. К. Кадиримбетова, Р. Ж. Наметкулова // Известия ИГУ, – 2016, Т. 15. сер. «Математика» – С. 50-61.
11. **Кадиримбетова А. К.** Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом [Текст] / А. Керимбеков, А. К. Кадиримбетова, Р. Ж. Наметкулова // Известия ИГУ, – 2016, Т. 16. сер. «Математика» – С. 71-88.
12. **Kadirimbetova A.** On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls [Текст] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, R. Nametkulova, A. Kadirimbetova // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal – 2016, Vol. 10, No. 1, P. 215–223.

Кадиримбетова Айша Казахбаевнанын 01.01.02 – дифференциялык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты илимий даражасын изденип алыш учун «Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мунөздөлгөн жылуулук процесстерин сызыктуу эмес чектик башкаруу» темасында жазылган диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: Жылуулук процесси, жалпыланган чыгарылыш, функционал, оптималдык башкаруу, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, жакындаштырылган чыгарылыш, жыйналуучулук.

Изилдөөнүн объектиси: Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкарылуучу жылуулук процесстер.

Изилдөөнүн предмети: Чектик башкаруу функциясы менен жылуулук процессин чектелген убакыт ичинде баштапкы абалдан биз каалаган абалга келтирүү.

Изилдөөнүн максаты: Квадраттык жана сызыктуу-бөлүкчөлүү функцияналдарды минималдаштыруу учурунда жылуулук процессин чектик башкаруунун сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышка ээ болушунун жеткиликтүү шарттарын аныктоо.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү:

– Негизги жана тутумдаш чектик маселелеринин солгун чыгарылыштарынын Фурье коэффициентери фредгольмдун экинчи түрдөгү бир тектүү эмес сызыктуу интегралдык теңдемелеринин чыгарылышы болору такталган;

– Оптималдык башкаруу функциясы сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин дифференциалдык барабарсыздык түрүндөгү кошумча шартты канааттандырган чыгаралышы катары аныкталары такталган;

– Чектик башкаруу учурунда фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме менен мүнөздөлгөн жылуулук процессин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышка ээ болушунун жеткиликтүү шарттары такталган;

– Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин жакындаштырылган чыгарылыштарын табуунун алгоритми түзүлгөн жана алардын опти-малдык башкаруу, оптималдык процесс жана функционал боюнча маселенин так чыгарылышына жыйналуучулугу далилденген.

Алынган теориялык маалыматтар жайылган параметрлүү системаларды оптималдуу башкаруу териясында жаңылык болуп саналат жана оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселелерин чыгаруунун конструктивдүү ыкмаларын иштеп чыгууда колдонулушу мүнкүн.

Изилдөөнүн практикалык мааниси. Сызыктуу эмес оптималдаштыруунун маселесинин чектик башкаруу функциясы сызыктуу эмес болгон учурдагы жакындаштырылган чыгарылышын табуунун түзүлгөн алгоритми жылуулук процессин башкарууга байланышкан маселелерди чыгарууда колдонулунат.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Кадиримбетовой Айши Казахбаевны на тему: «Нелинейное оптимальное граничное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: тепловой процесс, обобщенное решение, функционал, оптимальное управление, нелинейное интегральное уравнение, приближенное решение, сходимость.

Объект исследования: управляемые тепловые процессы, описываемые фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями.

Предмет исследования: посредством граничного управления перевод теплового процесса из начального состояния в желаемое состояние за конечное время.

Цель исследования: установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае граничного управления при минимизации квадратичного и кусочно-линейного функционалов.

Методы исследования: при исследовании были использованы методы теории оптимального управления системами с распределенным параметрами, классического вариационного исчисления, уравнений математической физики, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования:

– установлено, что коэффициенты Фурье слабо обобщенного решения основной и сопряженной краевых задач определяются как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода;

– установлено, что оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения и должен удовлетворять дополнительному условию в виде неравенства относительно функции источника;

– найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями, при граничном управлении;

– разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана их сходимость по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Полученные теоретические результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами и могут быть использовано при разработке конструктивных методов решения нелинейной задачи оптимизации.

Практическое значение исследования. Разработанный алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при нелинейном граничном управлении может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с управлением тепловых процессов.

SUMMARY

Dissertation "Nonlinear optimal boundary control of thermal processes described by a Fredholm integral-differential equations" of Kadirimbetova Aisha Kazakhbaevna is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: thermal processes, generalized solution, functionality, optimal control, nonlinear integral equation, approximate solution, convergence

Object of research is the controlled thermal processes described by a Fredholm integral-differential equations.

Subject of research is the boundary control of the transformation thermal process from the initial state to the desired state for the finite time**.**

Purpose of the work is to establish the sufficient conditions of the unique solvability of nonlinear optimization of thermal process in case of the boundary control while minimizing the quadratic and piecewise linear functionals.

Research methodology. The methods of the optimal control theory of the distributed parameters systems, methods of classical variational calculus, methods of solving of equations of mathematical physics, methods functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.

Scientific novelty and theoretical significance of research

– The Fourier coefficients of the generalized solution of weak basic and adjoint boundary problems are defined as solutions of linear inhomogeneous Fredholm integral equations of the second kind;

– The optimal control is defined as the solution of the nonlinear integral equation and must satisfy the additional condition in the form of inequality regarding the source function;

– Sufficient conditions for the unique solvability of nonlinear optimization of thermal processes, which described by Fredholm integral-differential equations with the boundary control, are found;

– Algorithm for constructing the approximate solution of nonlinear optimization is worked out and their convergence is proved for management, optimal process and functionality

The theoretical results are new in the theory of optimal control of systems with distributed parameters and can be used in the development of constructive methods for solving nonlinear optimization problem.

The practical significance of research. The developed algorithm for constructing the approximate solution of nonlinear optimization in nonlinear boundary control can be used in applications for solving practical problems related to the management of thermal processes.