**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ
ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К 01.15.504

На правах рукописи
УДК: 517.956.6

СААДАЛОВ ТӨЛӨНБАЙ ЫСМАНОВИЧ

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2016

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Информатика» Ошского технологического университета имени М.М. Адышева

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Сопуев Адахимжан**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Керимбеков Акылбек Керимбекович**
	кандидат физико-математических наук, доцент **Зулпукаров Алтынбек Зулпукарович**
Ведущая организация	Институт теоретической и прикладной математики НАН КР

Защита диссертации состоится «23 » декабря 2016 г. в 12^{00} часов на заседании диссертационного совета К 01.15.504 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете и институте природных ресурсов южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета.

Автореферат разослан « 18» декабря 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т.О.

Актуальность темы. Одним из подходов математического моделирования процессов, происходящих в неоднородных и кусочно-однородных средах, а также при сосредоточенных факторах, является сведение их к изучению задачам сопряжения для уравнений в частных производных второго, третьего и четвертого порядков. Задачи с нелокальными условиями сопряжения для уравнений в частных производных часто используются в качестве математической модели процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками.

Задачи сопряжения для уравнений в частных производных четвертого порядка сравнительно мало исследованы. С увеличением порядка уравнения в частных производных такие вопросы, например, как корректность постановки задачи, представление решения уравнения, количество условий склеиваний и разрешимость задачи не всегда очевидны и требуют тщательного исследования в каждом конкретном случае.

Поэтому, постановка и исследование корректных краевых задач и задач сопряжений для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка определяет актуальность данного исследования.

Связь темы диссертации с крупными научными проектами и основными научно-исследовательскими работами.

Диссертационное исследование проведено в соответствии с проектом Института фундаментальных и прикладных исследований Ошского государственного университета МОиН КР по теме: «Изучение математических моделей гидроаэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы» (гос. регистрация№0005721, 20.04.2012).

Цели и задачи исследования:

- доказать существование и единственность решения краевых задач для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка;
- выявить количество условий склеивания, обеспечивающие корректности задач сопряжений;
- отыскать достаточные условия гладкости заданных функций и разрешимости задач сопряжений;
- доказать единственность решения задачи сопряжений псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка.

Методика исследования. При построении представления решений уравнений использован метод понижения порядка уравнения и метод функции Римана. Для доказательства существования и единственности решений применен метод редукции краевых задач к решению интегральных уравнений типа Фредгольма или Вольтерра и их систем, а также принцип сжатых отображений и метод последовательных приближений.

Научная новизна работы состоит в разработке корректности постановки новых краевых задач, формулировке нелокальных условий сопряжения, отыскании формы криволинейных границ области определения уравнений и условий согласования заданных краевых условий. Построенная теория позволяет доказать корректность задачи сопряжений для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка.

Научная новизна работы заключается в том, что

- разработана корректность постановки новых краевых задач;
- сформулированы нелокальные условие сопряжения;
- найдены формы криволинейных границ области определения уравнений и условий согласования заданных краевых условий;
- построена теория доказательства корректности задачи сопряжения для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Результаты диссертации, связанные с исследованием задачи сопряжения для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка, могут быть использованы для развития теории краевых задач уравнений в частных производных второго, третьего, четвертого и более высокого порядков, а также при моделировании явлений и процессов, протекающих в неоднородных, кусочно-однородных средах и при сосредоточенных факторах. Кроме этого материалы диссертации можно использовать в научных исследованиях, а также при разработке спецкурсов для профильных и других естественно-технических направлений в высших учебныхзаведениях.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сформулирование корректности постановки краевых задач и задачи сопряжений для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка как в прямоугольных, так и в криволинейных областях.
2. Определение достаточных условий существования и единственности решений краевых задач для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка с нелокальными условиями сопряжения.
3. Установление однозначной разрешимости краевых задач для псевдопараболических и гиперболических уравнений, когда условия сопряжения задаются на нехарактеристической линии.
4. Построение функции Римана для псевдопараболических и гиперболических уравнений с младшими членами и изучение ее свойства.
5. Определение количества условий склеивания, обеспечивающие корректности задач сопряжений.

Апробация работы.Итоги исследования регулярно докладывались и обсуждались на конференциях, заседаниях кафедры и результаты докладывались: на второй международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений» (г. Чолпон-Ата, 2013 г.); республиканской научно-теоретической конференции, посвященной 20-летию Жалал-Абадского государственного университета (г. Жалал-Абад, 2013 г.); международном Конгрессе «V Congress o f the Turkic World Mathematicians» (Иссык-Куль, Аврора, 2014 г.); международном форуме, проведенной в Иссык-Куле (с. Бозтери, 2015 г.); XLII Международной научно-практической конференции «Естественные математические науки в современном мире» (г. Новосибирск, 2016 г.).

Некоторые положения обсуждались также на семинаре «Уравнения в частных производных» (г. Ош, ОшГУ, 2012-2016 гг.), руководитель – д.ф.-м.н., профессор А. Сопуев; межвузовском научном семинаре «Актуальные вопросы теории дифференциальных уравнений» ОшГУ, руководитель – д.ф.-м.н., профессор К. Алымкулов (г. Ош, 2012-2016 гг); семинаре по дифференциальным уравнениям, руководитель – д.ф.-м.н., профессор К.С. Алыбаев (г. Жалал-Абад, ЖАГУ. 2013-2016 гг).

Публикации по теме диссертации. По теме исследования опубликовано 13 работ в научных изданиях, в том числе – 9статей: [1] - [2], [5] -[11] и 4 тезиса [3], [4], [12], [13].

Личный вклад автора в совместных работах. В совместных работах [2] - [4], [6], [9], [13] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а доказательство теорем существования и единственности решений, получение основных результатов – автору.

Структура, объем и краткое содержание диссертации: Диссертация состоит из введения, четырех глав, состоящих из 9 разделов, списка использованных источников из 76 наименований и заключения. Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем, формул, примеров – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста 112 страниц.

Пользуясь, случаем, выражаю глубокую благодарность и искреннюю признательность моему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А. Сопуеву за постановку задач, за ценные и полезные советы, за постоянное внимание и обсуждение результатов работы.

Краткое содержание работы. В **первой главе** проводится обзор работ по теме диссертационной работы и сформулированы основные результаты, полученные в данной работе.

В **разделе 1.2** делается обзор основных результатов, полученных в данном исследовании. В работе рассматриваются задачи сопряжения для уравнений в частных производных четвертого порядка вида

$$\begin{aligned} L_1(u) \equiv u_{xxyy} + a_1(x,y)u_{xxy} + a_2(x,y)u_{xyy} + b_1(x,y)u_{xx} + b_2(x,y)u_{xy} + \\ + b_3(x,y)u_{yy} + c_1(x,y)u_x + c_2(x,y)u_y + d(x,y)u = f_1(x,y), \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} L_2(u) \equiv u_{xxxy} + \alpha_1(x,y)u_{xxx} + \alpha_2(x,y)u_{xxy} + \beta_1(x,y)u_{xx} + \\ + \beta_2(x,y)u_{xy} + \gamma_1(x,y)u_x + \gamma_2(x,y)u_y + \delta(x,y)u = f_2(x,y), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $a_i,\ c_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ f_i (i=1,2),\ b_j (j=\overline{1,3}),\ \delta$ являются заданными гладкими функциями.

Линейное уравнение гиперболического типа с двумя действительными кратными характеристиками относительно старших производных (уравнение (1)) приведено к каноническому виду. Прямые $x = const,\ y = const$ являются двукратными действительными характеристиками уравнения (1).

Уравнение (2) является линейным уравнением гиперболического типа с двумя действительными характеристиками (одной из них является трехкратными, а другой – однократными), также приведено к каноническому виду относительно старших производных. Прямая $y = const$ является трехкратной действительной, а $x = const$ - однократной характеристикой уравнения (2). При этом, уравнение (2) часто называется псевдопараболическим уравнением.

Во второй главе установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи сопряжения для уравнений (1) и (2), при условии характеристики склеивания $y = 0$.

В разделе 2.1 в характеристическом прямоугольнике D с вершинами $A_0(0,h),\ A_1(0,-h_1),\ B_1(\ell,-h_1),\ B_0(\ell,h)\ (h,\ h_1,\ell > 0),$ рассматривается краевая задача для псевдопараболического и гиперболического уравнений четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения на общей границе $J = \{(x,y):\ 0 < x < \ell, y = 0\}$ областей $D_1 = D \cap (y > 0)$ и $D_2 = D \cap (y < 0)$ (рис. 1).

Задача 2.1.1. *Найти функцию* $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению (1), граничным условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \qquad (3)$$

$$u(x,h) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell, \qquad (4)$$

а в области D_2 *уравнению (2), граничным условиям*

$$u(0,y) = \chi_1(y),\ u_x(0,y) = \chi_2(y),$$
$$u_{xx}(0,y) = \chi_3(y),\ -h_1 \le y \le 0, \qquad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u(x,+0) = u(x,-0),\ u_y(x,+0) == \rho(x)\times$$
$$\times u_y(x,-0) + \int_0^x \theta(x,\xi) u_y(\xi,-0)d\xi + r(x), \qquad (6)$$

где $a_i,\ c_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i (i = 1,2),\ b_j,\ \chi_j (j = \overline{1,3}),$
$\varphi_1, \varphi_2, d, \delta, \psi, \rho, \theta, r$ *- заданные функции, при этом выполняются следующие условия*

$$a_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1),\ a_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+2}(D_1),$$
$$b_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1), b_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1),$$
$$b_3 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1), c_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1),$$
$$c_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), d \in C(\overline{D}_1),\ \alpha_1 \in C(\overline{D}_2) \cap$$
$$\cap C^{3+0}(D_2), \delta \in C(\overline{D}_2), \alpha_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2), \qquad (7)$$
$$\beta_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2), \beta_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2),$$
$$\gamma_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \gamma_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2),$$
$$\theta \in C^{3+0}(\overline{Q}), \rho, r \in C^3[0,\ell].$$

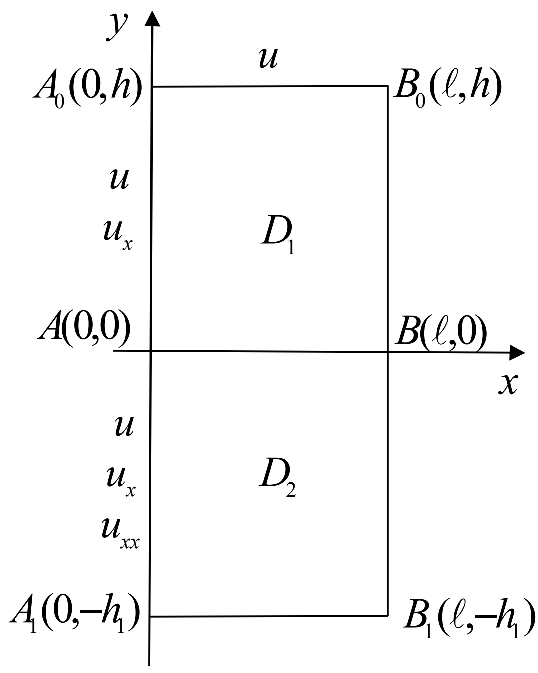

Рис. 1.

$$\varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0,h],\ \psi \in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3 \in C^1[-h_1,0],$$
$$\varphi_1(0) = \chi_1(0),\ \varphi_2(0) = \chi_2(0),\ \varphi_2(h) = \psi(0). \qquad (8)$$

Введем следующие обозначения

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ 0\le x\le \ell,$$
$$u_y(x,+0)=\nu_1(x),\ \ u_y(x,-0)=\nu_2(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{9}$$

причем $\tau(x),\ \nu_1(x),\ \nu_2(x)$ - пока неизвестные функции. Тогда в силу постановки задачи 2.1.1 из второго условия (9) получим

$$\nu_1(x)=\rho(x)\nu_2(x)+\int_0^x \theta(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi+r(x), \tag{10}$$

Разберем вспомогательную задачу для уравнения (1) с условиями (3) и начальными условиями

$$u(x,0)=\tau(x),u_y(x,+0)=\nu_1(x),0\le x\le \ell\,. \tag{11}$$

В целях решения этой задачи введем функцию Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, являющаяся в области $D_1^*=\{(\xi,\eta):0<\xi<x,\ 0<\eta<y\}$ ($D_1^*\subset D_1$) решением уравнения

$$L_1^*(\vartheta)\equiv \vartheta_{\eta\eta\xi\xi}-(a_1\vartheta)_{\eta\xi\xi}-(a_2\vartheta)_{\eta\eta\xi}+(b_1\vartheta)_{\xi\xi}+(b_2\vartheta)_{\eta\xi}+(b_3\vartheta)_{\eta\eta}-(c_1\vartheta)_{\xi}-(c_1\vartheta)_{\eta}+d\vartheta=0$$

и удовлетворяющая краевым условиям

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\quad \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\omega_1(\xi,\eta;x),$$
$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\quad \vartheta_\eta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\omega_2(\xi,\eta;y),$$

где $\omega_1(\xi,\eta;x),\ \omega_2(\xi,\eta;y)$, определяются в качестве решения следующих задач:

$$\vartheta_{\eta\eta\xi}(x,y;x,\eta)-[a_1(x,\eta)\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)]_\eta+b_1(x,\eta)\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)=0,\ 0\le\eta\le y,$$
$$\vartheta_\xi(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_{\xi\eta}(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1,$$
$$\vartheta_{\xi\xi\eta}(x,y;\xi,y)-[a_2(\xi,y)\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)]_\xi+b_3(\xi,y)\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)=0,\ 0\le\xi\le x,$$
$$\vartheta_\eta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_{\eta\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1.$$

Тогда решение вспомогательной задачи представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}u(x,y)=&A_1(x,y)\varphi_1(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_2(y)+\int_0^y[B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta)-\\&-C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta+\int_0^x[\vartheta(x,y;\xi,0)\nu_1''(\xi)-D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi)+\\&+a_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\nu_1'(\xi)-E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi)+b_3(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\nu_1(\xi)-\\&-F_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\xi,\end{aligned}\tag{12}$$

где функции $A_1(x,y),\ B_1(x,y;\eta),\ C_1(x,y;\eta),\ D_1(x,y;\xi),\ E_1(x,y;\xi),\ F_1(x,y;\xi)$ выражаются посредством данных задачи 2.1.1 и функции $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$.

Применяя условие (4) из (12) получаем соотношение для функции $\tau(x)$ и $\nu_1(x)$, выходящее из области D_1:

$$\begin{aligned}&D_{1\xi}(x,h;x)\tau(x)-\vartheta_\xi(x,h;x,0)\nu_1(x)=\\&=\int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int_0^x H_2(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi+\Phi_1(x),\end{aligned}\tag{13}$$

где $H_1(x,\xi),\ H_2(x,\xi),\ \Phi_1(x)$ - заданные функции, выражающиеся функциями $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ и данными задачи 2.1.1.

С другой стороны, учитывая постановку задачи 1 и устремляя y к нулю из уравнения (2), получаем следующее соотношение

$$\nu_1(x) = -\alpha_1(x,0)\rho(x)\tau(x) + \int_0^x H(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \widetilde{g}(x), \qquad (14)$$

где $H(x,\xi)$, $\widetilde{g}(x)$ выражаются посредством коэффициентов уравнения (2) и через граничные данные (5). Затем, исключив $\nu_1(x)$ из соотношений (13) и (14), получим таковое интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau(x) = \int_0^x K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + g(x), \qquad (15)$$

где $\rho_1(x) = 1 + [\alpha_1(x,0)\rho(x) - 2a_1(x,0)]\vartheta_\xi(x,h;x,0) - \int_0^h b_1(x,t)\vartheta_\xi(x,h;x,t)dt,\ K(x,\xi)$, $g(x)$ - являются заданными функциями.

При выполнении условия

$$\forall x \in [0,\ell]:\ \rho_1(x) \neq 0, \qquad (16)$$

уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, имеющее единственное решение.

Так, если $\alpha_1(x,0)\rho(x) - 2a_1(x,0) = 0,\ b_1(x,y) = 0$, то $\rho(x) = 1$, что свидетельствует о выполнении условия (16).

При условии

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) - a_{1y}(x,y) \leq 0, \qquad (17)$$

получаем

$$\forall \eta \in [0,h) : \vartheta_\xi(x,y;x,\eta) < 0. \qquad (18)$$

Поэтому, если

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) \geq 0, \forall x \in [0,\ell] : \alpha_1(x,0)\rho(x) - 2a_1(x,0) \leq 0, \qquad (19)$$

то

$$\forall x \in [0,\ell] : \rho(x) \geq 1.$$

Следовательно, при выполнении условий (17) и (19) имеет место условие (16) и интегральное уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, допускающее единственное решение. Определив $\tau(x)$ из уравнения (15), будем знать и $\nu_1(x)$. Тогда решение задачи 2.1.1 в области D_1 будет иметь вид (12), а в области D_2 определится по формуле

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_{1\xi\xi}(x,y;x,0)\tau(x) + \int_0^x A_2(x,y;\xi)\tau(\xi)d\xi + \\ &+ \int_0^y [\vartheta_1(x,y;0,\eta)\chi_3'(\eta) + \alpha_1(0,\eta)\vartheta_1(x,y;0,\eta)\chi_3(\eta) - B_2(x,y;\eta)\chi_2'(\eta) + \\ &+ C_2(x,y;\eta)\chi_2(\eta) + D_2(x,y;\eta)\chi_1'(\eta) + E_2(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta, \end{aligned} \qquad (20)$$

где $A_2(x,y;\xi)$, $B_2(x,y;\eta)$, $C_2(x,y;\eta)$, $D_1(x,y;\eta)$, $E_2(x,y;\eta)$ - заданные функции, а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (2), определяющаяся как решение сопряженного уравнения

$$L_2^*(\vartheta_1) = \vartheta_{1\xi\xi\xi\eta} - (\alpha_1\vartheta_1)_{\xi\xi\xi} - (\alpha_2\vartheta_1)_{\xi\xi\eta} + (\beta_1\vartheta_1)_{\xi\xi} + (\beta_2\vartheta_1)_{\xi\eta} - (\gamma_1\vartheta_1)_\xi - (\gamma_2\vartheta_1)_\eta + \delta\vartheta_1 = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$\vartheta_1(x,y;x,\eta)=0,\ \vartheta_{1\xi}(x,y;x,\eta)=0,\ \vartheta_{1\xi\xi}(x,y;x,\eta)=exp\left(\int\limits_y^\eta \alpha_1(x,t)dt\right),$$

$$\vartheta_1(x,y;\xi,y)=\omega_1(x,y,\xi),$$

где $\omega_1(x,y,\xi)$ - решение следующей задачи Коши:

$$\vartheta_{1\xi\xi\xi}(x,y;\xi,y)-\alpha_2(\xi,y)\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y)+[\beta_2(\xi,y)-2\alpha_{2\xi}(\xi,y)]\vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,y)+$$
$$+[\beta_{2\xi}(\xi,y)-\alpha_{2\xi\xi}(\xi,y)-\gamma_2(\xi,y)]\vartheta_1(x,y;\xi,y)=0,$$
$$\vartheta_1(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1,\ 0\le\xi\le x.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2.1.1. *Если выполняются условия* (7), (8), (17) *и* (19), *то решение задачи* 2.1.1 *существует, единственно и определяется в областях* D_1 *и* D_2 *по формулам* (12) *и* (20) *соответственно.*

В **разделе 2.2** в области D, описанной в разделе 2.1, рассматривается

Задача 2.2.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1), граничным условиям (3), (4), удовлетворяющую в области D_2 уравнению (2), граничным условиям (рис. 2)

$$\begin{aligned}&u(\ell,y)=\chi_1(y),\ u_x(\ell,y)=\chi_2(y),\\&u_{xx}(\ell,y)=\chi_3(y),\ -h_2\le y\le 0\end{aligned}\qquad(21)$$

и условиям сопряжения (6), где для коэффициентов уравнений и заданных функций выполняются условия (7) и

$$\begin{aligned}&\varphi_1,\varphi_2\in C^2[0,h],\ \chi_i\in C^1[-h_1,0]\ (i=\overline{1,3}),\\&\varphi_1(h)=\psi(0),\ \varphi_2(h)=\psi'(0)\end{aligned}\qquad(22)$$

$$\forall x\in[0,\ell]:\ \rho(x)\ne 0.\qquad(23)$$

Методом функции Римана и интегральных уравнений разрешимость задачи 2.2.1 эквивалентно сводится к разрешимости интегрального уравнения

$$\rho_1(x)\tau(x)=\int\limits_0^x M_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int\limits_x^\ell P_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g_3(x),\qquad(24)$$

где $\rho_1(x)$, $M_1(x,\xi)$, $P_1(x,\xi)$, $g_3(x)$ - заданные функции, выражающиеся через данные задачи 2.2.1. Если

$$\forall x\in[0,\ell]:\ \rho_1(x)\ne 0,\qquad(25)$$

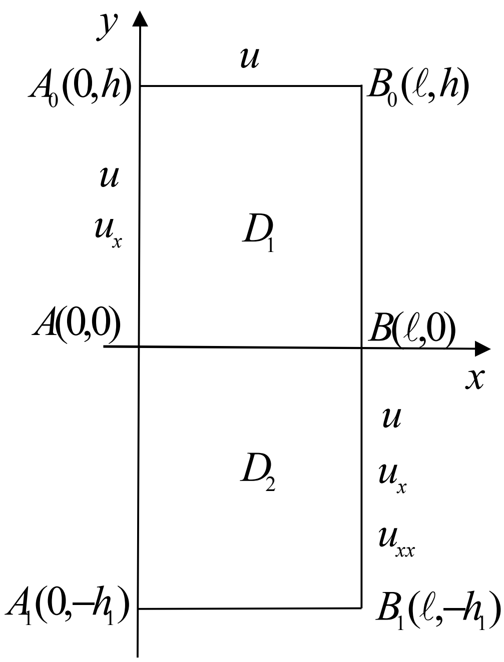

Рис. 2.

то уравнение (24) является уравнением типа Фредгольма второго рода. При выполнении условия (25) из (24) получим

$$\tau(x)=\int\limits_0^x M(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\int\limits_x^\ell P(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g(x),\qquad(26)$$

где $M(x,\xi)=\dfrac{M_3(x,\xi)}{\rho_1(x)}$, $P(x,\xi)=\dfrac{P_3(x,\xi)}{\rho_1(x)}$, $g(x)=\dfrac{g_3(x)}{\rho_1(x)}$.

Пусть $\max\left(\|M(x,\xi)\|_{C(\bar{Q})},\|P(x,\xi)\|_{C(\bar{Q})}\right)=K$, где $Q=\{(x,\xi):0<x<\ell,\ 0<\xi<\ell\}$.

Если

$$K\ell<1, \tag{27}$$

то уравнение (26) имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений.

Таким образом, доказана

Теорема 2.2.1. При выполнении условий (7), (22), (23), (25) и (27), решение задачи 2.2.1 существует единственное.

В **разделе 2.3** рассмотрены краевые задачи для уравнений (1) и (2) с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области D (рис. 3), ограниченная линиями $A_0A: x=0,\ AA_1: x=\sigma(y), -h_1\le y\le 0\ (h_1>0),\ A_1B_1:\ y=-h_1$, $B_1B_0: x=\ell$, $A_0B_0: y=\mu(x),\ 0\le x\le \ell$. Пусть $D_1=D\cap(y>0),\ D_2=D\cap(y<0)$, а $\sigma(y)$, $\mu(x)$ - монотонно неубывающие гладкие функции.

Задача 2.3.1. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению (1), граничным условиям*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,\ u(x,\mu(x))=\psi(x),\ 0\le x\le \ell,$$

удовлетворяющую в области D_2 *уравнению (2), граничным условиям*

$$u(\sigma(y),y)=\chi_1(y), -h_1\le y\le 0,\ u(\ell,y)=\chi_2(y), u_x(\ell,y)=\chi_3(y),\ -h_1\le y\le 0$$

и условиям сопряжения (6), где $a_i, c_i, \beta_i, \gamma_i, f_i, \varphi_i\ (i=1,2),\ b_j, \chi_j\ (j=\overline{1,3}), \alpha$, $d, \delta, \psi, \rho, \theta, r, \mu, \sigma$ - *заданные функции, удовлетворяющие условиям гладкости (7) и условиям согласования*

$\varphi_1,\varphi_2\in C^2[0,h],\ \psi,\mu,\rho,r\in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2$, $\chi_3,\sigma\in C^1[-h_1,0], \theta\in C(\bar{Q})\cap C^{2+1}(Q), Q=\{(x,t):$ $0<x<\ell,\ 0<t<\ell\},\ h,h_1,\ell>0, \forall x\in[0,\ell]:\rho(x)\ne 0$, $\forall x\in[0,\ell]: h_2\le\mu(x)\le h,\ \mu(0)=h,\ \mu(\ell)=h_2$, $\forall x\in[-h_1,0]: 0\le\sigma(y)\le\ell_1,\ \sigma(0)=0,\ \sigma(-h_1)=\ell_1$, $0\le\ell_1<\ell,\ 0<h_2\le h, \varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \varphi_1(h)=\psi(0)$.

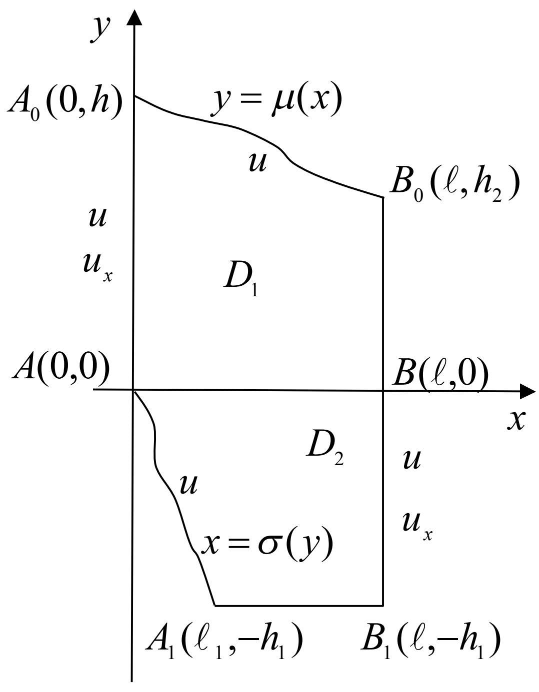

Рис. 3.

В задаче 2.3.1, в отличие от задач 2.1.1 и 2.2.1, в левой криволинейной боковой границе области D_2 задано значение самой искомой функция, на правой боковой границе – значение самой функции и ее производной, а на верхней криволинейной границе области D_1 задано значение самой функции. Здесь, по причине наличия криволинейной границы строится другой вариант функции Римана, отличающийся от функции Римана, построенной в задаче 2.1.1.

Схема исследования задачи 2.3.1 аналогична задаче 2.1.1 с той лишь разницей, что разрешимость задачи 2.3.1 сводится к интегральному уравнению вида

$$\rho_1(x)\tau(x) = g(x) + \int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^\ell K_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \qquad (28)$$

где $\rho_1(x) = 1 - 2a_1(x,0)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,0) - \int_0^{\mu(x)} b_1(x,t)\vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,t)dt,\ H_1(x,\xi)$,

$K_1(x,\xi),\ g(x)$ - заданные функции, а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана уравнения $L_2^*(\vartheta_1) = 0$.

Если

$$\forall x \in [0,\ell]:\ \rho_1(x) \neq 0, \qquad (29)$$

то уравнение (28) является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода. При выполнении условия

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) - a_{1y}(x,y) \le 0 \qquad (30)$$

получим

$$\forall\ x \in [0,\ell],\ \forall \eta \in [0,\mu(x)] : \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,\eta) \le 0. \qquad (31)$$

Наряду с этим, если

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) \ge 0, \forall x \in [0,\ell] : a_1(x,0) \ge 0, \qquad (32)$$

то в силу (30) имеем

$$\forall x \in [0,\ell] : \rho_1(x) \ge 1. \qquad (33)$$

Так, если $a_1(x,0) \equiv 0,\ b_1(x,y) \equiv 0$, то $\rho(x) = 1$, и, таким образом условие (29) выполняется. В этом случае, используя метод последовательных приближений решаем уравнение (28) при условиях (29) и находим единственное решение $\tau(x)$, затем как и в задаче 2.1.1, доказываем однозначную разрешимость задачи 2.3.1.

В **разделе 2.4** рассмотрена задача сопряжения для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка в неограниченной области $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \{(x,y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x,y) : 0 < x < +\infty,\ -\infty < y < 0\}$.

Задача 2.4.1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 однородному уравнению (1), граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h,\ u(x,h) = \psi(x),\ 0 \le x < +\infty,$$

удовлетворяющую в области D_2 уравнению (2), граничным условиям

$$u(0,y) = \chi_1(y),\ u_x(0,y) = \chi_2(y),\ u_{xx}(0,y) = \chi_3(y),\ -\infty < y \le 0$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0),\ u_y(x,-0) = u_y(x,+0),\ 0 \le x < +\infty,$$

где $a_i,\ c_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \varphi_i\ (i = 1,2),\ b_j,\ \chi_j\ (j = \overline{1,3}),\ \alpha_2, d,\ \delta,\ \psi$ - заданные гладкие функции, при котором

$$a_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+1}(D_1),\ a_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+2}(D_1),\ b_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{2+0}(D_1),$$

$$b_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1),\ b_3 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1),\ c_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1),$$

$c_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+2}(D_1),\ d \in C(\overline{D}_1),$

$\alpha_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+1}(D_2),\ \beta_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{2+0}(D_2),\ \beta_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_1),$

$\gamma_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2),\ \gamma_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2),\ \delta \in C(\overline{D}_2),$

$\varphi_i \in C^1[0,h]\ (i=1,2),\ \psi \in C^2[0,+\infty),\ \chi_j \in C^1(-\infty,0]\ (j=\overline{1,3}),$

$$\chi_j(y) = O\left(\frac{1}{|y|^{1+\lambda}}\right)(j=\overline{1,3}),\ y \to -\infty,\ \psi(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\lambda}}\right),\ x \to +\infty,\ \lambda > 0,$$

$\varphi_i(0) = \chi_i(0)\ (i=1,2),\ \varphi_1(h) = \psi(0).$

Методом интегральных уравнений разрешимость задачи 2.4.1 сведем к разрешимости интегрального уравнения

$$D_{1\xi}(x,h;x)\tau(x) = \Psi_1(x) + \int_0^x K_1(x,\xi)\tau(\xi)d(\xi), \qquad (34)$$

где $D_{1\xi}(x,h;x) = 1 + \int_0^h b_1(x,\eta_1)\vartheta_\xi(x,h,x,\eta_1)d\eta_1$, а $\Psi_1(x)$, $K_1(x,\xi)$ - заданные функции. При выполнении условия $\forall x \in [0,\ell] : D_{1\xi}(x,h;x) \neq 0$ уравнение (34) считается уравнением Вольтерра, имеющее единственное решение. Затем посредством функции Римана построим решения задачи 2.3.1 в областях D_1 и D_2.

Третья глава посвящена задачам сопряжения для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка с нелокальными условиями сопряжения в криволинейном треугольнике, ограниченной линиями $A_0A_1 : x=0,\ -h_1 \le y \le 0$, $A_1B : x = \sigma(y),\ -h_1 \le y \le 0$, $BA_0 : y = \mu(x),\ 0 \le x \le \ell$, а $D_1 = D \cap (y>0),\ D_2 = D \cap (y<0)$ (рис. 4). Где $\sigma(y)$, $\mu(x)$ - монотонно невозрастающие функции.

В **разделе 3.1** рассмотрена

Задача 3.1.1. *Найти функцию* $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению (1), граничным условиям*

$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h,$

$u(x,\mu(x)) = \psi(x),\ 0 \le x \le \ell,$

удовлетворяющую в области D_2 *уравнению (2), граничным условиям*

$u_x(0,y) = \chi_1(y),\ u_{xx}(0,y) = \chi_2(y),\ -h_1 \le y \le 0,$

$u(\sigma(y),y) = \chi_3(y),\ -h_1 \le y \le 0$

и условиям сопряжения (6), где $a_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, f_i, \varphi_i (i=1,2),\ b_j,\ \chi_j (j=\overline{1,3}),$ $d, \delta, \psi, \mu, \sigma, \rho, \theta, r$ *- заданные функции, при этом отметим, что для них выполняются условия (7) и* $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0,h],\ \psi \in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3 \in C^1[-h_1,0],$ $\varphi_1(0) = \chi_1(0),\ \varphi_2(0) = \chi_2(0),\ \varphi_2(h) = \psi(0).$

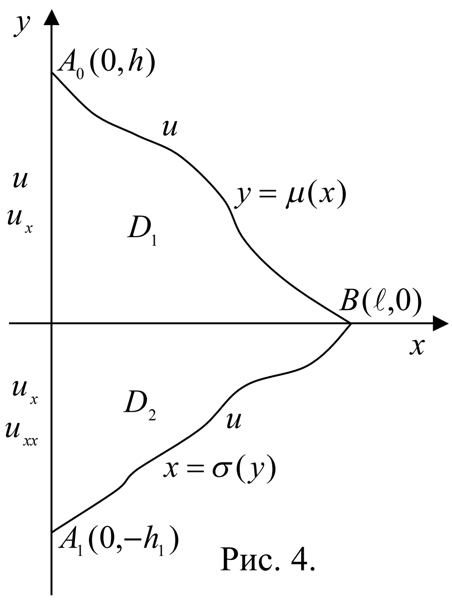

Рис. 4.

Особенностью данной задачи является то, что краевые условия задаются по всей границе области, поэтому ее можно называть задачей типа задачи Дирихле.

В целях решения задачи 3.1.1 применим обозначения (9) и сведем к решению интегрального уравнения

$$\rho_1(x)\tau(x) = g(x) + \int_0^x K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{35}$$

где $\rho_1(x) = 1 + [\rho(x)\alpha_1(x,0) - 2a_1(x,0)]\vartheta_\xi(x,\mu(x);x,0) - \int_0^{\mu(x)} b_1(x,t)\vartheta_\xi(x,\mu(x);x,t)dt,$ а

$K(x,\xi),\ g(x)$ - это заданные функции.

В случае выполнения условия

$$\forall x \in [0,\ell]:\ \rho_1(x) \neq 0, \tag{36}$$

уравнение (35) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, допускающее единственное решение.

Так, если $\rho(x)\alpha_1(x,0) - 2a_1(x,0) \equiv 0,\ b_1(x,y) \equiv 0$, то $\rho(x) = 1$, что означает, что условие (36) выполняется.

Теперь видно, что если выполняется условие

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) - a_{1y}(x,y) \leq 0, \tag{37}$$

то

$$\forall x \in [0,\ell],\ \eta \in [0,\mu(x)] : \vartheta_\xi(x,\mu(x);x,\eta) \leq 0. \tag{38}$$

Пример 3.1.1. Представим, что $a_1 = a^2 + x^2\ (a = const \neq 0),\ a_2 \equiv b_j \equiv c_i \equiv d \equiv 0$ $(i = 1,2,.\ \ j = \overline{1,3})$. В этом случае для функции Римана получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta) = (\xi - x)(\eta - y) - (a^2 + \xi^2)\int_y^\eta \vartheta(x,y;\xi,t)dt,$$

явное решение которого, имеет вид

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta) = \frac{x-\xi}{a^2+\xi^2}\left\{exp\left[(a^2+\xi^2)(y-\eta)\right] - 1\right\},\ 0 \leq \xi \leq x,\ 0 \leq \eta \leq y.$$

Здесь отметим, что

$$\forall x \in [0,\ell],\ \eta \in [0,\mu(x)] : \vartheta_{1\xi}(x,\mu(x);x,\eta) = -(a^2+x^2)\left\{exp\left[(a^2+x^2)(\mu(x)-\eta)\right] - 1\right\} \leq 0.$$

Получается, что множество коэффициентов уравнения (3.1.1), для которых выполняется неравенство (37), составляет не пустое множество.

Если

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) \geq 0, \forall x \in [0,\ell] : \rho(x)\alpha_1(x,0) - 2a_1(x,0) \leq 0, \tag{39}$$

то

$$\forall x \in [0,\ell] : \rho_1(x) \geq 1.$$

Это означает, что при выполнении условий (37) и (39) интегральное уравнение (35) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускающее единственное решение. Затем следует решение задачи 3.1.1 методом функции Римана как в области D_1, так и в области D_2.

В **разделе 3.2** изучена задача 3.2.1, при котором на линии сопряжения задаются разрывные условия склеивания относительно искомой функции и интегральные нелокальные условия для производной по нормали.

В разделе 3.3 установлена единственная разрешимость задачи 3.3.1: найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\bigcap C^{3+1}(D_2)]$, в области D_1 удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям (рис. 5)

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$
$$u(x,\mu(x))=\psi(x),\ 0\le x\le \ell,$$

в области D_2 - уравнению (2), краевым условиям

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_{xx}(0,y)=\chi_2(y),\ -h_1\le y\le 0,$$
$$u_x(\sigma(y),y)=\chi_3(y),\ -h_1\le y\le 0$$

и условиям сопряжения (6).

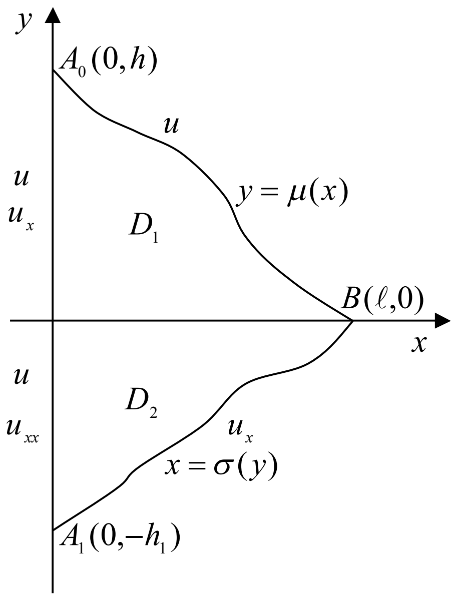

Рис. 5

В **четвертой главе** рассмотрены задачи сопряжения для псевдопараболо-гиперболических уравнений четвертого порядка, при котором условия склеивания задаются на нехарактеристической линии.

В **разделе 4.1** исследована задача сопряжения для псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка

$$u_{xxyy}+c_1u=0,\ (x,y)\in D_1=D\cap(x<y), \tag{40}$$
$$u_{xxxy}+c_2u=0,\ (x,y)\in D_2=D\cap(x>y), \tag{41}$$

где $D=\{(x,y):0<x<\ell,0<y<\ell\}\ (\ell>0)$, $c_1,c_2-const$.

Задача 4.1.1. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)]$, *удовлетворяющую уравнениям (40) и (41) соответственно в областях* D_1 *и* D_2, краевым *условиям*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le \ell, \tag{42}$$
$$u_{xx}(\ell,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le \ell, \tag{43}$$
$$u(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{44}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned}&u(y-0,y)=u(y+0,y),u_x(y-0,y)=u_x(y+0,y),0\le y\le \ell,\\&u_{xy}(y-0,y)=u_{xy}(y+0,y),u_{xxy}(y-0,y)=u_{xxy}(y+0,y),0\le y\le \ell,\end{aligned} \tag{45}$$

где $\varphi_i\,(i=\overline{1,3}),\psi$ *- заданные функции, с учетом того, что для них выполняются следующие условия*

$$\varphi_i\in C^2[0,\ell],\varphi_3\in C^1[0,\ell],\ \psi\in C^2[0,\ell],\ \varphi_i(0)=\psi^{(i)}(0)(i=0,1),\ \varphi_3(0)=\psi''(\ell).$$

Отличительной особенностью данной задачи является то, что условия сопряжения задаются на линии $y=x$.

В **разделе 4.2** изучается задача 4.2.1 с условиями (42) - (45) для уравнений с младшими членами вида

$$L_1(u)\equiv u_{xxyy}+b(x,y)u_{xy}+c_1(x,y)u_x+c_2(x,y)u_y+d(x,y)u=0,\ (x,y)\in D_1,$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxxy} + \beta(x,y)u_{xy} + \gamma_1(x,y)u_x + \gamma_2(x,y)u_y + \delta(x,y)u = 0,\ (x,y) \in D_2,$$

где $b, \beta, d, \delta, c_i, \gamma_i\ (i = 1,2)$, $\varphi_i\ (i = \overline{1,3}), \psi$ – *заданные функции, когда для них выполняются следующие условия*

$$\varphi_i \in C^2[0,h]\ (i = 1,2),\ \varphi_3 \in C^1[0,h],\ \psi \in C^2[0,\ell], \tag{46}$$

$$\begin{gathered} b \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+1}(D_1), c_1 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{1+0}(D_1), c_2 \in C(\overline{D}_1) \cap C^{0+1}(D_1), d \in C(\overline{D}_1), \\ \beta \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+1}(D_2), \gamma_1 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{1+0}(D_2), \gamma_2 \in C(\overline{D}_2) \cap C^{0+1}(D_2), \delta \in C(\overline{D}_2), \end{gathered} \tag{47}$$

$$\varphi_{i+1}(0) = \psi^{(i)}(0)\,(i = 0,1),\ \varphi_3(0) = \psi''(\ell). \tag{48}$$

$$\forall\, y \in [0,\ell] \wedge x \in [y,\ell] :\ \beta(x,y) - \frac{1}{2}(x-y)^2 \gamma_2(x,y) \le 0. \tag{49}$$

Пусть $u(y,y) = \tau(y),\ u_x(y,y) = \nu(y),\ u_{xy}(y,y) = \mu(y),\ u_{xxy}(y,y) = \chi(y),\ 0 \le x \le \ell.$ Используя метод функции Римана и интегральных уравнений разрешимость задачи 4.2.1 эквивалентным образом сводим к решению системы интегральных уравнений Фредгольма вида

$$g_i(y) = \rho_i(y) + \sum_{j=1}^{4} \int_0^{\ell} K_{ij}(y,\xi) g_j(\xi) d\xi,\ i = \overline{1,4}, \tag{50}$$

где $g_1(y) = \tau(y),\ g_2(y) = \nu(y),\ g_3(y) = \mu(y),\ g_4(y) = \chi(y)$

$\rho_1(y) = \tau_0(y),\ \rho_2(y) = \nu_0(y),\ \rho_3(y) = \mu_0(y),\ \rho_4(y) = \chi_0(y),$

$K_{ij}(y,\xi)\ (i,j = \overline{1,4})$ - известные ядра, выражающиеся через данные задачи 4.2.1.

Пусть $M = \max\limits_{0 \le i \le 4} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{4} \max\limits_{0 \le y,\, \xi \le \ell} |K_{ij}(y,\xi)| \right\}$. При выполнении условия

$$M\,\ell < 1, \tag{51}$$

система уравнений (50) имеет единственное решение, выраженное в виде

$$g_i(y) = \rho_i(y) + \sum_{j=1}^{4} \int_0^{\ell} R_{ij}(y,\xi) g_j(\xi) d\xi,\ i = \overline{1,4},$$

где $R_{ij}(y,\xi) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n-1} K_{ij}^{(n)}(y,\xi),\ K_{ij}^{(1)}(y,\xi) \equiv K_{ij}(y,\xi), i,j = \overline{1,4}$,

$$\begin{gathered} K_{ij}^{(n)}(y,\xi) = \int_0^{\ell} \Big[K_{i1}^{(1)}(y,s) K_{1j}^{(n-1)}(s,\xi) + K_{i2}^{(1)}(y,s) K_{2j}^{(n-1)}(s,\xi) + \\ + K_{i3}^{(1)}(y,s) K_{3j}^{(n-1)}(s,\xi) + K_{i4}^{(1)}(y,s) K_{4j}^{(n-1)}(s,\xi) \Big] ds,\ i,j = \overline{1,4},\ n = 2,3,... \end{gathered}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.2.1. *Если выполняются условия* (46)–(48), (49) *и* (51), *то решение задачи* 4.2.1 *существует и в единственном виде.*

В **разделе 4.3** доказана разрешимость задачи 4.3.1, отличающее от задачи 4.2.1, тем, что вместо условия (43) берется условие

$$u_{xx}(\ell,y) + p(y)u_x(\ell,y) + q(y)u(\ell,y) = \varphi_3(y),\ 0 \le y \le \ell.$$

ВЫВОДЫ

В данном исследовании сформулированы и доказаны однозначная разрешимость задачи сопряжения для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка как с постоянными, так и с переменными младшими коэффициентами.

Работа показала, что, для корректности постановки задачи когда условия сопряжения задаются на линии, являющееся характеристикой одновременно для обоих уравнений, достаточно задания двух условий сопряжения: склеивания самой функции и ее нормальной производной на линии изменения типа уравнений.

В ходе исследования установлено, что для корректности задачи, вместо обычных двух условий склеивания, необходимо задание четырех условий склеивания, когда порядок уравнения равен четырем и условия сопряжения задаются не на характеристической линии. Рассмотрены также случаи, когда на линии сопряжения задаются нелокальные интегральные условия, а также разрывные условия склеивания.

В работе исследованы задачи сопряжения, когда граничные условия задаются на криволинейных участках рассматриваемой области, или краевые условия задаются на всех границах области, а также в случае, когда область является неограниченной. При решении задач использованы метод функции Римана, метод редукции к интегральным уравнениям и их системам, принцип сжимающих отображений и метод последовательных приближений.

Полученные результаты исследования, связанные с исследованием задачи сопряжений для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка, могут быть использованы для развития теории краевых задач уравнений в частных производных, а также при моделировании явлений и процессов, протекающих в неоднородных, кусочно-однородных средах, а также при сосредоточенных факторах.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Саадалов, Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейном треугольнике [Текст] / Т.Ы. Саадалов Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец. вып.– 2012, №3. – С. 114-121.

2. Саадалов, Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения в криволинейной области [Текст] / А. Сопуев, Т.Ы. Саадалов //Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец.вып.– 2012, №3. – С. 122-128.

3. Саадалов, Т.Ы. О задаче сопряжения для гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст] / А. Сопуев, Т.Ы. Саадалов // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их проблемы: Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ. – Ташкент: НУУ им. М. Улукбека, 2013. – С.105-106

4. Саадалов, Т.Ы. Об одной задаче сопряжения для гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст] / А. Сопуев, Т.Ы. Саадалов // Тезисы докладов международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», КРСУ им. Б.Н. Ельцина. – Бишкек, 2013 – С.114.

5. Саадалов, Т.Ы. О задаче сопряжения для гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст] / Т.Ы. Саадалов // Известия томского политехнического университета. Математика, физика и механика. – Томск, (РФ) 2014, Т.325, №2. – С.22-28

6. Саадалов, Т.Ы. Краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в бесконечной области [Текст] / А. Сопуев, Т.Ы. Саадалов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 47 – Бишкек: Илим, 2014. – С. 152-158.

7. Саадалов, Т.Ы. Задача с нелокальным условием сопряжения для гиперболического и псевдопараболического уравнений четвертого порядка [Текст] / Т.Ы. Саадалов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 47 – Бишкек: Илим, 2014. – С. 159-164.

8. Саадалов, Т.Ы. Об одной задаче сопряжения для псевдопараболо-гиперболических уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями в криволинейном треугольнике [Текст] / Т.Ы. Саадалов // Приволжский научный вестник (РФ), 2016 – С. 32-37.

9. Саадалов, Т.Ы. Краевая задача для общего линейного смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения [Текст] / А.Сопуев, Т.Ы. Саадалов // Приволжский научный вестник (РФ), 2016 – С. 38-43.

10. Саадалов, Т.Ы. Краевые задачи для псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка [Текст] / Т.Ы. Саадалов // Естественные и математические науки в современном мире СибАК, «Сборник статей по материалам XLII международный научно-практической конференции» (РФ), 2016 – С. 138-145.

11. Саадалов, Т.Ы. О задаче сопряжения для псевдопараболтческих и гиперболических уравнений четвертого порядка в криволинейном треугольнике [Текст] / Т.Ы. Саадалов// Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец. вып.– 2016, №. – С. 83-88.

12. Saadalov, T.Y. Non local problem of interface for pseudo-parabolic and hyperbolic equations of the fourth order. [Текст] / Saadalov T.Y. // Abstract book. V Congress of the Turkic world mathematicians, 5-7 June, Issyk-Kul Aurora, 2014. – P.-197.

13. Saadalov, T.Y. About the problem of conjugation of pseudo-parabolic and hyperbolic equations of the fourth order.in curvilinear triangle [Текст] / A. Sopuev, Saadalov T.Y. // Abstract book. Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bozteri, Kyrgyzctan, 5-7 June, 2015. – P. – 52.

Садалов Төлөнбай Ысмановичтин 01.01.02 – «Дифференциялдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алыш үчүн “Төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселелери» темасында жазылган диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: чек аралык маселе, чек аралык шарттар, жалгаштыруу маселелери, псевдопараболалык теңдеме, гиперболалык теңдеме, Риман функциясы, интегралдык теңдеме, чечимдин жалгыздыгы, чечимдин жашашы.

Изилдөөнүн объектиси: псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн чек аралык жана жалгаштыруу маселелери.

Изилдөөнүн предмети: псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн чек аралык жана жалгаштыруу маселелеринин корректтүүлүгүн изилдөө.

Изилдөөнүн максаты: псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн чек аралык жана жалгаштыруу маселелеринин бир маанилүү чечимге ээ болушунун жеткиликтүү шарттарын аныктоо.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү:

- псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн тик бурчтуу жана ийри чек арасы бар областтарда коюлган чек аралык жана жалгаштыруу маселелердин корректүүлүгү далилденген;
- псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелер үчүн локалдуу эмес жалгаштыруу шарттары бар чек аралык маселелердин чечимдеринин жашашынын жана жалгыздыгынын жеткиликтүү шарттары табылган;
- жалгаштыруу шарттары характеристикалык эмес сызыктарда берилген учурдагы псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелери үчүн чек аралык маселелердин чечимдеринин бир маанилүү аныкталышынын жеткиликтүү шарттары табылган;
- кичине мүчөлөрү бар псевдопараболалык жана гиперболалык теңдемелери үчүн Риман функциясы тургузулган жана анын касиеттери изилденген.

Алынган теориялык жыйынтыктар аралаш типтеги теңдемелер жана төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселелер теориясындагы жаңы жыйынтыктар болуп эсептелет.

Изилдөөнүн практикалык мааниси. Маселерди чечүүнүн иштеп чыгылган алгоритми жалгаштыруу маселелери катышкан практикалык маселелерди чечүүдө колдонсо болот.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Саадалова Толонбая Ысмановича на тему: “Задачи сопряжения для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Ключевые слова: краевые задачи, граничные условия, задачи сопряжения, псевдопараболическое уравнение, гиперболическое уравнение, функция Римана, интегральное уравнение, единственность решения, существование решения.

Объект исследования: краевые задачи и задачи сопряжения для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка.

Предмет исследования: корректность задачи сопряжений для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка.

Цель исследования: установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи сопряжений для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка.

Методы исследования: при исследовании были использованы методы теории интегральных уравнений, функции Римана, принцип сжатых отображений, уравнений математической физики, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования:

- сформулированы корректности постановки краевых задач и задачи сопряжений для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка как в прямоугольных, так и в криволинейных областях;
- найдены достаточные условия существования и единственности решений краевых задач для псевдопараболических и гиперболических уравнений четвертого порядка с нелокальными условиями сопряжения;
- установлены однозначные разрешимости краевых задач для псевдопараболических и гиперболических уравнений, когда условия сопряжения задаются на нехарактеристической линии;
- построены функции Римана для псевдопараболических и гиперболических уравнений с младшими членами и изучены ее свойства.

Полученные теоретические результаты являются новыми в теории уравнений смешанного типа и задачи сопряжений для уравнений в частных производных четвертого порядка.

Практическое значение исследования. Разработанный алгоритм построения решения может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с задачами сопряжения.

SUMMARY

Dissertation "Challenges for the pseudo-interface and hyperbolic equations of the fourth order" of Saadalova Tolonbaya Ysmanovicha is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, specialty 01.01.02 – «Differential equations, dynamical systems and optimal control»

Key words: boundary value problem, boundary conditions, coupling problems, pseudo-parabolic equations, hyperbolic equation, the Riemann zeta function, integral equation, uniqueness of solutions, the existence of solutions

The object of study: the boundary value problems and the conjugation problem for pseudo and hyperbolic equations of fourth order.

Subject of research: correct conjugation problem for pseudo and hyperbolic equations of fourth order.

Object: to establish sufficient conditions for the unique solvability of the problem of interfaces and pseudo-hyperbolic equations of fourth order.

Methods: the study used methods of the theory of integral equations, the Riemann function, the contraction mapping principle, equations of mathematical physics, functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.

Scientific novelty and theoretical significance of the research:

- formulate correct formulation of boundary value problems and the associated problem for pseudo and hyperbolic equations of fourth order in the square, and in the curved areas.
- find sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for hyperbolic and pseudo fourth-order equations with nonlocal conditions conjugation.
- the unique solvability of boundary value problems for hyperbolic equations and pseudo when transmission conditions are set at the non-characteristic line.
- constructed Riemann function for pseudo and hyperbolic equations with younger members and studied its properties.

The theoretical results are new in the theory of equations of mixed type and the associated problem for partial differential equations progizvodnyh fourfold.

The practical significance of the study. The algorithm for constructing the solution can be used in applications in solving practical problems associated with the dual problem.