МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСУБЛИКИ

Диссертационный Совет К 01.15.504

На правах рукописи

УДК 517.968

ТОЙГОНБАЕВА АЙЗАТ КУРАЛБЕКОВНА

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА-СТИЛЬТЬЕСА ПЕРВОГО РОДА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2015

Диссертационная работа выполнена на кафедре математического анализа Ошского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Асанов Авыт**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Джураев Абубакир Мухтарович**

кандидат физико-математических наук, доцент **Зулпукаров Алтынбек Зулпукарович**

Ведущая организация: Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, Кыргызстан, 720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547

Защита диссертации состоится «___» _______ 2015 года в _____ часов на заседании диссертационного совета К 01.15.504 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете и институте природных ресурсов южного отделения Национальной академии наук Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета по адресу: Кыргызстан, 723500, г. Ош, ул. Ленина, 333.

Автореферат разослан «___» ___________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета к.ф.-м.н., доцент Папиева Т.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последние года мы можем отметить развитие одной из значительных теорий, как теории условно-корректных задач, т.е. некорректных задач. Важным классом некорректно поставленных задач, имеющих большое прикладное значение, являются интегральные уравнения первого рода.

К интегральным уравнениям первого рода сводятся разнообразные задачи науки и техники. Адамаром впервые было введено понятие корректности для дифференциальных уравнений и был приведен пример некорректной задачи. Практичная сущность некорректных задач, даже вероятность их устойчивого решения была исследована А.Н. Тихоновым. В середине 20-го века возникли современные методы, позднее ставшие в теории некорректных задач, основными. Сегодня некорректно поставленные задачи – это довольно развитое направление математики. В работе А.Н. Тихонова показано, что к условно-корректным задачам приводятся прикладные задачи. Фундамент теории условно-корректных задач заложили в своих работах советские математики – А.Н. Тихонов, В.К. Иванов и М.М. Лаврентьев. Понятие условной корректности, приводимое в трудах А.Н. Тихонова, было сформулировано М.М. Лаврентьевым, как понятие корректности по Тихонову.

Изучая интегральные уравнения Вольтерра первого рода, А.М. Денисов применил метод дифференцирования.

М.И. Иманалиевым, А. Асановым были исследованы интегральные уравнения Вольтерра первого рода с негладкими ядрами, а также интегральные уравнения первого рода в своих трудах М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Н.С. Габбасов рассмотрели в пространстве обобщенных функций.

Исследование разнообразных проблем, возникающих при изучении решений интегральных уравнений первого рода приводится в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, М.И. Иманалиева, В.Г. Романова, Ю.Е. Аниконова, В.П. Танана, А.Л. Бухгейма, С.И. Кабанихина, А.С. Апарцина, Н.А. Магницкого, А. Саадабаева, Т.Д. Омурова, Т. Каракеева, А. Сражидинова, П.С. Панкова, Н.С. Габбасова, Т.О. Бекешова, З.А. Каденовой, Г.Б. Сапаровой и других.

Проблемы построения приближенных решений некорректных задач рассмотрены З.А. Каденовой и Г.Б. Сапаровой, в их трудах найдены достаточные условия единственности решений различных классов интегральных уравнений Фредгольма первого рода и построены их регуляризирующие операторы.

В данной диссертации исследуются Фредгольма-Стильтьесовые интегральные уравнения первого рода. Для этих уравнений будут доказаны теоремы единственности и будут построены регуляризирующие операторы по методу М.М. Лаврентьева.

Данная тематика актуальна, так как многие задачи науки и техники приводятся к интегральным уравнениям первого рода.

Связь с научно-исследовательскими работами. Работа выполнена в рамках проекта «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» ИТПМ НАН КР, № гос. регистрации 0005756. Полученные результаты включены в годовой отчет по проекту.

Цель диссертационного исследования:

– получить достаточные условия единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода и их систем;
– получить достаточные условия единственности решений систем нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода;
– построить регуляризирующий оператор для линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода;
– построить регуляризирующие операторы для систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.

Методика исследования. В работе используется метод регуляризации М.М. Лаврентьева, методы функционального анализа.

Научная новизна работы заключается в следующем:

– установлены достаточные условия единственности решений для исследуемых линейных интегральных уравнений первого рода;
– построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода;
– построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву для решения системы линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода;
– построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву для решения системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.

Теоретическая и практическая ценность. Данная работа несет теоретический интерес, применение результатов может быть распространено в математике и прикладных задачах.

Основные положения, выносимые на защиту:

– построение регуляризирующего оператора по М.М. Лаврентьеву для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода и их систем;

– построение регуляризирующего оператора по М.М. Лаврентьеву для решения систем нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода;

– установление достаточных условий единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода и их систем;

– доказательство теоремы единственности решений систем нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.

<u>Апробация работы</u>. Доклады и обсуждение результатов проведенного научного исследования проходили: на республиканских научно-теоретических конференциях, на международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения» (Астана,2012), на 2-ой международной конференции, посвященной 20-летию образования КРСУ им. первого президента Б.Н. Ельцина и 100-летию профессора Я.В. Быкова (Бишкек, 2013), а также на научно-теоретическом семинаре кафедры математического анализа Ошского государственного университета (руководитель – д.ф.-м.н. С. Каримов).

<u>Публикации по теме диссертации</u>. Основное содержание результатов по теме диссертации опубликовано в 9 статьях [1-9] и тезисе доклада [10]. В статьях [1], [3]-[5], [8] автором идеи исследования является А. Асанов; доказательство теорем единственности решений, получение основных результатов принадлежат Тойгонбаевой А.К. В статье [3], опубликованной в соавторстве, Калимбетову Б. принадлежит обсуждение результатов.

<u>Структура, объем и краткое содержание диссертации</u>. Данная диссертационная работа состоит из введения, трех глав, состоящих из 11 разделов, заключений, выводов, списка использованных источников из 94 наименований. Нумерация разделов – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Текст изложен на 95 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе работы рассматривается: обзор исследований, близких по теме диссертации.

Во второй главе исследованы проблемы единственности решений линейых интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода, найдены достаточные условия единственности их решений. А также на основе метода регуляризации по М.М. Лаврентьеву построен регуляризирующий оператор для их решений.

В разделе 2.1 рассматривается уравнение:

$$\int_a^b K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t), \qquad t \in [a,b], \tag{1}$$

здесь $\varphi(t)-$ возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t \le b, \\ B(t,s), & a \le t \le s \le b. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $A(t,s)$ и $B(t,s)$ – это непрерывные функции, соответственно на $G = \{(t,s) : a \le s \le t \le b\}$ и $\{(t,s) : a \le t \le s \le b\}$, а решение $u(t)$ будем искать в $C[a,b]$.

Предположим:

1) $H(t,s)=A(t,s)+B(s,t)$ и $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)$ – непрерывные функции в области G, $H'_{\varphi(t)}(t,a)$ и $H'_{\varphi(t)}(b,t)$ – непрерывные функции в $[a,b]$, здесь

$$H'_{\varphi(t)}(t,s)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{H(t+\Delta,s)-H(t,s)}{\varphi(t+\Delta)-\varphi(t)};$$

2) $H(b,a)\ge 0$, $H'_{\varphi(t)}(t,a)\le 0$ и $H'_{\varphi(t)}(b,t)\ge 0$, $\forall t\in[a,b]$, $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)\le 0$, $\forall(t,s)\in G;$

3) $H'_{\varphi(t)}(t,a)<0$ для $\forall t\in(a,b)$

или $H'_{\varphi(t)}(b,t)>0$ для $\forall t\in(a,b)$

или $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)<0$ при почти $\forall(t,s)\in G.$

Уравнение (1) запишется в виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)d\varphi(s)+\int_t^b B(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t). \qquad (3)$$

Доказана

Теорема 2.1.1. Если условия 1)-3) выполнены, то уравнение (1) в пространстве $C[a,b]$ имеет не более одного решения.

В 2.2 исследовано уравнение (1) для ядра из класса $L_2([a,b]\times[a,b])$. Вводим обозначение

$$H(t,s)=\frac{1}{2}[A(t,s)+B(s,t)].$$

Используем новую функцию

$$M(t,s)=\begin{cases}H(t,s), & a\le s\le t\le b,\\ H(s,t), & a\le t\le s\le b,\end{cases} \qquad (4)$$

где $M(t,s)=M(s,t)$.

Поскольку $H(t,s)\in L_2([a,b]\times[a,b])$, то $M(t,s)$ разлагается в ряд

$$M(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}, \qquad (5)$$

здесь $$\varphi_i(t)=\lambda_i\int_a^b M(t,s)\varphi_i(s)ds,\ (i=1,2,...),$$

$$|\lambda_1|<|\lambda_2|\le\dots,$$

$$\int_a^b\varphi_i(t)\varphi_j(s)ds=\begin{cases}1,\ i=j,\\ 0,\ i\ne j,\end{cases}\ (i,j=1,2,...).$$

Теорема 2.2.1. Если $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\dots$, $\varphi'(t)\in L[a,b]$ и $\varphi'(t)\ne 0$ при почти $\forall t\in[a,b]$, то уравнение (1) в $C[a,b]$ имеет не более одного решения.

В разделе 2.3 изучается уравнение

$$Ku\equiv\int_a^b K(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t),\ t\in[a,b], \qquad (6)$$

здесь $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a,b],\varphi'(t)\in[a,b]$,

$$K(t,s)=\begin{cases} A(t,s), & a\le s\le t\le b, \\ B(t,s), & a\le t\le s\le b. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть $A(t,s)$, $B(t,s)$ и $f(t)$ – это заданные функции, $\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dsdt<+\infty.$

Вводим обозначение

$$H(t,s)=\frac{1}{2}[A(t,s)+B(s,t)].$$

Пусть ядро $H(t,s)\in C(G),$ здесь $G=\{(t,s):\ a\le s\le t\le b\}$.

Используем новую функцию

$$M(t,s)=\begin{cases} H(t,s)\sqrt{\varphi'(t)\varphi'(s)},\ a\le s\le t\le b, \\ H(s,t)\sqrt{\varphi'(t)\varphi'(s)},\ a\le t\le s\le b. \end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, $M(t,s)=M(s,t)$.

Поскольку $H(t,s)\in C(G)$, то $M(t,s)\in L_2([a,b]\times[a,b])$.

Предполагая, что $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$. Для $c>0, \alpha\in(0,\infty)$, введем обозначение

$$M_\alpha=\left\{u(t)\in C[a,b]: \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^\alpha |u_i|^2\le c\right\},$$

здесь $u_i=\int\limits_a^b u(t)\varphi_i(t)\sqrt{\varphi'(t)}dt,\ (i=1,2,\ldots).$

Доказана

Теорема 2.3.1. Если все характеристические числа λ_i ядра $M(t,s)$ положительны и $f(t)\in K(M_\alpha)$, то для решения $u(t)$ уравнения (6) выполняется оценка

$$\|u(t)\|_{L_{2,\varphi}}\le c^{\frac{1}{2+\alpha}}\|f(t)\|_{L_{2,\varphi}}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}},\ \ 0<\alpha<\infty, \tag{9}$$

где $\|u(t)\|_{L_{2,\varphi}}=\sqrt{\int\limits_a^b |u(t)|^2 d\varphi(t)}.$

Далее, исследуется уравнение

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int\limits_a^b K(t,s)u(s,\varepsilon)d\varphi(s)=f(t),\ t\in(a,b), \tag{10}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $f(t)\in K(M_\alpha)$.

Доказана

Теорема 2.3.2. Если все характеристические числа ядра $M(t,s)$ положительны и $f(t)\in K(M_\alpha)$, то решение $u(t,\varepsilon)$ уравнения (10) при $\varepsilon\to 0$ сходится к $u(t)$ по норме $L_{2,\varphi}[a,b]$, т.е. имеет место оценка

$$\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_{2,\varphi}}\le c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+2\alpha)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\ 0<\alpha<\infty.$$

В 2.4 рассмотрено уравнение

$$u(t)=\int_a^t a(s)u(s)d\varphi(s)+\int_t^b b(s)u(s)d\varphi(s)+f(t), \tag{11}$$

здесь $a(t), b(t), f(t)$ – это заданные функции, $u(t)$ – искомая функция, $\varphi(t)$ – известная, непрерывная возрастающая функция на $[a,b]$.

Теорема 2.4.1. Если $a(t), b(t), f(t)$ – непрерывные функции в $[a,b]$, и

$$\beta=1-\int_a^b b(s)e^{\int_a^s [a(s)-b(s)]d\varphi(s)}d\varphi(s)\neq 0. \tag{12}$$

Тогда будет существовать единственное решение уравнения (11), определяемое в следующем виде:

$$u(t)=\frac{1}{\beta}\int_a^b b(s)e^{\int_a^t [a(s)-b(s)]d\varphi(s)}f(s)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\beta}\int_a^b\left[\int_s^b b(\tau)e^{\int_s^\tau [a(\tau)-b(\tau)]d\varphi(\tau)+\int_a^t [a(s)-b(s)]d\varphi(s)}d\varphi(\tau)\right][a(s)-b(s)]f(s)d\varphi(s)+f(t)+$$

$$+\int_a^t [a(s)-b(s)]e^{\int_s^t [a(s)-b(s)]d\varphi(s)}f(s)d\varphi(s). \tag{13}$$

В разделе 2.5 исследуется уравнение

$$\int_a^t a(s)u(s)d\varphi(s)+\int_t^b b(s)u(s)d\varphi(s)+\int_a^t K(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t), t\in[a,b], \tag{14}$$

здесь $a(t), b(t), f(t)$ – заданные непрерывные функции на $[a,b]$, $K(t,s)$ – известная непрерывная функция на $G=\{(t,s): a\le s\le t\le b\}$, $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$. Одновременно с уравнением (11) рассмотрим следующее уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon)+\int_a^t a(s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_t^b b(s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s)+ \tag{15}$$

$$+\int_a^t K(t,s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s)=f(t)+\varepsilon u(a),$$

здесь $u(t)$ является решением уравнения (14).

Предоложим:

1) $[a(t)-b(t)]\ge\alpha>0$ $t\in[a,b]$, $a(t), b(t)\in C[a,b]$;
2) $K'_{\varphi(t)}(t,s)\in C(G)$, $K(t,t)=0$ $\forall t\in[a,b]$;
3) $K(t,s)\in C(G), K(t,t)=0$, при $t\in[a,b]$;
4) при $t>\tau$ для $\forall(t,s), (\tau,s)\in G=\{(t,s): a\le s\le t\le b\}$ имеет место

$$\left|K(t,s)-K(\tau,s)\right| \le M_1 [\varphi(t)-\varphi(\tau)].$$

Доказаны

Теорема 2.5.1. Если условия 1)-2) выполнены, тогда уравнение (14) имеет не более одного решения $u(t) \in C[a,b]$, тогда и только тогда, когда

$$f(a)=\int_a^b b(s)u(s)d\varphi(s),\ f'_{\varphi(t)}(t) \in C[a,b],$$

здесь $u(t)$ является решением уравнения

$$u(t)=\frac{1}{a(t)-b(t)}\int_a^t K'_{\varphi(t)}(t,s)u(s)d\varphi(s)+\frac{f'_{\varphi(t)}(t)}{a(t)-b(t)},\ t \in [a,b]. \qquad (16)$$

Теорема 2.5.2. Если имеют место условия 1), 3), 4), уравнение (14) будет иметь решение

$$u(t) \in C[a,b] \text{ и } B_1=\frac{M_1 B_0}{\alpha^2 \beta_0}\cdot[\varphi(b)-\varphi(a)]e^{-\frac{M_1}{\alpha}[\varphi(b)-\varphi(a)]}<1,$$

$$\beta(\varepsilon)=1+\int_a^b e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^s [a(s)-b(s)]d\varphi(s)}\frac{b(s)}{\varepsilon}d\varphi(s) \ge \beta_0>0,\ \forall t,s \in [a,b],$$

и для всех $t,s \in [a,b]$ имеет место оценка $|u(t)-u(s)| \le L|\varphi(t)-\varphi(s)|$.

Тогда $\nu(t,\varepsilon)-$ решение уравнения (15) сходится по норме $L_\varphi[a,b]$ к $u(t)$ при $\varepsilon \to 0$, где имеет место оценка

$$\int_a^b |\nu(t,\varepsilon)-u(t)|d\varphi(t) \le \frac{1}{1-B_1}\left(\frac{B_0 L\varepsilon}{\alpha^2\beta_0}+\frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot L\right)e^{\frac{M_1}{\alpha}[\varphi(b)-\varphi(a)]}. \qquad (17)$$

В третьей главе установлены условия единственности решений систем Фредгольма-Стильтьесовых интегральных уравнений первого рода. Кроме того, регуляризирующие операторы построены по М.М. Лаврентьеву.

В разделе 3.1 исследована система

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t),\ t \in [a,b], \qquad (18)$$

где $K(t,s)$ – $n \times n$-мерная матричная функция, $u(t)$ и $f(t)$ – соответственно неизвестная и известная n-мерные вектор-функции, $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$ и $\varphi'(t) \in C[a,b]$. Пусть

$$K(t,s)=\begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t \le b, \\ B(t,s), & a \le t \le s \le b. \end{cases} \qquad (19)$$

где $\|A(t,s)\|, \|B^*(t,s)\| \in L_2(G)$. Сделаем обозначение

$$H(t,s)=\frac{1}{2}[A(t,s)+B^*(s,t)]. \qquad (20)$$

Если ввести новую матричную функцию $M(t,s)=(M_{ij}(t,s))$:

$$M(t,s)=\begin{cases} H(t,s)\sqrt{\varphi'(t)\varphi'(s)}, \; a\le s\le t\le b, \\ H^*(s,t)\sqrt{\varphi'(t)\varphi'(s)}, \; a\le t\le s\le b, \end{cases} \tag{21}$$

здесь $H(t,s)=(H_{ij}(t,s)),\ H^*(s,t)=(H_{ji}(s,t))$. Очевидно $M(t,s)=M^*(s,t)$.

Тогда матричное ядро $M(t,s)$, определенное при помощи формулы (21) и $\|M(t,s)\|\in L_2([a,b]\times[a,b])$, можно разложить

$$M(t,s)=\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu \begin{pmatrix} \varphi_1^{(\nu)}(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(\nu)}(t) \end{pmatrix} \left(\overline{\varphi}_1^{(\nu)}(s)\ldots\overline{\varphi}_n^{(\nu)}(s)\right),\ m\le\infty. \tag{22}$$

В этом случае

$$\lim_{N\to m}\ \sup_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]}\left\|M(t,s)-M^{(N)}(t,s)\right\|_M=0,$$

где $M^{(N)}(t,s)-N$-ая частичная сумма ряда (22), $\{\varphi^{(\nu)}(t)=(\varphi_i^{(\nu)}(t))\}$, $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\ldots$,

$$\int_a^b M(t,s)\varphi^{(\nu)}(s)ds=\lambda_\nu\varphi^{(\nu)}(t),\ \nu=1,2,\ldots \; .$$

Теорема 3.1.1. Если имеет место (22) и $\lambda_\nu>0\ (\nu=1,2,\ldots)$, то система (18) в $C_n[a,b]$ имеет не более одного решения.

В 3.2 рассматривается система линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода (18).

Нами доказана

Теорема 3.2.1. Если для матричного ядра $M(t,s)$, определяемого по (21) выполняется неравенство

$$\int_a^b\int_a^b\langle M(t,s)u(s),u(t)\rangle dsdt>0, \tag{23}$$

где $u(t)$ – произвольная ненулевая вектор-функция из $L_{2,\varphi}([a,b];E_n)$, то система (18) в $L_{2,\varphi}([a,b];E_n)$ имеет не более одного решения.

Далее, на множестве M_α будем рассматривать следующую систему интегральных уравнений второго рода.

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_a^b K(t,s)u(s,\varepsilon)d\varphi(s)=f(t),\ t\in(a,b),\varepsilon>0. \tag{24}$$

Доказана

Теорема 3.2.2. Если для матричного ядра $M(t,s)$, определеного по (21) выполняется неравенство (23) и $f(t)\in K(M_\alpha)$. То имеет место оценка

$$\|u(t,\varepsilon)-u(t)\|_{L_{2,\varphi}} \le c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{-\frac{\alpha(1+2\alpha)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\ 0<\alpha<\infty, \tag{25}$$

где $u(t,\varepsilon)$ является решением системы (24), $u(t)$ является решением системы (18).

В разделе 3.3 исследуется система

$$u(t)=\int_a^t A(s)u(s)d\varphi(s)+\int_t^b B(s)u(s)d\varphi(s)+f(t), \tag{26}$$

здесь $A(t),B(t)$ – $n\times n$-мерные матричные функции, $f(t)$– заданная, $u(t)$ – неизвестная n-мерные вектор-функции, $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$.

Теорема 3.3.1. Если $A(t),B(t)$ – $n\times n$-мерные непрерывные на отрезке $[a,b]$ матричные функции и $f(t)$ – непрерывная на $[a,b]$ вектор-функция, $\det(I_n-M)\neq 0,$

$$M=\int_a^b B(s)d\varphi(s)+\int_a^b B(s)\int_a^s X(s,\tau)[A(\tau)-B(\tau)]d\varphi(\tau)d\varphi(s)=$$

$$=\int_a^b B(s)X(s,a)d\varphi(s). \tag{27}$$

То будет существовать единственное решение системы (26), определенное следующим образом:

$$u(t)=(I_n-M)^{-1}C+f(t)+\int_a^t X(t,s)[A(s)-B(s)](I_n-M)^{-1}Cd\varphi(s)+$$

$$+\int_a^t X(t,s)[A(s)-B(s)]f(s)d\varphi(s)=X(t,a)((I_n-M)^{-1}C)+$$

$$+f(t)+\int_a^t X(t,s)[A(s)-B(s)]f(s)d\varphi(s), \tag{28}$$

здесь $X(t,s)$ – матричная функция Коши системы $\dfrac{dv}{d\varphi}=[A(t)-B(t)]v,$

$$C=\int_a^b B(s)f(s)d\varphi(s)+\int_a^b B(s)\int_a^s X(s,\tau)[A(\tau)-B(\tau)]f(\tau)d\varphi(\tau)d\varphi(s). \tag{29}$$

В 3.4 исследована система

$$\int_a^t A(s)u(s)d\varphi(s)+\int_t^b B(s)u(s)d\varphi(s)+\int_a^t K(t,s)u(s)d\varphi(s)=f(t),t\in[a,b], \tag{30}$$

здесь $A(t),B(t)$ – $n\times n$-мерные матричные функции на $[a,b]$, $K(t,s)$ – $n\times n$-мерная заданная непрерывная матричная функция на $G=\{(t,s):a\le s\le t\le b\},$ $f(t)$ и $u(t)$ – заданная и неизвестная n-мерные вектор-функции, $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция.

Вместе с (30) будем рассматривать следующую систему

$$\varepsilon v(t,\varepsilon)+\int_a^t A(s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_t^b B(s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_a^t K(t,s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s)= \\ = f(t)+\varepsilon u(a), \tag{31}$$

здесь $u(t)$ является решением (30), $0<\varepsilon-$малый параметр.

Предположим:

1) $\|A(t)\|,\|B(t)\|\in C[a,b]$, $\det[A(t)-B(t)]\neq 0, \forall t\in[a,b]$.
Пусть $(A(t)-B(t))=I_n, \forall t\in[a,b]$. Если $\det[A(t)-B(t)]\neq 0,\ t\in[a,b]$, то в (30) можно использовать замену $u(t)=[A(t)-B(t)]^{-1}u_1(t)$;

2) $K(t,t)=0$ при $t\in[a,b]$, $\|K'_{\varphi(t)}(t,s)\|\in C(G)$,
здесь $G=\{(t,s):t_0\le s\le t\le T\}$.

3) $\det(I_n-M(\varepsilon))\neq 0$ при $\varepsilon>0$, здесь

$$M(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b B(s)X(s,a,\varepsilon)d\varphi(s), X(t,s,\varepsilon)=I_n e^{-\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{\varepsilon}};$$

4) при $t>\tau$ и $(t,s),(\tau,s)\in G=\{(t,\tau):a\le s\le t\le b\}$ имеет место

$$\|K(t,s)-K(\tau,s)\|\le M_1[\varphi(t)-\varphi(\tau)],$$

здесь M_1–положительное постоянное число.

Доказаны

Теорема 3.4.1. Если будут выполнены условия 1) и 2), то (30) будет иметь не более одного решения $u(t)\in C_n[a,b]$, тогда и только тогда, когда

$$f(a)=\int_a^b B(s)u(s)d\varphi(s),\quad f'_{\varphi(t)}(t)\in C_n[a,b],$$

здесь $u(t)$ есть решение системы:

$$u(t)=(A(t)-B(t))^{-1}\int_a^t K'_{\varphi(t)}(t,s)u(s)d\varphi(s)+(A(t)-B(t))^{-1}f'_{\varphi(t)}(t),\ t\in[a,b]. \tag{32}$$

Теорема 3.4.2. Если имеют место условия 1), 3), 4) и система (30) будет иметь решение $u(t)\in C_n[a,b]$ и

$$B_1=M_0M_1B_0[\varphi(b)-\varphi(a)]e^{M_1[\varphi(b)-\varphi(a)]}<1.$$

$$M_0=\sup_{\varepsilon>0}\|(I_n-M(\varepsilon))^{-1}\|,\quad B_0=\sup_{t\in[a,b]}\|B(t)\|.$$

То $v(t,\varepsilon)-$ решение уравнения (31) при $\varepsilon\to 0$ будет сходиться к $u(t)$ по норме $L_{\varphi,n}[a,b]$. Имеет место оценка

$$\int_a^b\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|d\varphi(t)\le\frac{1}{1-B_1}(M_0B_0+1)L[\varphi(b)-\varphi(a)]\varepsilon e^{M_1[\varphi(b)-\varphi(a)]}. \tag{33}$$

Вразделе 3.5 рассматривается система нелинейных интегральных уравнений

$$\int_a^t A(s)u(s)d\varphi(s) + \int_t^b B(s)u(s)d\varphi(s) + \int_a^t K(t,s,u(s))d\varphi(s) = f(t), \quad t\in[a,b] \qquad (34)$$

здесь $A(t), B(t) - n\times n -$мерные заданные матричные функции, $K(t,s,u(s)) -$заданная непрерывная $n-$мерная вектор-функция, $f(t) -$заданная вектор-функция и $u(t) -$ неизвестная вектор-функция.

Вместе с (34) будем рассматривать систему

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_a^t A(s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s) + \int_a^t B(s)v(s,\varepsilon)d\varphi(s) + \int_a^t K(t,s,v(s,\varepsilon))d\varphi(s) = \\ = f(t) + \varepsilon u(a), \qquad (35)$$

здесь $u(t) -$ решение системы (34), $0<\varepsilon -$малый параметр.

Предположим:

1) $\|A(t)\|, \|B(t)\| \in C[a,b],\ A(t)-B(t) = I_n$ для $\forall t\in[a,b]$, поскольку, если

$\det[A(t)-B(t)]\neq 0,\ t\in[a,b]$, то в (34) можно заменит

$$u(t) = [A(t)-B(t)]^{-1}u_1(t);$$

2) $K'_{\varphi(t)}(t,s,u)\in C(G\times R),\ G = \{(t,s): a\le t\le s\le b\}$;

3) для $\forall (t,s,u_1),(\tau,s,u_1),(t,s,u_2),(\tau,s,u_2)\in G\times R$ имеет место:

$\|K(t,s,u_1) - K(\tau,s,u_1) - K(t,s,u_2) + K(\tau,s,u_2)\| \le M_1|\varphi(t)-\varphi(\tau)|\cdot\|u_1-u_2\|,$

здесь $0<M_1 -$известное постоянное число.

4) $\det(I_n - M(\varepsilon))\neq 0$ при $\varepsilon>0$, здесь

$$M(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b B(s)X(s,a,\varepsilon)d\varphi(s),\quad X(t,s,\varepsilon) = I_n e^{-\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{\varepsilon}};$$

5) $K(t,t,u)=0$ для $\forall (t,u)\in[a,b]\times R^n$ и $K(t,s,0)=0$ при $(t,s)\in G.$

Тогда $\|X(t,s,\varepsilon)\| = e^{-\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{\varepsilon}}$, $B_0 = \sup\limits_{t\in[a,b]}\|B(s)\|.$

Доказаны

Теорема 3.5.1. Если имеют место условия 1) и 2). То (34) будет иметь не более одного решения $u(t)\in C_n[a,b]$, тогда и только тогда, когда

$$f(a) = \int_a^b B(s)u(s)d\varphi(s),\quad \|f(t)\|\in C^1_\varphi[a,b],$$

здесь $u(t)$ является единственным решением системы:

$$u(t) = -\int_a^t K'_{\varphi(t)}(t,s,u(s))d\varphi(s) + f'_{\varphi(t)}(t)\ ,\ t \in [a,b]. \qquad (36)$$

Теорема 3.5.2. Если будут иметь место условия 1), 3), 4), 5), то система (34) будет иметь решение $u(t) \in C_n[a,b]$, которое будет удовлетворять условию $\|u(t) - u(s)\| \le L[\varphi(t) - \varphi(s)]$, здесь $L-$неотрицательное постоянное число,

$$B_0 = \sup_{t \in [a,b]} \|B(t)\|,$$

$$B_1 = B_0 M_0 M_1[\varphi(b) - \varphi(a)] e^{M_1[\varphi(b)-\varphi(a)]} < 1,$$

$$M_0 = \sup_{\varepsilon > 0} \left\|(I_n - M(\varepsilon))^{-1}\right\|,$$

тогда $v(t,\varepsilon)-$ решение (35) при $\varepsilon \to 0$ будет сходиться по норме $L_{\varphi,n}[a,b]$ к $u(t)$. Имеет место оценка

$$\int_a^b \|v(t,\varepsilon) - u(t)\| d\varphi(t) \le \frac{\varepsilon L[1 + B_0 M_0][\varphi(b) - \varphi(a)]}{1 - B_1} e^{M_1[\varphi(b)-\varphi(a)]}. \qquad (37)$$

ВЫВОДЫ

Научные результаты, выносимые на защиту и их новизна

1. Построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решений одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.
2. Установлены достаточные условия единственности для решений линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.
3. Доказана теорема единственности для решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.
4. Установлены достаточные условия единственности для решений систем нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.
5. Построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву для решений систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма- Стильтьеса первого рода.

От чистого сердца, хотелось бы выразить свою признательность научному руководителю, профессору А. Асанову за все.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

1. Тойгонбаева, А.К. О единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А. Асанов, А.К. Тойгонбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 40. – Бишкек: Илим, 2009.– С. 103-107.
2. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А.К. Тойгонбаева // Вестник ОшГУ. Вып. №2. –Ош, 2012.– С. 165-169.
3. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А. Асанов, Б. Калимбетов, А.К. Тойгонбаева // Вестник Карагандинского университета им. Е.А. Букетова, серия «Математика». – №4(68). – Караганды, Казахстан. 2012. – С. 3-7.
4. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А. Асанов, А.К. Тойгон-баева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып.44. – Бишкек: Илим, 2012. – С. 59-67.
5. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе систем интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода с разрывным ядром [Текст] / А. Асанов, А.К. Тойгонбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 45. – Бишкек: Илим. 2012. – С. 50-55.
6. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А.К. Тойгонбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 44. – Бишкек: Илим, 2012.– С. 68-72.
7. Тойгонбаева, А.К. Регуляризация и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А.К. Тойгонбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 45. – Бишкек: Илим, 2012. – С. 56-63.
8. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе систем линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А. Асанов, А.К. Тойгонбаева // Матер. 2-й межд. конф. «Акт. проблемы теории управ., топол. и опер. урав.», посв. 20-летию образ. КРСУ им. пер. през. Б.Н. Ельцина и 100-летию проф. Я.В. Быкова. Том 1. – Бишкек, 2013. – С. 97-102.
9. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса второго рода с разрывным ядром [Текст] / А.К. Тойгон-баева // Матер. 2-й межд. конф. «Акт. проблемы теории управ., топол. и опер. урав.», посв. 20-летию образ. КРСУ им. пер. през. Б.Н. Ельцина и 100-летию проф. Я.В.Быкова. Том 2. – Бишкек, 2013. – С. 134-139.
10. Тойгонбаева, А.К. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода [Текст] / А. Асанов, А.К. Тойгонбаева // Тезисы докладов международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения». Астана: Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева. – 2012. – С. 110.

РЕЗЮМЕ

диссертации Тойгонбаевой Айзат Куралбековны на тему «Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегральное уравнение, система, единственность, регуляризация, решение.

Объект исследования: линейные интегральные уравнения Фредгольма-Стильтьеса первого рода, системы линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.

Цель работы: исследование вопросов единственности и регуляризации решений интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода, а также их систем.

Методика исследования. Используются метод регуляризации М.М. Лаврентьева и методы функционального анализа.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- установлены достаточные условия единственности решений для исследуемых интегральных уравнений;

- построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву для решения линейного интегрального уравнения Фредгольма-Стильтьеса первого рода;

- построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву для решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода;

- построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву для решений систем нелинейных интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода.

Тойгонбаева Айзат Куралбековнанын «Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин чечимдеринин регуляри-зациясы жана жалгыздыгы» – деген темадагы 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты илимий даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: интегралдык теңдеме, система, жалгыздык, регуляризация, чечим.

Изилдөөнүн объектиси: Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелери жана Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин системалары.

Изилдөөнүн максаты: Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин жана алардын системаларынын чечимдеринин жалгыздыгын жана регуляризациясын изилдөө.

Изилдөөнүн методдору. М.М. Лаврентьевдин регуляризация методу жана функционалдык анализдин методдору колдонулду.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары:

- изилденүүчү интегралдык теңдемелердин чечимдеринин жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды;

- Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдеменин чечими үчүн М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоо оператору тургузулду;

- Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин системаларынын чечимдери үчүн М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоо оператору тургузулду;

- Фредгольм-Стильтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин системаларынын чечимдери үчүн М.М. Лаврентьев боюнча регуляризциялоо операторлору тургузулду.

SUMMARY

dissertation «Regularization and uniqueness of solutions of integral equations of Fredholm-Stieltjes of the first kind» of Toigonbaeva Aizat Kuralbekovna is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: integral equation, system, uniqueness, regularization, solution.

Object of research: linear integral equations of Fredholm-Stieltjes of the first kind, systems of linear and non-linear integral equations of Fredholm-Stieltjes of the first kind.

Research aim: to study the issues of regularization and uniqueness of solutions of integral equations of Fredholm-Stieltjes of the first kind and their systems.

Research methods: the method of regularization by M.M. Lavrentiev and methods of function analyses was used.

Scientific novelty:

- it is found sufficient conditions for the uniqueness of solutions for researched integral equations;
- it is constructed regularizing operator by M.M. Lavrentiev for solutions of linear integral equations of Fredholm-Stieltjes of the first kind;
- it is constructed regularizing operator by M.M. Lavrentiev for solutions of systems of linear integral equations of Fredholm-Stieltjes of the first kind;
- it is constructed regularizing operator by M.M. Lavrentiev for solutions of systems of non-linear integral equations of Fredholm-Stieltjes of the first kind.

Подписано в печать: 15.04.2015 г.

Обьем : 1,25 б.т. Заказ № 17
Формат 60х84 1/16. Тираж 120 шт.

Редакционно-издательский отдел «Билим» ОшГУ