**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

Диссертационный совет К 01.15.504

На правах рукописи
УДК 514.757.3

КУРБАНБАЕВА НУРЖАМАЛ НАЖИМИДИНОВНА

ДВОЙНЫЕ ЛИНИИ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА E_4, ПОРОЖДАЕМОГО ЗАДАННЫМ СЕМЕЙСТВОМ ГЛАДКИХ ЛИНИЙ

Специальность 01.01.04 – Геометрия и топология

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Ош-2016

Диссертационная работа выполнена на кафедре “Алгебра и геометрия” Ошского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Матиева Гулбадан

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Йозеф Микеш, Чехия

кандидат физико-математических наук, доцент Гусева Надежда Ивановна, Москва

Ведущая организация: Кыргызско-Турецкий Университет “Манас”, Кыргызстан, 720044, Бишкек, Проспект Мира 56

Защита состоится «*23*» *сентября* 2016 г. в *14:30* часов на заседании диссертационного совета К 01.15.504 при Ошском государственном университете и Институте природных ресурсов Южного отделения Нациальной академии наук Кыргызской Республики по адресу: 723500, г.Ош, ул.Ленина 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета по адресу: Кыргызстан, 723500, г. Ош, ул.Ленина 333.

Автореферат разослан «*20*» *июня* 2016г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Т.О.Бекешов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Данное исследование относится к основным разделам современной дифференциальной геометрии – теории гладких отображений, сетей и распределений.

Точечные соответствия пространств одинаковой размерности изучали А.П. Норден, В.В. Рыжков, М.А. Акивис, В.Т. Базылев, Й. Микеш, Н.И. Гусева и их ученики, а также другие геометры.

Основы геометрии плоских многомерных сетей а также сетей двойных линий заложены в работах В.Т. Базылева. Работы В.Т. Базылева посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах.

Теория дифференцируемых частичных отображений евклидова пространства, имеет большой интерес не только для самой геометрии, она имеет широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Значительный интерес представляют дифференцируемые, частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданным семейством гладких линий, так как от выбора сети зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, а также их рациональные решения.

Сети, линии которых являются двойными линиями в частичных отображениях, применяются в решении многих задач теории линейных и нелинейных волн.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи существования двойных линий частичных отображений f_i^j пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$. Введены понятия квазидвойной линии частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, исследованы задачи существования квазидвойных линий частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$.

Цель работы:

– исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий частичных отображений четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий;

– исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$, где f_i^j – частичное отображение пространства E_4, $\Delta_{(k\ell)}$ – 2- мерное распределение в E_4 ($\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, $\Delta_{(ik\ell)}$ – 3-мерное распределение в E_4);

– найти необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений f_i^j пространства E_4.

Методы исследования. В данной работе использованы следующие методы: метод внешних форм Картана, метод подвижного репера с использованием теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф.Лаптева.

Научная новизна работы. Основные научные результаты:

– доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений $f_i^j: \Omega \to \Omega_i^j$ четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий;

– найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий;

– получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар $(f, \Delta_{(k\ell)})$, где $\Delta_{(k\ell)} = (X, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell)$ - двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_k, \vec{e}_\ell$; б) квазидвойными линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, где $\Delta_{(ik\ell)}$ - трехмерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell$;

– доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$;

– найдена зависимость вырожденности частичного отображения f_i^j от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты данной работы представляют, прежде всего, теоретический интерес. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по геометрии отображений погруженных многообразий и в теории сетей на многообразиях. Результаты диссертации также могут быть использованы в теории графов, компьютерной геометрии.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказательства необходимого и достаточного условий:

– вырожденности частичных отображений $f_i^j: \Omega \to \Omega_i^j$ четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий;

– для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j;

– для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$;

– для того, чтобы любая линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

2. Нахождение зависимости вырожденности частичного отображения f_i^j от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались: на международной научной конференции «Роль науки и образования в современных условиях глобализации», посвященной 75-летию общественного деятеля, академика НАН КР, д.х.н. профессора Б.М. Мурзубраимова (Ош 2015), на семинаре по геометрии и топологии факультета математики, информатики и кибернетики Кыргызского Национального Университета им. Ж.Баласагына (руководитель – д.ф.-м.н., профессор А.А. Чекеев), на научно-методическом семинаре «Современные проблемы математики и технология преподавания математики» при ЖАГУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Алыбаев К.С.), на межвузовском семинаре «Актуальные проблемы математики и информатики» при ФМИТ ОшГУ (руководитель - д.ф.-м.н., профессор, чл.корр. НАН КР К. Алымкулов), а так же на научно-теоретическом семинаре кафедры алгебры и геометрии ОшГУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Г. Матиева).

Публикации по теме диссертации: Основное содержание диссертации опубликовано в 11 работах [1-11]. Из них 7 статей в российских периодических изданиях [1-3, 8-11] индексируемых в РИНЦ и 2 статьи в кыргызских периодических изданиях [6,7] индексируемых в РИНЦ.

Личный вклад автора в совместных работах:

В работах [3], [5] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, а получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой.

В работах [1], [2], [8], [10], [11] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой, выяснение геометрических смыслов конечных соотношений – Ч.Х. Абдуллаевой.

В работах [9] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой, выяснение геометрических смыслов конечных соотношений – Г.М. Борбоевой.

Структура и объем диссертации:

Диссертация состоит из введения, трёх глав, состоящих из 11 разделов, списка использованных источников из 86 наименований и заключения. Нумерация разделов двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем, лемм и формул – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста 90 страниц.

Краткое содержание диссертации

В первой главе работы приводится обзор литературы и результатов других авторов, связанных с темой диссертации.

Во второй главе диссертации исследовано существование двойных линий частичных отображений $f_i^j : \Omega \to \Omega_i^j$ и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik)}\right)$ в пространстве E_4.

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \; D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \; \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^i заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_4, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^{k} = \left(\Lambda_{ijm}^{k} + \Lambda_{il}^{k}\Lambda_{jm}^{l} + \Lambda_{lj}^{k}\Lambda_{im}^{l}\right)\omega^{m}. \tag{5}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^{k}, \Lambda_{ijm}^{k}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^{1} заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^{1}\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^{3}\vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^{2}\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^{4}\vec{e}_4,$$
$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^{3}\vec{e}_3$$

и

$$\Lambda_{11}^{3} = -\Lambda_{31}^{1} = 0,\ \Lambda_{11}^{4} = -\Lambda_{41}^{1} = 0, \tag{6}$$
$$\Lambda_{21}^{4} = -\Lambda_{41}^{2} = 0. \tag{7}$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^{2}$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^{3}$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^{4}$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_4 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\vec{e}_i. \tag{8}$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.
Сеть Σ_4 в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе, если реперы
$\Re_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$,
$\Re_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий
ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети Σ_4 одновременно.

Пусть сеть Σ_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$.

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_i^j описывает свою область $\Omega_i^j \subset E_4$. Получается частичное отображение $f_i^j : \Omega \to \Omega_i^j$ такое, что $f_i^j(X) = F_i^j$.

В разделе 2.1. рассмотрено частичное отображение f_3^2 и исследована проблема существования двойных линий этого отображения и пар $\left(f_3^2, \Delta_{(ik)}\right)$.

Доказаны необходимое и достаточное условия вырожденности отображения f_3^2 (Теорема 2.1.1), а также доказано, что если линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$

является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(34)}\right)$, то частичное отображение f_3^2 является вырожденным (Следствие 2.1.1.).
Также доказаны:

Теорема 2.1.2. Если линия ω^4 является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(34)}\right)$, то никакая другая линия (отличная от линий ω^3, ω^4), принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, не может быть двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(34)}\right)$.

Теорема 2.1.3. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(23)}$, является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию: $\dfrac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\dfrac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{33}^4}$.

Следствие 2.1.2. Если линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$, то эта пара не имеет других (кроме линии ω^2) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(23)}$.

Теорема 2.1.4. Произвольная линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям:

$$\Lambda_{31}^2 = 0, \qquad \frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{33}^4},$$

где β^1, β^3 – первая и третья координаты касательного вектора $\vec{\beta}$ линии β.

Следствие 2.1.3. Если линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$, то это пара не имеет других (кроме линии ω^1) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(13)}$.

В разделе 2.2. рассмотрено частичное отображение $f_1^4: \Omega \to \Omega_1^4$, определяемое псевдофокусом $F_1^4 \in \left(X, \vec{e}_1\right)$ и задача существования двойных линий этого отображения f_1^4 и пар $\left(f_1^4, \Delta_{(ik)}\right)$.

Доказаны необходимое и достаточное условия вырожденности отображения f_1^4 **(Теорема 2.2.1.)**, а также доказано, что линии ω^1, $\overline{\omega}^1 = f_1^4\left(\omega^1\right)$ всегда являются двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$ (Лемма 2.2.1.).

Также получены результаты: доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы
а) линии ω^2, $\overline{\omega}^2 = f_1^4\left(\omega^2\right)$ являлись двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^2 являлась двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$;

б) линии ω^3, $\overline{\omega}^3 = f_1^4(\omega^3)$ являлись двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^3 являлась двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$;
в) линии ω^4, $\overline{\omega}^4 = f_1^4(\omega^4)$ являлись двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^4 являлась двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(14)})$.

Далее доказано, что если линия ω^2 сети $\widetilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$, то частичное отображение f_1^4 становится вырожденным.

Получены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, являлась двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(14)})$ **(Теорема 2.2.4.)**.

Установлено, что если линия ω^4 сети $\widetilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(14)})$, то никакая другая линия, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, не может быть двойной линией этой пары **(Следствие 2.2.2.)**.

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы любая линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, являлась двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$ **(Теорема 2.2.5.)**.

В разделе 2.3. рассмотрено частичное отображение $f_4^3\colon\ \Omega \to \Omega_4^3$, определяемое псевдофокусом $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$ и исследована задача существования двойных линий этого отображения f_4^3 и пар $(f_4^3, \Delta_{(ik)})$.

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы:

а) линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, являлась двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(34)})$ **(Теорема 2.3.1.)**;

б) линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, являлась двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(14)})$ **(Теорема 2.3.2.)**;

в) линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(24)}$, являлась двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(24)})$ **(Теорема 2.3.3.)**.

В разделе 2.4. рассмотрено частичное отображение $f_2^1\colon\ \Omega \to \Omega_2^1$, определяемое псевдофокусом $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ и исследована задача существования двойных линий этого отображения f_2^1 и пар $(f_2^1, \Delta_{(ik)})$.

Доказаны

Теорема 2.4.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)}$, является двойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(12)})$ тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворяют условию: $\dfrac{\bar{\gamma}^1}{\bar{\gamma}^2} = -\dfrac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^3}$.

где Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\widetilde{\Sigma}_4$,

Λ^3_{21} – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$

Теорема 2.4.2. Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, является двойной линией пары $\left(f^1_2, \Delta_{(34)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\frac{\Lambda^1_{23}}{\beta^1_{213}} = \frac{\Lambda^1_{24}}{\Lambda^1_{214}},$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$\frac{\vec{e}_1 \vec{\Lambda}_{23}}{\vec{e}_1 d_3 \vec{\Lambda}_{21}} = \frac{\vec{e}_1 \vec{\Lambda}_{24}}{\vec{e}_1 d_4 \vec{\Lambda}_{21}},$$

где d_i - символ дифференцирования вдоль направления $\vec{e}_i$, $\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$.

В третьей главе исследовано существование квазидвойных линий частичных отображений f^j_i и пар $\left(f^j_i, \Delta_{(i\hat{e}\ell)}\right)$.

В разделе 3.1. рассмотрено частичное отображение $f^3_4 : \Omega \to \Omega^3_4$ такое, что $f^3_4(x) = F^3_4 \in (X, \vec{e}_4)$. Введены определения квазидвойных линий частичного отображения f^j_i и квазидвойной линии пар $\left(f^j_i, \Delta_{(i\hat{e}\ell)}\right)$.

Введём определения:

1) линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega^i}$ в E_4 называются квазидвойными линиями отображения g, если касательные к ним взятые в соответствующих точках X, $g(X)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) Линия l называется квазидвойной линией пары (g, Δ_p), если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Доказаны: необходимое и достаточное условие для того, чтобы

а) линия γ, принадлежащая трёхмерному распределению $\Delta_{(234)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f^3_4, \Delta_{(234)}\right)$ **(Теорема 3.1.1.)**;

б) линия α, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(123)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f^3_4, \Delta_{(123)}\right)$ **(Теорема 3.1.2.)**;

в) линия m, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f^3_4, \Delta_{(124)}\right)$;

г) линия β, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(134)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f^3_4, \Delta_{(134)}\right)$ **(Теорема 3.1.3.)**.

Выяснен геометрический смысл конечных соотношений.

В разделе 3.2. рассмотрено частичное отображение $f_3^2:\ \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$.

Доказаны необходимое и достаточное условие для того, чтобы:

а) линия ℓ, принадлежащая трёхмерному распределению $\Delta_{(123)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(123)}\right)$;

б) линия γ, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(124)}\right)$ **(Теорема 3.2.1.)**;

в) линия α, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(134)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(134)}\right)$ **(Теорема 3.2.2.)**.

Выяснен геометрический смысл конечных соотношений.

В разделе 3.3. рассмотрено частичное отображение $f_1^4:\ \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f_1^4(X) = F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$.

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы: а) линия ℓ, принадлежащая трёхмерному распределению $\Delta_{(123)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(123)}\right)$;

б) любая линия β, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(124)}\right)$ **(Теорема 3.3.1.)**;

Получены необходимое и достаточное условия для того, чтобы: а) линия γ, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(234)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(234)}\right)$;

б) линия α принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(134)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(134)}\right)$ **(Теорема 3.3.2.)**.

В разделе 3.4. рассмотрено частичное отображение $f_2^1:\ \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $f_2^1(X) = F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$.

Доказаны:

Теорема 3.4.1 Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(124)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\Lambda_{21}^3 \gamma^1 + \Lambda_{22}^3 \gamma^2 + \Lambda_{24}^3 \gamma^4 = 0,$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\vec{\theta} \cdot \vec{\gamma} = 0,$$

где $\vec{\gamma} = \left\{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^4\right\}$ – касательный вектор линии γ,

$$\vec{\theta} = (\vec{e}_3 d_1 \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{e}_3 d_2 \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_3 d_4 \vec{e}_2)\vec{e}_4.$$

Теорема 3.4.2 1) Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(234)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\frac{\beta^3}{\beta^4} = -\frac{\Lambda_{24}^1}{\Lambda_{23}^1},$$

где $-\Lambda_{24}^1 = \Lambda_{14}^2$ - вторая кривизна, $-\Lambda_{23}^1 = \Lambda_{13}^2$ - третья кривизна линии ω^4 сети $\widetilde{\Sigma}_4$.

2) Линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(134)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место условие:

$$B_{211}^1 \alpha^1 + B_{213}^1 \alpha^3 + B_{214}^1 \alpha^4 = 0,$$

геометрический смысл, которого заключается в том, что векторы $\vec{\xi} = B_{211}^1 \vec{e}_1 + B_{213}^1 \vec{e}_3 + B_{214}^1 \vec{e}_4$ и $\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{e}_1 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4$ ортогональны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассмотрены частичные отображения $f_i^j : \Omega \to \Omega_i^j$ евклидова пространства E_4, порождаемые заданным семейством гладких линий. Исследована проблема существования двойных (квазидвойных) линий частичного отображения f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Получены следующие результаты:

– Доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений $f_i^j: \Omega \to \Omega_i^j$ четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий;

– Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий;

– Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар $(f, \Delta_{(k\ell)})$, где $\Delta_{(k\ell)} = \left(X, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell\right)$ – двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_k, \vec{e}_\ell$; б) квазидвойными линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, где $\Delta_{(ik\ell)}$ – трехмерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell$;

– Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$;

– Найдена зависимость вырожденности частичного отображения f_i^j от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Автор благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Матиеву Гулбадан за постановку задачи исследования, постоянное внимание и поддержку в работе.

Список опубликованных работ

1. Курбанбаева, Н.Н. О двойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №10-1. – Уфа, 2015. – С. 20-26 (РИНЦ).
2. Курбанбаева, Н.Н. Существование двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // IN-SITU. – №4. – Москва, 2015. – С. 14-20 (РИНЦ).
3. Курбанбаева, Н.Н. Об одной двойной линии частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 49-53.
4. Курбанбаева, Н.Н. К геометрии частичных отображений евклидова пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 54-59.
5. Курбанбаева, Н.Н. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии одного частичного отображения пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №4-4. – Уфа, 2016. – С. 8-14 (РИНЦ).
6. Курбанбаева, Н.Н. О свойствах одного частичного отображения евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // СИМВОЛ НАУКИ. – №1-1(13). – Уфа, 2016. – С. 43-49 (РИНЦ).
7. Курбанбаева, Н.Н. О существовании двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации. – №1– Бишкек, 2016. – С. 3-6 (РИНЦ).
8. Курбанбаева, Н.Н. О квазидвойных линиях частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации, №1. – Бишкек, 2016. – С. 7-10 (РИНЦ).
9. Курбанбаева, Н.Н. Существования квазидвойных линий частичного отображения евклидова пространство E_4 [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // СИМВОЛ НАУКИ. – №3-4. – Уфа, 2016. – С. 25-30 (РИНЦ).
10. Курбанбаева, Н.Н. Необходимое и достаточное условия существования квазидвойных линий частичного отображения пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №3-4. – Уфа, 2016. – С. 24-30 (РИНЦ).
11. Курбанбаева, Н.Н. О квазидвойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // CETERIS PARIBUS. – №4. – Москва, 2016. – С. 6-13 (РИНЦ).

РЕЗЮМЕ
диссертационной работы Курбанбаевой Нуржамал Нажимидиновны на тему “ Двойные линии частичного отображения пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – “Геометрия и топология”

Ключевые слова: частичное отображение, циклическая сеть Френе, псевдофокус, распределение, двойная линия частичного отображения, квазидвойная линия частичного отображения.

Объект исследования: Двойные и квазидвойные линии частичного отображения f_i^j евклидова пространства E_4 и пар $\left(f_i^j, \Delta_p\right)$.

Предмет исследования: Частичные отображения четырехмерного евклидова пространств E_4, порождаемые заданным семейством гладких линий.

Цель исследования:

– исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий частичных отображений f_i^j пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий;

– исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$, где $\Delta_{(k\ell)}$ – 2- мерное распределение в E_4 $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)\right.$, $\Delta_{(ik\ell)}$ –3-мерное распределение в $\left.E_4\right)$;

– найти необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений f_i^j пространства E_4.

Методы исследования: Метод внешних форм Картана, метод подвижного репера с использованием теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф.Лаптева.

Научная новизна:

– доказаны необходимое и достаточные условия вырожденности частичных отображений f_i^j пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий;

– найдены необходимые достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j пространства E_4;

– получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$; б) квазидвойными линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$;

– доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$;

– найдена зависимость вырожденности частичного отображения f_i^j от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Курбанбаева Нуржамал Нажимидиновнанын “ E_4 мейкиндигин берилген жылма сызыктардын классы тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтуунун кошмок сызыктары” деген темадагы 01.01.04 – “Геометрия жана топология” адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: бөлүктөп чагылтуу, Френенин циклдик торчосу, псевдофокус, бөлүштүрүү, бөлүктөп чагылтуунун кошмок сызыгы, бөлүктөп чагылтуунун квазикошмок сызыгы.

Изилдөөнүн обьектиси: E_4 мейкиндигин f_i^j бөлүктөп чагылтуунун жана (f_i^j, Δ_p) түгөйүнүн кошмок жана квазикошмок сызыктары.

Изилдөөнүн предмети: Берилген жылма сызыктардын классы тарабынан жаратылган евклиддик төрт ченемдүү E_4 мейкиндигин бөлүктөп чагылтуулар.

Изилдөөнүн максаты:

– Евклиддик төрт ченемдүү E_4 мейкиндигин берилген жылма сызыктардын классы тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтуулардын кошмок (квазикошмок) сызыктарынын жашашын изилдөө;

– $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ түгөйүнүн (мында $\Delta_{(k\ell)}$ – E_4 мейкиндигиндеги эки ченемдүү бөлүштүрүү) $((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ түгөйүнүн (мында $\Delta_{(ik\ell)}$ – E_4 мейкиндигиндеги үч ченемдүү бөлүштүрүү) кошмок (квазикошмок) сызыктарынын жашашын изилдөө;

– E_4 мейкиндигин f_i^j бөлүктөп чагылтуулардын кубулган болушунун зарыл жана жетиштүү шарттарын табуу.

Изилдөөнүн методдору: Картандын сырткы формалар методу, кыймылдуу репер жана Г.Ф.Лаптевдин дифференциалдык-геометриялык изилдөөлөр методу.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары:

– E_4 мейкиндигин берилген жылма сызыктардын классы тарабынан жаратылган f_i^j бөлүктөп чагылтуулардын кубулган болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген;

– Френенин циклдик торчосунун ω^i сызыктары евклиддик E_4 мейкиндигин f_i^j бөлүктөп чагылтуулардын кошмок (квазикошмок) сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган;

– Френенин циклдик торчосунун ω^i сызыктары: а) $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ түгөйүнүн кошмок сызыктары болушунун; б) $(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)})$ түгөйүнүн квазикошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары алынган;

– $\Delta_{(k\ell)}$ $(\Delta_{(ik\ell)})$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон γ сызыгы $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ $((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ түгөйүнүн кошмок (квазикошмок) сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген;

– f_i^j бөлүктөп чагылтуусунун кубулган болушу Френенин циклдик торчосунун кайсыл сызыктары $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ $((f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}))$ түгөйүнүн кошмок (квазикошмок) сызыгы болушунан көз каранды экендиги табылган.

SUMMARY

Dissertation "Double lines of partial mapping of space E_4, generated by given set of smooth lines" of Kurbanbaeva Nurjamal Najimidinovna is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.04- "Geometry and topology"

Key words: partial mapping, cyclic net of Frenet, pseudofocus, distribution, a double line of partial mapping, a quasidouble line of partial mapping.

Object of research: Double and quasidouble lines of partial mapping f_i^j of Euclidean space E_4 and pairs $\left(f_i^j, \Delta_p\right)$.

Subject of research: Partial mappings of four dimension Euclidean space E_4, generated by given set of smooth lines.

Research aim:

– to investigate problem of a existence of a double (quasidouble) lines of the partial mappings f_i^j of the space E_4, generated by the given set of smooth lines;

– to investigate problem of a existence of a double (quasidouble) lines of the pairs $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$, where $\Delta_{(k\ell)}$ – 2-dimensional distribution in E_4 $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right.$, where $\Delta_{(ik\ell)}$ – 3-dimensional distribution in $\left.E_4\right)$;

– to find a necessary and sufficient conditions of a degeneracy of the partial mappings f_i^j of the space E_4.

Research Methods: The external forms of Cartan's, moving frame method and theoretic-group method of differential-geometrical researches of G.F.Laptev.

Scientific novelty:

– necessary and sufficient conditions of a degeneracy of partial mappings f_i^j of the space E_4, generated by the given set of smooth lines are proved;

– necessary and sufficient conditions in order that lines ω^i of the cyclic net of Frenet are double (quasidouble) lines of partial mapping f_i^j of the space E_4;

– necessary and sufficient conditions in order that lines ω^i of the cyclic net of Frenet are: a) double lines of the pairs $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$; b) quasidouble lines of the pairs $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$ are obtained;

– necessary and sufficient conditions in order that line γ, belonging to distribution $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$, is double (quasidouble) line of the pair $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$;

– dependence of degeneracy of the partial mapping from this what lines of cyclic net of Frenet are double (quasidouble) lines of the pair $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Подписано в печать: 15.06.2016г.
Обьем: 1,25п.л. Заказ №28
Формат 60х84 1/16. Тираж 120шт.

Редакцианно-издательский отдел “Билим” ОшГУ