МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К 01.15.504

На правах рукописи
УДК: 517.97; 62-50

КАРАБАКИРОВ КУБАТ РЫМБЕКОВИЧ

ТОЧЕЧНОЕ ПОДВИЖНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

01.01.02– «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек -2015

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Высшая математика» Кыргызско-Российского славянского университета имени Б.Н. Ельцина

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Керимбеков Акылбек Керимбекович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Сопуев Адахимжан

кандидат физико-математических наук, доцент
Урдалетова Анаркуль Бурганаковна

Ведущая организация: Южно-Казахстанский Государственный университет имени М. Ауэзова, Казахстан, 486050, г. Шымкент, пр. Тауке-хана, 5

Защита диссертации состоится «____»_________ 2015 г. в ____часов на заседании диссертационного совета К 01.15.504 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском Государственном университете и институте природных ресурсов южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной библиотеке Ошского Государственного университета.

Автореферат разослан «_____» ____________ 2015

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент

Папиева Т.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Колебательные системы часто встречаются в природе, и особенно в технике, в различных машинах, устройствах и механизмах, во многих современных технологических процессах. В настоящее время все большее развитие получают управляемые колебательные системы. В некоторых таких системах, например, требуется погасить возникающие нежелательные колебательные процессы, или наоборот сгенерировать колебания определенных частот. В отличие от задач с граничными управлениями, когда управляющие воздействия осуществляются на границах объекта, а также задач с фиксированными точечными управлениями, когда действия функций внешних воздействий сосредоточены в некоторых неподвижных точках системы, задачи подвижного управления колебательными процессами остаются пока мало изученными.

К настоящему моменту, сравнительно хорошо изучены линейные модели оптимального управления, когда функции управляющих воздействий линейно зависят от управлений, и методы их решений, в частности для оптимизации процессов теплофизики, теории упругости и др., достаточно хорошо известны. Однако для более корректного описания многих задач оптимизации, для совершенствования различных технологических процессов необходимо исследовать математические модели нелинейных оптимальных процессов. На сегодняшний день, несмотря на практическую востребованность, можно указать лишь небольшое число исследований, посвященных задачам оптимизации с подвижным управлением, где управление входит нелинейно в функцию внешнего воздействия. В частности, мало работ, посвященных задачам нелинейной оптимизации колебательных процессов при подвижных точечных управлениях. Методы решений таких задач еще недостаточно разработаны.

В диссертации исследованы задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, происходящих под действием нескольких точечных подвижных источников, каждый из которых нелинейно зависит от функции управления. Исследование разрешимости подобных классов нелинейных задач оптимального управления и разработка конструктивных методов их решений являются одними из актуальных проблем теории оптимального управления распределенными системами.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках научного проекта № КР-05 (номер гос. регистрации № 0006988) «Математическое обеспечение процессов управления энерго-массопереносами, происходящими в линиях передач, и продукционными почво-растительными системами» МОиН КР.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование задач нелинейной оптимизации колебательных процессов при наличии точечных подвижных источников и установление необходимых и достаточных условий существования и единственности решения задачи оптимизации, когда функции воздействия внешних подвижных источников нелинейно зависят от управления. Поставлены и решены для данных классов нелинейных моделей следующие задачи:

- построить слабо обобщенные решения краевых задач управляемых колебательных процессов и проверить сходимость их приближений;
- исключить в условиях оптимальности освободиться от решения сопряженной краевой задачи;
- исследовать разрешимость нелинейных интегральных уравнений относительно управлений;
- построить решения задач точечного подвижного нелинейного оптимального управления колебательными процессами и исследовать сходимость их приближений;

Научная новизна полученных результатов

- Исследование проведено с использованием понятия «слабо обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса» в случае подвижных управлений колебательными процессами;
- Доказана сходимость приближений по резольвенте слабо обобщенных решений краевой задачи для волнового уравнения с нелинейными функциями воздействия внешних подвижных источников;
- Установлено, что подвижное точечное управление, в случае минимизации функционала, содержащего управление под знаком модуля определяется как знако-определенное решение нелинейного интегрального уравнения специфического вида с дополнительным условием в виде неравенства;
- Разработан алгоритм построения приближенного решения сколь угодной точности задачи нелинейной оптимизации с подвижными векторными управлениями колебательных процессов, в случае минимизации квадратичного и кусочно-линейного функционалов;

Результаты получены впервые и характеризуются как дальнейшее развитие методов теории оптимального управления.

Практическая значимость полученных результатов

Результаты, полученные в диссертации, имеют важное практическое значение и применимы в различных современных технологических процессах и производствах, использующих подвижные управляемые воздействия на колебательные системы (в автоматических системах управления гидротурбинными установками, буровыми установками, газокомпрессорными установками, работой ткацких станков, устройствами излучения и передачи волн сверхвысоких частот, устройствами сканирования с помощью подвижных датчиков и т.д.)

Разработанный метод решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при наличии подвижных точечных источников является конструктивным и может быть использован при решении широкого спектра прикладных и производственных задач, связанных с подвижным управлением волновых процессов.

Полученные результаты также имеют важное теоретические значение для развития новых качественных и конструктивных методов решений задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами с подвижными управлениями.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

- Построение слабо обобщенных решений краевых задач управляемых колебательных процессов с разрывным по временному аргументу коэффициентом в уравнении, когда функции воздействия внешних подвижных источников нелинейно зависят от управления;
- Доказательство сходимости по резольвенте приближений полученных слабо обобщенных решений краевых задач;
- Исключение из условий оптимальности решения соответствующей сопряженной краевой задачи;
- Доказательство сходимости приближенных решений нелинейных задач оптимизации колебательных процессов с подвижными точечными управлениями по управлению, оптимальному процессу и по функционалу;
- Численный пример, подтверждающий теоретические выводы.

Личный вклад соискателя. По результатам исследований опубликованы 7 статей и 3 тезиса. В работах [1,2,4-6,8,9], опубликованных в соавторстве, постановка задачи принадлежит научному руководителю, а основные результаты: построение слабо обобщенных решений, установление условий оптимальности, получение достаточных условий однозначной разрешимости нелинейных интегральных уравнений, построение алгоритмов для нахождения приближенных и точных решений соответствующих нелинейных задач оптимального управления, их численная реализация на модельном примере, установление сходимости приближений по резольвенте слабо обобщенных решений краевых задач для волнового уравнения, установление сходимости приближенных решений оптимизационных задач, были получены соискателем.

Апробации результатов диссертации. Результаты исследований докладывались на международных конференциях, симпозиумах и межвузовских, вузовских конференциях:

– IV Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», г. Бишкек – с. Бостери, 13–16 сентября 2011 г.

– Международная научно-практическая конференция «Информационные и инновационные технологии в образовании: состояние, проблемы и перспективы», г. Бишкек, КГУСТА им Н.Исанова, сентябрь 2012 г.

– Международная научная конференция «Функциональный анализ и его приложения», г. Астана, октябрь 2012 г.

– II Международная научная конференция, посвященная 20-летию образования КРСУ им Б.Н. Ельцина «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», «Иссык-Куль Аврора», 5–7 сентября 2013 г.

– III Республиканская научно-практическая конференция «Современные проблемы физико-математических наук и технологии их обучения», г. Бишкек, КГУ им. И.Арабаева, май 2014 г.

– V Конгресс математиков тюркского мира, «Иссык-Куль Аврора», 5–7 июня 2014 г.

Результаты исследований регулярно были обсуждены на научном семинаре (научный руководитель проф. Керимбеков А.) кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 научных статьях, в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики – 6, в реферируемых зарубежных журналах – 1, в материалах конференций – 3, в единоличном авторстве – 3; и в 3 тезисах, в том числе в материалах конференций – 3. По материалам первой главы опубликованы 3 статьи и 1 тезис, а по материалам второй главы опубликованы 4 статьи и 2 тезиса.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, пяти разделов, заключения, списка использованной литературы, содержащего 89 наименований, 9 таблиц, 3 рисунков и приложения. Общий объем работы содержит 140 страниц машинописного текста.

Краткое содержание работы. В первой главе приведены примеры задач оптимизации с граничными и подвижными точечными управлениями для различных колебательных и тепловых процессов, сделан краткий обзор исследований, примыкающих к теме диссертационной работы.

В первом разделе второй главы исследованы вопросы однозначной разрешимости и построены соответствующие алгоритмы для решений задач оптимального управления упругими колебаниями системы в случае, когда точка приложения внешнего воздействия, нелинейно зависящая от функции управления, меняется по заданному закону, т.е. является подвижной.

Рассматривается задача минимизации интегрального квадратичного функционала

$$J[u] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t)dt, \quad \beta > 0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи, описываемой уравнением

$$V_{tt} = V_{xx} + \delta(x - x_0(t)) f[t, u(t)], \qquad (t, x) \in Q, \tag{2}$$

и удовлетворяющей на границе области Q – начальным

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

и граничным условиям

$$V_x(t,0) = 0, \quad V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, \quad 0 < t \le T; \tag{4}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $x_0(t)$ – подвижная точка внешнего воздействия, удовлетворяющая ограничению

$$0 \le x_0(t) \le 1;$$

функция внешнего источника $f[t,u(t)] \in H(0, T)$, является нелинейной относительно управления $u(t) \in H(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f[t,u]}{\partial u} \equiv f_u[t,u(t)] \ne 0, \ \forall t \in (0,T); \tag{5}$$

$\psi_1(x) \in H(0, 1)$, $\psi_2(x) \in H(0, 1)$ – функции начального состояния системы; H – пространство Гильберта; постоянная $\alpha > 0$; T – фиксированный момент времени.

Получено, что слабо обобщенным решением краевой задачи (2)-(4) является функция

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[\psi_{1n} cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} sin\lambda_n t + \\ + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t sin\lambda_n (t-\tau) z_n[x_0(\tau)] f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau \Bigg] z_n(x). \tag{6}$$

Лемма 2.1.1. Функция $V(t,x)$ является элементом пространства $H(Q)$.

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены следующие условия оптимальности

$$2\beta u\left(t\right) f_u^{-1}\left[t, u\left(t\right)\right] = \omega\left[t, x_0\left(t\right)\right],$$

$$\left(f_u\left[t, u\left(t\right)\right] \left(u\left(t\right) f_u^{-1}[t, u\left(t\right)]\right)_u\right) > 0, \tag{7}$$

Установлено, что в случае минимизации интегрального квадратичного функционала оптимальное управление удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\beta u\left(t\right) f_u^{-1}\left[t, u\left(t\right)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n\left(t\right) \int_0^T G_n\left(\tau\right) f\left[\tau, u\left(\tau\right)\right] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n\left(t\right) h_n \tag{8}$$

и дополнительному условию в виде дифференциального неравенства (7).

Далее исследованы, согласно методике проф. Керимбекова А.К., вопросы однозначной разрешимости нелинейного интегрального уравнения (8), приведенного к операторной форме

$$p = G[p], \tag{9}$$

где $G[p] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n\left(t\right) \left[h_n - \int_0^T G_n\left(\tau\right) f\left(\tau, \varphi\left(\tau, p(\tau), \beta\right)\right) d\tau\right].$

Лемма 2.1.2. Оператор $G\left(\cdot\right)$ отображает пространство H в себя.

Лемма 2.1.3. Пусть функции $f[t, u(t)]$ и $\varphi[t, p(t), \beta]$ удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной

$$\left\| f\left[t, u\left(t\right)\right] - f[t, \bar{u}\left(t\right)]\right\|_H \leq f_0 \left\| u\left(t\right) - \bar{u}\left(t\right)\right\|_H, \tag{10}$$

$$\left\| \varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\right\|_H \leq \varphi_0(\beta) \left\| p\left(t\right) - \bar{p}\left(t\right)\right\|_H. \tag{11}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2T\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right) f_0 \varphi_0\left(\beta\right) < 1 \tag{12}$$

оператор $G\left(\cdot\right)$ является сжимающим.

Теорема 2.1.1. При выполнении условий (5), (10)–(12) операторное уравнение (9) в пространстве $H\left(0,T\right)$ имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (9) находится методом последовательных приближений

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

причем имеет место оценка

$$\left\| p^0\left(t\right) - p_k(t)\right\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| G\left[p_0\left(t\right)\right] - p_0\left(t\right)\right\|_H, \tag{13}$$

где $p_0(t) \in H(0,T)$ – произвольный элемент.

По найденному $p^0(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t)$ находится оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t,\ p^0(t),\ \beta]. \tag{14}$$

Отсюда, согласно (6) получаем выражения для оптимального процесса

$$V^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} sin\lambda_n t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)\, z_n[x_0(\tau)] f\left[\tau, u^0(\tau)\right] d\tau\right] z_n(x)$$

и для минимального значения функционала

$$J\left[u^0\right] = \int_0^1 [V^0(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta\int_0^T \left[u^0(t)\right]^2 dt.$$

Таким образом, найденная тройка $u^0(t), V^0(t,x), J[u^0]$ определяет решение нелинейной задачи оптимизации.

Для построения приближенного оптимального управления находится приближенное решение $p_k(t)$ операторного уравнения (9), удовлетворяющее оценке (13). Используя найденное $p_k(t)$ из (14) получаем k-е приближение оптимального управления:

$$u_k(t) = \varphi[t,\ p_k(t),\ \beta],$$

которое удовлетворяет оценке

$$\left\| u^0(t) - u_k(t)\right\|_H \le \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\| G\left[p_0(t)\right] - p_0(t)\right\|_H. \tag{15}$$

По найденному $u_k(t)$, согласно (6), находится k-е приближение оптимального процесса

$$V_k(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n} sin\lambda_n + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)\, z_n[x_0(\tau)] f\left[\tau, u_k(\tau)\right] d\tau\right] z_n(x),$$

которое удовлетворяет оценке

$$\left\| V^0(t,x) - V_k(t,x)\right\|_H \le T\left[2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\right]^{\frac{1}{2}} f_0\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\| G\left[p_0(t)\right] - p_0(t)\right\|_H. \tag{16}$$

После определения $u_k(t)$ и $V_k(t,x)$, согласно (1), вычисляется k-е приближение минимального значения функционала

$$J(u_k) = \int_0^1 \left[V_k(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T u_k^2(t)\,dt, \quad \beta > 0,$$

которое удовлетворяет оценке

$$\left|J\left[u^0\right]-J\left[u_k\right]\right| \le \left[C_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)+\beta C_2\right]\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_H, \qquad (17)$$

где

$$C_1=\left\|V^0(T,x)+V_k(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}, \quad C_2=\left\|u^0(t)+u_k(t)\right\|_{H(0,T)}.$$

Из оценок (15)-(25) следует сходимость приближенного решения $u_k(t), V_k(t,x), J[u_k]$ задачи нелинейной оптимизации при $k\to\infty$ к точному решению $u^0(t), V^0(t,x), J[u^0]$.

Во втором разделе второй главы исследованы вопросы однозначной разрешимости и построены соответствующие алгоритмы нахождения решений задачи оптимального управления колебаниями системы конечной длины в случае, когда колебательный процесс происходит под действием нескольких точечных подвижных источников, каждый из которых нелинейно зависит от функции управления.

Рассматривается задача минимизации квадратичного функционала

$$J\left[u(t)\right]=\int_0^1[V(T,x)-\xi(x)]^2dx+2\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m u_k^2(t)dt, \quad \beta>0 \qquad (18)$$

на множестве решений краевой задачи, описываемой уравнением

$$V_{tt}=V_{xx}+\sum_{k=1}^m\delta\left[x-\mu_k(t)\right]f_k\left[u_k(t)\right], \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T, \qquad (19)$$

удовлетворяющим начальным

$$V(0,x)=\psi_1(x), \quad V_t(0,x)=\psi_2(x), \quad 0<x<1, \qquad (20)$$

и граничным условиям

$$V_x(t,0)=0, \quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0, \quad 0<t\le T; \qquad (21)$$

где $\mu_k(t)$ – точки приложения подвижных внешних воздействий, удовлетворяющие ограничению $0<\mu_k(t)<1$; функции внешних источников $f_k[u_k(t)]\in H(0,T)$ нелинейно зависят от управлений $u_k(t)\in H(0,T)$, причем

$$\frac{\partial f_k[t,u_k(t)]}{\partial u_k}\ne 0, \quad \forall t\in(0,T), \qquad (22)$$

$\psi_1(x)\in H(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$ – заданные функции начального состояния системы; постоянная $\alpha>0$; T – фиксированный момент времени.

Доказано, что краевая задача (19)–(21) имеет единственное слабо обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}sin\lambda_n t+\right.$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n \; t-\tau \; \sum_{k=1}^{m} z_n \; \mu_k(\tau) \; f_k \; u_k(\tau) \; d\tau \Bigg] z_n(x), \tag{23}$$

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены следующие условия оптимальности

$$2\beta u_k(t)\left(\frac{\partial f_k\left[u_k \; t\right]}{\partial u_k}\right)^{-1} = \omega\left[t,\mu_k \; t\right], \qquad k=1,2,3,...,m,$$

$$\frac{\partial f_k \; u_k}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(u_k \; t \Bigg/ \frac{\partial f_k \; u_k}{\partial u_k}\right) > 0, \qquad k=1,2,3,\dots,m, \tag{24}$$

Установлено, что при минимизации интегрального квадратичного функционала векторное оптимальное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений

$$\beta u_k \; t \left(\frac{\partial f_k \; u_k}{\partial u_k}\right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t,\mu_k \; t\;]\int_0^T \sum_{i=1}^{m} G_n\left[\tau,\mu_i \; \tau\;\right] f_i\left[u_i \; \tau\;\right] d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t,\mu_k(t)]h_n, \quad k=1,2,3,...,m, \tag{25}$$

решение которой должно удовлетворять системе дополнительных условий (24).

Вводя обозначения

$$\beta u_k \; t \left(\frac{\partial f_k\left[t,u_k \; t\;\right]}{\partial u_k \; t}\right)^{-1} = p_k \; t \;, \quad k=1,2,3,...,m,$$

где функция $u_k \; t$, в силу (24), определяется однозначно:

$$u_k \; t \; = \varphi_k\left[t, p_k \; t \;,\beta\right], \; t\in \; 0,T \;, \quad k=1,2,3,...,m, \tag{26}$$

систему (25) представим в виде

$$p_k \; t \; + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t,\mu_k \; t\;]\int_0^T \sum_{i=1}^{m} G_n\left[\tau,\mu_i \; \tau\;\right] f_i\left[\tau,\varphi_i\left[t,p_i \; \tau \;,\beta\right]\right] d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t,\mu_k(t)]h_n, \quad k=1,2,3,...,m, \tag{27}$$

или с учетом обозначений

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ ... \\ p_m(t) \end{pmatrix}, \; h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ ... \\ h_m(t) \end{pmatrix}, \; G[p] = \begin{pmatrix} G[p_1] \\ ... \\ G[p_m] \end{pmatrix}, \; \overline{G} \;\; p \; = h(t) - G \;\; p \;, \text{ где}$$

$$h_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t,\mu_k(t)]h_n,$$

$$G[p_k] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t,\mu_k(t)]\int_0^T \sum_{i=1}^{m} G_n[\tau,\mu_i(\tau)]f_i \;\; \tau,\varphi_i[\tau,p_i(\tau),\beta] \; d\tau,$$

представим систему (27) в операторной форме

$$p = \overline{G}\left(p\right) \qquad (28)$$

Лемма 2.2.2. $h = h(t)$ является элементом пространства $H^m\left(0,T\right)$.

Лемма 2.2.3. Оператор $\overline{G}\left(\cdot\right)$ отображает пространство H^m в себя.

Лемма 2.2.4. Пусть функции $f[t,u(t)]$ и $\varphi[t,p(t),\beta]$ удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\left\| f\left[t,\bar{u}\left(t\right)\right] - f[t,\tilde{u}\left(t\right)]\right\|_{H^m} \le f_0 \left\|\bar{u}\left(t\right) - \tilde{u}\left(t\right)\right\|_H, \quad f_0 > 0, \qquad (29)$$

$$\left\|\varphi[t,\ \overline{p}(t),\ \beta] - \varphi[t,\ \tilde{p}(t),\ \beta]\right\|_{H^m} \le \varphi_0(\beta)\left\|\overline{p}\left(t\right) - \tilde{p}\left(t\right)\right\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0. \qquad (30)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2Tm\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right) f_0\varphi_0\left(\beta\right) < 1 \qquad (31)$$

оператор $\overline{G}\left(\cdot\right)$ является сжимающим.

Теорема 2.2.1. При выполнении условий (22), (29)-(31) операторное уравнение (28) в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формулам

$$\overline{p}^{\,n}\left(t\right) = G\left[\overline{p}^{\,n-1}(t)\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (32)$$

где $\overline{p}^{\,0}(t) = \left(p_1^0(t), \ldots, p_m^0(t)\right)$ – произвольный элемент пространства $H^m\left(0,T\right)$.

Точное решение $\overline{p}^{\,0}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{p}^{\,n}(t)$ и удовлетворяет оценке

$$\left\|\overline{p}^{\,0}(t) - \overline{p}^{\,n}(t)\right\|_{H^m} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|\bar{G}\left[\overline{p}^{\,0}(t)\right] - p^0(t)\right\|_{H^m},$$

где

$$\gamma = 2Tm\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right) f_0\varphi_0\left(\beta\right) < 1.$$

Далее, последовательно находятся оптимальное управление

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \ldots \\ u_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi[t, p_1(t), \beta] \\ \ldots \\ \varphi[t, p_m(t), \beta] \end{pmatrix}, \qquad (33)$$

оптимальный процесс $V\left(t,x\right)$

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_{1n}\sin\lambda_n t + \right.$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\sum_{i=1}^{m} z_n(\mu_i(\tau)\, f_i[\tau,u_i(\tau)]d\tau\Bigg) z_n(x), \tag{34}$$

и минимальное значение функционала $J[\bar{u}(t)]$

$$J[\bar{u}(t)]=\int_0^1\left[\bar{V}(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}\bar{u}_k^2(t)dt. \tag{35}$$

Найдены соответствующие приближенные решения $\bar{u}^n(t)$, $V^k(t,x)$, $J\left[u^n(t)\right]$, и доказана их сходимость к точным.

В разделе 3 полученные результаты численно реализованы на модельном примере.

В первом разделе третьей главы рассматривается задача минимизации кусочно-линейного функционала

$$J[u(t)]=\int_0^1 \left(V(T,x)-\xi(x)\right)^2 dx+2\beta\int_0^1|u(t)|dt,$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}=V_{xx}+a(t)V+g(t,x)\delta(x-x_0)f\left[t,u(t)\right], \tag{36}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x), \tag{37}$$

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \alpha>0,\ t\in(0,T); \tag{38}$$

где $x_0(t)$ – подвижная точка внешнего источника, удовлетворяющая ограничению

$0\le x_0(t)\le 1;$

$a(t)\in H(0,T)$, $g(t,x)\in C(\bar{Q})$, $\psi_1(x)\in H(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$, $\xi(x)\in H(0,1)$ – заданные функции; функция внешнего воздействия $f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$, является нелинейной относительно функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\equiv f_u(t,u(t))\neq 0,\ \forall t\in(0,T); \tag{39}$$

$H(Y)$– гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y, T – фиксированный момент времени.

Построено слабо обобщенное решение краевой задачи (36)-(38):

$$V(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\psi_{1n}cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t a(\tau)\,sin\lambda_n(t-\tau)V_n(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^\tau\frac{1}{\lambda_n}sin\lambda_n(t-\tau)g(\tau,x_0)z_n(x_0)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\Bigg]z_n(x),$$

где коэффициенты Фурье $V_n(t)$, при каждом фиксированном $n=0,1,2,\ldots$, определяются как решения интегрального уравнения

$$V_n(t) \equiv \psi_{1n} cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t a(\tau)\, sin\lambda_n (t-\tau)\, V_n(\tau)\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^\tau sin\lambda_n (t-\tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau.$$

Получено решение краевой задачи (36)-(38) в виде:

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t R_n(t,s,\lambda)\, a_n(s)\, ds + a_n(t)\right) z_n(x),$$

где

$$a_n(t) = \psi_{1n} cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} sin\lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n} sin\lambda_n (t-\tau)\, g(\tau, x_0)\, z_n(x_0)\, f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau,$$

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s), \quad n = 1,2,3,...$$

$$K_{n,i+1}(t,s) = \int_s^t K_n(t,\tau) K_{n,i}(\tau,s) d\tau, \quad K_n(t,s) = K_{n,1}(t,s)$$

На основе принципа максимума для распределенных систем получены следующие условия оптимальности

$$g(t, x_0(t))\, \omega(t, x_0(t)) \cdot f_u(t, u(t)) - 2\beta sign\, u(t) = 0,$$
$$g(t, x_0(t))\, \omega(t, x_0(t)) \cdot f_{uu}(t, u(t)) < 0,$$

Установлено, что в случае минимизации интегрального кусочно-линейного функционала оптимальное управление удовлетворяет следующим нелинейным интегральным уравнениям и дополнительным условиям:

если $u(t) \geq 0$, то

$$\begin{cases} \dfrac{\beta}{f_u(t, u(t))} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(t)\left(-h_n + \int_0^T B_n(\tau) f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau\right) = 0, \\ f_u\left(\dfrac{1}{f_u}\right)_u > 0; \end{cases} \tag{40}$$

если $u(t) \geq 0$, то

$$\begin{cases} \dfrac{\beta}{f_u\left(t,u(t)\right)} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(t)\left(-h_n + \int\limits_0^T B_n(\tau) f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right) = 0, \\ f_u\left(\dfrac{1}{f_u}\right)_u < 0; \end{cases} \qquad (41)$$

где

$$B_n(t) = g(t,x_0)\, z_n(x_0)\frac{1}{\lambda_n}\left[sin\lambda_n(T-t) + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_t^T P_n(s,t,\lambda)\, sin\lambda_n(T-s)ds \right];$$

$$B_n(\tau) = g(\tau,x_0)\, z_n(x_0)\frac{1}{\lambda_n}\left[sin\lambda_n(T-\tau) + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_\tau^T R_n(T,s,\lambda)\, sin\lambda_n(s-\tau)ds \right];$$

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n}\left[cos\lambda_n T + \int\limits_0^T R_n(T,s,\lambda)\, cos\lambda_n s ds \right] -$$

$$-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[sin\lambda_n T + \int\limits_0^T R_n(T,s,\lambda)\, sin\lambda_n s ds \right],$$

Далее для случая, когда $u(t) > 0, \forall t \in [0,T]$, исследованы вопросы однозначной разрешимости соответствующего интегрального уравнения (40), представленного в операторной форме

$$p(t) = G[p(t)], \qquad (42)$$

где

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\left(h_n - \int\limits_0^T B_n(\tau) f\left(\tau,\varphi\left(\tau, p(\tau),\beta\right)\right) d\tau \right).$$

Лемма 3.1.1. Оператор $G[\cdot]$ отображает пространство H в себя.

Лемма 3.1.2. Пусть функции $f\left[t,u(t)\right]$ и $\varphi\left[t, p(t), \beta\right]$ удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\left\| f\left[t,u(t)\right] - f[t,\bar{u}(t)] \right\|_H \le f_0 \left\| u(t) - \bar{u}(t) \right\|_H, \qquad (43)$$

$$\left\| \varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta] \right\|_H \le \varphi_0(\beta) \left\| p(t) - \bar{p}(t) \right\|_H \qquad (44)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = C f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \qquad (45)$$

где $C = 4\int\limits_0^T g^2(t,x_0)dt \cdot \left(1 + \dfrac{T^2 a_0^2}{\lambda_1^2} e^{\frac{2|\lambda| a_0 T}{\lambda_1}} \right)\left(\dfrac{1}{\lambda_1^2} + \dfrac{1}{6} \right)$, оператор $G(\cdot)$ является сжимающим.

Теорема 3.1.1. При выполнении условий (22), (43)-(45) операторное уравнение (42) в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (42) находится методом последовательных приближений

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

причем имеет место оценка

$$\left\| p(t) - p_n(t) \right\|_H \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \left\| G\left[p_0(t) \right] - p_0(t) \right\|_H,$$

где $p_0(t) \in H(0,T)$ – произвольный элемент.

Далее, последовательно находятся оптимальное управление

$$u(t) = \varphi[t, p(t), \beta].$$

оптимальный процесс

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x),$$

где $a_n(t) = \psi_{1n} \cos\lambda_n t + \dfrac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin\lambda_n t + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\lambda_n} \sin\lambda_n(t-\tau) g(\tau, x_0) z_n(x_0) f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau,$

и минимальное значение функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[V(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + 2\beta \int_0^T \left| u(t) \right| dt.$$

Найдены соответствующие приближенные решения $u_k(t)$, $V_k(t,x)$, $J[u_k(t)]$, и доказана их сходимость к точным.

Во втором разделе третьей главы рассматривается задача нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$J\left[u(t)\right] = \int_0^1 \left[V(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^{m} \left| u_k(t) \right| dt, \quad \beta > 0, \tag{46}$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt} = V_{xx} + \sum_{k=1}^{m} \delta(x - \mu_k(t)) f_k(u_k(t)), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{47}$$

$$V(0,x) = \psi_1(x), \quad V_t(0,x) = \psi_2(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{48}$$

$$V_x(t,0) = 0, \quad V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, \qquad 0 < t \le T; \tag{49}$$

где $\mu_k(t)$ – точки приложений внешних подвижных воздействий, удовлетворяющие ограничению $0 < \mu_k(t) < 1$; $f_k(u_k(t)) \in H(0,T)$ - функции внешних подвижных воздействий, нелинейно зависящие от функций управления $u_k(t) \in H(0,T)$, причем

$$\frac{\partial f_k[t, u_k(t)]}{\partial u_k} \ne 0, \quad \forall t \in (0,T), \tag{50}$$

$\psi_1(x)\in H\ \ 0,1$, $\psi_2(x)\in H\ \ 0,1$ – заданные функции начального состояния колебательного процесса; постоянная $\alpha>0$; T – фиксированный момент времени.

Доказано, что краевая задача (47)–(49) имеет единственное слабо обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\psi_{1n}cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}sin\lambda_n t+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n\ \ t-\tau\ \ \sum_{k=1}^{m}z_n\ \ \mu_k(\tau)\ \ f_k\ \ u_k(\tau)\ \ d\tau\Bigg]z_n(x), \tag{51}$$

Лемма 3.2.1. $V(t,x)$ является элементом пространства $H(Q)$.

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены следующие условия оптимальности

$$2\beta\left(\frac{\partial f_k\left[u_k\ \ t\ \ \right]}{\partial u_k}\right)^{-1} sign\,u_k=\omega\left[t,\ \mu_k\ \ t\ \ \right],\quad k=1,2,3,\dots,m,$$

$$\frac{\partial f_k\ \ u_k}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left(\frac{\partial f_k\ \ u_k}{\partial u_k}\right)^{-1}\right)sign\,u_k\ \ t\ \ >0,\quad k=1,2,3,\dots,m. \tag{52}$$

Установлено, что при минимизации интегрального кусочно-линейного функционала векторное оптимальное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений

$$\beta\left(\frac{\partial f_k\ \ u_k}{\partial u_k}\right)^{-1} sign\,u_k\ \ t\ \ +\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_k(t)]\int_0^T\sum_{i=1}^{m}G_n\left[\tau,\mu_i\ \ \tau\ \ \right]f_i\left[u_i\ \ \tau\ \ \right]d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_k(t)]h_n,\quad k=1,2,3,\dots,m, \tag{53}$$

решение которой должно удовлетворять системе дополнительных условий (52).

Для определенности исследование проведено для набора вида

$u\{u_1^+(t),\dots,u_s^+(t),\,u_{s+1}^-(t),\dots,u_m^-(t)\},\ 1\le s\le m$.

В этом случае система (53) приводится к виду

$$\beta\left(\frac{\partial f_i\ \ t,u_i(t)}{\partial u_i}\right)^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]\int_0^T\sum_{k=1}^{m}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,u_k(\tau)]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]h_n,\quad i=1,\dots,s; \tag{54}$$

$$-\beta\left(\frac{\partial f_i\ \ t,u_i(t)}{\partial u_i}\right)^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]\int_0^T\sum_{k=1}^{m}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,u_k(\tau)]d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} G_n[t,\mu_i(t)]h_n, \quad i=s+1,...,m, \tag{55}$$

а система условий (52) переходит к следующей системе условий

$$\frac{\partial f_k\ t,u_k(t)}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left[\frac{\partial f_k\ t,u_k(t)}{\partial u_k}\right]^{-1}\right)>0, \quad k=1,...,s, \tag{56}$$

$$\frac{\partial f_k\ t,u_k(t)}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left[\frac{\partial f_k\ t,u_k(t)}{\partial u_k}\right]^{-1}\right)<0, \quad k=s+1,...,m. \tag{57}$$

Вводятся обозначения

$$\beta\left(\frac{\partial f_i\ t,u_i(t)}{\partial u_i}\right)^{-1}=p_i^+(t), \quad i=1,...,s, \tag{58}$$

$$-\beta\left(\frac{\partial f_i\ t,u_i(t)}{\partial u_i}\right)^{-1}=p_i^-(t), \quad i=s+1,...,m. \tag{59}$$

где функция $u_i(t),\ i=1,...,s,$ в силу (56) определяется однозначно, т.е. имеют место равенства

$$u_i^+(t)=\varphi_i^+[t,p_i^+(t),\beta], \quad i=1,...,s. \tag{60}$$

Согласно (57) из (59) аналогичным образом найдены функции

$$u_i^-(t)=\varphi_i^-[t,p_i^-(t),\beta], \quad i=s+1,...,m. \tag{61}$$

С учетом (58)-(61) система (54),(55) приводится к операторному виду

$$p=\overline{G}\ \ p\ , \tag{62}$$

где

$$G[\overline{p}(t)]=\sum_{n=1}^{\infty} G_n\left[t,\overline{\mu}(t)\right]\left[h_n-\int_0^T G_n^*(\tau,\overline{\mu}(\tau)\,\overline{f}[\tau,\overline{\varphi}(\tau,\overline{p}(\tau),\beta)]d\tau\right],$$

$$\overline{p}(t)=\ p^+(t),p^-(t)\ =\ p_1^+(t),...,p_s^+(t),p_{s+1}^-(t),...,p_m^-(t)\ ,$$

$$G[\overline{p}]=\ G_1[p_1],...,G_m[p_m]\ ,$$

$$G_n\left[t,\overline{\mu}(t)\right]=\ G_n\left[t,\mu^+(t)\right],G_n\left[t,\mu^-(t)\right]\ =$$

$$=\ G_n\ t,\mu_1(t)\ ,...,G_n\ t,\mu_s(t)\ ,G_n\ t,\mu_{s+1}(t)\ ,...,G_n\ t,\mu_m(t)\ \ ,$$

$$\overline{f}\left[t,\overline{\varphi}\ \ t,\overline{p}(t),\beta\ \right]=\ \overline{f}\left[t,\varphi^+\ \ t,p^+(t),\beta\ \right],\overline{f}\left[t,\varphi^-\ \ t,p^-(t),\beta\ \right]\ =$$

$$=\begin{cases} f_1\left[t,\varphi_1^+\ \ t,p_1^+(t),\beta\ \right],\ldots,f_s\left[t,\varphi_s^+\ \ t,p_s^+(t),\beta\ \right], \\ f_{s+1}\left[t,\varphi_{s+1}^-\ \ t,p_{s+1}^-(t),\beta\ \right],\ldots,f_m\left[t,\varphi_m^-\ \ t,p_m^-(t),\beta\ \right]\ , \end{cases}$$

* – знак транспонирования.

Лемма 3.2.2. Оператор $G\ \cdot$ отображает пространство H в себя.

Лемма 3.2.3. Пусть функции $f[t, u(t)]$ и $\varphi[t, p(t), \beta]$ удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной

$$\left\| f\left[t,\bar{u}\;t\;\right]- f[t,\tilde{u}\;t\;]\right\|_{H^m} \le f_0 \left\|\bar{u}\;t\;-\tilde{u}\;t\;\right\|_H, \quad f_0>0 \tag{63}$$

$$\left\|\varphi[t,\;\bar{p}(t),\;\beta]-\varphi[t,\;\tilde{p}(t),\;\beta]\right\|_{H^m} \le \varphi_0(\beta)\left\|\bar{p}\;t\;-\tilde{p}\;t\;\right\|_H, \quad \varphi_0(\beta)>0. \tag{64}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2Tm\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right) f_0\varphi_0\;\;\beta\;\;<1 \tag{65}$$

оператор $G[\cdot]$ является сжимающим.

Теорема 3.2.1. При выполнении условий (50), (63)-(65) операторное уравнение (62) в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.

Это решение находится методом последовательных приближений по формулам

$$\overline{p}^n\;\;t\;\;=G\left[\overline{p}^{n-1}(t)\right],\quad n=1,2,3,\dots,$$

где $\overline{p}^0(t)=\;\;p_1^0(t),...,p_m^0(t)\;\;$ – произвольный элемент пространства $H^m\;\;0,T\;\;$.

Точное решение $\overline{p}_0(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{p}^n(t)$ удовлетворяет оценке

$$\left\|\overline{p}_0(t)-\overline{p}^n(t)\right\|_{H^m} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|\bar{G}\left[\overline{p}^0(t)\right]-p^0(t)\right\|_{H^m},$$

где

$$\gamma = 2Tm\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right) f_0\varphi_0\;\;\beta\;\;<1.$$

Далее, последовательно найдены оптимальное управление

$$\bar{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1^+(t)\\ \dots\\ u_s^+(t)\\ u_{s+1}^-(t)\\ \dots\\ u_m^-(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi[t,p_1(t),\beta]\\ \dots\\ \varphi[t,p_s(t),\beta]\\ \varphi[t,p_{s+1}(t),\beta]\\ \dots\\ \varphi[t,p_m(t),\beta]\end{pmatrix}, \tag{66}$$

оптимальный процесс

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{1n}\sin\lambda_n t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\sum_{i=1}^m z_n\;\;\mu_i(\tau)\;\;f_i\;\;\tau,u_i(\tau)\;\;d\tau\right)z_n(x), \tag{67}$$

и минимальное значение функционала.

$$J[\bar{u}(t)]=\int_0^1\left[\bar{V}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}\left|\bar{u}_k(t)\right|dt. \qquad (68)$$

Найдены соответствующие приближенные решения $\bar{u}^n(t)$, $V^k(t,x)$, $J\left[u^n(t)\right]$, и доказана их сходимость к точным.

В приложении приведен вариант исполнения программного комплекса в среде MATLAB, соответствующего модельному примеру и результатам численных расчетов, подтверждающим теоретические выводы.

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы задачи оптимального управления колебательными процессами в случаях, когда математическая формализация рассматриваемых задач приводит к уравнениям с функциями внешних точечных источников, нелинейно зависящим от управляющих параметров.

Исследования проводились согласно методу принципа максимума для систем с распределенными параметрами. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации, и разработаны алгоритмы построения приближенных решений.

Полученные результаты могут быть использованы в приложениях при решении производственных задач, связанных с волновыми процессами, а также для развития других конструктивных методов решений задач оптимального точечного подвижного управления системами с распределенными параметрами.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Карабакиров, К. Р. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при подвижном точечном управлении [Текст] / А.К. Керимбеков, К.Р. Карабакиров // Вестник КГУ им. Ж.Баласагына. – IV Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», г.Бишкек, 2011. – С. 71–75.
2. Карабакиров, К. Р. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при подвижном точечном управлении [Текст] / А.К. Керимбеков, К.Р. Карабакиров // Вестник КРСУ, Т.12. №10. – Бишкек, 2012. – С. 161–164.
3. Карабакиров, К.Р. Разрешимость задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний с подвижными точечными управлениями при

минимизации кусочно-линейного функционала [Текст] / К.Р. Карабакиров // Вестник КРСУ, Т.12. №10. – Бишкек, 2012. – С. 158–160.

4. Карабакиров, К.Р. Разрешимость задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний с подвижными точечными управлениями при минимизации интегрального квадратичного функционала [Текст] / А.К. Керимбеков, К.Р. Карабакиров // Международная научно-практическая конференция «Информационные и инновационные технологии в образовании: состояние, проблемы и перспективы», Вестник КГУСТА, №2(36). – Бишкек, 2012. – С. 143–145.

5. Карабакиров, К.Р. Нелинейное оптимальное управление упругими колебаниями [Текст] / А.К. Керимбеков, А.К. Баетов, К.Р. Карабакиров, С.Б. Доулбекова // Тез. докл. международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения». – Астана, 2012. – С. 155–156.

6. Карабакиров К.Р. Решение задачи нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами при подвижных точечных управлениях [Текст] / К.Р. Карабакиров, Ж.К. Асанова // Тез. докл. второй международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященной 20–летию образования КРСУ и 100-летию проф. Я.В.Быкова. – «Иссык-Куль Аврора», 5–7 сентября 2013 г. – С.47.

7. Карабакиров К.Р. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний с подвижными точечными управлениями [Текст] / К.Р. Карабакиров // Вестник КРСУ. 2014. Т.14. №1. С. 161–165.

8. Карабакиров К.Р. Вывод нелинейного интегрального уравнения оптимального управления в одной задаче минимизации кусочно-линейного функционала [Текст] / К.Р. Карабакиров, Ж.К. Асанова // Вестник КГУ им. И.Арабаева. Серия: физика, математика, информатика. №3 (2014). С.285–289. Третья республиканская научная конференция, посвященная памяти профессора Р.Усубакунова.

9. Karabakirov K. Approximate solution of piecewise-linear functional minimization task with the movable point control of oscillations processes / A. Kerimbekov, K. Karabakirov // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5–7 June, 2014) / Edited by Academician Altay Borubaev. – Bishkek: Mathematical Society of Kyrgyz Republic, 2014. P.319.

10. Карабакиров К.Р. Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний при подвижном точечном управлении [Текст] / К.Р. Карабакиров // «Поиск». Научный журнал–приложение международного журнала «Высшая школа Казахстана» Республики Казахстан. Серия естественных и технических наук. №3/2014. С.140–146.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Карабакирова Кубата Рымбековича на тему «Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление колебательными процессами» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Ключевые слова: слабо обобщенное решение, минимизация функционала, условие оптимальности, нелинейное интегральное уравнение, оптимальное подвижное управление, колебательные процессы.

Объект исследования: объектом исследования является подвижное оптимальное управление колебательными системами.

Предмет исследования: предметом исследования является перевод колебательной системы из начального состояния в желаемое состояние за конечное время посредством точечных подвижных управлений.

Цель исследования: установить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательного процесса системы в случае точечных подвижных управляющих воздействий, описываемых нелинейными функциями.

Методы исследования: в работе были использованы методы решений уравнений математической физики, методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования:

- Исследование проведено с использованием понятия «слабо обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса» в случае подвижных управлений колебательными процессами;
- Доказана сходимость приближений по резольвенте слабо обобщенных решений краевых задач для волнового уравнения с нелинейными функциями воздействия внешних подвижных источников;
- Разработан алгоритм построения приближенного решения сколь угодной точности задачи нелинейной оптимизации с подвижными векторными управлениями колебательных процессов, в случае минимизации квадратичного и кусочно-линейного функционалов;

Полученные результаты имеют большую теоретическую значимость и представляют интерес для исследований задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами.

Практическое значение исследования. Разработанный метод решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при наличии подвижных точечных источников является конструктивным и может быть использован при решении прикладных и производственных задач, связанных с подвижным управлением волновых процессов.

Карабакиров Кубат Рымбековичтин 01.01.02 – «Дифференциалдык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаттык окумуштуулук даражасына изденүү максатында жазылган «Термелүү процесстерин кыймылдуу чекиттүү сызыктык эмес оптималдуу башкаруу» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: Солгун жалпыланган чыгарылыш, функционалды минимизациялоо, оптималдуулуктун шарты, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, оптималдык кыймылдуу башкаруу, термелүү процесстери.

Изилдөөнүн объектиси: Термелүү системаларын кыймылдуу оптималдуу башкаруу.

Изилдөөнүн предмети: Кыймылдуу чекиттүү башкаруу аркылуу, термелүү системаларын баштапкы абалдан каалагандай абалга, чектүү убакытта өзгөртүү.

Изилдөөнүн максаты: Системанын термелүү процессин сызыктуу эмес оптимизациялоо маселесин, таасир этүүчү кыймылдуу чекиттүү башкаруучу функциялар сызыктуу эмес болгон учурда, бир маанилүү чыгарылышка ээ болуш үчүн зарыл жана жетиштүү шарттарын табуу.

Изилдөөнүн ыкмалары: Изилдөө математикалык физиканын теңдемелеринин чыгаруунун ыкмаларын, параметрлери бөлүштүрүлгөн системаларды оптималдуу башкаруу теориясынын, функционалдык талдоонун жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин теориясынын ыкмаларын колдонуу менен жүргүзүлдү.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү:

- Башкаруусу кыймылдуу болгон учурдагы, «термелүү процессинин башкарылуучу четки маселеси солгун жалпыланган чыгарылыш» түшүнүгүн пайдалануу менен изилденген;
- Сырткы кыймылдуу булактары сызыктуу эмес функциялар болгон, толкундуу теңдеменин четки маселесинин солгун жалпыланган жакын-даштырылып чыгарылышы резольвента боюнча жыйналары далилденген;
- Кыймылдуу вектордук башкаруудагы термелүү процессин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин, минималдаштыруучу функционал-дары квадраттык жана бөлүктүү-сызыктуу болгон учурда, каалагандай тактыкта жакындаштырып чыгаруунун алгоритми иштелип чыккан;

Алынган жыйынтыктардын теориялык мааниси чоң жана бөлүштүрүлгөн параметрлери бар системаларды сызыктуу эмес оптималдаштырууну изилдөөдө керектелет.

Изилдөөнүн практикалык маанилүүлүгү: Кыймылдуу чекиттүү булактары бар термелүү процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чыгаруу боюнча иштелип чыккан ыкма конструктивдүү жана кыймылдуу башкаруусу бар толкундуу процесстерге келүүчү прикладдык жана өндүрүштүк маселелерди чыгарууга колдонууга болот.

SUMMARY

Dissertation "The point movable nonlinear optimal control of the oscillation processes" of Karabakirov Kubat Rymbekovich is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: weak generalized solution, minimization of functional, optimality condition, nonlinear integral equation, the optimal movable control, oscillation processes.

Object of research is the movable optimal control of the oscillation processes.

Subject of research is to transform of oscillation system from the initial state to the desired state for the finite time by the point movable controls.

Purpose of the work is to establish the necessary and sufficient conditions of the unique solvability of nonlinear optimization problems for the oscillation processes in case of the point movable controls described by nonlinear functions.

Research methodology. The methods of solving of equations of mathematical physics, methods of the optimal control theory of the distributed parameters systems, methods of integral equations and functional analysis are used in this research work.

Scientific novelty and theoretical significance of research

- Research is perfomed using the notion of "weak generalized solution of the boundary value problem of the control processes" in case of movable controls of the oscillation processes;
- The convergence of resolvent approximations for the obtained weak generalized solution of the boundary value problem for the wave equation, when the functions of external movable sources depend nonlinearly on the controls is proved;
- The constructive algorithm of approximate solution of nonlinear optimization problem with point movable control for the oscillation processes in case of minimization the quadratic and piecewise linear functionals was developed;

The obtained results have the great theoretical significance and are interesting to research problems of nonlinear optimization of distributed parameters systems.

The practical significance of research. The developed method of solving the nonlinear optimization problem for the oscillation processes with the point movable sources is constructive and can be used for solving applied and industrial problems concerned the wave processes movable control.