МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К 01.15.504

На правах рукописи
УДК: 517.97; 62-50

Наметкулова Райхан Жанузаковна

НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2016

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского славянского университета имени Б.Н.Ельцина

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Керимбеков Акылбек**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Алымкулов Келдибай**,
	кандидат физико-математических наук, доцент **Алишеров Абдулла**
Ведущая организация	Кыргызский технический университет им. И. Раззакова

Защита диссертации состоится *«23» декабря 2016 г. в 14^{00} часов* на заседании диссертационного совета К 01.15.504 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском Государственном университете и Институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского Государственного университета.

Автореферат разослан «*21» ноября* 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т. О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы. В приложениях встречаются прикладные задачи, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. Такие задачи можно исследовать методами теории оптимального управления для распределенных систем. В этом направлении имеется лишь небольшое количество работ, где исследования проводились, когда функция управления линейно входит в правую часть уравнения или в граничные условия. На практике часто встречаются прикладные задачи, математическое описание которых приводит к задачам управления, где функция внешнего или граничного влияния является нелинейной относительно управляющих параметров. Такие задачи, встречающиеся при управлении технологическими процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными мало изучены, и создание оптимальных методов их решения, а также методов качественного исследования их являются актуальными задачами теории оптимального управления для распределенных систем.

Формирование основ теории оптимального управления для распределенных систем осуществлялось в 60-е годы прошлого столетия работами А.Г. Бутковского, А.И. Егорова, Т.К. Сиразетдинова и др. В настоящее время теория получила широкое развитие и проникает в различные отрасли науки. Разрабатываются новые методы исследования и алгоритмы построения решения задачи оптимального управления для распределенных систем.

В диссертации исследована задача управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа, когда функция внешнего влияния является нелинейной относительно распределенного управления. В этом направлении проводились исследования в работах А.К. Керимбекова, А.К. Кадиримбетовой и Э. Сейдакмат кызы и др.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках научного проекта № КР-05 (номер гос.регистрации № 0006988) «Математическое обеспечение процессов управления энерго-массопереносами, происходящими в линиях передач, и продукционными почво-растительными системами» МОиН КР.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование задач нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае распределенного и равномерно распределенного управлений и установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации.

Научная новизна работы. На примере распределенного и равномерно распределенного управлений тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, разработан алгоритм построения решения нелинейной задачи оптимизации и его приближений.

Получены следующие результаты:

- установлено, что коэффициенты Фурье слабообобщенного решения основной и сопряженной краевых задач можно определить как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода;
- установлено, что интервалы сходимости рядов Неймана при построении слабообобщенных решений основной и сопряженной краевых задач, расширяются с увеличением номера n=1,2,3,… коэффициентов Фурье;
- указаны классы функций внешнего влияния, где задачи нелинейной оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями имеют решения;
- получены нелинейные интегральные уравнения оптимального распределенного и равномерно распределенного управлений, и исследована их однозначная разрешимость;
- найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, при распределенном и равномерно распределенном управлениях;
- разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана их сходимость по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу, как в случае распределенного, так и в случае равномерно распределенного управления.

Теоретические результаты данного исследования получены впервые и являются новыми в теории оптимального управления тепловыми процессами, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае распределенного и равномерно распределенного управлений.

Теоретическая и практическая ценность. Разработанный алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при нелинейном распределенном и равномерно распределенном управлениях может быть использован в приложениях, например, в задачах управления технологическими процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа. Полученные теоретические выводы представляют интерес в теории оптимального управления для распределенных систем и применимы для развития методов качественного исследования и при разработке конструктивных методов решения нелинейных задач оптимизации.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- определение коэффициентов Фурье слабо обобщенного решения основной и сопряженной краевых задач как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода в задачах оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями;
- определение радиусов сходимости рядов Неймана при построении слабо обобщенных решений основной и сопряженной краевых задач при каждом фиксированном номере n=1,2,3,… коэффициентов Фурье в задачах оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями;
- увеличение радиусов сходимости рядов Неймана с ростом индекса n=1,2,3,… коэффициентов Фурье в задачах оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями при построении решений основной и сопряженной краевых задач;
- определение класса функций внешних источников в задачах оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями, где функция управления является оптимальной;
- получение нелинейных интегральных уравнений оптимального распределенного и равномерно распределенного управлений и исследование их однозначной разрешимости.
- нахождение достаточных условий однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, при распределенном и равномерно распределенном управлениях;
- разработка алгоритма построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана их сходимость по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу, как в случае распределенного, так и в случае равномерно распределенного управления.

- результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы.

Личный вклад соискателя. По результатам исследований опубликовано 10 статей, 2 тезиса, из них 5 статей, опубликованных зарубежом, 3 из которых входят в базу Web of Science (2 в РИНЦ и 1 с импакт-фактором 1,23 входит в базу Thomson). В опубликованных работах в соавторстве, постановка задачи принадлежит научному руководителю, а основные результаты: построение полного решения задачи нелинейной оптимизации и их приближений, а также сходимость приближений, численная реализация теоретических выводов на модельном примере принадлежит соискателю.

Апробации результатов диссертации. Результаты исследований докладывались на международных конференциях, симпозиумах и межвузовских, вузовских конференциях:

- 2-я международная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Кыргызстан, Булан-Соготту, 5-7 сентября 2013;
- Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Shymkent, Kazakstan, September 11-13, 2014;
- республиканская научно-практическая конференция "Наука и современность - 2015", посвященной реализации Послания Президента Республики Казахстан народу Казахстана "Нурлы жол - путь в будущее". Казахстан, Тараз, 13 марта 2015.
- Результаты исследований регулярно были обсуждены на научном семинаре (научный руководитель проф. Керимбеков А.К.) кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 10 научных статьях и в 2 тезисах, в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики – 5 статей, в реферируемых зарубежных журналах – 5 статей, из них в единоличном авторстве – 3 статьи.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, девяти разделов, заключения, списка использованной литературы, содержащего 82 наименования и приложения. Общий объем работы включает 110 страниц машинописного текста.

Содержание диссертации. В нулевой главе приведены примеры задач, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями и сделан краткий обзор работ, по содержанию примыкающих к теме данной диссертационной работы.

В первой главе исследована задача нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмовым интегро-дифференциальным уравнением, в случае, когда функция внешнего источника нелинейно зависит от распределенного управления. При этом качество управления оценивается обобщенным квадратичным функционалом.

Сформулирован принцип максимума для рассматриваемой задачи и получены условия оптимальности управления. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации с распределенным управлением. Разработан алгоритм построения точного решения задачи нелинейной оптимизации в виде тройки $\left(u^0(t,x), v^0(x,t), J(u^0(t,x)\right)$ и приближенных решений. Доказана сходимость приближенного решения задачи нелинейной оптимизации по управлению, оптимальному процессу и функционалу.

В пункте 1.1 рассматривается задача минимизации обобщенного квадратичного функционала

$$J[u(t,x)] = \int_0^1 [v(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2\left[t,x,u(t,x)\right] dxdt \qquad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^T K(t,\tau) v(\tau,x) d\tau + f[t,x,u(t,x)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T \qquad (2)$$

$$v(0,x) = \psi(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad (3)$$

$$v_x(t,0) = 0, \qquad v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = 0, \qquad (4)$$

где $K(t,\tau)$ – заданная функция, она определена в области $D = \{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t,\tau) d\tau dt = K_0 < \infty, \qquad (5)$$

т.е. $K(t,\tau) \in H(D),$; $\xi(x) \in H(0,1)$, $\psi(x) \in H(0,1)$ - заданные функции; $f[t,x,u(t,x)] \in H(Q)$ - заданная функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t,x) \in H(Q)$ и удовлетворяет условию

$$f_u[t,x,u(t,x)] \ne 0, \quad \forall (t,x) \in Q = (0,1)\times(0,\mathrm{T}) \; ; \qquad (6)$$

λ - параметр, T-фиксированный момент времени, постоянная $\alpha > 0$, $H(Y)$ - гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y .

Для приращения функционала непосредственным вычислением, получено соотношение

$$\Delta J[u] = -\int_0^T \int_0^1 \{\omega(t,x)(f[t,x,u+\Delta u] - f[t,x,u]) -$$
$$-\beta\left[q^2(t,x,u+\Delta u) - q^2(t,x,u)\right]\} dxdt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x) dx = \qquad (7)$$
$$= -\int_0^T \int_0^1 \Delta\Pi(t,x,\omega(t,x),v(t,x),u(t,x)) dxdt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x) dx,$$

где

$$\Pi(t,x,\omega(t,x),v(t,x),u(t,x)) = \omega(t,x) f[t,x,u(t,x)] - \beta q^2(t,x,u(t,x)), \qquad (8)$$

а $\omega(t,x) \in H(Q)$ является единственным слабо обобщенным решением сопряженной краевой задачи (оно строится аналогично решению основной краевой задачи), соответствующим управлению $u(t,x) \in H(Q)$

$$\omega_t + \omega_{xx} = -\lambda \int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x) d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t < T,$$
$$\omega(T,x) + 2[v(T,x) - \xi(x)] = 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad (9)$$
$$\omega_x(t,0) = 0, \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \qquad 0 \le t < T.$$

Сформулирован принцип максимума: для того, чтобы в задаче оптимизации (1)-(6), управление $u^0(t,x) \in H(Q)$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\Pi(t,x,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u^0(t,x)) \quad (=) \quad \sup_{u\in Z} \Pi(t,x,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u),$$

где Z – множество допустимых значений функции $u(t,x)$, в каждой точке $(t,x) \in Q$, выполнялось почти всюду в области Q.

Как следствие принципа максимума получены следующие соотношения

$$\Pi_u[t,x,\omega(t,x),v(t,x),u(t,x)] = \omega(t,x) f_u[t,x,u(t,x)] -$$
$$-2\beta q(t,x,u(t,x)) q_u(t,x,u(t,x)) = 0, \qquad (10)$$

$$\Pi_{uu}[t,x,\omega(t,x),v(t,x),u(t,x)] = \omega(t,x) f_{uu}[t,x,u(t,x)] -$$
$$-2\beta\left[q(t,x,u(t,x)) q_u(t,x,u(t,x))\right]_u < 0, \qquad (11)$$

которые в совокупности называются *условиями оптимальности*.

Исключив $\omega(t,x)$ из (11) перепишем это условие в виде

$$f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\left(\frac{q\left(t,x,u(t,x)\right)q_u\left(t,x,u(t,x)\right)}{f_u\left[t,x,u(t,x)\right]}\right)_u > 0\,. \tag{12}$$

В пункте 1.2 изложена процедура построения слабо обобщенного решения основной краевой задачи. Оно построено в виде

$$\nu(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n(t)z_n(x), \tag{13}$$

где коэффициенты $\nu_n(t)$ определяются как решение линейного интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$\nu_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)\nu_n(s)ds+a_n(t),\quad a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}f_n[\tau,u]d\tau,$$

с ядром

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau,\qquad K_n(0,s)=0,$$

и имеют вид

$$\nu_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t). \tag{14}$$

Резольвента $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$, определяется рядом

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\qquad n=1,2,3,\dots, \tag{15}$$

который сходится при значениях λ, удовлетворяющих условию

$$|\lambda|<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K_0T}}\lambda_1\,.$$

На практике не всегда удается найти резольвенту, как сумму бесконечного ряда. По формуле

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\qquad n=1,2,3,\dots, \tag{16}$$

построено m-е приближение резольвенты и соответствующее решение краевой задачи (2) – (5) в виде

$$\nu^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\Big)z_n(x). \tag{17}$$

Доказано, что имеют место соотношения

$$\nu(t,x)\in H(Q)\ \text{ и }\ \left\|\nu(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m\to\infty]{}0. \tag{18}$$

Решение сопряженной краевой задачи (9) построено в виде

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x),\qquad \omega_n(t)=\int_0^1\omega(t,x)z_n(x)dx, \tag{19}$$

где коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$ определяются как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds-2e^{-\lambda_n^2(T-t)}[\nu_n(T)-\xi_n], \tag{20}$$

с ядром

$$B_n(s,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}K(s,\tau)d\tau,\qquad B_n(s,T)=0.$$

и имеют вид

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T\tilde{R}_n(s,t,\lambda)(-2)e^{-\lambda_n^2(T-s)}[\nu_n(T)-\xi_n]ds-2e^{-\lambda_n^2(T-t)}[\nu_n(T)-\xi_n],$$

где резольвента $\tilde{R}_n(s,t,\lambda)$ определяется по формуле

$$\tilde{R}_n(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t). \tag{21}$$

Установлено, что резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$ и $\tilde{R}_n(s,t,\lambda)$ удовлетворяют одним и тем же оценкам; при этом соответствующие ряды Неймана имеют одинаковые радиусы сходимости.

Решение сопряженной краевой задачи найдено по формуле

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}[\nu_n(T)-\xi_n]\Big(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\tilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\Big)z_n(x).$$

Соответствующее приближение «по резольвенте» имеет вид

$$\omega^m(t,x)=-2\sum_{n=1}^{m}[\nu_n(T)-\xi_n]\Big(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\tilde{R}_n^m(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\Big)z_n(x), \tag{22}$$

где

$$\tilde{R}_n^m(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t),$$

и удовлетворяет соотношению

$$\left\|\omega(t,x)-\omega^m(t,x)\right\|_H^2 \le C_1(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}\right)^{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

В пункте 1.3, согласно первому условию оптимальности, с учетом решения сопряженной краевой задачи, относительно оптимального управления получено нелинейное интегральное уравнение вида

$$\beta\frac{q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))}+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\int_0^T G_n(\tau)\int_0^1 f(\tau,y,u(\tau,y))z_n(y)dyd\tau z_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)h_n z_n(x), \tag{23}$$

где $G_n(t), G_n^*(t), h_n$ известны.

Однозначная разрешимость нелинейного интегрального уравнения (23) исследована согласно методике, разработанной проф. Керимбековым А.

Если положить

$$\beta\frac{q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))}=p(t,x), \tag{24}$$

то, согласно условию (12) это равенство однозначно разрешается относительно функции $u(t,x)$, т.е. существует функция $\varphi(\cdot)$, такая что

$$u(t,x)=\varphi(t,x,p(t,x),\beta). \tag{25}$$

и уравнение (23) можно переписать в виде

$$p(t,x)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\int_0^T G_n(\tau)\int_0^1 f\left(\tau,y,\varphi\left(\tau,y,p(\tau,y),\beta\right)\right)z_n(y)\,dy\,d\tau\,z_n(x)= \\ =\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\,h_n z_n(x)\,\beta. \tag{26}$$

Или в операторной форме

$$p=h+G_0[p], \tag{27}$$

где

$$G_0(\mathrm{p})=-\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\int_0^T G_n(\tau)\int_0^1 f(\tau,y,\varphi(\tau,y,p(\tau,y),\beta))z_n(y)dyd\tau z_n(x), \\ h=h(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)h_n z_n(x). \tag{28}$$

Лемма 1. Функция $p(t,x)$ является элементом гильбертова пространства $H(Q)$, т.е. $p(t,x)\in H(Q)$.

Лемма 2. Функция $h(t,x)$ является элементом гильбертова пространства $H(Q)$, т.е. $h(t,x)\in H(Q)$.

Лемма 3. Оператор $G_0[p]$ переводит пространство $H(Q)$ в себя.

Лемма 4. Пусть функция $f(t,x,u(t,x))$ удовлетворяет условию Липшица по функциональной переменной u, т.е.

$$\left\|f\left[t,x,u(t,x)\right]-f\left[t,x,\tilde{u}(t,x)\right]\right\|_{H(Q)} \le f_0\left\|u(t,x)-\tilde{u}(t,x)\right\|_{H(Q)}, \quad f_0>0,$$

а функция $\varphi(t,x,p(t,x),\beta)$ по функциональной переменной p, т.е.

$$\left\|\varphi[t,x,p(t,x),\beta]-\varphi\left[t,x,\tilde{p}(t,x),\beta\right]\right\|_{H(Q)} \le \\ \le\varphi_0(\beta)\left\|p(t,x)-\tilde{p}(t,x)\right\|_{H(Q)}, \quad \varphi_0(\beta)>0.$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma=\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T})^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} f_0\varphi_0(\beta)<1,$$

где $f_0,\varphi_0(\beta)$ - положительные постоянные, оператор $G[p]=h+G_0[p]$ является сжимающим.

Теорема. При выполнении условий Лемм 1-4 операторное уравнение (27) имеет единственное решение в пространстве $H(Q)$.

Решение операторного уравнения (27) строится методом последовательных приближений по следующей схеме

$$p_n(t,x)=G[p_{n-1}(t,x)],\ n=1,2,3,\ldots,$$

и удовлетворяет оценке

$$\left\|p^0(t,x)-p_n(t,x)\right\|_H \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|h(t,x)+G_0[p_0(t,x)]-p_0(t,x)\right\|_H, \tag{29}$$

где $p^0(t,x)=\lim_{n\to\infty}p_n(t,x)$ - точное решение операторного уравнения (27), а $p_0(t,x)$ - произвольный элемент пространства $H(Q)$.

Подставляя найденное решение $p^0(t,x)$ в (25) находим оптимальное управление

$$u^0(t,x)=\varphi\left[t,x,p^0(t,x),\beta\right], \tag{30}$$

которое является решением нелинейного интегрального уравнения (23).

В пункте 1.4 построено полное решение задачи нелинейной оптимизации в виде тройки $\left(u^0(t,x), \nu^0(x,t), J(u^0(t,x))\right)$, где

$u^0(t,x)=\varphi\left[t,x,p^0(t,x),\beta\right]$ - оптимальное управление;

$\nu^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a^0{}_n(s)ds+a^0{}_n(t)\right\}z_n(x)$ - оптимальный процесс;

$J[u^0(t,x)]=\int_0^1[\nu^0(T,x)-\xi(x)]^2dx+\beta\int_0^T\int_0^1 q^2(t,x,u^0(t,x))dxdt$ -

- минимальное значение функционала.

Приближения оптимального управления и их сходимость. Для n-го приближения оптимального управления

$$u_n(t,x)=\varphi[t,x,p_n(t,x),\beta],\quad n=1,2,3,..., \tag{31}$$

в силу условия $\gamma<1$ имеет место соотношение

$$\|u^0(t,x)-u_n(t,x)\|_{H(Q)}\le\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\|h(t,x)+G_0[p_0(t,x)]-p_0(t,x)\|_{H(Q)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{32}$$

Приближения оптимального процесса и их сходимость. При построении приближений оптимального процесса будем различать следующие виды приближений:

1) m-е – приближение оптимального процесса по резольвенте находим по формуле

$$\nu^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right]z_n(x),$$

где $R_n^m(t,s,\lambda)$ – m-е приближение резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$;

2) $m,k-e$ – приближение оптимального процесса находим по формуле

$$\nu_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds+a_n^k(t)\right]z_n(x),$$

где $a_n^k(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\int_0^1 f\left[\tau,y,u_k^0(\tau,y)z_n(y)\right]dyd\tau$;

3) $m,\ k,\ r$ –е приближение оптимального процесса находим по формуле

$$\nu_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds+a_n^k(t)\right]z_n(x).$$

Непосредственным вычислением доказаны следующие соотношения:

1) $\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\widetilde{C}_1(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0,$ (33)

2) $\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\widetilde{C}_2(\lambda)f_0^2\left\|u(t,x)-u_k(t,x)\right\|_{H(Q)}^2\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$ (34)

справедливое при каждом фиксированном m=1,2,3,…,

3) $\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}^2\le\widetilde{C}_3(\lambda)\frac{r+1}{r^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$ (35)

справедливое при каждой фиксированной паре (m, k), m, k =1,2,3,…

Далее из соотношения

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$
$$+\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to 0]{}0$$

следует сходимость приближения $\nu_k^{m,r}(t,x)$ к оптимальному процессу $\nu^0(t,x)$.

Относительно минимального значения функционала, с учетом видов приближений оптимального процесса, будем различать следующие приближения:

1) m – е приближение минимального значения функционала, соответствующее процессу $\nu^m(t,x)$, находим по формуле

$$J_m\left[u^0(t,x)\right]=\int_0^1\left[\nu^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\int_0^1 q^2\left(t,x,u^0(t,x)\right)dxdt;$$

2) $m,\ k$ – е приближение минимального значения функционала, соот-вет-ствующее процессу $\nu_k^m(t,x)$, находим по формуле

$$J_m\left[u_k(t,x)\right]=\int_0^1\left[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\int_0^1 q^2\left(t,x,u_k(t,x)\right)dxdt;$$

3) $m,\ k,\ r$ – приближение минимального значения функционала, соответствующее процессу $\nu_k^{m,r}(t,x)$, находим по формуле

$$J_m^r\left[u_k(t,x)\right]=\int_0^1\left[\nu_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\int_0^1 q^2\left(t,x,u_k(t,x)\right)dxdt.$$

Доказаны следующие соотношения:

1) $\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u^0(t,x)\right]\right|\le C_{10}\left\|\nu^0(T,x)-\nu^m(T,x)\right\|_{H(0,1)}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$;

2) $\left|J_m\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u_k(t,x)\right]\right|\le$

$$\le C_{11}\left\|v^m(T,x)-v_k^m(T,x)\right\|_{H(Q)}+C_{21}\left\|u^0(t,x)-u_k(t,x)\right\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0\ ,$$

для каждого фиксированного m=1,2,3,…;

3) $\left|J_m\left[u_k(t,x)\right]-J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right|\le C_{31}\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0\ ,$

для каждой фиксированной пары (m, k), m, k =1,2,3,…,

где C_{10}, C_{11}, C_{21}, C_{31} – некоторые положительные постоянные.

Далее из соотношения

$$\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right|\le\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u^0(t,x)\right]\right|+$$
$$+\left|J_m\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u_k(t,x)\right]\right|+\left|J_m\left[u_k(t,x)\right]-J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$$

следует сходимость приближения $J_m^r\left[u_k(t,x)\right]$ к минимальному значению функционала $J\left[u^0(t,x)\right]$.

Во второй главе исследована однозначная разрешимость нелинейной задачи равномерно распределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями.

В пункте 2.1 рассматривается задача нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать обобщенный квадратичный интегральный функционал

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u(t)\right)dt,\beta>0, \tag{36}$$

на множестве решений краевой задачи (2)-(5), в случае, когда

$$\overline{f}[t,x,u(t,x)]\equiv g(t,x)\,f[t,u(t)]\ ,$$

где $\xi(x)\in H(0,1)$, $g(t,x)\in H(Q)$, $f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ - заданные функции, причем функция $f\left[t,u(t)\right]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ монотонна, т.е.

$$\frac{\partial f\left[t,u(t)\right]}{\partial u}\ne 0,\forall t\in[0,T];$$

$\lambda-$ параметр, постоянная $\alpha>0$, T - фиксированный момент времени, $H(Y)$ - гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Рассматриваемая задача исследована по схеме, изложенной в первой главе, т.е. сформулирован принцип максимума; получено нелинейное интегральное уравнение

$$\beta q\left(t,u(t)\right)q_u\left(t,u(t)\right)f_u^{-1}[t,u(t)]+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)\,f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n(t)h_n,$$

где $\widetilde{G}_n(t,\lambda)$, $G_n(t,\lambda)$, h_n известны, которое, при выполнении условия

$$\gamma=\|g(t,x)\|_{H(Q)}^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{\lambda^2K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1,$$

имеет в пространстве $H(0,T)$ единственное решение; построено полное решение нелинейной задачи оптимизациив виде тройки $\left(u^0(t),v^0(t,x),J[u^0(t)]\right)$, где

$u^0(t)=\varphi\left[t,\overline{p}(t),\beta\right]$ - оптимальное управление;

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)g_n(\tau)\,f\left(\tau,u^0(\tau)\right)d\tau\right\}z_n(x),$$

где $\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)=\begin{cases}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t\le\tau\le T.\end{cases}$

- оптимальный процесс;

$$J[u^0(t)]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left[u^0(t)\right]^2dt.$$

- минимальное значение функционала.

Далее построено приближение тройки $\left(u^0(t),v^0(t,x),J[u^0(t)]\right)$ и доказаны следующие соотношения:

1) относительно оптимального управления:

$$\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\le\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[p_0(t)]-p_0(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

2) относительно оптимального процесса

2.1) $\left\| v^0(t,x) - v^m(t,x) \right\|^2_{H(Q)} \le \overline{C}_1(\lambda) \left(|\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_1^2}} \right)^{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$;

2.2) $\left\| v_m(t,x) - v_k^m(t,x) \right\|^2_{H(Q)} \le \overline{C}_2(\lambda) f_0^2 \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|^2_{H(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$,

для каждого фиксированного m=1,2,3,…;

2.3) $\left\| v_k^m(t,x) - v_k^{m,r}(t,x) \right\|^2_{H(Q)} \le \overline{C}_3(\lambda) \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$,

для каждой фиксированной пары (m, k), m, k =1,2,3,….

3) относительно минимального значения функционала

3.1) $\left| J\left[u^0(t)\right] - J_m\left[u^0(t)\right] \right| \le \overline{C}_{10} \left\| v^0(T,x) - v^m(T,x) \right\|_{H(0,1)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$; ;

3.2) $\left| J_m\left[u^0(t)\right] - J_m\left[u_k(t)\right] \right| \le \overline{C}_{11} \left\| v_m(T,x) - v_m^k(T,x) \right\|_{H(Q)} +$

$+\overline{C}_{21} \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ для каждого фиксированного m=1,2,3,…

3.3) $\left| J_m\left[u_k(t)\right] - J_m^r\left[u_k(t)\right] \right| \le \overline{C}_{31} \left\| v_m^k(T,x) - v_m^{k,r}(T,x) \right\|_H \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$,

для каждой фиксированной пары (m, k), m, k =1,2,3,…

где $\overline{C}_{10}$, $\overline{C}_{11}$, $\overline{C}_{21}$, $\overline{C}_{31}$ – некоторые постоянные.

На основе этих утверждений получим следующие соотношения

$$\left\| v^0(t,x) - v_m^{k,r}(t,x) \right\|_{H(Q)} \le$$

$$\le \left\| v^0(t,x) - v_m(t,x) \right\|_{H(Q)} + \left\| v_m(t,x) - v_m^k(t,x) \right\|_{H(Q)} + \left\| v_m^k(t,x) - v_m^{k,r}(t,x) \right\|_{H(Q)} \xrightarrow[m,k,r\to 0]{} 0;$$

$$\left| J\left[u^0(t)\right] - J_m^r\left[u_k(t)\right] \right| \le \left| J\left[u^0(t)\right] - J_m\left[u^0(t)\right] \right| + \left| J_m\left[u^0(t)\right] - J_m\left[u_k(t)\right] \right| +$$

$$+ \left| J_m\left[u_k(t)\right] - J_m^r\left[u_k(t)\right] \right| \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0,$$

из которых следует сходимость приближений задачи нелинейной оптимизации к точному решению.

В третьей главе приведены результаты численных расчетов.

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы задачи нелинейной оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями. При этом основное внимание уделено:

1) процедуре построения слабо обобщенного решения, коэффициенты Фурье которого, как в случае решения основной, так и в случае решения сопряженной краевых задач определяются соответственно как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода;

2) определению радиусов сходимости рядов Неймана при решении линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода. Установлено, что радиусы сходимости совпадают в обоих случаях и расширяются с увеличением номера n=1,2,3,… коэффициентов Фурье;

3) установлению классов функций внешних источников, где задачи нелинейной оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями разрешимы;

4) нахождению достаточных условий однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, при распределенном и равномерно распределенном управлениях;

5) созданию алгоритма построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказательству их сходимости по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу, как в случае распределенного, так и в случае равномерно распределенного управления.

Приведены результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы.

Полученные результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами и представляют научный интерес с точки зрения теории и приложений, а также могут быть использованы при разработке новых методов решения нелинейных задач оптимального управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Наметкулова Р.Ж.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2013, Т.13, №7. – С. 23-27.
2. **Наметкулова Р.Ж.** Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А.Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Механика и моделирование процессов технологии. – 2013, №2. – С. 80-86.
3. **Наметкулова Р.Ж.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-

дифференциальными уравнениями. [Текст]/ А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Тезисы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», –2013. – С. 50.

4. **Наметкулова Р.Ж.** Решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого интегро-дифференциальным уравнением Фредгольма [Текст]/ А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2014, Т.14, №1. – С. 166-172.
5. **Наметкулова Р.Ж.** Оптимальное распределенное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями и приближенные решения краевых задач [Текст]/ А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям, – Бишкек: Илим, 2014. - Вып. 46. – С. 14-20.
6. **Nametkulova R.** On the solvability of the problem of the optimal control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, R. Nametkulova // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 117.
7. **Наметкулова Р.Ж.** О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений [Текст] / Р.Ж. Наметкулова // Механика и технологии. – 2015, №2. – С. 42-47.
8. **Наметкулова Р.Ж.** О разрешимости нелинейного интегрального уравнения в задаче распределенного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2015, Т.15, №5. – С. 80-82.
9. **Наметкулова Р.Ж.** Приближенное решение задачи распределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Р.Ж. Наметку-лова // Журнал «Вестник КРСУ», –2015, Т.15, №5. – С. 88-90.
10. **Наметкулова Р.Ж.** Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Известия ИГУ, –2016, Т.15, сер. «Математика» – С. 50-61.
11. **Наметкулова Р.Ж.** Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом [Текст] / А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Известия ИГУ, –2016, Т.16, сер. «Математика» – С. 71-88.
12. **Nametkulova R**. On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls [Текст] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, R. Nametkulova, A. Kadirimbetova // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal - 2016, Vol. 10, No. 1, P. 215-223.

Наметкулова Райхан Жанузаковнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алыш үчүн «Интегро-дифференциалдык теңдемеси менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдык башкаруу» темасында жазылган диссертациялык ишинин

КЫСКАЧА БАЯНДАМАСЫ

Урунттуу сөздөр: Жылуулук процесси, солгун жалпыланган чыгарылыш, функционал, оптималдык башкаруу, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, жакындаштырылган чыгарылыш, жыйналуучулук.

Изилдөөнүн объектиси: Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкаруулучу жылуулук процесстер.

Изилдөөнүн предмети: Жайылган башкаруу функциясы менен жылуулук процессин чектелген убакыт ичинде баштапкы абалдан биз каалаган абалга келтирүү.

Изилдөөнүн максаты: Квадраттык функционалдарды минималдаштыруу учурунда жылуулук процессин жайылган башкаруунун сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышка ээ болушунун жеткиликтүү шарттарын аныктоо.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү:

- Негизги жана тутумдаш чектик маселелеринин солгун чыгарылыштарынын Фурье коэффициентери фредгольмдун экинчи түрдөгү бир тектүү эмес сызыктуу интегралдык теңдемелеринин чыгарылышы болору такталган;
- Эки учурда тең Нейман катарларынын жыйналуу радиустары бирдей болуп жана Фурьенин коэффициентиринин индекс номерлери чоңойгон сайын жыйналуу радиустары кеңейе тургандыгы такталган;
- Жайылган башкаруу жана бир калыпта жайылган башкаруу функциялары катышкан учурда сырткы күчтөрдү мүнөздөгөн

функциялардын сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелери чыгарылышка ээ боло турган классы такталган;

- Каралган маселелердин ар биринде оптималдык башкаруу функциясы сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чыгарылышы болору жана ал теңдеменин жалгыз чыгарылышка ээ болуу шарттары такталган;Чыгарылышы тиешелүү түрдө жайылган башкаруу жана бир калыпта жайылган башкаруу функциялары боло турган сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин жалгыз чыгарылышка ээ болуу шарттары изилденген жана жалгыз чыгарылыштын жашашынын жеткиликтүү шарттары аныкталган;
- Каралган эки маселенин ар бири үчүн алардын жакындаштырылган чыгарылыштарын табуунун алгоритми иштелген жана алардын жыйналуучулугу далилденген.

Алынган теориялык маалыматтар жайылган параметрлүү системаларды оптималдуу башкаруу териясында жаңылык болуп саналат жана оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселелерин чыгаруунун конструктивдүү ыкмаларын иштеп чыгууда колдонулушу мүмкүн.

Изилдөөнүн практикалык мааниси. Сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин жайылган башкаруу жана бир калыпта жайылган башкаруу функциясы сызыктуу эмес болгон учурдагы жакындаштырылган чыгарылышын табуунун түзүлгөн алгоритми жылуулук процессин башкарууга байланышкан маселелерди чыгарууда колдонулат.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Наметкуловой Райхан Жанузаковны на тему: «Нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: тепловой процесс, слабообобщенное решение, функционал, оптимальное управление, нелинейное интегральное уравнение, приближенное решение, сходимость.

Объект исследования: управляемые тепловые процессы, описываемые фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями.

Предмет исследования: посредством распределенного управления перевод теплового процесса из начального состояния в желаемое состояние за конечное время.

Цель исследования: установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случаях распределенного и равномерно распределенного управлений при минимизации квадратичного функционала.

Методы исследования: при исследовании были использованы методы теории оптимального управления системами с распределенным параметрами, классического вариационного исчисления, уравнений математической физики, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования:

– установлено, что коэффициенты Фурье слабообобщенного решения основной и сопряженной краевых задач можно определить как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода;
– установлено, что интервалы сходимости рядов Неймана при построении слабообобщенных решений основной и сопряженной краевых задач, расширяются с увеличением номера n=1,2,3,… коэффициентов Фурье;
– указаны классы функций внешнего влияния, где задачи нелинейной оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями имеют решения;
– получены нелинейные интегральные уравнения оптимального распределенного и равномерно распределенного управлений, и исследована их однозначная разрешимость;
– найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, при распределенном и равномерно распределенном управлениях;
– разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана их сходимость по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу, как в случае распределенного, так и в случае равномерно распределенного управления.

Полученные теоретические результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами и могут быть использовано при разработке конструктивных методов решения нелинейной задачи оптимизации.

Практическое значение исследования. Разработанный алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при нелинейном распределенном и равномерно распределенном управлениях может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с управлением тепловых процессов.

SUMMARY

Dissertation "Nonlinear optimal control of thermal processes described by the integral-differential equations" of Nametkulova Rayhan Januzakovna is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: thermal processes, weakly generalized solution, functionality, optimal control, nonlinear integral equation, approximate solution, convergence

Object of research is the controlled thermal processes described by a Fredholm integral-differential equations.

Subject of research is the control of the transformation thermal process from the initial state to the desired state for the finite time**.**

Purpose of the work is to establish the sufficient conditions of the unique solvability of nonlinear optimization of thermal process in case of the boundary control while minimizing the quadratic and piecewise linear functionals.

Research methodology. The methods of the optimal control theory of the distributed parameters systems, methods of classical variation calculus, methods of solving of equations of mathematical physics, methods functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.

Scientific novelty and theoretical significance of research

- The Fourier coefficients of the weakly generalized solution of the basic and adjoint boundary problems are defined as the solutions of linear inhomogeneous Fredholm integral equations of the second kind;
- Radiuses of convergence of Neumann series are expanded when the number n=1,2,3,… of Fourier coefficients is increased;
- The classes of external sources functions for the solvability of nonlinear optimization problem with distributed and uniformly distributed controls are stated;
- Nonlinear integral equations of optimal distributed and uniformly distributed controls are obtained and their unique solvability is investigated;
- Sufficient conditions for the unique solvability of nonlinear optimization problem of thermal processes, which described by Fredholm integral-differential equations with the distributed and uniformly distributed controls, are found;
- Algorithm for constructing the approximate solution of nonlinear optimization problem is worked out and its convergence for control, optimal process and functional is proved in cases of distributed and uniformly distributed controls.

The theoretical results are new in the theory of optimal control of systems with distributed parameters and can be used in the development of constructive methods for solving nonlinear optimization problem.

The practical significance of research. The developed algorithm for constructing the approximate solution of nonlinear optimization in nonlinear boundary control can be used in applications for solving practical problems related to the management of thermal processes.