

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

Диссертационный Совет К 01.15.504

На правах рукописи

УДК 517.968

БЕДЕЛОВА НУРГУЛЬ САЛИБАЕВНА

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА
ТРЕТЬЕГО РОДА**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2016

Работа выполнена на кафедре информационных технологий и автоматизированных систем факультета математики и информационных технологий Ошского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Асанов Авыт

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Искандаров Самандар

доктор физико-математических наук, профессор
Алыбаев Курманбек Сарманович

Ведущая организация: Казахский Национальный Аграрный
Университет, Республика Казахстан, 050010,
г. Алматы, ул. Абая 8

Защита диссертации состоится «30» июня 2016 года в 16:00 часов на заседании диссертационного совета К 01.15.504 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Институте природных ресурсов Южного отделения НАН КР и Ошском государственном университете по адресу: Кыргызстан, 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Ошского государственного университета по адресу: Кыргызстан, 723500, г. Ош, ул. Ленина, 333.

Автореферат разослан «27» мая 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент:



Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Сильный толчок для развития теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра придали труды А.Н. Тихонова, В.К. Иванова, В. Вольтерра, М.М. Лаврентьева, Я.В. Быкова, Ю.А. Ведь, Е.А. Барбашина, П.М. Симонова, В.Р. Винокурова, Н.В. Азбелева, В.Г. Романова, Ю.Е. Аниконова, В.П. Танана, А.Л. Бухгейма, С.И. Кабанихина, А.С. Апарцина, Н.А. Магницкого, А.М. Денисова, М.И. Иманалиева, А. Асанова, А. Саадабаева, П.С. Панкова, А.Б. Байзакова, С. Искандарова, К.А. Касимова, Т.Д. Омурова, Т. Каракеева, А. Сраждинова, Т.О. Бекешова, Г.С. Ободоевой, Ж.О. Толубаева, С. Б. Тагаевой, С. Corduneanu, Т.А. Burton'a и многих других ученых.

К ИУ I и III родов приводятся разнообразные задачи в различных научных сферах. Ж. Адамаром впервые было введено понятие корректности для ДУ и был приведен пример некорректной задачи. Практическая сущность некорректных задач, вероятность их устойчивого решения была исследована А.Н. Тихоновым. В середине XX века возникли современные методы, позднее ставшие основными в теории некорректных задач. Сегодня некорректно поставленные задачи – это довольно развитое направление в математике. В трудах А.Н. Тихонова показано, что к условно-корректным задачам приводят прикладные задачи. Фундамент теории условно-корректных задач заложили в своих трудах – советские математики как А.Н. Тихонов, В.К. Иванов и М.М. Лаврентьев. Понятие условной корректности, приводимое в исследованиях А.Н. Тихонова, впервые сформулировал М.М. Лаврентьев, как понятие корректности по Тихонову.

Уравнения Вольтерра теоретически можно обобщить, беря интеграл Стильтьеса, тогда имеем интегральные и интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра-Стильтьеса. Литературный обзор показывает, что ИУ Вольтерра-Стильтьеса мало развиты по сравнению с ИУ Вольтерра. Некоторые классы уравнений Вольтерра-Стильтьеса отражены в монографиях А.Д. Мышкиса, В.А. Тышкевича, В.Р. Носова, Н.В. Азбелева, П.М. Симонова, Л.Ф. Рахматуллиной и В.П. Максимова и некоторых других авторов. В трудах А. Асанова исследовано ИУ Вольтерра-Стильтьеса I и II родов.

Заметим, что ИУ Вольтерра-Стильтьеса не всегда приводятся к ИУ Вольтерра. Поэтому ИУ Вольтерра-Стильтьеса требуют самостоятельного изучения. Необходимость исследования уравнений Вольтерра-Стильтьеса дается примерами этих уравнений на практике.

Логично, что аппарат ИУ, прочно вошел в физику, геофизику, механику материаловедение, теорию управления и др. Развитие получили новые направления, такие как отдельные разделы биологии, экономической науки основанные на применениях ИУ.

Диссертационное исследование посвящено проблемам регуляризации и единственности решений ИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода.

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что тема настоящего диссертационного исследования является весьма актуальной.

Связь темы диссертации с крупными научными проектами и основными научно-исследовательскими работами. Диссертационное исследование проведено в соответствии с проектом «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» ИТПМ НАН КР, № государственной регистрации 0005756, с планом НИР Института природных ресурсов Южного отделения НАН КР. Достигнутые результаты включены в годовой отчет работы по проекту.

Цель и задачи исследования:

- найти достаточные условия единственности решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем;
- построить регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем;
- рассмотреть выбор параметра регуляризации для решения одного класса ЛИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода;
- доказать теоремы единственности решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем.

Методика исследования. В диссертации применены понятие производной по возрастающей функции, метод регуляризации по М.М. Лаврентьеву, методы функционального анализа, методы преобразования уравнений, методы интегральных и ДУ.

Научная новизна исследования. На основе понятия производной по возрастающей функции:

- найдены достаточные условия единственности решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем;
- построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем;
- получена выбором параметра оптимальная оценка приближенного решения ЛИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода;
- доказаны теоремы единственности решений для линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем.

Практическая значимость полученных результатов. Данная работа имеет теоретическую направленность. Достигнутые результаты можно использовать для исследования интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и систем типа Вольтерра-Стильтьеса высоких порядков, также при качественном исследовании некоторых прикладных процессов в области физики, экологии, медицины, теории управления сложными системами; в научных исследованиях ИТПМ Национальной Академии Наук Кыргызской Республики, КНУ им. Ж. Баласагына, КТУ “Манас”, ИПР ЮО Национальной Академии Наук Кыргызской Республики, а также при разработке спецкурсов для профильных и

других естественно-технических направлений в ВУЗах Кыргызской Республики.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- построение регуляризирующего оператора для решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем;
- получение оптимальной оценки приближенного решения ЛИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода с выбором параметра регуляризации;
- доказательство теоремы единственности решений для линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем.

Личный вклад соискателя. В статьях [6], [9] основные идеи исследования принадлежат А. Асанову, а доказательство теорем единственности решений, получение основных результатов принадлежат автору. В статье [2], опубликованной в соавторстве с Г.С. Ободоевой, ей принадлежит обсуждение результатов.

Апробация результатов. Основные положения исследования регулярно докладывались и обсуждались на семинаре кафедры ИТАС ФМИТ Ошского государственного университета; на научно-методическом семинаре «Современные проблемы математики и преподавания математики» при ЖАГУ; на межвузовском семинаре «Актуальные проблемы математики и информатики» при ОшГУ; на Молодежной международной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» проведенной в институте математики имени С.Л. Соболева (Новосибирск, 2009); на IV международной научной конференции посвященной 60-летию академика А.А. Борубаева «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (Бишкек-Бостери, 2011); на научной конференции ОшГУ, посвященной 75 летию ОшГУ (Ош, 2014).

Результаты диссертации в публикациях. По теме исследования опубликовано 8 работ в научных изданиях, в том числе – 3 статьи в зарубежных периодических изданиях, индексируемых в РИНЦ, а также 1 тезис доклада.

Структура и объем диссертации

Перечень условных обозначений в диссертационной работе:

- R – множество действительных чисел;
- R_+ – множество положительных действительных чисел;
- R^n – n -мерное евклидово пространство;
- E_n – n -мерная единичная матрица;
- $\forall$ – квантор всеобщности, означает “любой (ая, ое)”;
- $\exists$ – квантор существования, означает “существует”;

$\Leftrightarrow$ – логическое эквивалентность, означает “эквивалентно”;

$\in$ – знак принадлежности;

$\setminus$ – теоретико-множественное вычитание;

$=$ – знак равенства;

$\neq$ – знак неравенства;

$\equiv$ – знак тождественного равенства;

$\Rightarrow$ – логическое следование означает “следует”;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в R^n ;

$\varphi(\cdot)$ – возрастающая непрерывная функция на $[t_0, T]$;

$m(\cdot)$ – неубывающая непрерывная функция на $[t_0, T]$, $m(t_0) = 0$;

$0 < \varepsilon$ – малый параметр, $\mathbb{C}(s) \in G = \{s : t_0 \leq s \leq T\}$;

$C[\mathbb{b}, T^-]$ – пространство всех непрерывных функций $u(\cdot)$, определенных на $[\mathbb{b}, T^-]$ с нормой $\|u\|_{\mathbb{C}} = \max_{t \in [\mathbb{b}, T]} |u(t)|$;

$C_{\psi}^{\gamma}[\mathbb{b}, T^-]$ – пространство всех функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию $|u(\mathbb{C}) - u(\mathbb{C})| \leq M |\psi(\mathbb{C}) - \psi(\mathbb{C})|^{\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, $t, s \in [\mathbb{b}, T^-]$, где $0 < M$ не зависит от t, s ;

$\psi(\mathbb{C}) = \int_{t_0}^t K(\mathbb{C}, s) d\varphi(\mathbb{C}) + m(\mathbb{C})$, $t \in [\mathbb{b}, T^-]$;

$C_n[\mathbb{b}, T^-]$ и $C_{\psi, n}^{\gamma}[\mathbb{b}, T^-]$ – пространство n -мерных векторов с элементами из $C[\mathbb{b}, T^-]$ и $C_{\psi}^{\gamma}[t_0, T]$, $0 < \gamma \leq 1$ соответственно;

для $n \times n$ матрицы $M = (\mathbb{C}_{ij})$ и для n -мерного $u = (\mathbb{C}_i)$ вектора,

$$\|M\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathbb{C}_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\| = \left(\sum_{i=1}^n |\mathbb{C}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

для $u(\cdot) \in C_n[t_0, T]$, $\|u\|_{\mathbb{C}} = \sup_{t \in [t_0, T]} \|u(t)\|$;

для любых $u = (\mathbb{C}_i)$, $v = (\mathbb{C}_i) \in R^n$ через $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$;

ДУ – дифференциальные уравнения;

ИУ – интегральные уравнения;

ЛИУ – линейные интегральные уравнения;

НИУ – нелинейные интегральные уравнения;

СЛИУ – система линейных интегральных уравнений;

СНИУ – система нелинейных интегральных уравнений.

Диссертационная работа состоит: из перечня условных обозначений, введения, трех глав, содержащих 9 разделов, заключений, основных выводов и списка использованной литературы. Нумерация разделов – тройная: первая

цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста 100 страниц.

В первой главе исследования проведён обзор литературы и результаты исследований по дифференциальным, интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям, наиболее близкие к данной диссертации. А также приведены определения и теоремы, которые используются в данной работе.

Во второй главе на основе понятия производной по возрастающей функции изучены вопросы единственности решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода. Вместе с этим построен регуляризирующий оператор для их решения.

В разделе 2.1 исследованы следующие ЛИУ:

$$m(\underline{v})(\underline{t}) + \int_{t_0}^t a(\underline{b}(\underline{s})\underline{v}(\underline{s}))d\varphi(\underline{s}) = f(\underline{t}), \quad T > t_0, \quad (1)$$

$$\underline{\epsilon} + m(\underline{v})(\underline{t}, \underline{\epsilon}) + \int_{t_0}^t a(\underline{b}(\underline{s})\underline{v}(\underline{s}, \underline{\epsilon}))d\varphi(\underline{s}) = f(\underline{t}) + \epsilon v(\underline{t}), \quad t \in [\underline{t}_0, T], \quad (2)$$

где $m(\underline{t}), a(\underline{t}), b(\underline{t}), f(\underline{t}) \in C[\underline{t}_0, T], 0 < \epsilon$ – малый параметр,
 $\underline{s} \in G = \{\underline{s} : t_0 \leq s \leq t \leq T\}$.

Предположим, что:

- а) $m(\underline{t}), a(\underline{t}), b(\underline{t}), f(\underline{t}) \in C[\underline{t}_0, T], m(\underline{t}_0) = 0,$
 $m(\underline{t}) \geq 0, a(\underline{t}) \geq 0$ и $b(\underline{t}) \geq 0$ при $t \in [\underline{t}_0, T]$ и
 $\forall t_1, t_2 \in [\underline{t}_0, T], t_2 > t_1, m(\underline{t}_2) \geq m(\underline{t}_1);$
 б) $t, \tau \in [\underline{t}_0, T]$ и для $t \geq \tau$:

$$|a(\underline{t}) - a(\underline{\tau})| \leq C_0 \left[\int_{\tau}^t a(\underline{b}(\underline{s}))d\varphi(\underline{s}) + m(\underline{t}) \right]^{\gamma_1}, \quad \text{где } 0 < \gamma_1 \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 1. Если условия а), б) выполнены и $v(\underline{t}) \in C_{\psi}^{\gamma}[t_0, T], 0 < \gamma \leq 1,$
 $|v(\underline{t}) - v(\underline{t}_0)| \leq C_1 a(\underline{t}), t \in [\underline{t}_0, T], 0 < C_1$ – число,
 то

$$\|v(\underline{t}, \underline{\epsilon}) - v(\underline{t})\|_t \leq M (M_1 + M_3) \underline{\epsilon}^{\gamma} + M_2 \epsilon^{\gamma_1}, \quad (3)$$

где

$$M = \sup_{t, s \in [t_0, T]} |v(\underline{t}) - v(\underline{s})| \psi(\underline{t}) - \psi(\underline{s}), \quad M_1 = e \sup_{v \geq 0} (\underline{\epsilon}^{\gamma} e^{-v}),$$

$$M_2 = C_0 C_1 e \int_0^\infty e^{-\nu} \nu^{\gamma_1} d\nu, \quad M_3 = e \int_0^\infty e^{-\nu} \nu^\gamma d\nu,$$

$$\psi(\underline{\epsilon}) = \int_{t_0}^t a(\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}) d\varphi(\underline{\epsilon}) + m(\underline{\epsilon}), \quad t \in [\underline{b}, T],$$

$\nu(\underline{\epsilon})$ – решение уравнения (2), $\nu(\underline{\epsilon})$ – решение уравнения (1).

В разделе 2.2 рассматриваются следующие ЛИУ:

$$m(\underline{y}) + \int_{t_0}^t K(\underline{s}, \underline{y}) d\varphi(\underline{\epsilon}) = f(\underline{\epsilon}), \quad t \in [\underline{b}, T], \quad T > t_0, \quad (4)$$

$$\underline{\epsilon} + m(\underline{y}(\underline{\epsilon})) + \int_{t_0}^t K(\underline{s}, \underline{y}(\underline{\epsilon})) d\varphi(\underline{\epsilon}) = f(\underline{\epsilon}), \quad t \in [t_0, T], \quad (5)$$

где $m(\underline{\epsilon}), f(\underline{\epsilon}), \varphi(\underline{\epsilon}) \in C[\underline{b}, T], \underline{\epsilon} \in G = \{\underline{s} : t_0 \leq s \leq t \leq T\}$,
 $K(\underline{s}) \in C(G), 0 < \varepsilon$.

Всюду будем предполагать, что:

а) $\forall t \in [t_0, T]: K(t, s) \in C(G), K(t, t) \geq 0$;

б) для $\tau > \eta, (\tau, s), (\eta, s) \in G$:

$$|K(\underline{\epsilon}, s) - K(\underline{\eta}, s)| \leq l \left[\int_{\eta}^{\tau} K(\underline{\epsilon}, s) d\varphi(\underline{\epsilon}) + m(\underline{\epsilon}) \right], \quad \text{где } 0 < l, l - \text{const}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если условия а), б) выполнены,

$$u(\underline{\epsilon}) \in C_{\psi}^{\gamma}[t_0, T], \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad \psi(\underline{\epsilon}) = \int_{t_0}^t K(\underline{\epsilon}, s) d\varphi(\underline{\epsilon}) + m(\underline{\epsilon}) \text{ и } u(t_0) = 0,$$

то

$$\|\nu(\underline{\epsilon}) - u(\underline{\epsilon})\| \leq M_4 \varepsilon^{\gamma}, \quad (6)$$

$$\text{где } M = \sup_{t, s \in [t_0, T]} |u(\underline{\epsilon}) - u(\underline{\eta})| |\psi(\underline{\epsilon}) - \psi(\underline{\eta})|^{-\gamma}, \quad M_1 = \sup_{\mu \geq 0} \int_0^\infty e^{-\mu} z^\gamma dz, \quad M_2 = \int_0^\infty e^{-z} z^\gamma dz,$$

$$M_3 = \exp \{ \int_0^\infty e^{-z} z^\gamma dz \}, \quad M_4 = M(M_1 + M_2) M_3 e,$$

$u(\underline{\epsilon})$ – решение уравнения (4), $\nu(\underline{\epsilon})$ – решение уравнения (5).

В разделе 2.3 рассмотрены НИУ:

$$m(\underline{y}) + \int_{t_0}^t K(\underline{s}, u(\underline{\epsilon})) d\varphi(\underline{\epsilon}) = f(\underline{\epsilon}), \quad t \in [t_0, T], \quad T > t_0, \quad (7)$$

$$[\varepsilon + m(\underline{y}(\underline{\epsilon})) + \int_{t_0}^t K(\underline{s}, \nu(\underline{\epsilon})) d\varphi(\underline{\epsilon}) = f(\underline{\epsilon}) + \varepsilon u(\underline{\epsilon})], \quad t \in [t_0, T], \quad (8)$$

где

$$m(\underline{\epsilon}), f(\underline{\epsilon}) \in C[\underline{b}, T], \quad K(\underline{s}, u) \in C(G \times R), \quad G = \{\underline{s} : t_0 \leq s \leq t \leq T\}.$$

Пусть

$$K(\mathbf{s}, u) = K_0(\mathbf{s}) + K_1(\mathbf{s}, u), \quad (9)$$

$$(\mathbf{s}, u) \in G \times R.$$

Всюду будем предполагать, что:

$$a) \forall t \in [t_0, T]: K_0(\mathbf{s}) \in C(G), K_0(t) \in C[t_0, T],$$

$$K_0(t) \geq 0;$$

$$б) t > \tau, (\mathbf{s}, \mathbf{s}) \in G:$$

$$|K_0(\mathbf{s}) - K_0(\mathbf{s})| \leq l_1 \left[\int_{\tau}^t K_0(\mathbf{s}) d\varphi(\mathbf{s}) + m(\mathbf{s}) \right],$$

$$0 < l_1, l_1 - \text{const.}$$

$$в) K_1(t, u) = 0, \text{ при } (t, u) \in [t_0, T] \times R,$$

$$K_1(\mathbf{s}, 0) = 0, \forall (\mathbf{s}) \in G, \text{ при}$$

$$t > \tau, (\mathbf{s}, u_1), (\mathbf{s}, u_1), (\mathbf{s}, u_2), (\mathbf{s}, u_2) \in G \times R,$$

$$|K_1(\mathbf{s}, u_1) - K_1(\mathbf{s}, u_1) - K_1(\mathbf{s}, u_2) + K_1(\mathbf{s}, u_2)| \leq l_2 \left[\int_{\tau}^t K_0(\mathbf{s}) d\varphi(\mathbf{s}) + m(\mathbf{s}) \right] |u_1 - u_2|,$$

$$0 < l_2, l_2 - \text{const.}$$

ТЕОРЕМА 3. Если условия а), б), в) выполнены,

$$u \in C_{\psi}^{\gamma}[t_0, T], \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad \text{то}$$

$$\|v(\mathbf{s}, \varepsilon) - u(\mathbf{s})\|_{\mathcal{C}} \leq KMM_3 \varepsilon^{\gamma}, \quad (10)$$

где

$$M = \sup_{t, s \in [t_0, \tau]} |u(\mathbf{s}) - u(\mathbf{s})| |\psi(\mathbf{s}) - \psi(\mathbf{s})|, \quad M_1 = \sup_{\mu \geq 0} (\mu^{\gamma} e^{-\mu}), \quad M_2 = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\gamma} dz,$$

$$M_3 = (M_1 + M_2) e, \quad K = \exp(\mathbf{s} + e \mathbf{s} + l_2 \mathbf{s} \varphi(\mathbf{s})), \quad \psi(t) = \int_{t_0}^t K_0(\mathbf{s}) d\varphi(\mathbf{s}),$$

$u(\mathbf{s})$ и $v(\mathbf{s}, \varepsilon)$ – решения уравнения (7) и (8) соответственно.

В разделе 2.4 одновременно рассмотрены ЛИУ (1), (2) и следующее ИУ

$$(\mathbf{s} + m(\mathbf{s}) \varphi_{\delta}(\mathbf{s})) + \int_{t_0}^t a(\mathbf{s}) \varphi_{\delta}(\mathbf{s}, \varepsilon) d\varphi(\mathbf{s}) = f_{\delta}(\mathbf{s}) + \varepsilon v_{\delta}, \quad t \in [t_0, T], \quad (11)$$

$$\text{где } f_{\delta}(\mathbf{s}) \in C[\mathbf{s}, T], \quad \|f(\mathbf{s}) - f_{\delta}(\mathbf{s})\|_{\mathcal{C}} \leq \delta, \quad |v(\mathbf{s}) - v_{\delta}(\mathbf{s})| \leq \delta.$$

ТЕОРЕМА 4. Если выполнены условия теоремы 1, то решение $v_{\delta}(\mathbf{s}, \varepsilon)$

уравнения (11) при $\varepsilon = \delta^{\frac{1}{2(2-\gamma_1)}} \rightarrow 0$ сходится по норме $C[\mathbf{s}, T]$ к решению $v(\mathbf{s})$ уравнения (1).

В третьей главе с помощью понятия производной по возрастающей функции доказаны теоремы единственности решений СЛИУ и СНИУ

Вольтерра-Стильтьеса указанного типа уравнений. Кроме того построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву.

В разделе 3.1 рассмотрены СЛИУ Вольтерра-Стильтьеса

$$m(\underline{y}) + \int_{t_0}^t a(\underline{B}(\underline{y}) \underline{d}\varphi) = f(\underline{y}), \quad T > t_0, \quad (12)$$

где $a(t) \in C[t_0, T]$, $B(t) - n \times n$ матрица, $f(t) - n$ вектор, $0 < \varepsilon$.

$$\underline{y} + m(\underline{y}(\varepsilon)) + \int_{t_0}^t a(\underline{B}(\underline{y}(\varepsilon)) \underline{d}\varphi) = f(\underline{y}) + \varepsilon \underline{v}_0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (13)$$

Потребуем выполнимость условий:

а) $\forall t \in [t_0, T]: m(\underline{y}), a(\underline{y}), \|B(\underline{y})\|, f(\underline{y}) \in C[t_0, T]$, $m(\underline{y}_0) = 0$, $\lambda(t) \geq 0$,

где $\lambda(\underline{y}) = \min_i \lambda_i(\underline{y})$, $\frac{1}{2} a(\underline{y}) [B(\underline{y}) + B^*(\underline{y})] x_i(\underline{y}) = \lambda_i(\underline{y}) x_i(\underline{y})$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$x_i(\underline{y}) - n$ -мерная ненулевая вектор-функция, $a(\underline{y}) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$;

б) $t, \tau \in [t_0, T]$ и $t \geq \tau$:

$$|a(\underline{y}) - a(\underline{y})| \leq C_0 \left[\int_{\tau}^t \lambda(\underline{y}) \underline{d}\varphi \right] + m(\underline{y})^{\gamma_1}, \quad \text{где } 0 < \gamma_1 \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 5. Если условия а), б) выполнены, $\underline{v}(\underline{y}) \in C_{\psi, n}^{\gamma}[t_0, T]$, $0 < \gamma \leq 1$, $\|\underline{v}(\underline{y}_0) - \underline{v}(\underline{y})\| \leq C_1 a(\underline{y})$, $t \in [t_0, T]$, $0 < C_1$, $a(\underline{y}) \|B(\underline{y})\| \leq C_2 \lambda(\underline{y})$, $t \in [t_0, T]$, $0 < C_2$, то

$$\|\underline{v}(\underline{y}(\varepsilon)) - \underline{v}(\underline{y})\| \leq M (M_1 + M_3 \varepsilon^{\gamma} + M_2 \varepsilon^{\gamma_1}), \quad (14)$$

где $M = \sup_{t, s \in [t_0, t]} \|\underline{v}(\underline{y}) - \underline{v}(\underline{y})\| / \|\psi(\underline{y}) - \psi(\underline{y})\|$, $M_1 = e \sup_{\nu \geq 0} \nu^{\gamma} e^{-\nu}$,

$$M_2 = C_0 C_1 C_2 e \int_0^{\infty} e^{-\nu} \nu^{\gamma_1} d\nu, \quad M_3 = C_2 e \int_0^{\infty} e^{-\nu} \nu^{\gamma} d\nu,$$

$$\psi(\underline{y}) = \int_{t_0}^t \lambda(\underline{y}) \underline{d}\varphi + m(\underline{y}), \quad t \in [t_0, T].$$

$\underline{v}(\underline{y})$ - решение СЛИУ (12), $\underline{v}(\underline{y}(\varepsilon))$ - решение СЛИУ (13).

В разделе 3.2 рассмотрены следующие системы

$$m(\underline{y}) + \int_{t_0}^t K(\underline{s}, \underline{y}) \underline{d}\varphi = f(\underline{y}), \quad t \in [t_0, T], \quad T > t_0, \quad (15)$$

$$\underline{y} + m(\underline{y}(\varepsilon)) + \int_{t_0}^t K(\underline{s}, \underline{y}(\varepsilon)) \underline{d}\varphi = f(\underline{y}) + \varepsilon \underline{u}_0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (16)$$

в котором $m(t) \in C[t_0, T]$, $K(t, s) - n \times n$ матрица, $f(t) - n$ вектор.

Пусть $\lambda_i(\underline{\tau})$ ($i=1,2,\dots,n$) – собственные значения матрицы $\frac{1}{2} [K(\underline{t}) + K^*(\underline{t})]$, где $K^*(\underline{t})$ сопряженная матрица к матрице $K(\underline{t})$ и

$$\lambda(\underline{\tau}) = \min_i \lambda_i(\underline{\tau}). \quad (17)$$

Потребуем выполнимость условий:

- 1) Для $K(\underline{s}) = \|K_{ij}(\underline{s})\|$, $K_{ij}(\underline{s}) \in C(G)$, $K_{ij}(\underline{t}) \in C[t_0, T]$,
 $G = \{(\underline{s}) : t_0 \leq s \leq t \leq T\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$;
- 2) $\lambda(\underline{\tau}) \geq 0$, $\forall t \in [t_0, T]$, $\lambda(\underline{\tau}) \in C[t_0, T]$;
- 3) $\tau > \eta$, $(\underline{s}, \underline{\varphi}, \underline{s}) \in G$:

$$\|K(\underline{s}) - K(\underline{\varphi}, \underline{s})\| \leq l(\underline{\tau}) \int_{\eta}^{\tau} \lambda(\underline{\tau}) d\varphi(\underline{\tau}),$$

где $\lambda(\underline{\tau}) \geq 0$ при $t \in [t_0, T]$ и $l(\underline{\tau}) \in C[t_0, T]$.

ТЕОРЕМА 6. Если условия 1)-3) выполнены, $m(\underline{\tau}) \in C[t_0, T]$, $m(\underline{\tau}_0) = 0$,

$$\forall t_1, t_2 \in [t_0, T], t_2 > t_1 \quad m(\underline{\tau}_2) \geq m(\underline{\tau}_1), \quad \psi(\underline{\tau}) = \int_{t_0}^t \lambda(\underline{\tau}) d\varphi(\underline{\tau}), \quad t \in [t_0, T],$$

$$\lambda(\underline{\tau}) \geq 0, \quad \forall t \in [t_0, T],$$

$$\|K(\underline{\tau})\| \leq N_0 \lambda(\underline{\tau}), \quad t \in [t_0, T], \quad u(\underline{\tau}) \in C_{\psi, n}^{\gamma}[t_0, T], \quad 0 < \gamma \leq 1, \text{ то}$$

$$\|v(\underline{\tau}, \varepsilon) - u(\underline{\tau})\| \leq M_3 Me(M_1 + N_0 M_2) \varepsilon^{\gamma}, \quad (18)$$

$$\text{где } M_1 = \sup_{\nu \geq 0} e^{-\nu} \nu^{\gamma}, \quad M_2 = \int_0^{\infty} e^{-\nu} \nu^{\gamma} d\nu, \quad M_3 = \exp\left\{\int_{t_0}^T l(\underline{\tau}) [e^{-1} + N_0] d\varphi(\underline{\tau})\right\},$$

$u(\underline{\tau})$ – решение СЛИУ (15), $v(\underline{\tau}, \varepsilon)$ – решение СЛИУ (16).

В разделе 3.3 рассмотрена система

$$m(\underline{y}) + \int_{t_0}^t K(\underline{s}, u(\underline{s})) d\varphi(\underline{s}) = f(\underline{s}), \quad t \in [t_0, T], \quad T > t_0, \quad (19)$$

$K(\underline{s}, u)$ – n -мерная вектор-функция, $u(\underline{s}), f(\underline{s})$ – n -мерные соответственно искомые и известные вектор-функции.

Наряду с системой (19) рассмотрена следующая система

$$[1 + m(\underline{y})] v(\underline{\tau}, \varepsilon) + \int_{t_0}^t K(\underline{s}, v(\underline{s}, \varepsilon)) d\varphi(\underline{s}) = f(\underline{s}) + \varepsilon u(\underline{\tau}_0), \quad t \in [t_0, T], \quad (20)$$

где $v(\underline{\tau}, \varepsilon)$ – искомая n -мерная вектор-функция, $u(\underline{\tau})$ – решение системы (19).

Кроме того, пусть

$$K(\underline{s}, u) = K_0(\underline{s}) \underline{y} + K_1(\underline{s}, u), \quad (21)$$

где $(\underline{s}, u) \in G \times R$, $G = \{(\underline{s}) : t_0 \leq s \leq t \leq T\}$.

Потребуем выполнимость условий:

- а) $\|K_0(\underline{s})\| \in C(G)$, $\|K_0(\underline{t})\| \in C[t_0, T]$, $\lambda(\underline{\tau}) \geq 0$, $t \in [t_0, T]$,

$\lambda(\mathbf{C}) = \min_i \lambda_i(\mathbf{C}), \lambda_i(\mathbf{C}) \quad (\mathbf{C} = 1, 2, \dots, n) -$ собственные значения матрицы

$$\frac{1}{2} \|K_0(\mathbf{C}, t) + K_0^*(\mathbf{C}, t)\| \leq N_0 \lambda(\mathbf{C}), \quad t \in [t_0, T];$$

б) $t > \tau, \mathbf{C}(s) \in G,$

$$\|K_0(\mathbf{C}, s) - K_0(\mathbf{C}, s)\| \leq l_1 \left[\int_{\tau}^t \lambda(\mathbf{C}) d\varphi(\mathbf{C}) + m(\mathbf{C}) \right], \quad 0 < l_1, l_1 - const;$$

в) $\|K(\mathbf{C}, s, u)\| \in C(\mathbf{G} \times R^n), K_1(\mathbf{C}, s, 0) = 0, \mathbf{C}(s) \in G,$

$$K_1(\mathbf{C}, t, u) = 0, \mathbf{C}(u) \in [t_0, T] \times R^n,$$

$t > \tau, \mathbf{C}(s, u_1), \mathbf{C}(s, u_1), \mathbf{C}(s, u_2), \mathbf{C}(s, u_2) \in G \times R^n,$

$$\|K_1(\mathbf{C}, s, u_1) - K_1(\mathbf{C}, s, u_1) - K_1(\mathbf{C}, s, u_2) + K_1(\mathbf{C}, s, u_2)\| \leq l_2 \left[\int_{\tau}^t \lambda(\mathbf{C}) d\varphi(\mathbf{C}) + m(\mathbf{C}) \right] \|u_1 - u_2\|,$$

$0 < l_2, l_2 - const.$

ТЕОРЕМА 7. Если условия а), б), в) выполнены и $u(\mathbf{C}) \in C_{\psi, n}^{\gamma}[t_0, T], 0 < \gamma \leq 1,$

то

$$\|v(\mathbf{C}, \varepsilon) - u(\mathbf{C})\| \leq KMM_3 \varepsilon^{\gamma}, \quad (22)$$

где

$$M = \sup_{t, s \in [t_0, \tau]} \|u(\mathbf{C}) - u(\mathbf{C})\| / \|\psi(\mathbf{C}) - \psi(\mathbf{C})\|^{\gamma}, \quad M_1 = \sup_{\mu \geq 0} \mu^{\gamma} e^{-\mu}, \quad M_2 = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\gamma} dz,$$

$$M_3 = (M_1 + N_0 M_2) e, \quad K = \exp(\mathbf{C}) + N_0 e^{\mathbf{C}} + l_2 \|\mathbf{C}\| - \varphi(\mathbf{C})$$

$\psi(\mathbf{C}) = \int_{t_0}^t \lambda(\mathbf{C}) d\varphi(\mathbf{C}) + m(\mathbf{C}), u(\mathbf{C})$ - решение системы (19), $v(\mathbf{C}, \varepsilon)$ - решение системы (20).

В конце каждой главы сделаны соответствующие заключения.

ВЫВОДЫ

В диссертации на основе понятия производной по возрастающей функции:

- ✓ найдены достаточные условия и доказаны теоремы единственности решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса третьего рода и их систем;
- ✓ построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса третьего рода и их систем;
- ✓ выбран параметр регуляризации.

Соискатель благодарит своего наставника и научного руководителя, профессора А. Асанова за ценные и полезные советы, предложения и замечания, практическую помощь при подготовке данного диссертационного исследования.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Беделова, Н.С.** Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Текст] / Н.С. Беделова // Вестник ОшГУ. – Ош, 2007. – Вып. №2. – С. 142-146.
2. **Беделова, Н.С.** Об одном классе линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Текст] / Г.С. Ободоева, Н.С. Беделова // Вестник ОшГУ. – Ош, 2008. – Вып. №6. – С. 76-82.
3. **Беделова, Н.С.** Об одном классе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Электронный ресурс] / Н.С. Беделова // Тезисы докладов молодежной международной научной школы-конференции. – Новосибирск, 2009. – С. 22.
Режим доступа: <http://math.nsc.ru/conference/onz09/kniga.pdf>.
4. **Беделова, Н.С.** Об одном классе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Текст] / Н.С. Беделова // Вестник ОшГУ. – Ош, 2010. – Вып. №3. – С. 273-277.
5. **Беделова, Н.С.** Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Текст] / Н.С. Беделова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: «Илим», 2012. – Вып. №40. – С. 85-93.
6. **Беделова, Н.С.** Один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Текст] / А. Асанов, Н.С. Беделова // Вестник КазНПУ имени Абая. – Алматы, 2014. – Вып. №48. – С. 8-13.
7. **Беделова, Н.С.** Выбор параметра регуляризации для решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Текст] / Н.С. Беделова // Символ науки. – Уфа: «Омега Сайнс», 2015. – Вып. №10. – С. 19-23.
8. **Беделова, Н.С.** Об одном классе регуляризации и единственности решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Текст] / Н.С. Беделова // Символ науки. – Уфа: «Омега Сайнс», 2015. – Вып. №10. – С. 12-18.
9. **Беделова, Н.С.** Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода [Текст] / А. Асанов, Н.С. Беделова // Инновационная наука. – Уфа: «Аэтерна», 2015. – Вып. №10. – С. 9-18.

РЕЗЮМЕ

диссертации Беделовой Нургуль Салибаевны на тему «Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегральное уравнение третьего рода, система, единственность, регуляризация, решение.

Объект исследования: линейные и нелинейные интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса III рода, системы линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса III рода.

Цель исследования: исследование единственности и регуляризации решений интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем.

Методика исследования. В работе используется понятие производной по возрастающей функции, метод регуляризации М. М. Лаврентьева, методы функционального анализа, методы интегральных и дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования:

- найдены достаточные условия единственности решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем;
- построены регуляризующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решений линейных и НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем;
- получена, выбором параметра, оптимальная оценка приближенного решения ЛИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода;
- доказаны теоремы единственности решений для ЛИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем;
- доказаны теоремы единственности решений для НИУ Вольтерра-Стильтьеса III рода и их систем.

Беделова Нургуль Салибаевнанын «Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемелеринин чечимдеринин жалгыздыгы жана регуляризациялоо» деген темадагы 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдеме, система, жалгыздык, регуляризациялоо, чечим.

Изилдөөнүн объектиси: Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелери жана Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин системалары.

Изилдөөнүн максаты: Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемелеринин жана алардын системаларынын чечимдеринин жалгыздыгын жана регуляризациялоону изилдөө.

Изилдөөнүн методдору. Жумушта өсүүчү функция боюнча алынган туунду түшүнүгү, М.М. Лаврентьевдин регуляризациялоо методу, функционалдык анализдин, интегралдык жана дифференциалдык теңдемелердин методдору колдонулду.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары:

- Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин, алардын системаларынын чечимдеринин жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды;
- Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин, алардын системаларынын чечимдери үчүн М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоо операторлору тургузулду;
- параметрди тандоо менен Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесинин жакындаштырылган чечимин оптималдуу баалоо алынды;
- Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин жана алардын системаларынын чечимдери үчүн жалгыздык теоремалары далилденди;
- Вольтер-Стильтьестин үчүнчү түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин жана алардын чечимдери үчүн жалгыздык теоремалары далилденди.

ABSTRACT

of Nurgul Salibaevna Bedelova's research dissertation on the topic:
«Regularization and uniqueness of solutions of Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind», for the scientific degree of candidate of sciences in physics and mathematics by the speciality: 01. 01. 02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: integrated equation of the third kind, system, uniqueness, regularization, solution.

Object of research: linear Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind, systems of linear and non-linear Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind.

Research aim: to study the issues of regularization and uniqueness of solutions of Volterra-Stieltjes integral equations of the third kind and their systems.

Research methods: the concept of derivative on increasing function, the method of regularization by M. M. Lavrentiev, the method of functional analysis and the methods of integral and differential equations.

Scientific novelty of research:

- sufficient conditions of uniqueness of solutions of the linear and non- linear integral equations of Volterra-Stieltjes of the third kind and their systems have been fined;
- regularization operators according to M. M. Lavrentiev for solutions of the linear and non- linear integral equations of Volterra-Stieltjes of the third kind and their systems have been constructed;
- by choice of parameter an optimum assessment of the approximate solution of the linear integral equations of Volterra-Stieltjes of the third kind has been received;
- theorems of uniqueness of decisions for the linear integral equations of Volterra-Stieltjes of the third kind and their systems have been proved;
- theorems of uniqueness of decisions for the non- linear integral equations of Volterra-Stieltjes of the third kind and their systems have been proved.



Беделова Нургуль Салибаевна

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА ТРЕТЬЕГО РОДА**

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать: 26.05.2016 г.

Объем : 1,25 п.л.

Заказ № 24

Формат 60x84 1/16.

Тираж 120 шт

Редакционно-издательский отдел “Билим” ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.