МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

Диссертационный совет К 01.15.504

На правах рукописи
УДК 517.955.8

ЭРКЕБАЕВ УЛУКБЕК ЗАЙИРБЕКОВИЧ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2016

Работа выполнена на кафедре информатики Ошского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор, академик НАН РК
Отелбаев Мухтарбай Отелбаевич

доктор физико-математических наук, профессор
Байзаков Асан Байзакович

Ведущая организация: Ошский технологический университет
им. акад. М.М.Адышева, г. Ош, 723503,
м.р. Юго-Восток, ул. Н. Исанова, 81.

Защита диссертации состоится «30» июня 2016 г. в ___ часов на заседании Диссертационного совета К 01.15.504 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете и Институте природных ресурсов южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета по адресу: Кыргызстан, 723500, г. Ош, ул. Ленина, 333.

Автореферат разослан «___» мая 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена развитию обобщенного метода пограничных функций профессора К. Алымкулова и построению полных, равномерных асимптотических разложений бисингулярных задач Дирихле для кольца.

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения (обыкновенные или в частных производных) с малым параметром при старшей производной называют сингулярно возмущенными. Во многих областях науки сложные задачи описываются сингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями. Исследования сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений составляют самостоятельную область математики, представляющую теоретический и прикладной интерес. В ней решаются серьезные вычислительные задачи, имеющие важные практические приложения.

Исследование сингулярно возмущенных задач сформировалось на основе фундаментальных работ А.Н.Тихонова и развивается в работах его учеников и многих других ученых.

Вместе с тем, проблема построения полных асимптотических разложений решений для некоторых классов сингулярно возмущенных задач до сих пор остается актуальной. Например, бисингулярные задачи[1], в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая – с не гладкостью членов асимптотики внешнего разложения решения, т.е. «вырожденная» (предельная) задача, соответствующая исходной рассматриваемой сингулярной задаче, сама обладает сингулярностью.

Случаи, в которых бисингулярные задачи имеют явные решения, крайне редки. Даже для современных компьютеров задача определить поведение решения в пограничных (внутренних) слоях, при достаточно малых значениях параметра, – весьма трудоемкая задача. Важным инструментом при исследовании поведений решений бисингулярных задач являются асимптотические методы. В связи с этим в настоящее время интенсивно разрабатываются различные асимптотические методы.

Научная школа профессора, член-корр. НАН КР Келдибая Алымкулова несколько лет занимается исследованием бисингулярных задач. Основной задачей исследования является построение полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач. Для решения основной задачи профессором К. Алымкуловым разработаны метод структурного сращивания, обобщенный метод униформизации и обобщенный метод пограничных функций.

В данной работе полные, равномерные асимптотические разложения решений задач Дирихле для кольца строятся обобщенным методом пограничных функций профессора К. Алымкулова, так как невозможно напрямую применять

---

[1] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. – М.: Наука. – 1989.

классический метод пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева, в связи с нарушением условии А.Н. Тихонова. Для оценки остаточных членов асимптотических рядов применяются классический принцип максимума и метод дифференциальных неравенств.

Ранее задача Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений в кольце с сингулярными границами или сингулярыми линиями внутри кольца не изучались.

Связь темы диссертации с государственными программами. Работа выполнялась в рамках научных проектов по Институту фундаментальных и прикладных исследовании при ОшГУ по темам:

1) «Изучение математических моделей гидро - аэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы» № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012 г.

2) «Математические задачи гидро- аэродинамики и других явлений природы», договор с МОН КР УН 28/13 от 28.03.2013 г.

3) «Метод структурного сращивания и обобщенный метод погранфункций», договор с МОН КР УН № ОН - 2/14   27.01.2014 г.

Цель диссертационной работы.

1) Развить обобщенный метод пограничных функций профессора К. Алымкулова для построения полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач Дирихле для кольца.

2) Обосновать полученные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца с помощью принципа максимума и метода дифференциальных неравенств.

Научная новизна.

1) Доказаны существование и единственность решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца.

2) Построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца, когда особенность появляется на границе, одновременно на обеих границах, внутри, одновременно на обеих границах и внутри кольца.

3) Обоснование достоверности асимптотических разложений решений, т.е. оценки остаточных функций, получены с помощью принципа максимума и методом дифференциальных неравенств.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задачи, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами.

Основные положения, выносимые на защиту

Построение и обоснование равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач Дирихле для кольца, с любой степенью точности, когда решение предельного уравнения имеет сингулярности:

- на границе (линейный, квадратичный и произвольный натурального порядка рост сингулярности на границе);

- одновременно на обеих границах (линейный, линейный и квадратичный, квадратичный рост сингулярности на обеих границах);

- внутри (квадратичный рост и произвольный рост четного натурального порядка сингулярности внутри кольца);

- одновременно на обеих границах и внутри кольца (на границах линейный, а внутри кольца квадратичный рост сингулярности).

Методика исследования. При построении формальных, полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач Дирихле для кольца используются обобщенный метод пограничных функций профессора К. Алымкулова, классический метод пограничных функций и метод малого параметра. Для обоснования формальных асимптотических разложений решений задач Дирихле применяются принцип максимума и метод дифференциальных неравенств. Также используется метод математической индукции.

Теоретическая и практическая ценность. Задачи, рассмотренные в диссертационной работе представляют теоретический и практический интерес так как по многочисленности и разнообразию приложений задача Дирихле для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных занимает исключительное место в математике. К ней непосредственно сводятся: *основная задача в гидродинамике* – задача обтекания; задачи кручения и изгиба *в теории упругости*; *в физике* – определение температуры внутри пластинки при известных ее значениях на контуре, потенциала установившегося движения несжимаемой жидкости, электромагнитного и магнитного потенциала, отыскание температуры теплового поля или потенциала электростатического поля в некоторой области при заданной температуре или потенциала на границе области и др.

Построение полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач по степеням малого параметра имеет *весьма важное значения для решения практических задач математической теории пограничного слоя*.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных научных конференциях "Актуальные вопросы современных математических и естественных наук" (г. Екатеринбург –2015), «Перспективы развития фундаментальных наук» (г. Томск – 2015), «Актуальные проблемы математики и математического моделирования» посвященной 50-летию создания Института математики и механики АН КазССР (г. Алматы – 2015), «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ». Башкирский государственный университет (г. Уфа – 2015), «Роль науки и образования в современных условиях глобализации» (г. Ош – 2015). Обсуждались на научных семинарах математиков Южного региона Кыргызстана под руководством член корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова.

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации опубликованы монография [1], 17 статей [2]-[18] и 2 тезиса [19], [20]. Из них 6 статьи опубликованы в научных рецензируемых, периодических математических журналах РФ (РИНЦ), общим импакт фактором в РИНЦе 1,574.

Личный вклад автора в совместных работах. В совместных работах с Д.А. Турсуновым, постановка задачи принадлежит научному руководителю, а доказательство теорем, формулировка результатов – диссертанту.

Структура, объем и краткое содержание диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, разбитых на 14 параграфов, выводов и литературы из 75 наименований. Работа изложена на 118 страницах машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ФАРР – формальное асимптотическое разложение решения.
- **N**, **R** – множества натуральных и действительных чисел соответственно, $\mathbf{N_0}=\mathbf{N}\cup\{0\}$.
- $C^{\infty}(D)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций в области D.
- $0<\varepsilon$ – малый параметр, λ, μ – такие же параметры, связанные с ε.
- $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат.
- O, o – символы порядка (Ландау).
- $D=\{(\rho,\varphi)|\ a<\rho<b,\ 0<\varphi\le 2\pi\}$, $D_\tau=\{(\tau,\varphi)|\ 0<\tau<+\infty,\ 0<\varphi\le 2\pi\}$, $0<a<b$ – const.
- $f(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(\rho,\varphi)$, $f_k(\rho,\varphi)\in C^{\infty}(\overline{D})$.
- $\mathrm{E}_n^{\tau}=\{w_{k-n}(\tau,\varphi)|\quad w_{k-n}\in C^{\infty}(D_\tau),\quad w_{(n+2)(k-1)+s}(\tau,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{(n+2)(k-1)+s,(n+2)j-s}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j-s}}$, $\tau\to+\infty$, $s=0,1,\ldots,n+1$, $k\in\mathbf{N_0}$, $w_p(\tau,\varphi)\equiv 0$ при $p<-n\}$.

Во **Введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель и отмечена научная новизна работы, а также кратко изложено содержание глав.

Первая глава диссертации состоит из двух параграфов. В § 1.1 дается краткий обзор литературы по теме диссертации. В § 1.2 приводятся общая постановка задачи и основные теоремы. Отмечено, что неоднородные граничные условия $u(a,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi,\varepsilon)$, $u(b,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi,\varepsilon)$, с помощью преобразования

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=v(\rho,\varphi,\varepsilon)+(\psi_2(\varphi,\varepsilon)(\rho-a)+\psi_1(\varphi,\varepsilon)(b-\rho))/(b-a)$$

всегда можно привести к однородным $v(a,\varphi,\varepsilon)=0$, $v(b,\varphi,\varepsilon)=0$. Поэтому, не нарушая общности, в диссертации изучались задачи Дирихле с однородными граничными условиями. Доказаны теоремы

Теорема 1. Решение задачи Дирихле

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-p(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$u(a,\varphi,\varepsilon)=0,\quad u(b,\varphi,\varepsilon)=0, \tag{2}$$

существует, единственно и справедливо оценка $|u(\rho,\varphi,\varepsilon)|\le M/\varepsilon$, где $(\rho,\varphi)\in(\overline{D})$: $p(\rho,\varphi)\ge 0$, $p\in C^{\infty}(\overline{D})$, $0<M$ – const.
Теорема доказана методом дифференциальных неравенств.

Теорема 2. Для решения задачи Дирихле

$$\varepsilon\Delta R(\rho,\varphi,\varepsilon)-p(\rho,\varphi)R(\rho,\varphi,\varepsilon)=\varepsilon^{s+1}\Phi(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

$$R(a,\varphi,\varepsilon)=\varepsilon^{s+1}\Phi_1(\varphi,\varepsilon),\quad R(b,\varphi,\varepsilon)=\varepsilon^{s+1}\Phi_2(\varphi,\varepsilon).$$

справедлива асимптотическая оценка $|R(\rho,\varphi,\varepsilon)|\le\varepsilon^{s}M$, $\varepsilon\to 0$, $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$,
где $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$: $p(\rho,\varphi)\ge 0$, $p\in C^{\infty}(\overline{D})$, $\Phi(\rho,\varphi,\varepsilon)=O(1)$, $\Phi_{1,2}(\varphi,\varepsilon)=O(1)$, $\varepsilon\to 0$, $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$.

Теорема доказана двумя способами: методом дифференциальных неравенств и принципом максимума.

Сформулирована общая постановка задачи: требуется построить полное, равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при $\varepsilon\to 0$.

Доказаны леммы

Лемма 1. Пусть $F(\tau)\Phi(\varphi)\in C^{\infty}(\overline{D}_{\tau})$, $q(\varphi)>0$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Тогда задача

$$\frac{\partial^2 z(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\tau^n q(\varphi)z(\tau,\varphi)=F(\tau)\Phi(\varphi),\ (\tau,\varphi)\in D_{\tau},\ z(0,\varphi)=z^0(\varphi),$$

имеет единственное решение $z(\tau,\varphi)\in C^{\infty}(\overline{D}_{\tau})$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ, когда $\tau\to+\infty$.

Лемма 2. Пусть $0<q\in C^{\infty}[0,2\pi]$ и функции $p_j\in C^{\infty}(\overline{D}_{\tau})$ разлагаются в асимптотические ряды

$$p_j(\tau,\varphi)=\tau^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_{j,(n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}},\quad j=0,1,\ldots,n+1,\ \tau\to+\infty.$$

Тогда в области $\overline{D}_{\tau}$ существуют решения уравнений

$$\frac{\partial^2\tilde{w}_j(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\tau^n q(\varphi)\tilde{w}_j(\tau,\varphi)=p_j(\tau,\varphi),\ \tau\to+\infty, \tag{3}$$

которые разлагаются в асимптотические ряды

$$\tilde{w}_j(\tau,\varphi)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{w}_{j,(n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}},\ j=0,1,\ldots,n+1,\ \tau\to+\infty. \tag{4}$$

При этом ряды (4) многократно почленно дифференцируемы, и они являются асимптотическими разложениями решений уравнений (3).

Вторая глава посвящена построению асимптотического разложения решения задачи (1), (2) с одной сингулярной границей. В § 2.1 сформулирована постановка задачи – требуется построить полное, равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при условии

$\mathbf{U_1}$. $p(\rho,\varphi)=(\rho-a)^n\alpha(\rho,\varphi)$, $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$: $\alpha(\rho,\varphi)>0$, $n\in\mathbf{N}$, $f(a,\varphi,0)\ne 0$.

ФАРР задачи (1), (2) с условием $\mathbf{U_1}$ ищется в виде

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=V(\rho,\varphi,\varepsilon)+W(\tau,\varphi,\mu)+Q(\eta,\varphi,\lambda), \qquad (5)$$

где $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$ – регулярное внешнее решение,

$W(\tau,\varphi,\mu)=\sum\limits_{k=-n}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$ – погранслойная функция в окрестности внутренней границы кольца, $\tau=(\rho-a)/\mu$, $\varepsilon=\mu^{n+2}$, $Q(\eta,\varphi,\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\lambda^k q_k(\eta,\varphi)$ – классическая пограничная функция в окрестности внешней границы кольца, $\eta=(b-\rho)/\lambda$, $\varepsilon=\lambda^2$.

Из условия (2) следует: $W(0,\varphi,\mu)=-V(a,\varphi,\mu^{n+2})$, $Q(0,\varphi,\lambda)=\psi(\varphi,\lambda^2)$,

где $\psi(\varphi,\lambda^2)=-V(b,\varphi,\lambda^2)-W((b-a)/\mu,\varphi,\mu)$, $\psi(\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\psi_j(\varphi)$.

После подстановки соотношение (5) в уравнение (1), получиться

$$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-a)^n\alpha(\rho,\varphi)V(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon)-h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D,$$

$$\mu^n\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}+\frac{\mu}{a+\tau\mu}\frac{\partial W}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(a+\tau\mu)^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-\tau^n\alpha(a+\tau\mu,\varphi)W\right)=$$

$$=h(a+\tau\mu,\varphi,\mu^{n+2}),\ (\tau,\varphi)\in D_\tau,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}-\frac{\lambda}{b-\eta\lambda}\frac{\partial Q}{\partial\eta}+\frac{\lambda^2}{(b-\eta\lambda)^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2}=(c-\eta\lambda)^n\alpha(b-\eta\lambda,\varphi)Q,\ (\eta,\varphi)\in D_\eta,$$

где $c=b-a$, $W=W(\tau,\varphi,\mu)$, $Q=Q(\eta,\varphi,\lambda)$.

По идее метода, введен вспомогательный асимптотический ряд $h(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)$. Этот асимптотический ряд конкретизируется при построении регулярного внешнего решения и погранслойного решения в окрестности $\rho=a$. С помощью асимптотического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{\infty}h_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^j,\ \text{где}\ h_{k,j}(\varphi)=-\sum_{s=1}^{(n+2)k+n}\alpha_{s+j}(\varphi)w_{(n+2)k-s,s}(\varphi),$$

нарастающие сингулярности внешнего решения $V(\rho,\varphi,\varepsilon)$ вносятся в внутреннее решение $W(\tau,\varphi,\mu)$.

Классическое погранслойное решение $Q(\eta,\varphi,\lambda)$ устраняет невязку на внешней границы кольца, т.е. при $\rho=b$ и экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а погранслойное решение $W(\tau,\varphi,\mu)$ устраняет невязку на внутренней границы кольца, т.е. при $\rho=a$ и степенным ростом убывает вне пограничного слоя.

В § 2.2 доказывается

Теорема 3. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_1}$ и $n=1$. Тогда для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{\varepsilon^k}\,q_k(\eta,\varphi)+\sum_{k=-1}^{+\infty}\sqrt[3]{\varepsilon^k}\,w_k(\tau,\varphi),\ \ \varepsilon\to 0,$$

где $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $w_k\in E_1^\tau$, $q_k\in C^\infty(D_\eta)$, $\tau=(\rho-a)/\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\eta=(b-\rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $q_k(\eta,\varphi)=O(1/e^{\eta})$ при $\eta\to+\infty$, $k\in\mathbf{N_0}$.

Приведен *пример 1*, когда $n=1$, $\alpha(\rho,\varphi)=1$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)=1+\rho\varphi$, $a=1$, $b=2$.

Доказано, что для решения примера 1 справедливо разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=-\varphi+\sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{\varepsilon^k}\,q_k\left(\frac{2-\rho}{\sqrt{\varepsilon}},\varphi\right)+\sum_{k=-1}^{+\infty}\sqrt[3]{\varepsilon^k}\,w_k\left(\frac{\rho-1}{\sqrt[3]{\varepsilon}},\varphi\right),\ \varepsilon\to0.$$

В § 2.3 методика, разработанная в §2.2, обобщается на случай $n=2$. Доказана

Теорема 4. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_1}$ и $n=2$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{\varepsilon^k}\,q_k(\eta,\varphi)+\sum_{k=-2}^{+\infty}\sqrt[4]{\varepsilon^k}\,w_k(\tau,\varphi),\ \varepsilon\to0,$$

где $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $w_k\in E_2^\tau$, $q_k\in C^\infty(D_\eta)$, $\tau=(\rho-a)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta=(b-\rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $q_k(\eta,\varphi)=O(1/e^{\eta})$, $\eta\to+\infty$.

Приведен *пример 2*. Пусть в задаче Дирихле (1), (2) $n=2$, $\alpha(\rho,\varphi)=1$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)=1+\rho\cos(\varphi)$, $a=1$, $b=2$. Тогда $h_0(\rho,\varphi)=1+\cos(\varphi)+(\rho-1)\cos(\varphi)$, $h_k(\rho,\varphi)\equiv0$, $k\in\mathbf{N}$, $v_k(\rho,\varphi)\equiv0$, $k\in\mathbf{N_0}$.

Доказано, что для решения примера 2 справедливо разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{\varepsilon^k}\,q_k(\eta,\varphi)+\sum_{k=-2}^{+\infty}\sqrt[4]{\varepsilon^k}\,w_k(\tau,\varphi),\ \varepsilon\to0.$$

В § 2.4 обобщаются результаты § 2.2 и § 2.3 для $\forall\ n\in\mathbf{N}$. Доказана

Теорема 5. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_1}$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение (5), где $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $w_k\in E_n^\tau$, $q_k\in C^\infty(D_\eta)$, $\tau=(\rho-a)/\sqrt[n+2]{\varepsilon}$, $\eta=(b-\rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $q_k(\eta,\varphi)=O(1/e^{\eta})$ при $\eta\to+\infty$.

Приведен *пример 3*. Пусть в задаче (1), (2) $n=3$, $\alpha(\rho,\varphi)=1$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)=1+\rho^3$, $a=1$, $b=2$. Тогда $h_0(\rho,\varphi)=2+3(\rho-1)+3(\rho-1)^2$, $v_0(\rho,\varphi)=1$, $h_k(\rho,\varphi)\equiv0$, $v_k(\rho,\varphi)\equiv0$, $k\in\mathbf{N}$. Доказано, что для решения примера 3 справедливо разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=1+\sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{\varepsilon^k}\,q_k(\eta,\varphi)+\sum_{k=-3}^{+\infty}\sqrt[5]{\varepsilon^k}\,w_k(\tau,\varphi),\ \varepsilon\to0.$$

Замечание. Аналогично исследуется тот случай, когда внешние решения имеют нарастающие особенности на внешней границе кольца, т.е. задача Дирихле для уравнения

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-(b-\rho)^n\alpha(\rho,\varphi)u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad(\rho,\varphi)\in D.$$

Глава 3 посвящена построению асимптотического разложения решения задачи Дирихле (1), (2) с внутренними и внешними сингулярными границами. В § 3.1 сформулирована постановка задачи – требуется построить полное, равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при условии

$\mathbf{U_2}$. $p(\rho,\varphi)=(b-\rho)^m(\rho-a)^n$, $n, m\in\mathbf{N}$, $f(a,\varphi,0)\neq0$, $f(b,\varphi,0)\neq0$.

В § 3.2 исследуется случай $n=1$, $m=1$.

ФАРР задачи (1), (2) с условием $\mathbf{U_2}$ ищется в виде

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=V(\rho,\varphi,\varepsilon)+W(\tau,\varphi,\mu)+Q(\eta,\varphi,\mu),\tag{6}$$

где $\quad V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi),\quad W(\tau,\varphi,\mu)=\sum\limits_{k=-1}^{\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi),\quad \tau=(b-\rho)/\mu,\quad \varepsilon=\mu^3,$

$Q(\eta,\varphi,\mu)=\sum\limits_{k=-1}^{\infty}\mu^k q_k(\eta,\varphi),\ \eta=(\rho-a)/\mu.$

Из условий (2) следует, что $W(0,\varphi,\mu)=-V(b,\varphi,\mu^3)$, $Q(0,\varphi,\mu)=-V(a,\varphi,\mu^3)$.

Подставляя соотношение (6) в уравнение (1) при $n=m=1$, получаются

$$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon)-(b-\rho)(\rho-a)V(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon)-h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D,$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}-\frac{\mu}{b-\tau\mu}\frac{\partial W}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(b-\tau\mu)^2}\frac{\partial^2 W}{{}^2\partial\varphi^2}-\tau(c-\tau\mu)W\right)=$$

$$=h_1(b-\tau\mu,\varphi,\mu^3),\ (\tau,\varphi)\in D_\tau,$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}+\frac{\mu}{a+\eta\mu}\frac{\partial Q}{\partial\eta}+\frac{\mu^2}{(a+\eta\mu)^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2}-\eta(c-\eta\mu)Q\right)=$$

$$=h_2(a+\eta\mu,\varphi,\mu^3),\ (\eta,\varphi)\in D_\eta,$$

где $c=b-a$, $W=W(\tau,\varphi,\mu)$, $Q=Q(\eta,\varphi,\mu)$.

Здесь тоже введены вспомогательные асимптотические ряды

$$h(\rho,\varphi,\varepsilon)=h_1(\rho,\varphi,\varepsilon)+h_2(\rho,\varphi,\varepsilon),\ h_j(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_{j,k}(\rho,\varphi).$$

Они определяются при построении регулярного внешнего решения $V(\rho,\varphi,\varepsilon)$ и пограничных функций $W(\tau,\varphi,\mu)$, $Q=Q(\eta,\varphi,\mu)$ так чтобы выполнялись условия:

$$v_k\in C^\infty(\overline{D}),\ \lim_{\tau\to+\infty}w_{k-1}(\tau,\varphi)=0,\ \lim_{\eta\to+\infty}q_{k-1}(\eta,\varphi)=0,\ k\in\mathbf{N_0}.$$

Доказана

Теорема 6. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_2}$ и $n=m=1$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) при $\varepsilon\to0$ справедливо асимптотическое разложение (6), где $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $w_k\in E_1^\tau$, $q_k\in E_1^\eta$, $\tau=(b-\rho)/\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\eta=(\rho-a)/\sqrt[3]{\varepsilon}$.

Приведен *пример 4*. Пусть $m=n=1$, $b=2$, $a=1$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)=1+\rho\cos(\varphi)$. Тогда

$$v_0(\rho,\varphi)=-\,(1+\rho\cos(\varphi)-h_0(\rho,\varphi))/((2-\rho)(\rho-1)),$$

$$h_0(\rho,\varphi)=(\rho-1)(1+2\cos(\varphi))+(2-\rho)(1+\cos(\varphi))=1+\rho\cos(\varphi).$$

Поэтому $v_0(\rho,\varphi)=0$, и $v_k(\rho,\varphi)=0$, $h_k(\rho,\varphi)=0$, $k\in\mathbf{N}$. Доказано, что для решения примера 4 справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\sqrt[3]{\varepsilon^k}\left(w_k\left(\frac{2-\rho}{\sqrt[3]{\varepsilon}},\varphi\right)+q_k\left(\frac{\rho-1}{\sqrt[3]{\varepsilon}},\varphi\right)\right).$$

В § 3.3 и § 3.4 исследуются случаи $n=2$, $m=1$ и $n=2$, $m=2$. Доказаны

Теорема 7. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_2}$ и $n=2$, $m=1$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=-1}^{\infty}\sqrt[3]{\varepsilon^k}\,w_k(\tau,\varphi)+\sum_{k=-2}^{\infty}\sqrt[4]{\varepsilon^k}\,q_k(\eta,\varphi),\ \varepsilon\to0,$$

где $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $w_k\in E_1^\tau$, $q_k\in E_2^\eta$, $\tau=(b-\rho)/\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\eta=(\rho-a)/\sqrt[4]{\varepsilon}$.

Теорема 8. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_2}$ и $n=2$, $m=2$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=-2}^{\infty}\sqrt[4]{\varepsilon^k}\left(w_k(\tau,\varphi)+q_k(\eta,\varphi)\right),\ \varepsilon\to0,$$

где $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $w_k\in E_2^\tau$, $q_k\in E_2^\eta$, $\tau=(b-\rho)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta=(\rho-a)/\sqrt[4]{\varepsilon}$.

Замечание. При $\forall n$, $m\in\mathbf{N}$ проведя аналогичное исследование, строится асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=-m}^{\infty}\sqrt[m+2]{\varepsilon^k}\,w_k(\tau,\varphi)+\sum_{k=-n}^{\infty}\sqrt[n+2]{\varepsilon^k}\,q_k(\eta,\varphi),\ \ \varepsilon\to0,$$

где $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, $w_k\in E_m^\tau$, $q_k\in E_n^\eta$, $\tau=(b-\rho)/\sqrt[m+2]{\varepsilon}$, $\eta=(\rho-a)/\sqrt[n+2]{\varepsilon}$.

В главе 4 исследуется асимптотическое поведение решения задачи Дирихле (1), (2) с внутренними и граничными сингулярными линиями. В § 4.1 сформулирована постановка задачи – требуется построить полное, равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при условии

$\mathbf{U_3}$. $p(\rho,\varphi)=(\rho-c)^{2n}\alpha(\rho,\varphi)$, $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$: $\alpha(\rho,\varphi)>0$, $n\in\mathbf{N}$, $f(c,\varphi,0)\neq0$, $c\in(a,b)$.

$\mathbf{U_4}$. $p(\rho,\varphi)=(b-\rho)(\rho-c)^2(\rho-a)$, $f(a,\varphi,0)\neq0$, $f(b,\varphi,0)\neq0$, $f(c,\varphi,0)\neq0$, $c\in(a,b)$.

ФАРР задачи (1), (2) с условием $\mathbf{U_3}$ ищется в виде

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=V(\rho,\varphi,\varepsilon)+\chi(\rho)W(\tau,\varphi,\mu)+Q(\eta_1,\varphi,\lambda)+\tilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda),\tag{7}$$

где $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)$, $W(\tau,\varphi,\mu)=\sum_{k=-2n}^{+\infty}\mu^k w_k(\tau,\varphi)$, $\tau=(\rho-c)/\mu$, $\varepsilon=\mu^{2n+2}$,

$Q(\eta_1,\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k q_k(\eta_1,\varphi)$, $\tilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k \tilde{q}_k(\eta_2,\varphi)$, $\varepsilon=\lambda^2$, $\eta_1=(b-\rho)/\lambda$, $\eta_2=(\rho-a)/\lambda$,

$\chi(\rho)$ – функция сглаживания, $\chi(\rho)\in[a,b]$, $\chi\in C^\infty[a,b]$, $\chi(\rho)=1$ при $|\rho-c|\leq\delta/3$, $\chi(\rho)=0$ при $2\delta/3\leq|\rho-c|$, $0<\delta$ – малое число, независящее от малого параметра ε.

Подставляя (7) в уравнение (1) получим

$$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon)+\varepsilon\tilde{V}(\rho,\varphi,\varepsilon)-(\rho-c)^{2n}\alpha(\rho,\varphi)V(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon)-\chi(\rho)h(\rho,\varphi,\varepsilon),\ (\rho,\varphi)\in D,$$

$$\mu^{2n}\left(\frac{\partial^2W}{\partial\tau^2}+\frac{\mu}{c+\tau\mu}\frac{\partial W}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(c+\tau\mu)^2}\frac{\partial^2W}{\partial\varphi^2}\right)-(\mu\tau)^{2n}\alpha(c+\tau\mu,\varphi)W=$$
$$=h\left(c+\tau\mu,\varphi,\mu^{2n+2}\right),(\tau,\varphi)\in D_0,$$

$$\frac{\partial^2Q}{\partial\eta_1^2}-\frac{\lambda}{b-\eta_1\lambda}\frac{\partial Q}{\partial\eta_1}+\frac{\lambda^2}{(b-\eta_1\lambda)^2}\frac{\partial^2Q}{\partial\varphi^2}=(b_1+\eta_1\lambda)^{2n}\alpha(b-\eta_1\lambda,\varphi)Q,\ (\eta_1,\varphi)\in D_{\eta_1},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial\eta_2^2}+\frac{\lambda}{a+\eta_2\lambda}\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\eta_2}+\frac{\lambda^2}{(a+\eta_2\lambda)^2}\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial\varphi^2}=(a_1+\eta_2\lambda)^{2n}\alpha(a+\eta_2\lambda,\varphi)\tilde{Q},\ (\eta_2,\varphi)\in D_{\eta_2},$$

где $D_0=\{(\tau,\varphi): |\tau|<+\infty,\ 0<\varphi\leq2\pi\}$, $W=W(\tau,\varphi,\mu)$, $Q=Q(\eta_1,\varphi,\lambda)$, $\tilde{Q}=\tilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda)$, $b_1=c-b$,

$$\tilde{V}(\rho,\varphi,\varepsilon)=\chi''(\rho)W(\rho,\varphi,\varepsilon)+\chi'(\rho)\left(2\frac{\partial W(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}+\frac{W(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\rho}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\tilde{v}_{k}(\rho,\varphi),\ a_1=a-c.$$

Как всегда, по идее метода введен вспомогательный асимптотический ряд $h(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}h_{k}(\rho,\varphi)$, $h_{k}(\rho,\varphi)=\sum\limits_{j=0}^{2n-1}g_{k,j}(\varphi)(\rho-c)^{j}+\sum\limits_{j=2n}^{\infty}h_{k,j}(\varphi)(\rho-c)^{j}$, $k\in\mathbf{N_0}$,

где $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$, $g_{k,j}(\varphi)=\dfrac{\partial^{j}g_{k}(c,\varphi)}{j!\partial\rho^{j}}$, $h_{k,j}(\varphi)$ – пока неизвестные функции, они конкретизируются при построении ряда $W(\tau,\varphi,\mu)=\sum\limits_{k=-2n}^{+\infty}\mu^{k}w_{k}(\tau,\varphi)$ так, чтобы $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty}w_{k-2n}(\tau,\varphi)=0$, $k\in\mathbf{N_0}$.

Доказана

Лемма 3. Пусть $f_1(\tau)f_2(\varphi)\in C^{\infty}(D_0)$. Тогда задача

$$\frac{\partial^{2}z(\tau,\varphi)}{\partial\tau^{2}}-\tau^{2n}z(\tau,\varphi)=f_{1}(\tau)f_{2}(\varphi),\qquad(\tau,\varphi)\in D_0,$$

имеет единственное решение $z(\tau,\varphi)\in C^{\infty}(D_0)$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ.

В §4.2 доказана

Теорема 9. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_3}$ и $n=1$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\varepsilon^{k}v_{k}(\rho,\varphi)+\sqrt{\varepsilon^{k}}\,(q_{k}(\eta_1,\varphi)+\tilde{q}_{k}(\eta_2,\varphi))\right)+\chi(\rho)\sum_{k=-2}^{+\infty}\sqrt[4]{\varepsilon^{k}}\,w_{k}(\tau,\varphi),\ \varepsilon\to0,\quad(8)$$

где $v_k\in C^{\infty}(\overline{D})$, $w_k\in C^{\infty}(D_0)$, $q_k\in C^{\infty}(D_{\eta_1})$, $\tilde{q}_k\in C^{\infty}(D_{\eta_2})$, $\tau=(\rho-c)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta_1=(b-\rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $\eta_2=(\rho-a)/\sqrt{\varepsilon}$, $D_0=\{(\tau,\varphi): |\tau|<+\infty,\ 0<\varphi\le2\pi\}$, $\tilde{q}_k(\eta_2,\varphi)=O(1/e^{\eta_2})$, $q_k(\eta_1,\varphi)=O(1/e^{\eta_1})$, $\eta_{1,2}\to+\infty$, $w_{4k-2+j}(\tau,\varphi)=O(1/\tau^{2-j})$, $w_{4k+j}(\tau,\varphi)=O(1/\tau^{4-j})$, $j=0,1$, $|\tau|\to+\infty$, $k\in\mathbf{N_0}$.

Приведен *пример 5*. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_3}$ при $n=1$, $a=1$, $b=3$, $c=2$, $\alpha(\rho,\varphi)\equiv1$, $f(\rho,\varphi,\varepsilon)=1$. Тогда $h_0(\rho,\varphi)=1$, $h_k(\rho,\varphi)=0$. Доказано, что для решения примера 5 справедливо асимптотическое разложение вида (8).

В § 4.3 методика, разработанная в §4.2, обобщается на случай $\forall n\in\mathbf{N}$.

Теорема 10. Пусть выполняется условие $\mathbf{U_3}$. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) при $\varepsilon\to0$ справедливо асимптотическое разложение (7), где $v_k\in C^{\infty}(\overline{D})$, $w_k\in C^{\infty}(D_0)$, $q_k\in C^{\infty}(D_{\eta_1})$, $\tilde{q}_k\in C^{\infty}(D_{\eta_2})$, $\tau=(\rho-c)/\sqrt[2n+2]{\varepsilon}$, $\eta_1=(b-\rho)/\sqrt{\varepsilon}$, $\eta_2=(\rho-a)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{q}_k(\eta_2,\varphi)=O(1/e^{\eta_2})$, $q_k(\eta_1,\varphi)=O(1/e^{\eta_1})$, $\eta_{1,2}\to+\infty$, $w_{(2n+2)k-2n+j}(\tau,\varphi)==O(1/\tau^{2n-j})$, $j=0,1,\ldots,2n-1$, $w_{(2n+2)k+s}(\tau,\varphi)=O(1/\tau^{2n+2-s})$, $s=0,1$, $|\tau|\to+\infty$, $k\in\mathbf{N_0}$.

В § 4.4 исследуется задача (1), (2) с условием $\mathbf{U_4}$. ФАРР ищется в виде

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=V(\rho,\varphi,\varepsilon)+\chi(\rho)W(\tau,\varphi,\mu)+\chi_1(\rho)Q(\eta_1,\varphi,\lambda)+\chi_2(\rho)\tilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda),\quad(9)$$

где $V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}v_{k}(\rho,\varphi)$, $W(\tau,\varphi,\mu)=\sum\limits_{k=-2}^{\infty}\mu^{k}w_{k}(\tau,\varphi)$, $\tau=(\rho-c)/\mu$, $\varepsilon=\mu^4$,

$Q(\eta_1,\varphi,\lambda)=\sum\limits_{k=-1}^{\infty}\lambda^k q_k(\eta_1,\varphi)$, $\tilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda)=\sum\limits_{k=-1}^{\infty}\lambda^k \tilde{q}_k(\eta_2,\varphi)$, $\eta_1=(b-\rho)/\lambda$, $\eta_2=(\rho-a)/\lambda$, $\varepsilon=\lambda^3$, $\chi(\rho)$, $\chi_{1,2}(\rho)$ – функции сглаживания, $\chi(\rho), \chi_{1,2}(\rho)\in[a,b]$, $\chi, \chi_{1,2}\in C^{\infty}[a,b]$, $\chi(\rho)=1$ при $|\rho-c|\le\delta/3$, $\chi(\rho)=0$ при $2\delta/3\le|\rho-c|$, $\chi_1(\rho)=1$ при $0\le b-\rho\le\delta/3$, $\chi_1(\rho)=0$ при $2\delta/3\le b-\rho$, $\chi_2(\rho)=1$ при $0\le\rho-a\le\delta/3$, $\chi_2(\rho)=0$ при $2\delta/3\le\rho-a$, $0<\delta$ – малое число, независящее от ε.

Из условий (2) следует, что $Q(0,\varphi,\lambda)=-V(b,\varphi,\lambda^3)$, $\tilde{Q}(0,\varphi,\lambda)=-V(a,\varphi,\lambda^3)$.

Подставляя соотношение (9) в уравнение (1), получим

$\varepsilon\Delta V(\rho,\varphi,\varepsilon)+\varepsilon\tilde{V}(\rho,\varphi,\varepsilon)-(b-\rho)(\rho-c)^2(\rho-a)V(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon)-h(\rho,\varphi,\varepsilon)$, $(\rho,\varphi)\in D$,

$$\mu^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}+\frac{\mu}{c+\tau\mu}\frac{\partial W}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(c+\tau\mu)^2}\frac{\partial^2 W}{{}^2\partial\varphi^2}\right)-$$

$$-\mu^2\tau^2(b-c-\tau\mu)(c-a+\tau\mu)W=h^c(c+\tau\mu,\varphi,\mu^4),\ (\tau,\varphi)\in D_0,$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta_1^2}-\frac{\lambda}{b-\lambda\eta_1}\frac{\partial Q}{\partial\eta_1}+\frac{\lambda^2}{(b-\lambda\eta_1)^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2}\right)=h^b(b-\lambda\eta_1,\varphi,\lambda^3)+$$

$$+\lambda\eta_1(b-a-\lambda\eta_1)(b-c-\lambda\eta_1)^2 Q,\quad (\eta_1,\varphi)\in D_{\eta_1},$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial\eta_2^2}+\frac{\lambda}{a+\lambda\eta_2}\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\eta_2}+\frac{\lambda^2}{(a+\lambda\eta_2)^2}\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial\varphi^2}\right)=h^a(a+\lambda\eta_2,\varphi,\lambda^3)+$$

$$+\lambda\eta_2(b-a-\lambda\eta_2)(c-a-\lambda\eta_2)^2\tilde{Q},\quad (\eta_2,\varphi)\in D_{\eta_2},$$

где $D_0=\{(\tau,\varphi)|\ |\tau|<+\infty,\ 0<\varphi\le2\pi\}$, $W=W(\tau,\varphi,\mu)$, $Q=Q(\eta_1,\varphi,\lambda)$, $\tilde{Q}=\tilde{Q}(\eta_2,\varphi,\lambda)$,

$$\tilde{V}(\rho,\varphi,\varepsilon)=\chi''(\rho)W(\rho,\varphi,\varepsilon)+\chi'(\rho)\left(2\frac{\partial W(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}+\frac{W(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\rho}\right)+\chi_1''(\rho)Q(\rho,\varphi,\varepsilon)+$$

$$+\chi_1'(\rho)\left(2\frac{\partial Q(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}+\frac{Q(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\rho}\right)+\chi_2'(\rho)\left(2\frac{\partial\tilde{Q}(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}+\frac{\tilde{Q}(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\rho}\right)+$$

$$+\chi_2''(\rho)\tilde{Q}(\rho,\varphi,\varepsilon)=:\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{v}_k(\rho,\varphi).$$

Вспомогательные асимптотические ряды имеют вид

$$h^c(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{3}h_{k,j}^c(\varphi)(\rho-c)^j,\ \ h^b(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{3}h_{k,j}^b(\varphi)(\rho-b)^j,$$

$$h^a(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{3}h_{k,j}^a(\varphi)(\rho-a)^j,\ h(\rho,\varphi,\varepsilon)=\chi(\rho)h^c+\chi_1(\rho)h^b+\chi_2(\rho)h^a,$$

где $h_{k,0}^a(\varphi)=g_k(a,\varphi)$, $h_{k,1}^a(\varphi)=-\sum\limits_{j=1}^{3}\tilde{\alpha}_j\tilde{q}_{3k-j,j}(\varphi)$, $h_{k,2}^a(\varphi)=-\sum\limits_{j=1}^{2}\tilde{\alpha}_{j+1}\tilde{q}_{3k-j,j}(\varphi)$,

$h^a_{k,3}(\varphi)=-\tilde{\alpha}_3\tilde{q}_{3k-1,1}(\varphi)$, $h^b_{k,0}(\varphi)=g_k(b,\varphi)$, $h^b_{k,1}(\varphi)=-\sum_{j=1}^{3}\alpha_j q_{3k-j,j}(\varphi)$,

$h^b_{k,2}(\varphi)=-\sum_{j=1}^{2}\alpha_{j+1}q_{3k-j,j}(\varphi)$, $h^b_{k,3}(\varphi)=-\alpha_3 q_{3k-1,1}(\varphi)$, $h^c_{k,0}(\varphi)=g_k(c,\varphi)$,

$h^c_{k,1}(\varphi)=g_{k,1}(c,\varphi)$, $g_{k,1}(c,\varphi)=\dfrac{\partial g_k(c,\varphi)}{\partial\rho}$, $h^c_{k,2}(\varphi)=-\beta_1 w_{4k-1,1}(\varphi)-\beta_2 w_{4k-2,2}(\varphi)$,

$h^b_{k,3}(\varphi)=-\beta_2 w_{4k-1,1}(\varphi)$, $(b-a-\lambda\eta_1)(b-c-\lambda\eta_1)^2=\sum_{j=0}^{3}(\lambda\eta_1)^j\alpha_j$, $\alpha_0>0$,

$(b-a-\lambda\eta_2)(a-c+\lambda\eta_2)^2=\sum_{j=0}^{3}(\lambda\eta_2)^j\tilde{\alpha}_j$, $\tilde{\alpha}_0>0$, $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$,

$(b-c-\mu\tau)(c-a+\mu\tau)=\sum_{j=0}^{2}(\mu\tau)^j\beta_j$, $\beta_0>0$.

Функции $h^a_{k,j}(\varphi)$, $h^b_{k,j}(\varphi)$, $h^c_{k,j}(\varphi)$ определены так, чтобы выполнялись условия

$v_k\in C^\infty(\bar{D})$, $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty}w_{k-2}(\tau,\varphi)=0$, $\lim\limits_{\eta_1\to+\infty}q_{k-1}(\eta_1,\varphi)=0$, $\lim\limits_{\eta_2\to+\infty}\tilde{q}_{k-1}(\eta_2,\varphi)=0$.

Доказана

Теорема 11. Пусть выполняется условие **$\mathbf{U_4}$**. Тогда для решения задачи Дирихле (1), (2) справедливо асимптотическое разложение (9), где $v_k\in C^\infty(\bar{D})$, $w_k\in C^\infty(D_0)$, $q_k\in E_1^{\eta_1}$, $\tilde{q}_k\in E_1^{\eta_2}$, $\tau=(\rho-c)/\sqrt[4]{\varepsilon}$, $\eta_1=(b-\rho)/\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\eta_2=(\rho-a)/\sqrt[3]{\varepsilon}$, $w_{4k-2+j}(\tau,\varphi)=O(1/\tau^{2-j})$, $w_{4k+j}(\tau,\varphi)=O(1/\tau^{4-j})$, $j=0,1$, $|\tau|\to+\infty$, $k\in\mathbf{N_0}$.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе доказаны существование и единственность решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца. Обобщенным и классическим методами пограничных функций, также методом малого параметра построены равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца с любой степенью точности. Формальные асимптотические разложения решений задач Дирихле строго обоснованы методом дифференциальных неравенств и принципом максимума. Полученные асимптотические разложения представляют собой ряды Пюйзо. Главные члены асимптотических разложений решений имеют отрицательные дробные степени по малому параметру, что свойственно бисингулярным задачам.

Подробно исследованы случаи, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет сингулярность на одной из границ, одновременно на обеих границах, внутри, также одновременно внутри и на обеих границах кольца.

Предлагаемый метод отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательных асимптотических рядов полностью вносятся во внутренние разложения, а от классического метода пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева здесь пограничные функции убывают степенным характером, а не экспоненциально.

Задачи, рассмотренные в диссертации представляют теоретический и практический интерес, а также построение полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач по степеням малого параметра имеет весьма важное значения для решения практических задач математической теории пограничного слоя.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений второго порядка в кольце [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев. – Ош: Билим, 2016. – 112 с.
2. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». –2016. – Т. 8. – № 2. – С. 52-61.
3. Erkebaev, U.Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities [Text] / D.A. Tursunov, U.Z. Erkebaev // Ufa Mathematical Journal. Vol. 8. No. 1 (2016). P. 97-107.
4. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – № 1. – С. 102-112.
5. Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2016. – № 1(39). – С. 42-52.
6. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле с двойной особенностью [Текст] / У.З. Эркебаев // Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и практика. Воронеж. –2015. – Т. 3. № 8-4(19-4). – С. 344–348.
7. Эркебаев, У.З. Обоснование формальных асимптотических разложений решения бисингулярно возмущенных задач [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. –2015. – № 4. вып. 4. – С. 72–75.
8. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для линейного, неоднородного эллиптического уравнения второго порядка, с двумя независимыми переменными, в кольце с потенциалом [Текст] / У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. –2015. – № 4. вып. 4. – С. 80–84.
9. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2015. – Т. 25. – Вып 4. – С. 517-525.

10. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения возмущенного эллиптического уравнения, когда предельное уравнение имеет особые точки [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2015. – № 3(35). – С. 26-34.
11. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в кольце [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2015. – № 1. – С. 205-212.
12. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для кольца с особыми границами [Текст] / У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. – 2015. – № 1. – С. 213-217.
13. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для кольца с особыми граничными линиями [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Актуальные вопросы современных математических и естественных наук / Сб. науч.труд. межд. науч. конф. Екатеринбург. – 2015. – № 2. – С. 9-12.
14. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного уравнения с регулярной особой линией [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Актуальные вопросы современных математических и естественных наук / Сб. науч.труд. межд. науч. конф. Екатеринбург. – 2015. – № 2. – С. 12-15.
15. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце с особыми границами [Электронный ресурс] / У.З. Эркебаев // Перспективы фунд. наук: П 27 сб. трудов XII Межд. конф. студентов и молодых ученых / Томский политех. университет. – Томск: Изд-во ТПУ. 2015. – С. 707-709.
16. Эркебаев, У.З. Асимптотика решения одной бисингулярно возмущенной задачи Дирихле [Электронный ресурс] / У.З. Эркебаев // Перспективы фунд. наук: П 27 сб. трудов XII Межд. конф. студентов и молодых ученых / Томский политех. университет. – Томск: Изд-во ТПУ. 2015. – С. 710-712.
17. Эркебаев, У.З. Асимптотическое поведение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения с граничной особой точкой [Текст] / У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. –2014. – № 3. – С. 88-93.
18. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с точками поворота [Текст] /Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Вестник ОшГУ. –2014. – № 3. – С. 71-78.
19. Эркебаев, У.З. Метод погранфункции для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в кольце [Текст] /Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Сб. тезисов межд. науч. конф. «Актуальные проблемы математики и математического моделирования». – 2015. Алматы, Казахстан. – С. 13-16.
20. Эркебаев, У.З. Асимптотическое разложение решения бисингулярой задачи Дирихле с помощью погранфункций [Текст] / Д.А. Турсунов, У.З. Эркебаев // Межд. науч. конф. “Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ”: Тезисы докладов. – Уфа: Изд-во БашГУ, 2015. – С. 132.

Эркебаев Улукбек Зайирбековичтин «Бисингулярдуу козголгон эллиптикалык теңдемелер үчүн Дирихленин маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы» деген темадагы 01.01.02 – «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу» адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: асимптотикалык катар, Бесселдин модифицирленген функциялары, бисингулярдуу маселе, Дирихленин маселеси, жалпыланган чектик функция, кичине параметр, максимум принциби, Пюйзонун катары, чектик функция, чыгарылыштын формалдуу асимптотикалык ажыралмасы, Эйринин функциялары, эллиптикалык типтеги теңдеме.

Изилдөөнүн объекти. Бисингулярдуу козголгон экинчи тартиптеги, эки өзгөрүлмөлүү, сызыктуу, бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн алкакта Дирихленин маселеси.

Иштин максаттары. Алкак үчүн бисингулярдуу Дирихленин маслесинин чыгарылышынын бир калыптагы, толук асимптотикалык ажыралмасын тургузуу үчүн профессор К. Алымкуловдун жалпыланган чектик функциялар усулун өркүндөтүү. Алкак үчүн тургузулган бисингулярдуу Дирихленин маселелеринин чыгарылыштарынын асимптотикалык ажыралмаларын негиздөө.

Изилдөөнүн усулдары: жалпыланган чектик функция усулу, классикалык чектик функция усулу, максимум принциби, дифференциалдык барабарсыздыктар усулу, кичине параметр усулу, математикалык индукция усулу.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары. Алкак үчүн бисингулярдуу Дирихленин маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы далилденди. Өзгөчөлүктөр алкактын чек-арасында, бир учурда алкактын эки чекарасында, алкактын ичинде, бир учурда алкактын ичинде жана эки чекарасында пайда болгон учурларда бисингулярдуу Дирихленин маселесинин чыгарылыштарынын толук, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулду. Тургузулган формалдуу асимптотикалык катарлар максимум принциби жана дифференциалдык барабарсыздыктар усулу менен негизделди.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Эркебаева Улукбека Зайирбековича на тему «Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Ключевые слова: асимптотический ряд, модифицированные функции Бесселя, бисингулярная задача, задача Дирихле, обобщенный метод погранфункций, малый параметр, принцип максимума, ряд Пюйзо, погранфункция, формальное асимптотическое разложение решения, функции Эйри, уравнение эллиптического типа.

Объект исследования. Задача Дирихле для бисингулярно возмущенных, линейных, неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными в кольце.

Цель работы. Развить обобщенный метод пограничных функций профессора К. Алымкулова для построения полных, равномерных асимптотических разложений решений бисингулярных задач Дирихле для кольца. Обосновать построенные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле для кольца.

Методы исследования: обобщенный метод погранфункций, классический метод погранфункций, принцип максимума, метод дифференциальных неравенств, метод малого параметра, метод математической индукции.

Научная новизна. Доказаны существование и единственность решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца. Построены и обоснованы полные, равномерные асимптотические разложения решений бисингулярной задачи Дирихле для кольца, когда особенность появляется на границе, одновременно на обеих границах, внутри, одновременно на обеих границах и внутри кольца. Построенные формальные асимптотические разложения обоснованы методом дифференциальных неравенств и с помощью принципа максимума.

SUMMARY

Erkebaev Ulukbek Zayirbekovich

Dissertation «The asymptotic of the solutions of the Dirichlet problem for bisingularly perturbed elliptic equations» for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences

(specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control**)**

Key words: asymptotic series, modified Bessel functions, bisingular problem, Dirichlet problem, generalized method of boundary functions, small parameter, principle of maximum, Puiseux series, boundary functions, formal asymptotic expansion of solution, Airy functions, equation of elliptic type.

Object of research. The Dirichlet problem for bisingularly perturbed, linear, non-homogeneous, second order elliptic equations with two independent variables in a ring domain.

Aim of research. Develop the generalized method of boundary functions of prof. K. Alymkulov for construction a full, uniform asymptotic expansions of solutions of bisingularly Dirichlet problems for ring domain. Justify constructed asymptotic expansions of solutions of bisingularly Dirichlet problems for ring domain.

Methods of research: generalized method of boundary functions, classical method of boundary functions, principle of maximum, method of differential inequality, method of small parameter, method of mathematical induction.

Scientific novelty. The existence and uniqueness of solutions of the bisingular Dirichlet problem for a ring is proved. Constructed and justified the full, uniform asymptotic expansions of solutions of the bisingularly Dirichlet problem for the ring, when the singularity appears at the boundary, at the same time on both the boundaries, inside, at the same time on both the boundaries and inside the ring. Construction of the formal expansions is justified by the maximum principle and by the method of differential inequality.

Эркебаев Улукбек Зайирбекович

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать: 25.05.2016 г.

Обьем : 1,25 п.л. Заказ №19

Формат 60x84 1/16. Тираж 120 шт

Редакционно-издательский отдел “Билим” ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.