МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К 01.15.504

На правах рукописи
УДК: 517.97; (575.2) (04); 62-50

КАБАЕВА ЗАРИНА САРЫГУЛОВНА

**НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ
ПРОЦЕССАМИ**

01.01.02– «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат диссертации на соискание
ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек -2015

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Межфакультетская информатика» Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Керимбеков Акылбек

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
член-корр. НАН КР, профессор
Алымкулов Келдибай,

доктор физико-математических наук,
профессор Алыбаев Курманбек

Ведущая организация: Кыргызский Государственный
Университет строительства, транспорта и
архитектуры
им. Н. Исанова

Защита диссертации состоится 25-марта 2015 г. в 15.30 часов на заседании диссертационного совета К 01.15.504 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете и институте природных ресурсов южного отделения Национальной академии наук Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского государственного университета.

Автореферат разослан «___» _____ 2015

Ученый секретарь
диссертационного совета
к ф.-м.н., доцент

Папиева Т.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Тепловые процессы играют важную роль в различных отраслях промышленности. Математически в линейном приближении эти процессы описываются параболическими уравнениями. Основы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, в частности, системами описываемыми параболическими уравнениями, были заложены в 60-е годы прошлого столетия в работах А.Г. Бутковского, А.И. Егорова, Т.К. Сиразетдинова и др. В настоящее время теория получила широкое развитие в исследованиях их учеников и последователей.

Многие задачи прикладного характера по своей сущности являются нелинейными. Нелинейные задачи оптимизации относятся к мало изученной области теории оптимального управления. В диссертации исследованы задачи нелинейной оптимизации, где внешний источник нелинейно зависит от нескольких управляющих параметров.

Исследование разрешимости нелинейных задач оптимизации и разработка конструктивных методов их решения является одной из актуальных задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках научного проекта «Математическое обеспечение процессов управления энерго-массопереносами, происходящими в линиях передач, и продукционными почво-растительными системами» МОиН КР.

Цели и задачи исследования. В диссертации исследована задача нелинейной оптимизации тепловых процессов в случае, когда внешний источник нелинейно зависит от нескольких управляющих параметров. Критериями качества управляемого процесса служит квадратичный (относительно управления) интегральный функционал.

При этом поставлена цель: установить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации в случае, когда действия внешних источников описываются линейными и нелинейными сепарабельными функциями, а также нелинейными функциями общего вида.

Научная новизна полученных результатов.

– исследование проведено с использованием понятия «слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса» в случае векторного управления;

– относительно векторного оптимального управления, при минимизации квадратичного функционала, установлено, что его следует находить как решение системы нелинейных интегральных уравнений, обладающее специфическим свойством, в частности, *свойством равных отношений* и удовлетворяющим дополнительным условиям в виде неравенств;

– установлено, что оптимальное распределенное управление, в случае минимизации функционала, содержащего модуль управления определяется как знако-определенное решение нелинейного интегрального уравнения специфического вида с дополнительным условием в виде неравенств;

– разработан алгоритм построения приближенного решения сколь угодно точности задачи нелинейной оптимизации с векторным управлением, в случае минимизации квадратичного функционала.

Результаты получены впервые, являются новыми и характеризуются как дальнейшее развитие методов теории оптимального управления.

Практическая значимость полученных результатов. Разработанный метод решения задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при наличии векторного

управления является конструктивным и может быть использован при решении прикладных задач, связанных с процессом теплопередачи (сварочные работы и процессы, происходящие в доменных печах, выпуск шиферно-цементных изделий и т.д.).

С другой стороны, полученные результаты носят и теоретический характер. Их можно использовать для развития качественных методов исследования и при разработке конструктивных методов решения задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

– Построено слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса в случае, когда функция внешнего источника линейными и нелинейными сепарабельными функциями относительно компонентов векторного управления, а также нелинейной функцией общего вида;

– найдены достаточные условия разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов в случае, когда минимизируется интегральный квадратичный функционал и функция внешнего источника описывается линейными и нелинейными сепарабельными функциями относительно компонентов векторного управления, а также нелинейной функцией общего вида;

– уравнения системы нелинейных интегральных уравнений оптимального управления обладает свойством равных отношений, что позволяет упростить процедуру построения решения задачи оптимизации;

– разработан алгоритм построения приближенного решения сколь угодно точности задачи нелинейной оптимизации с векторным управлением и доказаны сходимость приближений по оптимальному управлению, оптимальному процессу и функционалу;

– рассмотрен численный пример, подтверждающий теоретические выводы.

Личный вклад соискателя. По результатам исследований опубликованы 12 статей и 2 тезиса. В работах [1-14], опубликованных в соавторстве, постановка задачи принадлежит научному руководителю, а основные результаты: как построение слабо обобщенного решения, вывод условия оптимальности, достаточные условия существования решения нелинейного интегрального уравнения, алгоритм построения точного и приближенного решений нелинейной задачи оптимизации и сходимость приближенных решений получены соискателем.

Апробации результатов диссертации. Результаты исследований докладывались на международных конференциях, симпозиумах и межвузовских, вузовских конференциях:

- Международная научно-практическая конференция КНУ им. Ж.Баласагына. Бишкек, 2004.

- Международная научно-практическая конференция КНУ им. Ж.Баласагына. Бишкек, 2005.

- Республиканская юбилейная научная конференция посвященная 50-летию КНТУ им.Раззакова и 75-летию профессора Усубакунова Р.У. «Математика, физика, механика, проблемы инженерного образования и терминологии», – Бишкек, сентябрь, КНТУ им. И.Раззакова, 2005.

- Международная юбилейная научная конференция посвященная 100-летию первого ректора ФПИ-КГТУ профессора Сухомлинова «Математика, физика, механика сплошной среды, автоматизация и управление, горное дело и геология», – Бишкек, сентябрь, КГТУ им. И.Раззакова, 2006.

- II Turk dunyasi matematik sempozyumu. Sakarya Universitesi. Sakarya, Turkia, 4-7 Temmuz, 2007.

- Третья Международная азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», – Бишкек, Пансионат «Университет» (Иссык-Куль), 1-12-июль, 2007.

- Международная научно-практическая конференция КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек, 2009.

- Proceedings VI International Scientific conference. Part I(Sections 1,2,3,4).Aktobe's K.Zhubanov State University 14-17 October 2012. Aktobe, 2012.s.100-104.

- Международная юбилейная научная конференция посвященная 80-летию члена-корреспондента РАН, академика НАН Кыргызской Республики Мурзабека Иманалиевича Иманалиева «Исследования по интегро – дифференциальным уравнениям», – Бишкек, сентябрь, 2012.

- Второй международной юбилейной научной конференции посвященная 100-летию Быкова Я.В., 20-летию КРСУ имени первого президента РФ Н.Б. Ельцина «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», – 5-7сентябрь, 2013год, санаторий «Иссык-Куль Аврора», Кыргызстан.

А также регулярно были обсуждены на научном семинаре (научный руководитель проф. Керимбеков А.) кафедры «прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 научных статьях, в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики -10 и в реферируемых зарубежных журналах -3 и материалах конференций -3, в единоличном авторстве -4. По материалам первой главы опубликованы 3 статьи и 1 тезис, а по материалам второй главы опубликованы 6 статьей.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, десяти разделов, заключение, списка использованных источников, содержащее 91 наименований, 4-х таблиц, 3 рисунков и приложения. Общий объем работы содержит 136 страниц машинописного текста.

Далее приводим некоторые примеры задач оптимизации с векторными управлениями и сделаем краткий обзор по исследованиям в этом направлении.

Краткое содержание работы

В первой главе приведены аннотации известных работ примыкающих к теме диссертации.

Во второй главе исследованы задачи оптимального управления процессом теплопередачи в случае, когда внешнее воздействие описывается сепарабельной функцией вида

$$f(t, x, u_1, \dots, u_m) = \sum_{k=1}^m g_k(x) f_k[t, u_k(t)], \quad (*)$$

где $g_1(x), \dots, g_m(x)$, $f_1[t, u_1(t)], \dots, f_m[t, u_m(t)]$ – заданные функции, $u_1(t), \dots, u_m(t)$ – функции управления, и минимизируется квадратичный функционал. В отличие от известных работ здесь рассматривается задачи нелинейной оптимизации с векторным управлением. Разработан алгоритм построения оптимального управления, оптимального процесса и дана формула вычисления минимального значения функционала. Построены их приближения и доказаны их сходимости к точному решению по оптимальному управлению, по оптимальному процессу и по минимальному значению функционала.

В пункте 2.1. рассмотрена задача перевода управляемого процесса из начального состояния $\psi(x)$ в желаемое состояние $\xi(x)$ за конечное заданное время T . При этом

качество управления процессом оценивается значением интегрального квадратичного функционала вида

$$J[u] = \int_0^1 V(T, x) - \xi(x)^2 dx + \beta \int_0^T u^*(t)u(t)dt, \beta > 0,$$

(1)

т.е. требуется минимизировать функционал (1) на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + g(x) \sum_{i=1}^m a_i(t)u_i(t),$$

(2)

$$V(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

(3)

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha > 0,$$

(4)

где $V(t, x)$ – функция, определенная в области $Q = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ описывает состояния управляемого процесса, заданная функция $\psi(x) \in H(0, 1)$ описывает начальное состояние управляемого процесса, $g(x) \in H(0, 1)$ – заданная функции, $u(t) = u_1(t), \dots, u_m(t) \in H^m(0, T)$, – вектор–функция управления, $a(t) = a_1(t), \dots, a_m(t) \in H^m(0, T)$ – известная вектор–функция, каждая компонента которой, определена на отрезке $[0, T]$; заданная функция $\xi(x)$ определена на интервале $(0, 1)$ и описывает некоторое состояние, в которое должен приближаться (или совпадать) управляемый процесс в конечный фиксированный момент времени T ; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

Эта линейно-квадратичная задача является обобщением скалярного случая, и здесь приводится для полноты и для сравнения результатов с решениями нелинейной задачи оптимизации.

В пункте 2.2 исследованы задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при векторном управлении в случае, когда нелинейная функция внешнего источника является сепарабельной относительно функции управления, причем каждая составляющая сепарабельной функции нелинейно зависит только от одной компоненты векторного управления. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации и разработан алгоритм построения её решения.

Рассмотрена задача минимизации функционала

$$J[u, t] = \int_0^T V(T, x) - \xi(x)^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2 t dt, \quad \beta > 0,$$

(5)

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + \sum_{k=1}^m g_k(x) f_k[t, u_k(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

(6)

$$V(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

(7)

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha > 0,$$

(8)

где $\xi \ x \in H \ 0,1$, $g_k \ x \in H \ 0,1$, $k=1,\dots,m$, $\psi \ x \in H \ 0,1$ – заданные функции; $f_k [t, u_k \ t] \in H \ 0,T$, $k=1,\dots,m$ – известные монотонные и нелинейные функции относительно управляющих параметров $u_k \ t \in H \ 0,T$, $k=1,\dots,m$; H – гильбертово пространство; T – фиксировано.

Слабо обобщенное решение краевой задачи находится по формуле

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \sum_{k=1}^m g_{kn} f_k [\tau, u_k \ \tau] d\tau \right) z_n(x).$$

(9)

Отметим, что в силу монотонности каждой функции $f_k [t, u_k \ t]$, $k=1,\dots,m$, каждое векторное управление $u(t) = u_1(t), \dots, u_m(t)$ единственным образом определяет решение краевой задачи $V(t, x)$, т.е. между элементами пространства управлений $H^m(0, T) = u(t) | u(t) = u_1(t), \dots, u_m(t)$, $u_k(t) \in H(0, T)$ и пространства состояний управляемого процесса $W(Q) = V(t, x) | V(t, x) \in H(Q)$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. В силу монотонности функции $f_k [t, u_k \ t]$, $k=1,\dots,m$ имеют места соотношения

$$\frac{\partial f_k [t, u_k \ t]}{\partial u_k} \neq 0, \quad k=1,\dots,m, \quad \forall t \in 0, T .$$

(10)

Оптимальное векторное управление находим из условий оптимальности

$$\int_0^1 g_k \ x \ \omega \ t, x \ dx \frac{\partial f_k [t, u_k \ t]}{\partial u_k} - 2\beta u_k \ t = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \Pi_{u_1 u_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Pi_{u_m u_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_0^1 g_k \ x \ \omega \ t, x \ dx \frac{\partial^2 f_1 [t, u_1 \ t]}{\partial^2 u_1} - 2\beta & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \int_0^1 g_k \ x \ \omega \ t, x \ dx \frac{\partial^2 f_m [t, u_m \ t]}{\partial^2 u_m} - 2\beta \end{vmatrix},$$

где $\omega(t, x)$ является обобщенным решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_t + \omega_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\omega \ T, x + 2[V \ T, x - \xi \ x] = 0, \quad 0 < x < 1,$$

(11)

$$\omega_x(t, 1) = 0, \quad \omega_x \ t, 1 + \alpha \omega \ t, 1 = 0, \quad \alpha > 0, \quad 0 < t \leq T$$

и имеет вид

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2 (T-\tau)} \sum_{k=1}^m g_{kn} f_k [\tau, u_k \ \tau] d\tau \right] e^{-\lambda_n^2 (T-t)} z_n(x).$$

(12)

Условие оптимальности перепишем в виде

$$\int_0^1 g_k(x) \omega(t, x) dx \frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} - 2\beta u_k(t) = 0 \quad (13)$$

$$(-1)2\beta \prod_{k=1}^m \frac{\partial f_k(t, u_k)}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(u_k(t) \left[\frac{\partial f_k(t, u_k)}{\partial u_k} \right]^{-1} \right) > 0, \quad k=1, \dots, m. \quad (14)$$

Оптимальное векторное управление находим согласно (13). Вместо $\omega(t, x)$ подставляя выражение (12) получим систему нелинейных интегральных уравнений вида

$$\beta u_k(t) \left(\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{kn}(t) \int_0^T \sum_{i=1}^m e^{-\lambda_n^2(T-t)} g_{in} f_i[\tau, u_i(\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_{kn}(t) h_n, \quad k=1, \dots, m \quad (15)$$

где

$$h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n, \quad G_{kn}(t) = e^{-\lambda_n^2(T-t)} g_{kn}.$$

Система нелинейных интегральных уравнений (15) с дополнительным условием (14) исследована согласно методике разработанной проф. Керимбековым А. и построено оптимальное управление в виде

$$u_k^0(t) = \varphi_k[t, p_k^0(t), \beta], \quad k=1, \dots, m$$

или в векторном виде

$$u^0(t) = \varphi[t, p^0(t), \beta]. \quad (16)$$

Оптимальный процесс $V^0(t, x)$ найдено по формуле

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \sum_{k=1}^m g_{kn} f_k[\tau, p_k^0(\tau), \beta] d\tau \right] z_n(x), \quad (17)$$

а соответствующее минимальное значение функционала (5) вычисляется по формуле

$$J[u^0] = \int_0^T [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m \varphi_k^2[t, p_k^0(t), \beta] dt. \quad (18)$$

Далее построены приближенные решения задачи нелинейной оптимизации и доказаны их сходимость:

$$\|p^0(t) - p^s(t)\|_{H^m} \leq \frac{\gamma^s}{1-\gamma} \frac{1}{f_0 \varphi_0} \frac{1}{\beta} \|f(t, \varphi[t, h(t), \beta])\|_{H^m}. \quad (19)$$

$$\|u^0(t) - u^s(t)\|_{H^m} \leq \frac{\gamma^s}{1-\gamma} \frac{1}{f_0} \|f(t, \varphi[t, h(t), \beta])\|_{H^m} \quad (20)$$

$$\|V^0(t, x) - V_s^r(t, x)\|_{H_Q} \leq \|V^0(t, x) - V_s^0(t, x)\|_{H_Q} + \|V_s^0(t, x) - V_s^r(t, x)\|_{H_Q} \xrightarrow{s, r \rightarrow \infty} 0$$

где $V_s^0 t, x - s$ - е «промежуточное» приближение, а $V_s^r t, x - s, r$ - приближение используемое на практике.

$$\left| J[u^0] - J_s^r[u^s] \right| \leq \left| J[u^0] - J_s[u^s] \right| + \left| J_s[u^s] - J_s^r[u^s] \right| \xrightarrow{s, r \rightarrow \infty} 0,$$

где $J_s[u^s]$ соответственно s - е «промежуточное» приближение, а $J_s^r[u^s]$ - s, r - е приближение используемое на практике.

В пункте 3.1.1. рассмотрена задача нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать интегральный квадратичный функционал

$$J[u] = \int_0^1 [V T, x - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0,$$

(21)

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + g t, x f[t, u_1 t, u_2 t, \dots, u_m t], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

(22)

$$V(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

(23)

$$V_x t, 0 = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha > 0,$$

(24)

где $u(t) = u_1 t, u_2 t, \dots, u_m t \in H^m(0, T) = H(0, T) \times H(0, T) \times \dots \times H(0, T)$ - вектор функция управления общего вида; $f[t, u_1(t), u_2 t, \dots, u_m t] \in H(0, T)$ - заданная функция внешнего воздействия, она нелинейно зависит от компонентов вектор функции управления $u t$ и обладает свойством монотонности по каждой из функциональной переменной $u_1 t, u_2 t, \dots, u_m t$, т.е. имеют места условия

$$\frac{\partial f[t, u_1(t), \dots, u_m(t)]}{\partial u_k(t)} \neq 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad \forall t \in [0, T],$$

(25)

$\xi(x) \in H(0, 1)$ - заданная функция; $\psi(x) \in H(0, 1)$ - известная функция начального состояния управляемого процесса; H - гильбертово пространство; T - фиксировано.

Построено слабо обобщенное решение

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n \tau f[\tau, u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)] d\tau \right) z_n(x),$$

(26)

где функции $z_n x$ и числа λ_n имеют прежние характеристики. Непосредственным вычислением показано, что $V t, x \in H(Q)$.

Условия оптимальности имеют вид

$$\int_0^1 g t, x \omega t, x dx \frac{\partial f[t, u_1 t, \dots, u_m t]}{\partial u_k} - 2\beta u_k t = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

(27)

$$\begin{aligned}
\Gamma \Pi \cdot, u_1 t, \dots, u_m t &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial u_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial u_2} \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_m \partial u_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_m \partial u_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_m \partial u_m} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_1} - \frac{2\beta}{a t} \right) & a t \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} & a t \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_m} \\ a t \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1} & a t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_2} - \frac{2\beta}{a t} \right) & a t \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_m} \\ a t \frac{\partial^2 f}{\partial u_m \partial u_1} & a t \frac{\partial^2 f}{\partial u_m \partial u_2} & a t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_m \partial u_m} - \frac{2\beta}{a t} \right) \end{pmatrix} > 0,
\end{aligned}
\tag{28}$$

где $a t = \int_0^1 g(t, x) \omega(t, x) dx$, а $\omega(t, x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\begin{aligned}
\omega_t + \omega_{xx} &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\
\omega(T, x) + 2[V(T, x) - \xi(x)] &= 0, \quad 0 < x < 1,
\end{aligned}
\tag{29}$$

$$\omega_x(t, 1) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha \omega(t, 1) = 0, \quad \alpha > 0, \quad 0 < t \leq T,$$

и имеет вид

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2 (T-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)] d\tau - \xi_n \right] e^{-\lambda_n^2 (T-t)} z_n(x),$$

(30)

должна удовлетворять условию отрицательно – определенности. Проверка этого условия при наличии функции $\omega(t, x)$ является довольно сложной, порою даже неразрешимой задачей. Однако, из соотношений (27)- (28) исключая функцию $\omega(t, x)$, соотношение (28) согласно критериям Сильвестра можно преобразовать к виду

$$-2\beta^n \prod_{k=1}^m f_{u_k} \begin{vmatrix} \left(\frac{u_1}{f_{u_1}} \right)_{u_1} & \dots & \left(\frac{u_1}{f_{u_1}} \right)_{u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{u_m}{f_{u_m}} \right)_{u_1} & \dots & \left(\frac{u_m}{f_{u_m}} \right)_{u_m} \end{vmatrix} > 0,$$

(31)

т.е. при выполнении условий (31) функция $\Pi \cdot, u_1 t, \dots, u_m t$ достигает своего максимума при наборе управлений $u_1 t, \dots, u_m t$ удовлетворяющих системе равенств (27).

Оптимальное векторное управление $u(t) = u_1 t, u_2 t, \dots, u_m t$ удовлетворяет системе равенств (27). Вместо функции $\omega(x)$ подставляя ее значение (30),

относительно управления $u(t) = u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ имеем следующую систему равенств

$$\beta u_k(t) = \frac{\partial f[t, u_1(t), \dots, u_m(t)]}{\partial u_k} \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t) \left[h_n - \int_0^T G_n(T, \tau) f[\tau, u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)] d\tau \right], \quad (32)$$

где

$$G_n(T, t) = g_n(t) e^{-\lambda_n^2(T-t)}, \quad h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n, \quad k=1, \dots, m.$$

Система равенств (32) обладает специфическим свойством, в частности оно удовлетворяет *системе равных отношений*, т.е.

$$\mathcal{G}(t) = \frac{\beta u_1(t)}{\frac{\partial f}{\partial u_1}} = \frac{\beta u_2(t)}{\frac{\partial f}{\partial u_2}} = \dots = \frac{\beta u_m(t)}{\frac{\partial f}{\partial u_m}}, \quad (33)$$

где $\mathcal{G}(t)$ - некоторая функция.

Заметим, что в силу монотонности функции $f(t, u_1, \dots, u_m)$ по каждой функциональной переменной $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ и согласно условию оптимальности (31) из систем равенств (33) каждая из функций $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ однозначно выражается через функцию $\mathcal{G}(t)$, т.е. имеет место следующая система равенств

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \varphi_1[t, \mathcal{G}(t), \beta], \\ u_2(t) &= \varphi_2[t, \mathcal{G}(t), \beta], \\ &\dots \\ u_m(t) &= \varphi_m[t, \mathcal{G}(t), \beta]. \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда на основе соотношений (33) и (34) из (32) относительно функции $\mathcal{G}(t)$ имеем следующее нелинейное интегральное уравнение

$$\mathcal{G}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t) \int_0^T G_n(T, \tau) f[\tau, \varphi_1[\tau, \mathcal{G}(\tau), \beta], \dots, \varphi_m[\tau, \mathcal{G}(\tau), \beta]] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t) h_n.$$

Это уравнение перепишем в операторной форме

$$\mathcal{G}(t) = G[\mathcal{G}(t)], \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} G[\mathcal{G}(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t) \left[h_n - \int_0^T G_n(T, \tau) f[\tau, \varphi_1[\tau, \mathcal{G}(\tau), \beta], \dots, \varphi_m[\tau, \mathcal{G}(\tau), \beta]] d\tau \right] = \\ &= h(t) + G_0[\mathcal{G}(t)]. \end{aligned}$$

Лемма 3.1.1. Функция

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T, t) h_n,$$

является элементом пространства $H[0, T]$.

Лемма 3.1.2. Оператор $G_0[\mathcal{G}]$, где

$$G_0[\mathcal{G} t] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n T, t \int_0^T G_n T, \tau f[\tau, \varphi_1[\tau, \mathcal{G} \tau, \beta], \dots, \varphi_m[\tau, \mathcal{G} \tau, \beta]] d\tau$$

переводит пространство $H(0, T)$ в себя.

Лемма 3.1.3. Оператор $G \mathcal{G}$ переводит пространство $H(0, T)$ в себя.

Лемма 3.1.4. Пусть функции $f[t, u_1(t), \dots, u_m(t)]$ и $\varphi_1[t, \mathcal{G} t, \beta], \dots, \varphi_m[t, \mathcal{G} t, \beta]$ удовлетворяют следующим условиям Липшица. Тогда имеет место неравенство

$$\|f[t, u_1(t), \dots, u_m(t)] - f[t, \bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_m(t)]\|_H \leq m f_0 \varphi_0 \beta \|\mathcal{G} t - \bar{\mathcal{G}} t\|_H, \quad (36)$$

где $f_0 = \max f_1, \dots, f_m$, $\varphi_0 \beta = \max \varphi_{01} \beta, \dots, \varphi_{0m} \beta$, и при выполнении условия

$$\gamma \beta = m f_0 \varphi_0 \beta \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \|g[t, x]\|_H^2 < 1 \quad (37)$$

оператор $G_0 \mathcal{G}$ является сжимающим.

Теорема 3.1.1. Пусть выполняются условия (25), (27)- (28).

Тогда операторное уравнение (35) в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (35) находим методом последовательных приближений.

$$\mathcal{G}_i t = G[\mathcal{G}_{i-1} t] \quad i=1, 2, 3, \dots,$$

где $\mathcal{G}_0 t$ - произвольный элемент пространства $H(0, T)$. Известно, что приближенное решение $\mathcal{G}_i t$ удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{G} t - \mathcal{G}_i t\|_H \leq \frac{\gamma^i}{1-\gamma} \|G[\mathcal{G}_0 t] - \mathcal{G}_0 t\|_H. \quad (38)$$

В силу произвольности, если положить $\mathcal{G}_0 t = h t$, то неравенством (38) можно пользоваться в следующем виде

$$\|\mathcal{G} t - \mathcal{G}_i t\|_H \leq \frac{\gamma^i}{1-\gamma} \|G_0[\mathcal{G}_0 t]\|_H. \quad (39)$$

Точное решение операторного уравнения (35) находим по формуле

$$\mathcal{G}^0 t = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{G}_i t, \quad \mathcal{G}_i t = G[\mathcal{G}_{i-1} t], \quad i=1, 2, 3, \dots$$

где $\mathcal{G}_i t$ - последовательные приближения.

Далее, по найденным решением уравнения (35), согласно (34), находим решение системы (32), т.е. оптимальное векторное управление $u^0(t)$ определим по формулам:

$$\begin{aligned} u_1^0 t &= \varphi_1[t, \mathcal{G}^0 t, \beta], \\ u_2^0 t &= \varphi_2[t, \mathcal{G}^0 t, \beta], \\ &\dots \\ u_m^0 t &= \varphi_m[t, \mathcal{G}^0 t, \beta]. \end{aligned} \quad (40)$$

После того как было найдено векторное оптимальное управление $u^0(t)$ решение задачи оптимизации находим в виде тройки $u^0(t), V^0(t, x), J[u^0(t)]$ по формулам

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u_1^0(\tau), \dots, u_m^0(\tau)] d\tau \right) z_n(x) \quad (41)$$

- оптимальный процесс,

$$J[u^0(t)] = \int_0^T [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^0(t)^2 dt \quad (42)$$

- минимальное значение функционала.

Для построения приближенного оптимального управления s -е приближение решения интегрального уравнения (35) подставим в (34). Тогда s -е приближение $u^s(t) = u_1^s(t), \dots, u_m^s(t)$ векторного оптимального управления $u^0(t)$ определяется по формулам

$$u_k^s(t) = \varphi_k[t, \mathcal{G}^s(t), \beta], \quad k=1, \dots, m, \quad s=0, 1, 2, 3, \dots \quad (43)$$

Лемма 3.1.4. s -е приближение оптимального управления удовлетворяет оценке

$$\|u^0(t) - u^s(t)\|_{H^m} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m \varphi_k^0 \beta^2} \frac{\gamma^s}{1-\gamma} \|G[\mathcal{G}_0(t)] - \mathcal{G}_0(t)\|_H \quad (44)$$

и сходится к оптимальному управлению $u^0(\cdot)$ по норме пространства $H^m(Q, T)$.

Лемма 3.1.5. s -е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\|V^0(t, x) - V_s^0(t, x)\|_{H(Q)} \leq \sqrt{T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)} \|g(t, x)\|_H m f_0 \varphi_0 \beta \frac{\gamma^s}{1-\gamma} \|G[\mathcal{G}_0(t)] - \mathcal{G}_0(t)\|_H \quad (45)$$

и сходится к оптимальному процессу $V^0(\cdot, \cdot)$ по норме пространства $H(Q)$.

Поскольку $V_s^0(t, x)$ определяется как сумма бесконечного функционального ряда, то не всегда удается найти ее. Поэтому на практике целесообразно использовать приближение вида

$$V_s^r(t, x) = \sum_{n=1}^r \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u_1^s(\tau), \dots, u_m^s(\tau)] d\tau \right] z_n(x)$$

которое назовем s, r -м приближением оптимального процесса.

Лемма 3.1.6. s, r -е приближение оптимального процесса при $r \rightarrow \infty$ сходится к функции $V_s^0(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Лемма 3.1.7. s, r -е приближение оптимального процесса при $s, r \rightarrow \infty$ сходится к функции $V^0(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Значение функционала, вычисленная с учетом s, r -го приближения оптимального процесса вычислим по формуле

$$J_s^r[u^s] = \int_0^1 [V_s^r(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^s t^2 dt, \quad \beta > 0.$$

(46)

и назовем s, r - м приближенным значением функционала.

Лемма 3.1.8. s - е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & |J[u^0] - J_s[u^s]| \leq \\ & \leq \left(C_1 \sqrt{T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)} \|g(t, x)\|_H + C_2 \sqrt{\sum_{k=1}^m \varphi_k^0 \beta} \right) \frac{\gamma^s}{1-\gamma} \|G[\mathcal{G}_0] - \mathcal{G}_0\|_H, \end{aligned}$$

(47)

где C_1, C_2 - положительные постоянные и сходится к точному значению функционала $J[u^0]$ по норме пространства R .

Лемма 3.1.9. s - е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$|J_s[u^s] - J_s^r[u^s]| \leq 2C_3 T \left(M \sum_{n=r+1}^{\infty} \psi_n^2 + M \sum_{n=r+1}^{\infty} \int_0^T g_n^2 \tau d\tau \int_0^T f[\tau, u_1^s(\tau), \dots, u_m^s(\tau)] d\tau \right),$$

(48)

где C_3 - положительное постоянное и сходится к точному значению функционала $J_s[u^s]$ по норме пространства R .

Лемма 3.1.10. s, r - е приближенное значение функционала при $s, r \rightarrow \infty$ сходится к точному значению функционала $J[u^0]$, т.е.

$$|J[u^0] - J_s^r[u^s]| \leq |J[u^0] - J_s[u^s]| + |J_s[u^s] - J_s^r[u^s]| \xrightarrow{s, r \rightarrow \infty} 0.$$

В четвертой главе рассмотрены некоторые задачи с распределенным управлением. Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации и при минимизации интегрального квадратичного функционала. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации. Вкратце изложены полученные результаты.

ВЫВОДЫ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

В процессе исследования задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов в случае, когда внешние источники описываются нелинейными сепарабельными функциями и функциями многих переменных относительно функции управления при минимизации интегрального квадратичного функционала установлены, что

- компоненты векторного оптимального управления определяется как решение систем нелинейных интегральных уравнений, обладающих свойством равных отношений, и удовлетворяют системе неравенств типа критерия Сильвестра;

- достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации при наличии векторных управлений и указан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации;

- приближенные решения сходится к точному решению по оптимальному управлению, оптимальному процессу и функционалу.

Полученные результаты представляют теоретический интерес и создают предпосылки для развития качественных методов исследования. Разработанный метод

является конструктивным и может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с распространением тепла.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. О разрешимости одной нелинейной задачи оптимального управления тепловыми процессами. // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Труды молодых ученых. Естественно-техн.науки. Серия 5.Выпуск 2 –Бишкек, 2004. –С.12-15. (соавторстве).

2. О разрешимости линейно-квадратичной задачи оптимизации тепловых процессов при векторном управлении. // Материалы республиканской научно-методической конференции, посвященной 50-летию КНТУ им.И.Раззакова и 75-летию проф. Усубакунова Р.У.-Бишкек, 2005-С.30-33(соавторстве).

3. О разрешимости задачи минимизации квадратичного функционала оптимизации тепловых процессов. // Известия КГТУ им.Р.Раззакова Материалы международной научно-технической конференции «Инновации в образовании, науке и технике» -Бишкек, 2006.С-79-81. (соавторстве).

4. Решение задачи нелинейной оптимизации процессов теплопередачи методом обобщенного управления. // Исследования по интегро-диф. уравнениям НАН КР вып.36.-Бишкек-2007.-С.148-153. (соавторстве).

5. Применение метода обобщенного управления к решению задач оптимизации тепловых процессов. // Труды ИВМ и МГ СО РАН . Сер.Информатика. -Новосибирск, 2007-Вып.7-с.250-256. (соавторстве).

6. Application of the generalized control to the decision of problems of optimization of thermal processes. // II Turk dunyasi matematik sempozyumu. Sakarya Universitesi. Sakarya, 4-7 Temmuz 2007.-с-76-79. (соавторстве).

7. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации процессов теплопередачи при векторном управлении. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям НАН КР- вып.39. Бишкек-2008.С.-107-113 (соавторстве).

8. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации процессов теплопередачи при векторном управлении. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям НАН КР вып.39. Бишкек-2008.С.-107-112. (соавторстве).

9. Применение метода факторизации к задаче нелинейной оптимизации тепловых процессов при квадратичной нелинейности функции от управления. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям НАН КР вып.41.-Бишкек-2009. С-149-153. (соавторстве).

10. О разрешимости одной линейно-квадратичной задачи оптимизации процессов теплопередачи. // Вестник КНУ им.Ж.Баласагына. Серия 5 Выпуск 2.Том XII, Естественные науки, -Бишкек – 2009. С-140-145 (соавторстве).

11. Приближенное решение задач нелинейной оптимизации тепловых процессов. // Поиск. Научное приложение международного журнала «Высшая школа Казакстана» Министерства образования и науки Республики Казакстан. Сер. Естественных и технических наук. –Алматы, 2009. –Вып.№1. –С. С-196-200.

12. Решение задачи оптимизации теплового процесса при нелинейно входящем векторном управлении. // Исследования по нтегро-диф. уравнениям НАН КР вып.44-Бишкек-2012,-С-118-123. (соавторстве).

13. Решение задачи оптимизации теплового процесса при нелинейно входящим векторном управлении. // Proceedings VI International Scientific conference. Part I (Secnions1,2,3,4).Aktobe's K.Zhubanov State University 14-17 October 2012.Aktobe, s.100-104. (соавторстве).

14. Решение задачи нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами при векторном управлении. // Вторая Международная юбилейная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений» посвященной 20-летию КРСУ имени первого президента РФ Н.Б. Ельцина и 100-летию проф.Быкова Я.В. Кыргызстан санаторий «Ыссык-Куль Аврора» 5-7 сентябрь, 2013г. (соавторстве).

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Кабаевой Зарины Сарыгуловны на тему «Нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Ключевые слова: Слабо обобщенное решение, функционал, условие оптимальности, нелинейное интегральное уравнение, оптимальное управление, приближенное решение, сходимости.

Объект исследования: Объектом исследования является управление распространением тепла происходящие в стержне конечной длины.

Предмет исследования: Предметом исследования является перевод теплового процесса из начального состояние в конечное желаемое состояние за конечное время посредством векторного управления.

Цель исследования: установить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда внешние источники описываются нелинейными сепарабельными функциями и функциями многих переменных относительно функции управления.

Методы исследования: В процессе исследования были использованы методы уравнений математической физики, теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования: Построено слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса при наличии векторных управлений. Установлено, что оптимальное управление, в случае минимизации квадратичного функционала, определяется как решение системы интегральных уравнений нелинейно содержащих неизвестные функции как подинтегралом, так и вне интеграла и удовлетворяет системе неравенств типа Сильвестра. Установлено, что в общем случае система нелинейных интегральных уравнений обладает *свойством равных отношений*. Разработан алгоритм построения приближенного решения сколь угодно точности задачи нелинейной оптимизации с векторным управлением, в случае минимизации квадратичного функционала.

Практическое значение исследования. Полученные результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Разработанный метод решения задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при наличии векторных управлений является конструктивным и может быть использован при решении прикладных задач, связанных с процессом тепло – передачи.

Кабаева Зарина Сарыгуловнанын 01.01.02 – «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган «Жылуулук өткөрүү процессин сызыктуу эмес оптималдуу башкаруу» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: жылуулук процесси, солгун жалпыланган чыгарылыш, квадраттык функционал, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, белгиси аныкталган чыгарылыш, оптималдык башкаруу, жакындаштырылган чыгарылыш, жыйналуучулук.

Изилдөөнүн объектиси: Чектелген узундуктагы таякча боюнча жылуулуктун таралыш кубулушун башкаруу изилдөөнүн объектиси болуп саналат.

Изилдөөнүн предмети: Жылуулук процессин баштапкы абалынан акыркы абалга которуу үчүн вектордук башкаруу аркылуу которуу болуп саналат.

Изилдөөнүн максаты: Сырттан таасир эткен күч сызыктуу эмес сепарабелдик функциялар жана көп аргументтүү башкаруу функциядан көз каранды болгон жылуулук процессин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышынын бар болушунун зарыл жана жетиштүү шарттарын аныктоо каралат.

Изилдөөнүн ыкмалары: Изилдөө математиканын функционалдык талдоо, математикалык физиканын теңдемелери, жайылган параметрлүү системаларды оптималдык башкаруу теориясы, сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер теориясы сыяктуу бөлүмдөрүнүн белгилүү ыкмаларын колдонуу менен жүргүзүлдү.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү: Изилдөөнүн негизинде квадраттык функционалды минималдаштыруу маселесинде оптималдык башкаруу функциясы сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин чыгарылышы катары аныкталары жана Сильвестрдин барабарсыздыктар системасын канааттандырган интегралдын сырттында дагы алдында дагы белгисиз функциялар түрүндөгү кошумча шартты канааттандыра тургандыгы такталган. Сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасы бирдей катыштар касиетинин негизинде тургузулган. Квадраттык функционалды минималдаштырууда сызыктуу эмес оптималдаштырууну вектордук башкаруу менен маселенин каалагандай тактыкты канааттандырган жакындаштырылган чыгарылышты табуунун алгоритми тургузулган.

Изилдөөнүн практикалык маанилүүлүгү: Алынган жыйынтыктар жайылган параметрлүү системаларды оптималдык башкаруу теориясында жаңылык болуп эсептелинет. Жылуулук процессине башкаруучу функциялар вектордук башкарууда келип чыккан сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чыгаруунун көрсөтүлгөн жолу конструктивдүү ыкма болуп саналат жана аны жылуулуктун таралышы менен байланышы бар практикалык маселелерде колдонууга болот.

RESUME

of Kabaeva Zarina Sarygulovna dissertation work on
«Nonlinear optimal control of heat process»
on the degree of Candidate of Sciences degree in 01.01.02 – «Differential equations,
dynamical systems and optimal control»

Keywords: mild generalized solution, the functional condition of optimality, the nonlinear integral equation, optimal control, an approximate solution convergence/

The object of study: The object of this study is the thermal process occurring in the rod of finite length.

Subject of research: The subject of this study is the thermal transfer process and the set mode into another desired state by means of action of moving point sources.

The purpose of the study: to establish the necessary and sufficient conditions for the unique solvability of a nonlinear optimization of the thermal process in the case where external sources are described by nonlinear separable functions and functions of several variables with respect to the control function.

Research Methods: The study used methods of mathematical physics, the theory of optimal control of distributed parameter systems, functional analysis and theory of nonlinear integral equations.

Scientific novelty and theoretical significance of the study: to build a weak generalized solution of the boundary value problem of the controlled process in the presence of vector control. It is found that the optimal control in the case of minimization of a quadratic functional is defined as the solution of a system of nonlinear integral equations soderzhashih unknown functions as podintegralom and is integral and satisfies the system of inequalities of Sylvester. Found that, in general, a system of nonlinear integral equations has the property of equal ratios. An algorithm for constructing an approximate solution arbitrarily accuracy of nonlinear optimization problems with vector control, in the case of the minimization of a quadratic functional.

The practical significance of the study: The practical significance of the study. The results obtained are new in the theory of optimal control of distributed parameter systems. Developed method for solving the nonlinear optimization of thermal processes in the presence of vector control is constructive and can be used to solve applied problems associated with the process of the heat - transfer.