КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ им. Б.Н. ЕЛЬЦИНА

На правах рукописи

УДК 517.97; (575.2) (04); 62-50

НАМЕТКУЛОВА РАЙХАН ЖАНУЗАКОВНА

НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор Керимбеков Акылбек

Бишкек – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В приложениях встречаются прикладные задачи, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных [18,19,22,76,77,80,82]. Такие задачи можно исследовать методами теории оптимального управления для распределенных систем. В этом направлении имеется лишь небольшое количество работ [78,79,81], где исследования проводились когда функция управления линейно входит в правую часть уравнения или в граничные условия. На практике часто встречаются прикладные задачи, математическое описание которых приводит к задачам управления, где функция внешнего или граничного влияния является нелинейной относительно управляющих параметров. Такие задачи, встречающиеся при управлении технологическими процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными мало изучены, и создание оптимальных методов их решения, а также методов качественного исследования их являются актуальными задачами теории оптимального управления для распределенных систем.

Формирование основ теории оптимального управления для распределенных систем осуществлялось в 60-е годы прошлого столетия работами А.Г. Бутковского [10-13], А.И. Егорова [21-25], Т.К. Сиразетдинова [72] и др. В настоящее время теория получила широкое развитие и проникает в различные отрасли науки. Разрабатываются новые методы исследования и алгоритмы построения решения задачи оптимального управления для распределенных систем.

В диссертации исследована задача управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа когда функция внешнего влияяния является нелинейной относительно распределенного управления. В этом направлении проводились исследования в работах [27]-[31], [33]-[35], [37]-[42], [69]-[71].

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми

научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках научного проекта № КР-05 (номер гос.регистрации № 0006988) «Математическое обеспечение процессов управления энерго-массопереносами, происходящими в линиях передач, и продукционными почво-растительными системами» МОиН КР.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование задач нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае распределенного и равномерно распределенного управлений и получение достаточных условий существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации. Решены следующие задачи:

- построить слабообобщенное решение краевой задачи в случаях распределенного и равномерно распределенного управлений тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями;
- получить условия оптимальности при минимизации интегрального обобщенного квадратичного функционала и нелинейные интегральные уравнения оптимального распределенного и равномерно распределенного управлений и исследовать их разрешимость;
- построить решение задачи нелинейной оптимизации при распределенном и равномерно распределенном управлениях и исследовать сходимость их приближений по управлению, оптимальному процессу и функционалу;
- привести численный пример, подтверждающий полученные теоретические результаты.

Научная новизна работы. На примере распределенного и равномерно распределенного управлений тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, впервые разработан алгоритм построения решения нелинейной задачи оптимизации и его приближений.

Получены следующие результаты:

- установлено, что коэффициенты Фурье слабообобщенного решения основной и сопряженной краевых задач можно определить как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода;
- установлено, что интервалы сходимости рядов Неймана при построении слабообобщенных решений основной и сопряженной краевых задач, расширяются с увеличением номера n=1,2,3,… коэффициентов Фурье;
- указаны классы функций внешнего влияния, где задачи нелинейной оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями имеют решения;
- получены нелинейные интегральные уравнения оптимального распределенного и равномерно распределенного управлений, и исследована их однозначная разрешимость;
- найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, при распределенном и равномерно распределенном управлениях;
- разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана их сходимость по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу, как в случае распределенного, так и в случае равномерно распределенного управления.

Теоретические результаты данного исследования получены впервые и являются новыми в теории оптимального управления тепловыми процессами, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае распределенного и равномерно распределенного управлений.

Теоретическая и практическая ценность. Разработанный алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при нелинейном распределенном и равномерно распределенном управлениях может быть использован в приложениях, например, в задачах управления технологическими процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа. Полученные теоретические выводы представляют интерес в теории оптимального управления для распределенных систем и применимы для развития методов качественного исследования и при разработке конструктивных методов решения нелинейных задач оптимизации.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- определение коэффициентов Фурье слабообобщенного решения основной и сопряженной краевых задач как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода в задачах оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями;

- определение радиусов сходимости рядов Неймана при построении слабообобщенных решений основной и сопряженной краевых задач при каждом фиксированном номере n=1,2,3,… коэффициентов Фурье в задачах оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями;

- увеличение радиусов сходимости рядов Неймана с ростом индекса n=1,2,3,… коэффициентов Фурье в задачах оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями при построении решений основной и сопряженной краевых задач;

- определение класса функций внешнего влияния в задачах оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями, где функция управления является оптимальной;

- получение нелинейных интегральных уравнений оптимального распределенного и равномерно распределенного управлений, и исследование существования и единственности их решения.

- нахождение достаточных условий существования и единственности решения задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, при распределенном и равномерно распределенном управлениях;

- разработка алгоритма построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказательство их сходимости по управлению, оптимальному процессу и функционалу, как в случае распределенного, так и в случае равномерно распределенного управления.

- результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы.

Личный вклад соискателя. По результатам исследований опубликовано 10 статей, 2 тезиса, из них 5 статей, опубликованных зарубежом, 3 из которых входят в базу Web of Science (2 в РИНЦ и 1 с импакт-фактором 1,23 входит в базу Thomson). В опубликованных работах в соавторстве, постановка задачи принадлежит научному руководителю, а основные результаты: построение полного решения задачи нелинейной оптимизации и их приближений, а также сходимость приближений, численная реализация теоретических выводов на модельном примере принадлежит соискателю.

Апробации результатов диссертации. Результаты исследований докладывались на международных конференциях, симпозиумах и межвузовских, вузовских конференциях:

– 2-я международная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Кыргызстан, Булан-Соготту, 5-7 сентября 2013;
– Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Shymkent, Kazakstan, September 11-13, 2014;
– международная научно-практическая конференция «Информационные технологии: Инновации в науке и образовании». Казахстан, Актобе, 19-21 февраля, 2015.
– республиканская научно-практическая конференция "Наука и современность - 2015", посвященной реализации Послания Президента Республики Казахстан народу Казахстана "Нурлы жол - путь в будущее". Казахстан, Тараз, 13 марта 2015.

Результаты исследований регулярно были обсуждены на научном семинаре (научный руководитель проф. Керимбеков А.К.) кафедры

«Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 10 научных статьях и в 2 тезисах, в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики – 5 статей, в реферируемых зарубежных журналах – 5 статей, из них в единоличном авторстве – 3 статьи.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, девяти разделов, заключения, списка использованной литературы, содержащего 82 наименования и приложения. Общий объем работы включает 110 страниц машинописного текста.

При изложении материала были использованы следующие обозначения:

1. (0, 1) – интервал оси Ox;
2. (0, T) – интервал оси Ot;
3. $Q=(0,1)\times(0,T)$ – область плоскости Oxt;
4. $V_t(t,x), V_x(t,x)$ – частная производная первого порядка функции $V(t,x)$ по временной переменной t и по координатной переменной x;
5. $V_{xx}(t,x)$ – частная производная второго порядка функции $V(t,x)$ по координатной переменной x;
6. $H(D)$ – пространство Гильберта квадратично суммируемых функций, определенных на множестве D;
7. $\|\cdot\|_H$ – норма элемента гильбертова пространства H;
8. $\langle\ \cdot,\ \cdot\ \rangle$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве H.

Содержание диссертации. Материалы исследований опубликованы в работах [51-63] и изложены в следующем порядке.

В ГЛАВЕ 0 приведены примеры задач, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями и сделан краткий обзор работ, по содержанию примыкающих к теме данной диссертационной работы.

В ГЛАВЕ I исследована задача нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовым интегро-дифференциальным уравнением когда функция внешнего влияния является нелинейной относительно распределенного управления. Качество управления здесь оценивается обощенным квадратичным функционалом. Подробно изложена процедура построения слабообобщенного решения краевой задачи управляемого процесса на основе интегрального тождества, эквивалентного краевой задаче.

Сформулирован принцип максимума для рассматриваемой задачи и получены условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства относительно функции внешнего теплового потока. Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации с распределенным управлением. Разработан алгоритм построения точного решения задачи нелинейной оптимизации в виде тройки $\left(u^0(t,x), \nu^0(x,t), J(u^0(t,x)\right)$ и приближенных решений. Доказана сходимость приближенного решения задачи нелинейной оптимизации по управлению, оптимальному процессу и функционалу.

Рассматривается следующая задача оптимизации: найти минимальное значение интегрального обобщенного квадратичного функционала

$$J[u(t,x)] = \int_0^1 [\nu(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2(t,x,u(t,x))dxdt\,, \qquad (0.1)$$

в котором функция $\nu(t,x)$ является решением краевой задачи

$$\nu_t = \nu_{xx} + \lambda \int_0^T K(t,\tau)\nu(\tau,x)d\tau + f[t,x,u(t,x)], \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T \qquad (0.2)$$

$$\nu(0,x) = \psi(x), \qquad 0<x<1, \qquad (0.3)$$

$$\nu_x(t,0) = 0, \qquad \nu_x(t,1) + \alpha\nu(t,1) = 0. \qquad (0.4)$$

Здесь заданная функция $K(t,\tau)$ является определенной в области $D=\{0\le t\le T, 0\le\tau\le T\}$ и

$$\int_0^T\int_0^T K^2\left(t,\tau\right)d\tau dt = K_0 < \infty; \qquad (0.5)$$

функции $\xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$, $q\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]\in H\left(Q\right)$ считаются известными, причем $q\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]$ по функциональной переменной $u\left(t,x\right)$ является выпуклой функцией; нелинейная по функциональной переменной $u(t,x)\in H(Q)$ функция $f[t,x,u(t,x)]\in H(Q)$ известна и для нее справедливо условие монотонности

$$f_u[t,x,u(t,x)]\neq 0, \quad \forall (t,x)\in Q=(0,1)\times(0,T)\ ; \qquad (0.6)$$

λ - параметр, момент времени T фиксирован, $\alpha > 0$, $H(Y)$ - пространство Гильберта, составленное из функций, которые определены на множестве Y, и суммируемы с квадратом.

При исследовании задачи оптимизации использовано понятие слабообобщенного решения $v(t,x)\in H(Q)$ краевой задачи (0.2)-(0.6). Вычислено приращение функционала

$$\begin{aligned}\Delta J[u] = &-\int_0^T\int_0^1 \{\omega(t,x)(f[t,x,u+\Delta u]-f[t,x,u])-\beta\left[q^2\left(t,x,u+\Delta u\right)-q^2\left(t,x,u\right)\right]\}dxdt + \\ &+\int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx = -\int_0^T\int_0^1 \Delta\Pi(t,x,\omega(t,x),v(t,x),u(t,x))dxdt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx,\end{aligned} \qquad (0.7)$$

где

$$\Pi(t,x,\omega(t,x),v(t,x),u(t,x)) = \omega(t,x)f[t,x,u(t,x)] - \beta q^2(t,x,u(t,x)), \qquad (0.8)$$

а $\omega(t,x)\in H(Q)$ является единственным слабообобщенным решением (соответствующим управлению $u(t,x)\in H(Q)$) краевой задачи вида

$$\omega_t + \omega_{xx} = -\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau,\ \ 0<x<1,\ \ 0\le t<T, \qquad (0.9)$$

$$\omega(T,x)+2[v(T,x)-\xi(x)]=0, \quad 0<x<1, \qquad (0.10)$$

$$\omega_x(t,0)=0, \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0, \quad 0\le t<T, \qquad (0.11)$$

которая сопряжена с основной краевой задачей (0.2)-(0.4). Эта задача решается аналогично основной краевой задаче.

Сформулирован принцип максимума: для оптимальности управления $u^0(t,x)\in H(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы было справедливо почти всюду в области Q соотношение:

$$\Pi\left(t,x,\omega^0(t,x),\nu^0(t,x),u^0(t,x)\right)\quad(=)\quad\sup_{u\in Z}\Pi\left(t,x,\omega^0(t,x),\nu^0(t,x),u\right),$$

где через Z обозначена область допустимых значений функции $u(t,x)$.

Отметим, что для нестрогого доказательства принципа максимума используется неравенство

$$\Delta\Pi\left(t,x,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t,x)\right)=\Pi\left(t,x,\cdots,u(t,x)+\Delta u(t,x)\right)-\Pi\left(t,x,\cdots,u(t,x)\right)\le 0.$$

Для строгого доказательства можно использовать классическую схему профессора А.И.Егорова [22], и здесь это доказательство приводить не будем.

Решая для функции (0.8) экстремальную задачу на безусловный максимум, получим необходимые условия первого и второго порядков в виде следующих соотношений

$$\begin{aligned}&\Pi_u[t,x,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t,x)]=\omega(t,x)f_u[t,x,u(t,x)]-\\&-2\beta q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))=0,\end{aligned}\tag{0.12}$$

$$\begin{aligned}&\Pi_{uu}[t,x,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t,x)]=\omega(t,x)f_{uu}[t,x,u(t,x)]-\\&-2\beta\left[q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))\right]_u<0.\end{aligned}\tag{0.13}$$

Эти соотношения - *условия оптимальности.*

Для нахождения оптимального управления используется соотношение

$$2\beta\frac{q\left(t,x,u\left(t,x\right)\right)q_u\left(t,x,u\left(t,x\right)\right)}{f_u\left(t,x,u\left(t,x\right)\right)}=\omega(t,x),\tag{0.14}$$

где

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}[\nu_n(T)-\xi_n](e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\tilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds)z_n(x).\tag{0.15}$$

Согласно (0.14), (0.15) получим нелинейное интегральное уравнение вида

$$\beta\frac{q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\int_0^T G_n(\tau)\int_0^1 f(\tau,y,u(\tau,y))z_n(y)dyd\tau z_n(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)h_n z_n(x), \quad (0.16)$$

где

$$G_n(t)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds,$$

$$G_n^*(t)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T \tilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds,$$

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right),$$

$R_n(t,s,\lambda)$, $\tilde{R}_n(s,t,\lambda)$ - резольвенты, полученные при решении основной и сопряженной краевых задач, для которых справедливы следующие оценки

$$\int_\tau^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\le\frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T})^2},\quad \int_0^T \tilde{R}_n^2(s,t,\lambda)ds\le\frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T})^2}.$$

Однозначная разрешимость нелинейного интегрального уравнения (0.16) исследована с использованием метода, разработанного профессором Керимбековым А. [32].

В силу соотношений

$$\beta\frac{q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))}=p(t,x),$$

$$u(t,x)=\varphi(t,x,p(t,x),\beta), \quad (0.17)$$

уравнение (0.16) приведено к виду

$$p(t,x)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\int_0^T G_n(\tau)\int_0^1 f(\tau,y,\varphi(\tau,y,p(\tau,y),\beta))z_n(y)dyd\tau z_n(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)h_n z_n(x). \quad (0.18)$$

Доказано, что при условиях

$$\left\|f\left[t,x,u(t,x)\right]-f\left[t,x,\tilde{u}(t,x)\right]\right\|_{H(Q)}\le f_0\left\|u(t,x)-\tilde{u}(t,x)\right\|_{H(Q)},\quad f_0>0,$$

$$\left\|\varphi\left[t,x,p(t,x),\beta\right]-\varphi\left[t,x,\tilde{p}(t,x),\beta\right]\right\|_{H(Q)}\le\varphi_0(\beta)\left\|p(t,x)-\tilde{p}(t,x)\right\|_{H(Q)},\quad \varphi_0(\beta)>0.$$

$$\gamma = \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T})^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^4} + \frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} f_0 \varphi_0(\beta) < 1,$$

где f_0, $\varphi_0(\beta)$ - положительные константы, уравнение (0.18) имеет единственное решение в пространстве $H(Q)$, для которого справедлива оценка

$$\left\| p^0(t,x) - p_n(t,x) \right\|_{H(Q)} \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \left\| h(t,x) + G_0[p_0(t,x)] - p_0(t,x) \right\|_{H(Q)}.$$

Здесь $p^0(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(t,x)$ - точное решение уравнения (0.18), а $p_0(t,x)$ - произвольный элемент пространства $H(Q)$, а $p_n(t,x)$ - приближения точного решения. (Теорема).

Согласно (0.17) оптимальное управление, как решение нелинейного интегрального уравнения (0.16), можно определить следующим образом

$$u^0(t,x) = \varphi\left[t, x, p^0(t,x), \beta\right].$$

Установлено, что решение краевой задачи (0.2)-(0.5), соответствующее оптимальному управлению $u^0(t,x)$ имеет вид

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n^0(s)\, ds + a_n^0(t) \right\} z_n(x),$$

где

$$a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} f_n\left[\tau, u^0\right] d\tau =$$

$$= e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \int_0^1 f(\tau, y, u^0(\tau, y) z_n(y) dy d\tau.$$

Это решение назовем *оптимальным процессом*. Тогда минимальным значением функционала (0.1) будет:

$$J[u^0(t,x)] = \int_0^1 [v^0(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2(t,x,u^0(t,x)) dx dt.$$

Таким образом, полным решеним задачи нелинейной оптимизации (0.1)-(0.6) будет тройка $\left(u^0(t,x), v^0(t,x), J(u^0(t,x)\right)$.

n-е приближение оптимальной управляющей функции находится следующим образом

$$u_n(t,x)=\varphi\left[t,x,p_n(t,x),\beta\right],\quad n=1,2,3,...,$$

где $p_n(t,x)$ - приближенное решение уравнения (0.18).

Далее получено соотношение

$$\left\|u^0(t,x)-u_n(t,x)\right\|_{H(Q)}=$$
$$=\left\|\varphi(t,x,p^0(t,x),\beta)-\varphi(t,x,p_n(t,x),\beta)\right\|_{H(Q)}\le\varphi_0(\beta)\left\|p^0(t,x)-p_n(t,x)\right\|_{H(Q)}\le$$
$$\le\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|h(t,x)+G_0[p_0(t,x)]-p_0(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

которое доказывает сходимость приближений оптимального управления.

Далее, из соотношений

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\le$$
$$\le\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)+\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)+\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\le$$
$$\le\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}+\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}+\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\xrightarrow[m,k,r\to 0]{}0,$$

следует сходимость приближения $\nu_k^{m,r}(t,x)$ к оптимальному процессу $\nu^0(t,x)$. Здесь $\nu^m(t,x)$ - приближения оптимального процесса по резольвенте, а $\nu_k^m(t,x)$ - приближения оптимального процесса и по резольвенте, и по оптимальному управлению.

Далее

$$\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right|\le\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u^0(t,x)\right]+J_m\left[u^0(t,x)\right]-\right.$$
$$\left.-J_m\left[u_k(t,x)\right]+J_m\left[u_k(t,x)\right]-J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right|\le$$
$$\le\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u^0(t,x)\right]\right|+\left|J_m\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u_k(t,x)\right]\right|+$$
$$+\left|J_m\left[u_k(t,x)\right]-J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$$

т.е. приближение $J_m^r\left[u_k(t,x)\right]$ - сходящееся к минимальному значению функционала $J\left[u^0(t,x)\right]$.

В ГЛАВЕ II исследованы вопросы существования и единственности решения нелинейной задачи равномерно распределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальным уравнениями. При распределенном управлении интенсивность извне действующего теплового потока в каждой точке управляемого объекта меняется с течением времени. Равномерно распределенное управление отличается от распределенного управления тем, что, в этом случае, интенсивность извне действующего теплового потока также меняется с течением времени, однако она одинакова в каждой точке управляемого объекта. При этом качество управления оценивается квадратичным функционалом. Сформулирован принцип максимума для рассматриваемой задачи и получены условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства относительно функции внешнего теплового потока. Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации с равномерно распределенным управлением. Как и в главе I, разработан алгоритм построения точного и приближенных решений задачи нелинейной оптимизации, и доказана сходимость приближенных решений.

В пункте 2.1 рассматривается задача нелинейной оптимизации, в которой требуется найти минимальное значение интегрального обобщенного квадратичного функционала

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u\left(t\right)\right)dt,\beta>0, \tag{0.19}$$

в котором функция $v(t,x)$ является решением краевой задачи

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^T K\left(t,\tau\right)v\left(\tau,x\right)d\tau+g\left(t,x\right)f[t,u\left(t\right)],\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T, \tag{0.20}$$

$$v\left(0,x\right)=\psi\left(x\right),\quad 0<x<1, \tag{0.21}$$

$$v_x\left(t,0\right)=0,\quad v_x\left(t,1\right)+\alpha v\left(t,1\right)=0,\quad 0<t\le T. \tag{0.22}$$

В этой задаче исходные данные имеют те же характеристики, что и в задаче первой главы, лишь с той разницей, что здесь рассматривается равномерно распределенное управление.

Вычислено приращение функционала (0.19)

$$\Delta J[u] = J\left[u+\Delta u\right] - J[u] = -\int_0^T \Delta \prod\left[t, \nu(t,x), \omega(t,x), u(t)\right]dt + \int_0^1 \Delta \nu^2(T,x)dx, \quad (0.23)$$

где

$$\Delta \prod(t,\nu,\omega,u) = \prod\left(t,\nu(t,x),\omega(t,x),u(t)+\Delta u(t)\right) - \prod\left(t,\nu(t,x),\omega(t,x),u(t)\right),$$

$$\prod(t,\nu(t,x),\omega(t,x),u(t)) = \int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dxf\left[t,u(t)\right] - \beta q^2(t,u(t)), \quad (0.24)$$

а функция $\omega(t,x)$ - слабообобщенное решение сопряженной краевой задачи (0.9)-(0.11), где управление $u(t,x)$ заменено на $u(t)$, т.е. имеет вид

$$\omega(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_n(T) - \xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(x). \quad (0.25)$$

Для рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации сформулирован принцип максимума:

Для оптимальности управления $u^0(t) \in H(0,T)$ в задаче оптимизации (0.19)-(0.22) необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на отрезке [0, *T*] выполнялось соотношение

$$\prod(t,\nu^0(t,x),\omega^0(t,x),u^0(t)) \quad (=) \quad \sup_{u\in W}\prod(t,\nu^0(t,x),\omega^0(t,x),u).$$

Вследствие принципа максимума оптимальное управление находится из следующих выражений

$$2\beta q\left(t,u(t)\right)q_u\left(t,u(t)\right)f_u^{-1}\left(t,u(t)\right) = \int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx,$$

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dxf_{uu}\left[t,u(t)\right] - 2\beta\left(q\left(t,u(t)\right)q_u\left(t,u(t)\right)\right)_u < 0,$$

которые выполняются одновременно (на оптимальном управлении) и называемых *условиями оптимальности*.

После исключения $\omega(t,x)$ второе условие оптимальности примет вид

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{q\left(t,u\left(t\right)\right)q_u\left(t,u\left(t\right)\right)}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u > 0.$$

Данное условие является ограничением классов функций внешнего влияния и означает, что задача нелинейной оптимизации разрешима только в классе функций $\{f\,(t,u(t))\}$, удовлетворяющих этому условию, при заданной функции $q\left(t,u\left(t\right)\right)$.

Установлено, что оптимальное управление можно определять как решение уравнения

$$\begin{gathered}\beta q\left(t,u\left(t\right)\right)q_u\left(t,u\left(t\right)\right)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\\+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t)h_n,\end{gathered} \tag{0.26}$$

где

$$\tilde{G}_n(t,\lambda)=g_n(t)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\tilde{R}_n(\tau,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}d\tau\right],$$

$$G_n(t,\lambda)=g_n(t)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right],$$

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 T}+\lambda\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2\tau}d\tau\right].$$

Согласно известной методике [32], в силу соотношений

$$\beta q\left(t,u\left(t\right)\right)q_u\left(t,u\left(t\right)\right)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=p(t), \tag{0.27}$$

$$u(t)=\varphi(t,p(t),\beta),$$

интегральное уравнение (0.26) приводится к виду

$$p(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t)h_n\,. \tag{0.28}$$

Доказано, что при условиях

$$\|\,f[t,u(t)]-f[t,\bar{u}(t)]\,\|_{H(0,T)}\le f_0\,\|\,u(t)-\bar{u}(t)\,\|_{H(0,T)},\quad f_0>0,$$

$$\| \varphi[t,p(t),\beta]-\varphi[t,\overline{p}(t),\beta] \|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \| p(t)-\overline{p}(t) \|_{H(0,T)}, \quad \varphi_0(\beta)>0 .$$

$$\gamma = \| g(t,x) \|^2_{H(Q)} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1,$$

уравнение (0.26) в гильбертовом пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.

Для решения уравнения (0.28) используется метод последовательных приближений

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1,2,3,...,$$

где $p_0(t)$ - произвольный элемент пространства $H(0,T)$, причем справедлива оценка

$$\| \overline{p}(t) - p_n(t) \|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \| G[p_0(t)] - p_0(t) \|_{H(0,T)},$$

где $\overline{p}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(t) -$ точное решение уравнения (0.28).

Искомое оптимальное управление, согласно (0.27), имеет вид

$$u^0(t) = \varphi\left[t, \overline{p}(t), \beta \right].$$

Полным решением нелинейной задачи равномерно распределенного управления тепловыми процесами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уранениями является построенная тройка $\left(u^0(t), v^0(t,x), J[u^0(t)] \right)$, где

$$u^0(t) = \varphi\left[t, \overline{p}(t), \beta \right]$$

- оптимальное управление;

$$\nu^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T \varepsilon_n(t,\tau,\lambda)\mathrm{g}_n(\tau)f\left(\tau,u^0(\tau)\right)d\tau\right\}z_n(x),$$

$$\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t\le\tau\le T.\end{cases}$$

- оптимальный процесс;

$$J[u^0(t)]=\int_0^1\left[\nu^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u^0(t)\right)dt.$$

- минимальное значение функционала.

Далее, доказано, что

1) $\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}=\left\|\varphi[t,p^0(t),\beta]-\varphi[t,p_k(t),\beta]\right\|_{H(0,T)}\le$

$\le\varphi_0(\beta)\left\|p^0(t)-p_k(t)\right\|_{H(0,T)}\le\varphi_0(\beta)\dfrac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[p_0(t)]-p_0(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$

2) $\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$

$+\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to 0]{}0,$

3) $\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right|+$

$+\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|+\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0.$

Т.е., приближенное решение $\left(u_k(t),\nu_k^{m,r}(t,x),J_m^r[u_k(t)]\right)$ задачи оптимального управления - сходящееся к точному решению $\left(u^0(t),\nu^0(t,x),J[u^0(t)]\right)$.

В ГЛАВЕ III на модельном примере приведены результаты численных расчетов, подтверждающие полученные теоретические результаты.

ГЛАВА 0. ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ, ПРИМЫКАЮЩИХ К ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В этой главе изложены некоторые задачи, приводящие к интегро-дифференциальным уравнениям. Отмечаем, что задачи оптимального управления диффузионными и тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями когда управляющие параметры нелинейно входят в интегро-дифференциальное уравнение, почти не изучены, т.е. не были разработаны методы их решения. Имеется лишь несколько работ, например [78-81], где были исследованы задачи управления при линейном входе управляющих параметров в интегро-дифференциальное уравнение или в граничное условие. Сделан краткий обзор работ по решению задач управлений, по содержанию примыкающих к теме диссертации.

0.1. Примеры задач, приводящих к интегро-дифференциальным уравнениям

Выше было отмечено, что в работах [18,19,22,68,76,77,80,82] даны описания задач, приводящих к интегро-дифференциальным уравнениям с частными производными. Здесь мы укажем на некоторые задачи, описываемые посредством интегро-дифференциальных уравнений.

1. Уравнение диффузии нейтронов ([22], стр. 48-51). Пусть область Ω с границей S заполнена замедлителем (например водой), в котором произвольным способом размещены молекулы урана. Атомы урана в результате ядерных превращений выбрасывают нейтроны, которые при движении в замедлителе практически разделяются на две группы. Нейтроны первой группы, не успев потерять своей энергии, сталкиваются с другими ядрами и вызывают их деление. В результате таких столкновений зарождаются новые нейтроны. Вторая группа нейтронов при движении в замедлителе теряет значительную часть своей энергии и в конце концов их энергия становится сравнимой с кинетической энергией молекул замедлителя. В дальнейшем энергия таких нейтронов не уменьшается. Они либо поглощаются ядрами урана, либо продолжают перемещаться в замедлителе. Эти нейтроны называются тепловыми. Обозначим их плотность через N.

Тогда уравнение, описывающее диффузию таких нейтронов в предположении, что все тепловые нейтроны имеют одинаковую по величине (но не по направлению!) скорость, имеют вид

$$\frac{\partial N(t,M)}{\partial t}=\operatorname{div}\left(D\operatorname{grad} N\right)-\frac{1}{T_0}N+$$
$$+\frac{1}{T_0}\iiint\limits_{\Omega}k\left(M\right)_1 W\left(M,M_1\right)N\left(t,M_1\right)d\Omega\left(M_1\right)$$

которое должно выполняться при всех $M\in\Omega$, где M_1 - некоторая точка области Ω. Это уравнение является интегро-дифференциальным уравнением параболического типа относительно неизвестной функции $N\left(t,M\right)$.

2. Уравнение односкоростного переноса частиц ([22], стр. 56-61). В предыдущем пункте получено уравнение диффузии тепловых нейтронов в предположении, что потоки нейтронов подчиняются закону Фика, а их плотность не зависит от их скорости. Однако практика показывает, что это предположение не оправдывается, если плотность нейтронов значительно изменяется на протяжении длины свободного пробега частиц. Если рассматривать вопрос о математическом описании движения тепловых нейтронов в предположении, что все нейтроны имеют постоянную по величине (но по направлению) скорость υ, а плотность N нейтронов зависит от этой скорости, то есть $N\left(t,M,\upsilon\right)$, а также предполагать, что рассматриваемые нейтроны при столкновении с ядрами не изменяют свою энергию, а изменяют лишь направление скорости, то получаем интегро-дифференциальное уравнение линейной теории односкоростного переноса тепловых нейтронов *(транспортное уравнение Больцмана)*

$$\frac{\partial N(t,M,\upsilon)}{\partial t} + \left(\upsilon, \operatorname{grad} N\right) + \frac{\upsilon}{l} N =$$
$$= \frac{\upsilon}{4\pi l_s} \iint g\left(\upsilon^1, \upsilon\right)_1 N(t,M,\upsilon^1) d\upsilon^1 + Q.$$

3. Уравнение переноса нейтронов в слое ([68], стр. 410). Рассмотрим перенос нейтронов в однородном слое материала, занимающего область $-a \le x \le a,\ \ y, z$ произвольны. Предположим, что рассеяние является упругим и изотропным и что все нейтроны имеют одну и ту же скорость v. Пусть θ - угол между вектором скорости нейтронов и осью *x*, и пусть $\mu = \cos\theta$. Обозначим через $\Psi(x,\mu,t)$ плотность нейтронов (плотность числа частиц) в фазовом пространстве в точке *x* в направлении θ и в момент времени *t*; педполагается, что эта плотность не зависит от *y* и *z* и от угла φ по азимуту вокруг оси *x*. Уравнением эволюции этой системы является так называемое уравнение переноса нейтронов

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Psi(x,\mu,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \Psi(x,\mu,t)}{\partial x} + \sigma \Psi(x,\mu,t) = \sigma \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} \Psi(x,\mu',t)\, d\mu',$$

где σ - полное ядерное сечение, отнесенное к единице объема ($1/\sigma$ является величиной среднего свободного пробега), *c* – среднее число частиц, появляющихся после столкновения (*c*=1 при чистом рассеянии, *c*<1 для рассеяния с поглощением, *c* > 1 для размножающей среды).

0.2. Краткий обзор исследований, примыкающих к теме диссертации

Как было выше отмечено, имеется лишь несколько работ [78,79,81], где исследованы задачи оптимального управления для распределенных систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями.

В работе [78] исследована задача управления колебательным процессом, описываемым интегро-дифференциальным уравнением типа свертки когда параметры управления линейно содержатся как в уравнении, так и в граничных условиях. Для решения задачи управления использовано преобразование Фурье. Получены условия оптимальности, и установлены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи управления. Приведены результаты численных расчетов.

В работе [79] исследована задача управления диффузионными и тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом (по времени). Получены необходимые и достаточные условия оптимальности когда оптимальное управление стеснено ограничением.

В работе [81] исследована линейно-квадратичная задача управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями, для решения которой был использован метод конечных элементов. Получены условия оптимальности и установлены априорные оценки погрешности для приближенного оптимального управления.

В случае, когда функции управления нелинейно входят в интегро-дифференциальное уравнение краевой задачи, исследования проводились в следующих работах [27]-[31], [33]-[35], [37]-[42], [69]-[71], на основе метода, разработанного профессором А.Керимбековым.

В работах [27-31] исследованы задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов с нелинейными граничными управлениями когда управляемый процесс описывается фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, в частности рассмотрена задача нелинейной оптимизации, в которой требуется найти минимальное значение кусочно-линейного интегрального функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T |u(t)| dt, \beta > 0,$$

в котором функция $v(t,x)$ является решением краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + g(t,x) \ ,$$

$$v(0,x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1$$

$$v_x(t,0) = 0, \qquad v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = f[t,u(t)], \quad 0 < t \le T,$$

где $v(t,x)$ - искомая функция, $u(t)$ – функция граничного управления, остальные функции считаются известными.

Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения приближенного решения нелинейной задачи оптимального управления и доказана его сходимость к точному решению.

В работах [33-35, 37] исследованы задачи управления тепловыми процессами, описываемым фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями с управлением, нелинейно входящим в граничное условие, в частности, рассмотрена задача нелинейной оптимизации, в которой требуется найти минимальное значение квадратичного интегрального функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T u^2(t)dt, \beta > 0,$$

в котором функция $v(t,x)$ является решением краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + g(t,x) \ ,$$

$$v(0,x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1$$

$$v_x(t,0) = 0, \quad v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = f[t,u(t)], \quad 0 < t \le T,$$

где $v(t,x)$ - искомая функция, $u(t)$ – функция граничного управления, остальные функции считаются известными.

В работах [38-42, 69-71] исследованы задачи управления тепловыми процессами, описываемым вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с управлениями, нелинейно входящими в граничные условия, в частности, рассмотрена задача нелинейной оптимизации, в которой требуется найти минимальное значение квадратичного интегрального функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t)dt, \beta > 0,$$

в котором функция $v(t,x)$ является решением краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^t K(t,\tau) v(\tau,x) d\tau + g(t,x) \ ,$$

$$v(0,x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1$$

$$v_x(t,0) = 0, \qquad v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = f[t,u(t)], \quad 0 < t \le T,$$

где $v(t,x)$ - искомая функция, $u(t)$ – функция граничного управления, остальные функции считаются известными.

В исследованиях [27]-[31], [33]-[35], [37]-[42], [69]-[71] получены условия оптимальности в виде системы двух соотношений в виде равенства и дифференциального неравенства. На основе этих условий получены нелинейное интегральное уравнение оптимального управления, и исследованы вопросы существования и единственности его решения. Получены достаточные условия существования единственного решения задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения приближенного решения и доказана его сходимость.

ГЛАВА I. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

В этой главе исследована задача нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовым интегро-дифференциальным уравнением когда функция внешнего влияния является нелинейной относительно распределенного управления. При этом качество управления оценивается обобщенным квадратичным функционалом. Подробно изложена процедура построения слабообобщенного решения краевой задачи управляемого процесса на основе интегрального тождества, эквивалентного краевой задаче.

Сформулирован принцип максимума для рассматриваемой задачи и получены условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства относительно функции внешнего теплового потока. Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации с распределенным управлением. Разработан алгоритм построения точного решения задачи нелинейной оптимизации в виде тройки $\left(u^0(t,x), v^0(x,t), J(u^0(t,x)\right)$ и приближенных решений. Доказана сходимость приближенного решения задачи нелинейной оптимизации по управлению, оптимальному процессу и функционалу.

1.1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления. Условия оптимальности

Будем рассматривать задачу оптимизации: требуется найти минимальное значение интегрального обобщенного квадратичного функционала

$$J[u(t,x)] = \int_0^1 [v(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2(t,x,u(t,x))dxdt, \tag{1.1}$$

где функция $v(t,x)$ является решением краевой задачи

$$\nu_t = \nu_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)\nu(\tau,x)d\tau + f[t,x,u(t,x)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T \tag{1.2}$$

$$\nu(0,x) = \psi(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1.3}$$

$$\nu_x(t,0) = 0, \qquad \nu_x(t,1) + \alpha\nu(t,1) = 0. \tag{1.4}$$

Здесь заданная функция $K(t,\tau)$ является определенной в области $D = \{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$ и

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt = K_0 < \infty; \tag{1.5}$$

функции $\xi(x) \in H(0,1)$, $\psi(x) \in H(0,1)$, $q[t,x,u(t,x)] \in H(Q)$ считаются известными, причем $q[t,x,u(t,x)]$ по функциональной переменной $u(t,x)$ является выпуклой функцией; нелинейная по функциональной переменной $u(t,x) \in H(Q)$ функция $f[t,x,u(t,x)] \in H(Q)$ известна, и для нее выполняется условие монотонности

$$f_u[t,x,u(t,x)] \ne 0, \quad \forall (t,x) \in Q = (0,1)\times(0,T)\ ; \tag{1.6}$$

λ - параметр, момент времени T фиксирован, $\alpha > 0$, $H(Y)$ - пространство Гильберта, составленное из функций, которые определены на множестве Y, и суммируемы с квадратом.

При исследовании задачи оптимизации будем пользоваться понятием слабообобщенного решения $\nu(t,x) \in H(Q)$ краевой задачи (1.2)-(1.6). Процедура построения слабообобщенного решения краевой задачи будет изложена в следующем пункте. Здесь, приращение функционала (1.1) вычисляется в предположении существования единственного слабообобщенного решения краевой задачи, соответствующего управлению $u(t,x) \in H(Q)$. Поскольку каждому управлению $u(t,x) \in H(Q)$ единственным образом соответствует решение $\nu(t,x)$ краевой задачи, то управлению $u(t,x) + \Delta u(t,x) \in H(Q)$, где $\Delta u(t,x)$ - приращение, соответствует решение краевой задачи (1.2)-(1.4) вида $\nu(t,x) + \Delta\nu(t,x) \in H(Q)$, т.е. решение получает приращение $\Delta\nu(t,x)$, соответствующее приращению $\Delta u(t,x)$. Учитывая это, вычисляем приращение функционала

$$\Delta J[u] = -\int_0^T\int_0^1 \{\omega(t,x)(f[t,x,u+\Delta u]-f[t,x,u])-\beta\left[q^2\left(t,x,u+\Delta u\right)-q^2\left(t,x,u\right)\right]\}dxdt +$$

$$+\int_0^1 \Delta\nu^2(T,x)dx = -\int_0^T\int_0^1 \Delta\Pi(t,x,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t,x))dxdt + \int_0^1 \Delta\nu^2(T,x)dx, \tag{1.7}$$

где

$$\Pi(t,x,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t,x)) = \omega(t,x)f[t,x,u(t,x)]-\beta q^2(t,x,u(t,x)), \tag{1.8}$$

а $\omega(t,x)\in H(Q)$ является единственным слабообобщенным решением (соответствующим управлению $u(t,x)\in H(Q)$) краевой задачи вида

$$\omega_t + \omega_{xx} = -\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau,\ 0<x<1,\quad 0\le t<T, \tag{1.9}$$

$$\omega(T,x)+2[\nu(T,x)-\xi(x)]=0,\quad 0<x<1, \tag{1.10}$$

$$\omega_x(t,0)=0, \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\quad 0\le t<T, \tag{1.11}$$

которая сопряжена с основной краевой задачей (1.2)-(1.4).

В соотношении (1.7) слагаемое $\int_0^1 \Delta\nu^2(T,x)dx$ неотрицательно. Тогда, применяя общую схему можно доказать принцип максимума: для оптимальности управления $u^0(t,x)\in H(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы было справедливо почти всюду в области Q:

$$\Pi\left(t,x,\omega^0(t,x),\nu^0(t,x),u^0(t,x)\right)\quad (=)\quad \sup_{u\in Z}\Pi\left(t,x,\omega^0(t,x),\nu^0(t,x),u\right).$$

Здесь через Z обозначено множество допустимых значений функции $u(t,x)$ в каждой точке $(t,x)\in Q$.

Заметим, что для нестрогого доказательства принципа максимума используется неравенство

$$\Delta\Pi\left(t,x,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t,x)\right) = \Pi\left(t,x,\cdots,u(t,x)+\Delta u(t,x)\right)-\Pi\left(t,x,\cdots,u(t,x)\right)\le 0.$$

Строгое доказательство можно проводить по классической схеме профессора А.И.Егорова [22], и здесь оно не приводится.

Решая для функции (1.8) экстремальную задачу на безусловный максимум, получим необходимые условия первого и второго порядков в виде следующих соотношений

$$\begin{aligned}&\Pi_u[t,x,\omega(t,x),v(t,x),u(t,x)]=\omega(t,x)f_u[t,x,u(t,x)]-\\&-2\beta q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))=0,\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}&\Pi_{uu}[t,x,\omega(t,x),v(t,x),u(t,x)]=\omega(t,x)f_{uu}[t,x,u(t,x)]-\\&-2\beta\left[q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))\right]_u<0.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Эти соотношения - *условия оптимальности.*

Условия оптимальности содержат решения сопряженной краевой задачи $\omega(t,x)$. В этой связи затрудняется проверка условия (1.13). Однако, после исключения $\omega(t,x)$ из (1.12) и (1.13), условия оптимальности (1.13) примут вид

$$f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\left(\frac{q\left(t,x,u(t,x)\right)q_u\left(t,x,u(t,x)\right)}{f_u\left[t,x,u(t,x)\right]}\right)_u>0\ . \tag{1.14}$$

Второе условие оптимальности (1.14) (или (1.13)) имеет смысл при предположении существования производной второго порядка (обобщенной или почти всюду), относительно функций $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ и $q\left[t,x,u(t,x)\right]$. Это является существенным ограничением для функции внешнего влияния, ибо задача нелинейной оптимизации разрешима только для класса функций $\{f(t,x,u(t,x))\}$, для которых выполняется условие (1.14), при заданной функции $q\left[t,x,u(t,x)\right]$. Поэтому, в дальнейших рассуждениях предполагается, что условие (1.14) выполняется $\forall u(t,x)\in H(Q)$. Тогда для нахождения оптимального управления достаточно рассмотреть лишь соотношение

$$2\beta\frac{q\left(t,x,u(t,x)\right)q_u\left(t,x,u(t,x)\right)}{f_u\left(t,x,u(t,x)\right)}=\omega(t,x). \tag{1.15}$$

1.2. Слабообобщенные решения основной и сопряженной краевых задач

Сначала рассмотрим основную краевую задачу.

1.2.1. Слабообобщенное решение основной краевой задачи управляемого процесса.

Рассмотрим краевую задачу (1.2)-(1.5), где для функции $f(t,x,u(t,x))$ выполняются условия (1.6), (1.14) при фиксированной функции управления $u(t,x)\in H(Q)$.

Для решения задачи (1.2)-(1.5) будем использовать разложение

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x). \tag{1.16}$$

Здесь функции $z_n(x)=\sqrt{\dfrac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x,\quad n\in 1,2,3,\ldots,$ определяются из соотношений

$$z''(x)+\lambda^2 z(x)=0,\qquad z'(0)=0,\qquad z'(1)+\alpha z(1)=0.$$

В свою очередь, собственные значения λ_n - положительные корни уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$, и для них выполняются условия

$$(n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1),\ \ \lambda_n\le\lambda_{n+1},\ \ \forall n\in 1,2,3,\ldots,\ \text{и}\ \ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty. \tag{1.17}$$

Легко проверяется, что соответствующая система собственных функций $\{z_n(x)\}$ - полная ортонормированная система в пространстве Гильберта $H(0,1)$.

Используя разложения

$$f[t,x,u(t,x)]=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t,u)z_n(x);\quad f_n(t,u)=\int_0^1 f[t,x,u(t,x)]z_n(x)dx$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n z_n(x);\ \ \psi_n=\int_0^1\psi(x)z_n(x)dx,$$

из (1.2) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}[v_n'(t)+\lambda_n^2 v_n(t)-\lambda\int_0^T K(t,\tau)v_n(\tau)d\tau-f_n(t,u)]z_n(x)=0.$$

Данное соотношение, в силу линейной независимости системы собственных функции $z_n(x)$, превращается в тождество, если

$$v_n'(t)+\lambda_n^2 v_n(t)=\lambda\int_0^T K(t,\tau)v_n(\tau)d\tau+f_n(t,u)],\ \ n=1,2,3,\ldots \qquad (1.18)$$

Данные уравнения рассматривают с начальными условиями

$$v_n(0)=\psi_n, \qquad n=1,2,3,\ldots \qquad (1.19)$$

Задача (1.18)-(1.19) при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots$, является задачей Коши и ее решением будет

$$v_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}(\lambda\int_0^T K(\tau,s)v_n(\text{s})ds-f_n(\tau,u))d\tau,\ \ n=1,2,3,\ldots \qquad (1.20)$$

Таким образом, функция (1.16) является решением краевой задачи (1.2) – (1.5), если коэффициент Фурье $v_n(t)$ - решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода (1.20). Такое решение краевой задачи (1.2) – (1.5) назовем *слабообобщенным решением.*

Уравнение (1.20) приводим к виду

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)v_n(s)ds+a_n(t), \qquad (1.21)$$

где функция

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau \qquad (1.22)$$

является ядром, а функция

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}f_n[\tau,u]d\tau \qquad (1.23)$$

- свободным членом интегрального уравнения.

Как известно [44], решением уравнения (1.21) является

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t). \tag{1.24}$$

Здесь функция $R_n(t,s,\lambda)$ является резольвентой интегрального уравнения и при каждом фиксированном $n = 1,2,3,...$

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s), \qquad n = 1,2,3,\ldots, \tag{1.25}$$

где функции $K_{n,i}(t,s)$ называются итерированными ядрами и находятся следующим образом

$$K_{n,i+1}(t,s) = \int_0^T K_n(t,\eta) K_{n,i}(\eta,s) d\eta, \quad K_n(t,s) = K_{n,1}(t,s), \quad i = 1,2,3,\ldots. \tag{1.26}$$

Легко проверить справедливость следующей оценки

$$|K_{n,i}(t,s)|^2 \leq \frac{(K_0 T)^{i-1}}{(2\lambda_n^2)^i} \int_0^T K^2(\eta,s) d\eta, \qquad i = 1,2,3,\ldots. \tag{1.27}$$

и сходимость ряда (1.25) для значений параметра λ

$$|\lambda| < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K_0 T}} \lambda_n.$$

Отсюда следует, что интервал сходимости ряда (1.25) расширяется при увеличении значения индекса $n = 1,2,3,...$ Далее, ряд (1.25) для значений параметра λ, для которых выполняется условие

$$|\lambda| < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K_0 T}} \lambda_1 \tag{1.28}$$

будет сходящимся при $\forall n = 1,2,3,...$. Отметим непрерывность резольвенты по совокупности аргументов, т.к. она является суммой абсолютно сходящегося ряда.

Далее, на основе следующих оценок

$$|R_n(t,s,\lambda)| \le \frac{\sqrt{\int_0^T K^2(\eta,s)\,d\eta}}{\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}},$$

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)\,ds \le \frac{1}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2} \int_0^T\int_0^T K^2(\eta,s)\,d\eta ds = \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}. \tag{1.29}$$

легко доказывается, что $v(t,x) \in H(Q)$. В самом деле, это следует из того, что

$$\int_0^T\int_0^T v^2(t,x)\,dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2(t)\,dt \le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)\,ds + a_n(t))^2\,dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^2 \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)\,ds \int_0^T a_n^2(s)\,ds + a_n^2(t) \right) dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^2 \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2} \int_0^T a_n^2(s)\,ds + a_n^2(t) \right) dt \le$$

$$\le 2\{\int_0^T \lambda^2 \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2} \left[\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)} (\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}) + \frac{T}{\lambda_1^2} \|f(t,x,u(t,x))\|^2_{H(Q)} \right] dt +$$

$$+ \|\psi(x)\|^2_{H(0,1)} (\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}) + \frac{T}{\lambda_1^2} \|f(t,x,u(t,x))\|^2_{H(Q)} \} =$$

$$= 2\left[\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)} (\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}) + \frac{T}{\lambda_1^2} \|f(t,x,u(t,x))\|^2_{H(Q)} \right] \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2} \right) < \infty.$$

1.2.2. Приближенное решение основной краевой задачи и его сходимость.

Как было установлено выше, решение краевой задачи можно находить посредством резольвенты (1.25) интегрального уравнения (1.21). На практике используют сумму не бесконечного, а усеченного ряда

$$R_n^m(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s), \qquad n = 1,2,3,..., \tag{1.30}$$

где число m можно определять из условия близости $\left|R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right|\le\varepsilon$ при заданном $\varepsilon>0$. Решение краевой задачи (1.2) – (1.5) соответствующее приближению $R_n^m(t,s,\lambda)$ определяем следующим образом

$$\nu^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right)z_n(x). \tag{1.31}$$

Докажем справедливость соотношения

$$\left\|\nu(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m\to\infty]{}0. \tag{1.32}$$

В самом деле, вычислим

$$\left\|\nu(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}^2=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_n(t)-\nu_n^m(t)\right]^2dt=$$

$$=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]a_n(s)ds\right)^2dt=$$

$$=\lambda^2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]^2ds\int_0^T a_n^2(s)dsdt=$$

$$=\lambda^2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}|K_{n,i}(t,s)|\right)^2ds\int_0^T a_n^2(s)dsdt\le$$

$$\le\lambda^2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left(\sqrt{\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta}\,\frac{1}{\sqrt{2\lambda_n^2}}\sum_{i=m+1}^{\infty}(|\lambda|\frac{\sqrt{K_0T}}{\sqrt{2\lambda_n^2}})^{i-1}\right)^2ds\int_0^T a_n^2(s)dsdt\le$$

$$\le\lambda^2\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}(|\lambda|\frac{\sqrt{K_0T}}{\sqrt{2\lambda_1^2}})^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\frac{\sqrt{K_0T}}{\sqrt{2\lambda_1^2}}}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T a_n^2(s)ds\le$$

$$\le\frac{\lambda^2K_0T}{2\lambda_n^2}\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left(\left\|\psi(x)\right\|_{H(0.1)}^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)+\frac{T}{\lambda_1^2}\left\|f\left(t,x,u(t,x)\right)\right\|_{H(Q)}^2\right)=C(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0,$$

так как $\quad |\lambda| \dfrac{\sqrt{K_0 T}}{\sqrt{2\lambda_1^2}} < 1;$

$$C(\lambda) = \frac{\lambda^2 K_0 T}{2\lambda_1^2} \left(1 - \frac{1}{\ln |\lambda| \sqrt{\dfrac{K_0 T}{2\lambda_1^2}}} \right)^2 \left(\left\| \psi(x) \right\|_{H(0,1)}^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) + \frac{T}{\lambda_1^2} \left\| f\left(t, x, u(t,x)\right) \right\|_{H(Q)}^2 \right).$$

Утверждение доказано.

1.2.3. Слабообобщенное решение сопряженной краевой задачи

Сопряженная краевая задача (1.9)-(1.11) решается аналогично основной краевой задаче, а именно ее решение ищется в виде

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x), \quad \omega_n(t) = \int_0^1 \omega(t,x) z_n(x) dx. \tag{1.33}$$

Поступая как в пункте 1.2.1, относительно $\omega_n(t)$ получим интегральное уравнение

$$\omega_n(t) = \lambda \int_0^T B_n(s,t) \omega_n(s) ds - 2e^{-\lambda_n^2 (T-t)} [\nu_n(T) - \xi_n], \tag{1.34}$$

где ядро

$$B_n(s,t) = \int_t^T e^{-\lambda_n^2 (T-t)} K(s,\tau) d\tau, \quad B_n(s,T) = 0.$$

$\nu_n(T)$ - коэффициенты Фурье функции $\nu(t,x)$, вычисленные в точке t=T.

Для линейного неоднородного интегрального уравнения (1.34) существует решение [44] вида

$$\omega_n(t) = -2[\nu_n(T) - \xi_n](e^{-\lambda_n^2 (T-t)} + \lambda \int_0^T \tilde{R}_n(s,t,\lambda) e^{-\lambda_n^2 (T-s)} ds), \tag{1.35}$$

где резольвенту $\tilde{R}_n(s,t,\lambda)$ можно определять следующим образом

$$\tilde{R}_n(s,t,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} B_{n,i}(s,t), \tag{1.36}$$

а повторные ядра $B_{n,i}(s,t)$ - по формулам

$$B_{n,i+1}(s,t)=\int_0^T B_n(\eta,t)B_{n,i}(s,\eta)d\eta,\quad n=1,2,3,...,\quad B_n(s,t)=B_{n,1}(s,t).$$

Непосредственно доказываются оценки

$$\left|B_n(s,t)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\lambda_n^2}}\left(\int_0^T K(s,\tau)d\tau\right)^{1/2},$$

$$\left|B_{n,i}(s,t)\right|^2\le\frac{(K_0T)^{i-1}}{(2\lambda_n^2)^i}\int_0^T K^2(s,\tau)d\tau,\quad n=1,2,3,....$$

На основе этих неравенств устанавливается, что ряд (1.36) при условии (1.28) является сходящимся равномерно, а $\tilde{R}_n(s,t,\lambda)$ является непрерывной функцией по совокупности аргументов. Функция вида

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}[\nu_n(T)-\xi_n](e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\tilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds)z_n(x)\qquad(1.37)$$

является слабообобщенным решением сопряженной краевой задачи.

На основе следующих оценок

$$\left|\tilde{R}_n(s,t,\lambda)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}}(\int_0^T K^2(s,\tau)d\tau)^{1/2},$$

$$\int_0^T\left|\tilde{R}_n(s,t,\lambda)\right|^2ds\le\frac{1}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T})^2}\int_0^T\int_0^T K^2(s,\tau)d\tau ds=\frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T})^2},$$

доказано, что функция $\omega(t,x)$ как слабообобщенное решение сопряженной краевой задачи (1.9) – (1.11), является элементом пространства $H(Q)$.

Приближенное по «резольвенте» решение сопряженной краевой задачи определяем следующим образом

$$\omega^m(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}[\nu_n(T)-\xi_n](e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\tilde{R}_n^m(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds)z_n(x),\qquad(1.38)$$

где $\tilde{R}_n^m(s,t,\lambda)$ имеет вид $\tilde{R}_n^m(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t).$

С учетом того, что

$$|\lambda|\frac{\sqrt{K_0T}}{\sqrt{2\lambda_1^2}}<1,$$

доказано, что

$$\left\|\omega(t,x)-\omega^m(t,x)\right\|_{H(Q)}^2=$$

$$=4\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T\left[\tilde{R}_n(t,s,\lambda)-\tilde{R}_n^m(t,s,\lambda)\right]e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds[v_n(T)-\xi_n]\right)^2dt=$$

$$=4\lambda^2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]^2ds\int_0^Te^{-2\lambda_n^2(T-s)}ds[v_n(T)-\xi_n]^2dt\le$$

$$\le \mathrm{C}_1(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}\right)^{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0,$$

где

$$\mathrm{C}_1(\lambda)=\frac{2\lambda^2TK_0}{\lambda_1^2}\left[1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}}\right]^2\left(\|v(T,x)\|_{H(0.1)}^2-\|\xi(x)\|_{H(0.1)}^2\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right).$$

1.3. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

С учетом решения (1.37) сопряженной краевой задачи из условия оптимальности (1.15) получаем нелинейное интегральное уравнение вида

$$\beta\frac{q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\int_0^TG_n(\tau)\int_0^1f(\tau,y,u(\tau,y))z_n(y)dyd\tau z_n(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)h_nz_n(x),\qquad(1.39)$$

где

$$G_n(t)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^TR_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds,$$

$$G_n^*(t)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\tilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds,$$

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right),$$

$R_n(t,s,\lambda)$, $\tilde{R}_n(s,t,\lambda)$ - резольвенты, полученные при решении основной и сопряженной краевых задач, для которых справедливы следующие оценки

$$\int_\tau^T R_n^2(t,s,\lambda) ds \le \frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T})^2}, \quad \int_0^T \tilde{R}_n^2(s,t,\lambda) ds \le \frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T})^2}. \quad (1.40)$$

Однозначную разрешимость нелинейного интегрального уравнения (1.39) исследуем с использованием метода, разработанного профессором Керимбековым А. [32].

Положим

$$\beta \frac{q(t,x,u(t,x)) q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))} = p(t,x). \quad (1.41)$$

Согласно условию (1.14) это равенство являяется однозначно разрешимым относительно функции $u(t,x)$, т.е. существует функция $\varphi(\cdot)$, такая что

$$u(t,x) = \varphi(t,x,p(t,x),\beta). \quad (1.42)$$

Уравнение (1.39) с учетом (1.41) примет вид

$$p(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) \int_0^T G_n(\tau) \int_0^1 f(\tau,y,\varphi(\tau,y,p(\tau,y),\beta)) z_n(y) dy d\tau z_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) h_n z_n(x). \quad (1.43)$$

При обозначениях

$$G_0(p) = -\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) \int_0^T G_n(\tau) \int_0^1 f(\tau,y,\varphi(\tau,y,p(\tau,y),\beta)) z_n(y) dy d\tau z_n(x),$$
$$h = h(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) h_n z_n(x), \quad (1.44)$$

уравнение (1.43) примет вид

$$p = h + G_0[p]. \quad (1.45)$$

Лемма 1. Функция $p(t,x)$ принадлежит пространству Гильберта $H(Q)$.

Доказательство. В самом деле

$$\|p(t,x)\|_{H(Q)}^2=\int_0^T\int_0^1 p^2(t,x)\,dxdt=\beta^2\int_0^T\int_0^1\frac{u^2(t,x)}{f_u^2(t,x,u(t,x))}\le\beta^2M^2\|u(t,x)\|_{H(Q)}^2<\infty,$$

где $M=\sup\dfrac{1}{f_u(t,x,u(t,x))}$, $\quad (t,x)\in Q.$

Лемма 2. Функция $h(t,x)$ принадлежит пространству Гильберта $H(Q)$.

Доказательство. Вычислим

$$\int_0^T\int_0^T h^2(t,x)\,dxdt=\int_0^T\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_nz_n(x)\right)^2dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\Big[G_n(t)h_n\Big]^2dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\tilde R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right]^2h_n^2dt\le$$

$$\le2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^Te^{-2\lambda_n^2(T-t)}dt+\int_0^T\lambda^2\int_0^T\tilde R_n^2(s,t,\lambda)ds\int_0^Te^{-\lambda_n^2(T-s)}dsdt\right]h_n^2\le$$

$$\le2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\lambda_n^2}\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T})^2}\right)h_n^2\le2\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T})^2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\|\xi(x)\|_{H(0,1)}^2+2\|\psi(x)\|_{H(0,1)}^2\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T})^2}\right)\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)<\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Оператор $G_0[p]$ является оператором, переводящим пространство $H(Q_T)$ в себя.

Доказательство. Вычислим

$$\int_0^T\int_0^1G_0^2[p]dxdt=\int_0^T\int_0^1\left(\int_0^T\int_0^1G(t,\tau,x,y)f(\tau,y)dyd\tau\right)^2dxdt\le\int_0^T\int_0^1\int_0^T\int_0^1G^2(t,\tau,x,y)dyd\tau\cdot$$

$$\cdot\int_0^T\int_0^1f^2(\tau,y,\varphi(\tau,y,p(\tau,y),\beta))dyd\tau\,dxdt\le\int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\int_0^TG_n(\tau)f_n(u)d\tau z_n(x)\right)^2dxdt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n^*(t)\int_0^TG_n(\tau)f_n(u)d\tau\right)^2dt\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}G_n^2(t)\int_0^TG_n^2(\tau)d\tau\int_0^Tf_n^2(u)d\tau dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}G_n^2(t)\int_0^TG_n^2(\tau)d\tau dt\,\|f(\tau,y,\varphi(\tau,y,p(\tau,y),\beta))\|_H^2\le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\,)^2} \right)^2 \| f(\tau, y, \varphi(\tau, y, p(\tau, y), \beta)) \|_{H(Q)}^2 \le$$

$$\le \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\,)^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} \right) \le$$

$$\le \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\,)^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^4} + \frac{1}{\pi^4} \frac{4}{3} \right) < \infty,$$

что доказывает лемму.

Лемма 4. Пусть для функции $f(t, x, u(t, x))$ выполняется условие Липшица по функциональной переменной u, т.е.

$$\left\| f\left[t, x, u(t,x)\right] - f\left[t, x, \tilde{u}(t,x)\right] \right\|_{H(Q)} \le f_0 \left\| u(t,x) - \tilde{u}(t,x) \right\|_{H(Q)}, \quad f_0 > 0,$$

а для функции $\varphi(t, x, p(t,x), \beta)$ - по функциональной переменной p, т.е.

$$\left\| \varphi\left[t, x, p(t,x), \beta\right] - \varphi\left[t, x, \tilde{p}(t,x), \beta\right] \right\|_{H(Q)} \le \varphi_0(\beta) \left\| p(t,x) - \tilde{p}(t,x) \right\|_{H(Q)}, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$$

Пусть также выполняется условие

$$\gamma = \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\,)^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^4} + \frac{1}{\pi^4} \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}} f_0 \varphi_0(\beta) < 1,$$

где f_0, $\varphi_0(\beta)$ - положительные константы, оператор $G[p] = h + G_0[p]$ является оператором сжатия.

Доказательство. Вычислим

$$\left\| G[p] - G_0[\tilde{p}] \right\|_{H(Q)} = \left\| h - G_0[p] - h + G_0[\tilde{p}] \right\|_{H(Q)} \le \left\| G[p] - G_0[\tilde{p}] \right\|_{H(Q)} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\,)^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^4} + \frac{1}{\pi^4} \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\| f\left[t, x, \varphi(t, p(t), \beta)\right] - f\left[t, x, \varphi(t, \tilde{p}(t), \beta)\right] \right\|_{H(Q)} \le$$

$$\le \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\,)^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^4} + \frac{1}{\pi^4} \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}} f_0 \varphi_0(\beta) \left\| p(t,x) - \tilde{p}(t,x) \right\|_{H(Q)},$$

что доказывает лемму.

Теорема. При условиях Лемм 1-4 для операторного уравнения (1.45) существует единственное решение в пространстве $H(Q)$.

Доказательство. При условиях лемм 1-4 справедлив принцип сжимающих отображений, т.е. оператор $G[\cdot]$ переводит полное метрическое пространство $H(Q)$ в себя и является оператором сжатия. Поэтому для оператора $G[\cdot]$, согласно известной теореме [48] принципа сжимающих отображений, существует неподвижная единственная точка, которая является решением операторного уравнения (1.45).

Для решения операторного уравнения (1.45) применяем метод последовательных приближений:

$$p_n(t,x) = G[p_{n-1}(t,x)], \;\; n=1,2,3,\ldots,$$

и для решения справедлива оценка

$$\left\| p^0(t,x) - p_n(t,x) \right\|_{H(Q)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \left\| h(t,x) + G_0[p_0(t,x)] - p_0(t,x) \right\|_{H(Q)}, \qquad (1.46)$$

где $p^0(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(t,x)$ - точное решение операторного уравнения (1.45), а $p_0(t,x)$ - произвольный элемент пространства $H(Q)$.

С учетом найденного решения $p^0(t,x)$ из (1.42) определяем оптимальное управление

$$u^0(t,x) = \varphi\left[t,x,p^0(t,x),\beta\right], \qquad (1.47)$$

являющееся решением нелинейного интегрального уравнения (1.39).

1.4. Построение решения нелинейной задачи оптимизации и сходимость его приближений

С учетом найденного оптимального управления из (1.24) получается решение краевой задачи (1.2)-(1.5), соответствующее оптимальному управлению $u^0(t,x)$ в следующем виде

$$\nu^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n^0(s)\,ds + a_n^0(t) \right\} z_n(x), \qquad (1.48)$$

где

$$a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} f_n\left[\tau, u^0\right] d\tau =$$
$$= e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_0^1 f(\tau, y, u^0(\tau, y)) z_n(y) dy d\tau. \qquad (1.49)$$

Это решение назовем *оптимальным процессом*. Тогда минимальным значением функционала (1.1) будет

$$J[u^0(t,x)] = \int_0^1 [v^0(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2(t,x,u^0(t,x)) dx dt. \qquad (1.50)$$

Таким образом, задача нелинейной оптимизации (1.1)-(1.6), (1.14) имеет полное решение в виде тройки $\left(u^0(t,x), v^0(t,x), J(u^0(t,x)\right)$.

Полное решение нелинейной задачи оптимизации практически находят не в точном виде, а в различных приближениях точного решения.

Приближения оптимального управления и их сходимость. Для нахождения n-го приближения оптимальной управляющей функции можно использовать следующее соотношение

$$u_n(t,x) = \varphi\left[t, x, p_n(t,x), \beta\right], \quad n = 1,2,3,..., \qquad (1.51)$$

где $p_n(t,x)$ - приближенное решение операторного уравнения (1.45). Сходимость n-го приближения $u_n(t,x)$ к оптимальному управлению $u^0(t,x)$ следует из соотношения

$$\left\| u^0(t,x) - u_n(t,x) \right\|_{H(Q)} =$$
$$= \left\| \varphi(t,x,p^0(t,x),\beta) - \varphi(t,x,p_n(t,x),\beta) \right\|_{H(Q)} \le \varphi_0(\beta) \left\| p^0(t,x) - p_n(t,x) \right\|_{H(Q)} \le \qquad (1.52)$$
$$\le \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \left\| h(t,x) + G_0[p_0(t,x)] - p_0(t,x) \right\|_{H(Q)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

которое справедливо в силу условия $\gamma < 1$.

Приближения оптимального процесса и их сходимость. Приближенные построения оптимального процесса будем проводить следующими способами:

1) m-е – приближение оптимального процесса по резольвенте

$$\nu^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right]z_n(x),$$

где $R_n^m(t,s,\lambda)$ – m-е приближение резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$; $a_n^0(t)$ имеет вид (1.49).

2) $m,k-$е – приближение оптимального процесса

$$\nu_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds+a_n^k(t)\right]z_n(x),$$

где $a_n^k(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\int_0^1 f\left[\tau,y,u_k^0(\tau,y)z_n(y)\right]dyd\tau$;

3) $m,\ k,\ r$ –е приближение оптимального процесса

$$\nu_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds+a_n^k(t)\right]z_n(x).$$

Теперь докажем их сходимость, т.е. докажем следующие соотношения:

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m\to\infty]{}0;\tag{1.53}$$

$$\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,\tag{1.54}$$

при каждом фиксированном m=1,2,3,…

$$\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}^2\xrightarrow[r\to\infty]{}0,\tag{1.55}$$

при каждой фиксированной паре (m, k), m, k =1,2,3,…

Первое соотношение следует из того, что

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]a_n(s)ds\right)^2dt\le$$

$$\le C_1(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0,$$

т.к. $|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}<1$,

$$C_1(\lambda)=\frac{\lambda^2K_0T}{2\lambda_1^2}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\left(\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)+\frac{T}{\lambda_1^2}\left\|f\left(t,x,u^0(t,x)\right)\right\|^2_{H(Q)}\right);$$

Второе соотношение следует из того, что

$$\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}=\int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right]z_n(x)-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s,u_k)ds+a_n^k(t,u_k)\right]z_n(x)\right)^2dxdt=$$

$$=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)\left[\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}\int_0^1\Big(f\big(\tau,y,u(\tau,y)\big)-f\big(\tau,y,u_k(\tau,y)\big)\Big)z_n(y)dyd\tau\right]ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\int_0^1\Big(f\big(\tau,y,u(\tau,y)\big)-f\big(\tau,y,u_k(\tau,y)\big)\Big)z_n(y)dyd\tau\right\}^2dt\le$$

$$\le 2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lambda^2\int_0^T R_n^{m^2}(t,s,\lambda)\int_0^T\left(\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}\big(f_n(\tau,u)-f_n(\tau,u_k)\big)d\tau\right)^2ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^t e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\int_0^t\big(f_n(\tau,u)-f_n(\tau,u_k)\big)^2d\tau\right\}dt\le$$

$$\le 2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\int_0^T\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}d\tau\int_0^T\big(f_n(\tau,u)-f_n(\tau,u_k)\big)^2d\tau ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}d\tau\int_0^T\big(f_n(\tau,u)-f_n(\tau,u_k)\big)^2d\tau\right\}dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}+1\right\}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T\big(f_n(\tau,u)-f_n(\tau,u_k)\big)^2d\tau dt\le$$

$$\le\left(\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}+1\right)\left\|f\big(t,x,u(t,x)\big)-f\big(t,x,u_k(t,x)\big)\right\|^2_{H(Q)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\le$$

$$\leq \tilde{C}_2(\lambda) f_0^2 \left\| u(t,x) - u_k(t,x) \right\|_{H(\mathrm{Q})}^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0;$$

где $\tilde{C}_2(\lambda) = \left(\dfrac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} + 1 \right) \left(\dfrac{1}{\lambda_1^2} + \dfrac{1}{6} \right)$,

т.к. для функции $f(t,x,u(t,x))$ справедливо по функциональной переменной условие Липшица, с постоянной $f_0 > 0$.

Третье соотношение следует из того, что

$$\left\| v_k^m(t,x) - v_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(\mathrm{Q})}^2 = \int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} f_n(\tau, u_k) d\tau \right] ds + \right.$$

$$\left. + \left(e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} f_n(\tau, u_k) d\tau \right) \right]^2 dt \leq 4 \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} + 1 \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 s} \psi_n^2 ds + \int_0^T \int_0^T e^{-2\lambda_n^2 (T-\tau)} d\tau \left\| f(t,x,u_k(t,x)) \right\|_{H(Q)}^2 d\tau ds \right) \leq$$

$$\leq 4 \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} + 1 \right\} \left(\left\| \psi(x) \right\|_{H(0,1)}^2 + T \left\| f(t,x,u_k(t,x)) \right\|_{H(\mathrm{Q})}^2 \right) \frac{1}{2\lambda_n^2} \leq$$

$$\leq 2 \left(\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} + 1 \right) \left(\left\| \psi(x) \right\|_{H(0,1)}^2 + T \left\| f(t,x,u_k(t,x)) \right\|_{H(\mathrm{Q})}^2 \right) \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \leq$$

$$\leq \tilde{C}_3(\lambda) \frac{r+1}{r^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,$$

где

$$\tilde{C}_3(\lambda) = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} + 1 \right) \left(\left\| \psi(x) \right\|_{H(0,1)}^2 + T \left\| f(t,x,u_k(t,x)) \right\|_{H(\mathrm{Q})}^2 \right).$$

Далее из того, что

$$\left\| \nu^0(t,x) - \nu_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(\mathrm{Q})} \le$$
$$\le \left\| \nu^0(t,x) - \nu^m(t,x) + \nu^m(t,x) - \nu_k^m(t,x) + \nu_k^m(t,x) - \nu_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(\mathrm{Q})} \le$$
$$\le \left\| \nu^0(t,x) - \nu^m(t,x) \right\|_{H(\mathrm{Q})} + \left\| \nu^m(t,x) - \nu_k^m(t,x) \right\|_{H(\mathrm{Q})} + \left\| \nu_k^m(t,x) - \nu_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(\mathrm{Q})} \xrightarrow[m,k,r\to 0]{} 0,$$

следует сходимость приближения $\nu_k^{m,r}(t,x)$, которое применимо на практике, к оптимальному процессу $\nu^0(t,x)$.

В соответствии с приближенными построениями оптимального процесса минимальное значение функционала будем приближать следующими способами:

1) m – е приближение минимального значения функционала

$$J_m\left[u^0(t,x)\right] = \int_0^1 \left[\nu^m(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2\left(t,x,u^0(t,x)\right) dx dt$$

в соответствии с процессом $\nu^m(t,x)$;

2) $m,\ k$ – е приближение минимального значения функционала

$$J_m\left[u_k(t,x)\right] = \int_0^1 \left[\nu_k^m(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2\left(t,x,u_k(t,x)\right) dx dt$$

в соответствии с процессом $\nu_k^m(t,x)$;

3) $m,\ k,\ r$ – е приближение минимального значения функционала

$$J_m^r\left[u_k(t,x)\right] = \int_0^1 \left[\nu_k^{m,r}(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2\left(t,x,u_k(t,x)\right) dx dt$$

в соответствии с процессом $\nu_k^{m,r}(t,x)$.

Пусть

$$J\left[u(t,x)\right] = \int_0^1 \left[\nu(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2\left(t,x,u(t,x)\right) dx dt$$

и

$$J\left[\overline{u}(t,x)\right] = \int_0^1 \left[\overline{\nu}(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T \int_0^1 q^2\left(t,x,\overline{u}(t,x)\right) dx dt.$$

Тогда

$$\left|J\left[u(t,x)\right]-J\left[\bar{u}(t,x)\right]\right|\le\int_0^1\left\{\nu^2(T,x)-\bar{\nu}^2(T,x)-2\xi(x)\left(\nu(T,x)-\bar{\nu}(T,x)\right)\right\}dx+$$

$$+\beta\int_0^T\int_0^1\left(q^2\left(t,x,u(t,x)\right)-q^2\left(t,x,\bar{u}(t,x)\right)\right)dxdt=$$

$$\int_0^1\left(\nu(T,x)+\bar{\nu}(T,x)-2\xi(x)\right)\left(\nu(T,x)-\bar{\nu}(T,x)\right)dx+$$

$$+\beta\int_0^T\int_0^1\left(q\left(t,x,u(t,x)\right)+q\left(t,x,\bar{u}(t,x)\right)\right)\left(q\left(t,x,u(t,x)\right)-q\left(t,x,\bar{u}(t,x)\right)\right)dxdt\le$$

$$\le\left\|\nu(T,x)+\bar{\nu}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\left\|\nu(T,x)-\bar{\nu}(T,x)\right\|_{H(0,1)}+$$

$$+\beta q_0\left\|q\left(t,x,u(t,x)\right)+q\left(t,x,\bar{u}(t,x)\right)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\left\|u(t,x)-\bar{u}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\le$$

$$\le C_1\left\|\nu(T,x)-\bar{\nu}(T,x)\right\|_{H(0,1)}+C_2\left\|u(t,x)-\bar{u}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})},\qquad(1.56)$$

где

$$C_1=\left\|\nu(T,x)+\bar{\nu}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)},C_2=\beta q_0\left\|u(t,x)+\bar{u}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}.$$

На основе (1.56) доказывается, что:

1) $\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u^0(t,x)\right]\right|\le C_{10}\left\|\nu^0(T,x)-\nu^m(T,x)\right\|_{H(0,1)}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$;

2) $\left|J_m\left[u^0(t,x)\right]-J_m\left[u_k(t,x)\right]\right|\le C_{11}\left\|\nu^m(T,x)-\nu_k^m(T,x)\right\|_{H(0,1)}+$

$$+C_{21}\left\|u^0(t,x)-u_k(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

при каждом фиксированном m=1,2,3,…

3) $\left|J_m\left[u_k(t,x)\right]-J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right|\le C_{31}\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$,

при каждой фиксированной паре (m, k), m, k =1,2,3,…,

где C_{10}, C_{11}, C_{21}, C_{31} – некоторые положительные константы.

Первое соотношение справедливо согласно (1.56) и, в силу (1.53), стремится к нулю при $m\to\infty$.

Второе соотношение справедливо согласно (1.49) и (1.56) и, в силу (1.52) и (1.54), стремится к нулю при $k\to\infty$ при любом фиксированном m=1,2,3,…

Третье соотношение справедливо согласно (1.56) и, в силу (1.55), стремится к нулю при $r \to \infty$ при каждой фиксированной паре (m, k), $m, k = 1,2,3,\ldots$

Далее

$$\left|J\left[u^0(t,x)\right] - J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right| \le \left|J\left[u^0(t,x)\right] - J_m\left[u^0(t,x)\right] + J_m\left[u^0(t,x)\right] - \right.$$
$$\left. - J_m\left[u_k(t,x)\right] + J_m\left[u_k(t,x)\right] - J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right| \le$$
$$\le \left|J\left[u^0(t,x)\right] - J_m\left[u^0(t,x)\right]\right| + \left|J_m\left[u^0(t,x)\right] - J_m\left[u_k(t,x)\right]\right| +$$
$$+ \left|J_m\left[u_k(t,x)\right] - J_m^r\left[u_k(t,x)\right]\right| \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0,$$

т.е. приближение $J_m^r\left[u_k(t,x)\right]$ - сходящееся к минимальному значению функционала $J\left[u^0(t,x)\right]$.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

Задача рапределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными, часто встречается в приложениях при математическом описании различных технологических процессов. При исследовании было использовано понятие слабообобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. Изложены алгоритмы построения слабообобщенных решений основной и сопряженной краевых задач и доказаны сходимости их приближений по норме пространства $H(Q)$. При построении слабообобщенных решений установлено, что коэффициенты Фурье находятся как решение линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода; радиусы сходимости рядов Неймана (для основной и сопряженной краевых задач) увеличиваются при возрастании индекса коэффициентов Фурье и при этом будут одинаковыми при каждом значении индексов.

Качество управления оценивается квадратичным функционалом, которое нужно минимизировать на множестве решений краевой задачи. Исследование условия оптимальности показывает, что задача оптимизации может иметь решение лишь в некотором классе функций внешнего влияния. Найдены достаточные условия существования и единственности решения нелинейного интегрального уравнения оптимального управления. Получены достаточные условия существования и единственности решения нелинейной задачи распределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями. Получено полное решение задачи нелинейной оптимизации и доказана сходимость его приближений.

ГЛАВА II. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

В этой главе проведено исследование вопросов существования и единственности решения нелинейной задачи равномерно распределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальным уравнениями. При распределенном управлении интенсивность извне действующего теплового потока в каждой точке управляемого объекта меняется с течением времени. Равномерно распределенное управление отличается от распределенного управления тем, что, в этом случае, интенсивность извне действующего теплового потока также меняется с течением времени, однако она одинакова в каждой точке управляемого объекта. При этом качество управления оценивается квадратичным функционалом.

Сформулирован принцип максимума для рассматриваемой задачи и получены условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства относительно функции внешнего теплового потока. Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации с равномерно распределенным управлением. Как и в главе I, разработан алгоритм построения точного и приближенных решений задачи нелинейной оптимизации, и доказана сходимость приближенных решений.

2.1. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности

Будем рассматривать задачу оптимизации: требуется найти минимальное значение интегрального обобщенного квадратичного функционала

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2(t,u(t))dt,\beta>0, \qquad (2.1)$$

где функция $\nu(t,x)$ является решением краевой задачи

$$\nu_t=\nu_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)\nu(\tau,x)d\tau+g(t,x)f[t,u(t)],\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T, \qquad (2.2)$$

$$\nu(0,x)=\psi(x),\quad 0<x<1, \qquad (2.3)$$

$$\nu_x(t,0)=0,\quad \nu_x(t,1)+\alpha\nu(t,1)=0,\quad 0<t\le T, \qquad (2.4)$$

Здесь заданная функция $K(t,\tau)$ является определенной в квадрате $D=\{0\le t\le T,0\le\tau\le T\}$ и

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau d\tau=K_0<\infty; \qquad (2.5)$$

функции $\xi(x)\in H(0,1)$, $g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(0,1)$, $q\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ считаются известными, причем $q\left[t,u(t)\right]$ по функциональной переменной $u(t)$ является выпуклой функцией; нелинейная по функциональной переменной $u(t)\in H(0,T)$ функция $f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ известна и монотонна, т.е.

$$\frac{\partial f\left[t,u(t)\right]}{\partial u}\ne 0,\forall t\in[0,T]; \qquad (2.6)$$

$\alpha>0$, момент времени T фиксирован, λ – параметр, $H(Y)$ - пространство Гильберта, составленное из функций, определенных на множестве Y, и суммируемых с квадратом.

В этой задаче требуется найти такое управление $u^0(t)\in H(0,T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $\nu^0(t,x)$ краевой задачи (2.2)-(2.6) доставляет наименьшее возможное значение функционалу (2.1). При этом $u^0(t)$ называется оптимальным управлением, а $\nu^0(t,x)$ - оптимальным процессом.

Аналогично тому, как было доказано в пункте (1.2), можно показать, что каждому управлению $u(t)$ единственным образом соответствует слабообобщенное решение $\nu(t,x)$ краевой задачи (2.2)-(2.6). Учитывая это, вычисляем приращение функционала (2.1). Управлению $u(t)+\Delta u(t)\in H(0,T)$ соответствует решение вида $\nu(t,x)+\Delta\nu(t,x)$, где $\Delta\nu(t,x)$ приращение соответствующее приращению $\Delta u(t)$. Согласно схеме получения принципа максимума [22] приращение функционала (2.1) представим в виде

$$\Delta J[u]=J\left[u+\Delta u\right]-J[u]=-\int_0^T\Delta\prod\left[t,\nu(t,x),\omega(t,x),u(t)\right]dt+\int_0^1\Delta\nu^2(T,x)dx, \quad (2.7)$$

где

$$\Delta\prod(t,\nu,\omega,u)=\prod\left(t,\nu(t,x),\omega(t,x),u(t)+\Delta u(t)\right)-\prod\left(t,\nu(t,x),\omega(t,x),u(t)\right),$$

$$\prod(t,\nu(t,x),\omega(t,x),u(t))=\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dxf\left[t,u(t)\right]-\beta q^2(t,u(t)), \quad (2.8)$$

а функция $\omega(t,x)$ является слабообобщенным решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_t+\omega_{xx}+\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau=0,\quad 0<x<1,\quad 0\le t<T,$$

$$\omega(T,x)+2\left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]=0,\ 0<x<1,$$

$$\omega_x(t,0)=0,\quad \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\ 0\le t<T. \quad (2.9)$$

Для рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации принцип максимума формулируется следующим образом:

Для оптимальности управления $u^0(t)\in H(0,T)$ в задаче оптимизации (2.1)-(2.6), необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на отрезке [0, T] выполнялось соотношение

$$\prod\left(t,\nu^0(t,x),\omega^0(t,x),u^0(t)\right)\quad(=)\quad\sup_{u\in W}\prod\left(t,\nu^0(t,x),\omega^0(t,x),u\right).$$

Доказательство сформулированного принципа максимума, как было отмечено в пункте 1.1, можно проводить по схеме, изложенной в [22].

Вследствие принципа максимума оптимальное управление можно находить из следующих выражений

$$2\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))f_u^{-1}[t,u(t)]=\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx, \quad (2.10)$$

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx f_{uu}\left[t,u(t)\right] - 2\beta\Big(q\big(t,u(t)\big)q_u\big(t,u(t)\big)\Big)_u < 0,$$

(2.11)

которые выполняются одновременно (на оптимальном управлении). Соотношения (2.10), (2.11) - *условия оптимальности*.

В (2.11) наличие решения сопряженной краевой задачи $\omega(t,x)$ вызывает определенные трудности при проверке этого условия. Однако, используя (2.10), можно исключить $\omega(t,x)$ из (2.11). Тогда (2.11) примет вид

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{q\big(t,u(t)\big)q_u\big(t,u(t)\big)}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u > 0. \tag{2.12}$$

Условие (2.12) ограничивает класс функций внешнего влияния $\{f\ (t,u(t))\}$. Это означает, что задача нелинейной оптимизации имеет решение только в классе функций $\{f\ (t,u(t))\}$, при заданной функции $q\big(t,u(t)\big)$, удовлетворяющих условию (2.12). В дальнейших рассуждениях предполагается, что условие (2.12) выполняется $\forall u(t)\in H(0,T)$, в том числе и для оптимального управления.

2.2. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления и его однозначная разрешимость

Оптимальное управление найдем согласно условию оптимальности (2.10). Решением сопряженной краевой задачи (2.9), как было отмечено в пункте (1.2.3), является

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x), \tag{2.13}$$

где

$$\omega_n(t) = -2\left[\nu_n(T) - \xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right), \tag{2.14}$$

$R_n(s,t,\mu)$ - резольвента ядра $B_n(s,t)$.

$\nu_n(t)$ - коэффициенты Фурье функции

$$\nu(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(t) z_n(x) \tag{2.15}$$

в рассматриваемой задаче, при каждом фиксированном n=1,2,3,…, можно определять как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$\nu_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t,s) \nu_n(s) ds + a_n(t) \tag{2.16}$$

с ядром

$$K_n(t,s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau,s) d\tau \tag{2.17}$$

и свободным членом

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau . \tag{2.18}$$

Коэффициенты $\nu_n(t)$, как решение интегрального уравнения (2.16), можно находить следующим образом

$$\nu_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \tag{2.19}$$

где $R_n(t,s,\lambda)$ - резольвенту ядра $K_n(t,s)$ можно определять при каждом фиксированном n=1,2,3,…, как сумму ряда Неймана [44]

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s) . \tag{2.20}$$

Как было отмечено в пункте 1.2, при условии

$$|\lambda| \sqrt{K_0 T} < \sqrt{2} \lambda_1 , \tag{2.21}$$

она непрерывна по совокупности аргументов.

Аналогично тому, как было доказано в пунктах (1.2.1) и (1.2.3), можно показать, что, как слабообобщенное решение $\nu(t,x)$ краевой задачи (2.2)-(2.6), так и слабообобщенное решение $\omega(t,x)$ сопряженной краевой задачи (2.9) принадлежат пространству Гильберта $H(Q)$.

Далее, с учетом интеграла

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)z_n(x)\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(t)z_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\omega_n(t),$$

(2.10) примет вид

$$\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] =$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\left[\nu_n(T)-\xi_n\right](e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T \tilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds).$$

Согласно (2.19), с учетом (2.18), получим

$$\begin{gathered}\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] + \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,u(s)\right]ds = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t,\lambda)h_n,\end{gathered} \tag{2.22}$$

где

$$\tilde{G}_n(t,\lambda) = g_n(t)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T \tilde{R}_n(\tau,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}d\tau\right], \tag{2.23}$$

$$G_n(t,\lambda) = g_n(t)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right], \tag{2.24}$$

$$h_n = \xi_n - \psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2\tau}d\tau\right]. \tag{2.25}$$

Таким образом, оптимальное управление можно определять как решение нелинейного интегрального уравнения (2.22). Для решения данного уравнения применяется методика работы [32]. Положим

$$\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = p(t). \tag{2.26}$$

Лемма 1. Функция $p(t)$ принадлежит пространству Гильберта $H(0,T)$.

Доказательство. Следующая оценка

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{q_u\left(t,u\left(t\right)\right)}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right| \le M,\ \forall t\in[0,T]$$

справедлива согласно (2.6). Справедливость утверждения леммы, с учетом того, что $u(t) \in H(0,T)$, следует из того, что

$$\int_0^T p^2(t)dt \le \beta^2 \int_0^T \left| \frac{q_u\left(t,u(t)\right)}{f_u\left[t,u(t)\right]} \right|^2 q^2(t,u(t))dt \le \beta^2 M^2 \int_0^T q^2(t,u(t))dt < \infty .$$

Согласно условию (2.12), из равенства (2.26) управление $u(t)$ можно находить однозначно, т.е. найдется такая функция φ, что

$$u(t) = \varphi(t, p(t), \beta). \tag{2.27}$$

В силу (2.26) и (2.27) уравнение (2.22) примет вид

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s, \varphi(s,p(s),\beta)\right] ds = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n(t,\lambda) h_n \tag{2.28}$$

или в операторном выражении

$$p(t) = G[p(t)], \tag{2.29}$$

где

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n(t,\lambda) \left[h_n - \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s, \varphi(s,p(s),\beta)\right] ds \right]. \tag{2.30}$$

Существование и единственность решения операторного уравнения (2.29) докажем при помощи нижеследующих лемм.

Лемма 2. Оператор $G[p(t)]$ принадлежит пространству $H(0,T)$ $\forall\, p(t) \in H(0,T)$.

Доказательство. Вычислим

$$\int_0^T G^2[p(t)]dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n(t,\lambda) \left[h_n - \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s, \varphi(s,p(s),\beta)\right] ds \right] \right)^2 dt \le$$

$$\le 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n^2(t,\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_n^2 + \int_0^T G_n^2(s,\lambda) ds \int_0^T f^2\left[s, \varphi(s,p(s),\beta)\right] ds \right] dt \le$$

$$\le 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} 2 g_n^2(t) \left[e^{-2\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T \bar{R}_n^2(\tau,t,\lambda) d\tau \cdot \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \right] \times$$

$$\times\left\{2\left[\| g(t,x)\|^2_{H(Q)}\cdot 2\left(1+\frac{\lambda^2K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\lambda_1^2}\right)\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}2g_n^2(t)\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\| f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right]\|^2_{H(0,T)}\right\}dt\le$$

$$\le 2\| g(t,x)\|^2_{H(Q)}\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\times\{2\|\xi(x)\|^2_{H(0,1)}+$$

$$+2\left(1+\frac{\lambda^2K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+\| g(x)\|^2_{H(0,1)}\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\cdot$$

$\cdot\| f[t,\varphi(t,p(t),\beta)]\|^2_{H(0,T)}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)<\infty$, что доказывает лемму.

Лемма 3. Пусть выполнены условия

$$\| f[t,u(t)]-f[t,\overline{u}(t)]\|_{H(0,T)}\le f_0\| u(t)-\overline{u}(t)\|_{H(0,T)}, \tag{2.31}$$

$$\|\varphi[t,p(t),\beta]-\varphi[t,\overline{p}(t),\beta]\|_{H(0,T)}\le\varphi_0(\beta)\| p(t)-\overline{p}(t)\|_{H(0,T)},\quad \varphi_0(\beta)>0. \tag{2.32}$$

$$\gamma=\| g(t,x)\|^2_{H(Q)}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{\lambda^2K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1, \tag{2.33}$$

$$|\lambda|<\frac{\sqrt{2}\lambda_1}{\sqrt{K_0T}}. \tag{2.34}$$

Тогда $G[p]$ является оператором сжатия.

Доказательство. Вычислим

$$\int_0^T \left| [G[p]-G[\overline{p}] \right|^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) \Big(f[s,\varphi(s,p(s),\beta)] - f[s,\varphi(s,\overline{p}(s),\beta)] \Big) ds \right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t,\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(t,\lambda) ds \int_0^T \Big(f[s,\varphi(s,p(s),\beta)] - f[s,\varphi(s,\overline{p}(s),\beta)] \Big)^2 dsdt \le$$

$$\le \left[\| g(t,x) \|_{H(Q)}^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \| p(s) - \overline{p}(s) \|_{H(0.T)} \right]^2 .$$

Тогда

$$\| G(p) - G(\overline{p}) \|_{H(0,T)} \le |$$

$$\le | g(t,x) \|_{H(Q)}^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \| p(t) - \overline{p}(t) \|_{H(0,T)} .$$

Теорема 1. При условиях (2.6), (2.12), (2.21), (2.31)-(2.33) для операторного уравнения (2.29) в пространстве $H(0,T)$ существует единственное решение.

Доказательство. Пространство $H(0,T)$ является полным метрическим простанством, и согласно *Лемме 3* $G(p)$ является оператором сжатия. Поэтому, согласно принципу сжимающих отображений [48] для операторного уравнения (2.29) сществет единственное решение.

Для решения операторного уравнения (2.29) используется метод последовательных приближений

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1,2,3,...,$$

где $p_0(t)$ - произвольный элемент пространства $H(0,T)$, причем справедлива оценка

$$\| \overline{p}(t) - p_n(t) \|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \| G[p_0(t)] - p_0(t) \|_{H(0,T)} , \tag{2.35}$$

где $\overline{p}(t)=\lim_{n\to\infty} p_n(t)$ - точное решение уравнения (2.29).

Искомое оптимальное управление, согласно (2.27), имеет вид

$$u^0(t)=\varphi\left[t,\overline{p}(t),\beta\right].$$

2.3. Построение решения нелинейной задачи оптимизации и сходимость его приближений

Как было отмечено выше, оптимальное управление следующим образом

$$u^0(t)=\varphi\left[t,\overline{p}(t),\beta\right] \tag{2.36}$$

Согласно (2.15) и (2.19), оптимальный процесс, т.е. решение краевой задачи (2.2)-(2.6) , соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, имеет вид

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds-a_n(t)\right)z_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 t}+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda\right)e^{-\lambda_n^2 t}ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^T e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n(\tau)f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\eta)}g_n(\eta)f\left[\eta,u^0(\eta)\right]d\eta ds\right]z_n(x).$$

Это равенство в дальнейшем будем использовать в следующем виде

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)g_n(\tau)f\left(\tau,u^0(\tau)\right)d\tau\right\}z_n(x),$$

где (2.37)

$$\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t\le\tau\le T.\end{cases}$$

Согласно (2.36) и (2.37) для минимального значения функционала (2.1) справедливо выражение

$$J[u^0(t)]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2(t,u^0(t))dt. \tag{2.38}$$

Построенная тройка $\left(u^0(t), \nu^0(t,x), J[u^0(t)]\right)$ - *полное решение* нелинейной задачи равномерно распределенного управления тепловыми процесами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными ураненииями.

Практически вместо точного решения уравнения (2.29) рассматривают приближенные решения $p_k(t)$ уравнения (2.29), где число k можно определять следующим образом [48]

$$\left\| \overline{p}(t) - p_k(t) \right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| G[p_0(t)] - p_0(t) \right\|_{H(0,T)} < \varepsilon \tag{2.39}$$

при заданном $\varepsilon > 0$. Из структуры (2.27) оптимального управления следует выражение для k-го приближения

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta]. \tag{2.40}$$

Лемма 2.1. Пусть для функции $\varphi[t, \vartheta(t), \beta]$ выполняется условие Липщица по функциональной переменной $\vartheta(t)$, т.е.

$$\left\| \varphi[t, \vartheta_1(t), \beta] - \varphi[t, \vartheta_2(t), \beta] \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| \vartheta_1(t) - \vartheta_2(t) \right\|_{H(0,T)}, \quad \varphi_0(\beta) > 0, \tag{2.41}$$

тогда следует сходимость k-го приближения оптимального управления.

Доказательство. Действительно

$$\begin{aligned} &\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} = \left\| \varphi[t, p^0(t), \beta] - \varphi[t, p_k(t), \beta] \right\|_{H(0,T)} \le \\ &\le \varphi_0(\beta) \left\| p^0(t) - p_k(t) \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| G[p_0(t)] - p_0(t) \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Приближенные построения оптимального процесса $\nu^0(t,x)$ будем проводить следующими способами:

1) m-е приближение по резольвенте

$$\begin{aligned} \nu^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] + \\ + \int_0^T \varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)\, \mathrm{g}_n(\tau) f\left(\tau, u^0(\tau)\right) d\tau \Bigg\} z_n(x), \end{aligned} \tag{2.43}$$

где

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),$$

$$\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int\limits_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int\limits_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t\le\tau\le T;\end{cases}$$

2) *m,k*- е приближение

$$\nu_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int\limits_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)\mathrm{g}_n(\tau)f\left(\tau,u_k(\tau)\right)d\tau\right\}z_n(x);\qquad(2.44)$$

3) *m,k,r*-е приближение

$$\nu_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int\limits_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\right.$$
$$(2.45)$$
$$\left.+\int\limits_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)\mathrm{g}_n(\tau)f\left(\tau,u_k(\tau)\right)d\tau\right\}z_n(x).$$

Т.к. m, k, r - е приближение оптимального процесса является суммой конечного числа слагаемых, то оно применимо на практике. Заметим, что оно является классическим решением исходной краевой задачи, которое в пределе стремится к слабообобщенному решению.

Теперь докажем их сходимость, т.е.

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\xrightarrow[m\to\infty]{}0;\qquad(2.46)$$

$$\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,\qquad(2.47)$$

при каждом фиксированном m=1,2,3,…;

$$\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}^2\xrightarrow[r\to\infty]{}0,\qquad(2.48)$$

при каждой фиксированной паре (m, k), m, k =1,2,3,….

Первое соотношение следует из того, что

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|^2_{H(Q)}=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\lambda\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]e^{-\lambda_n^2 s}ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^T\left(\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)-\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)\right)\mathrm{g}_n(\tau)f\left(\tau,u^0(\tau)\right)d\tau\right\}^2dt\le$$

$$\le2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n^2\lambda^2\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]^2ds\int_0^Te^{-2\lambda_n^2 s}ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^T\left(\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)-\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)\right)^2\mathrm{g}_n^2(\tau)d\tau\int_0^Tf^2\left(\tau,u^0(\tau)\right)d\tau\right\}dt\le$$

$$\le2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n^2\lambda^2\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\frac{1}{2\lambda_n^2}K_0\frac{1}{2\lambda_n^2}+\right.$$

$$\left.+\int_0^T\lambda^2\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\frac{K_0}{4\lambda_n^4}\mathrm{g}_n^2(\tau)d\tau\int_0^Tf^2\left(\tau,u^0(\tau)\right)d\tau\right\}dt\le$$

$$\le\frac{\lambda^2K_0T}{2}\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n^2+\int_0^Tg_n^2(\tau)d\tau\left\|f\left(\tau,u^0(\tau)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\right\}\frac{1}{\lambda_n^4}\le$$

$$\le\overline{C}_1(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0,$$

где

$$\overline{C}_1(\lambda)=\frac{\lambda^2K_0T}{2}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\left\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+\|g(t,x)\|^2_{H(Q)}\left\|f\left(\tau,u^0(\tau)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}\right).$$

Второе соотношение следует из того, что

$$\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|^2_{H(Q)}=\int_0^T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)\,\mathrm{g}_n(\tau)\left(f\left(\tau,u^0(\tau)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f\left(\tau,u_k(\tau)\right)\right)d\tau\right\}^2dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\varepsilon_n^{2m}(t,\tau,\lambda)\,\mathrm{g}_n^2(\tau)d\tau\int_0^T\left(f\left(\tau,u^0(\tau)\right)-f\left(\tau,u_k(\tau)\right)\right)^2d\tau dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}2\int_0^T\left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda^2\int_0^TR_n^2(t,s,\lambda)ds\int_0^Te^{-\lambda_n^2s}ds\right)\mathrm{g}_n^2(\tau)\,d\tau\times$$

$$\times\left\|f\left(t,u^0(t)\right)-f\left(t,u_k(t)\right)\right\|^2_{H(0,T)}dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}2\|g(t,x)\|^2_{H(\mathrm{Q})}\left(\frac{1}{2\lambda_n^2}+\frac{\lambda^2}{2\lambda_n^2}\frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}+|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\times$$

$$\times\left\|f\left(t,u^0(t)\right)-f\left(t,u_k(t)\right)\right\|^2_{H(0,T)}dt\le$$

$$\le T\|g(t,x)\|^2_{H(\mathrm{Q})}\left(1+\frac{\lambda^2K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}+|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\times$$

$$\times\left\|f\left(t,u^0(t)\right)-f\left(t,u_k(t)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\le\overline{C}_2(\lambda)f_0^2\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|^2_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

где

$$\overline{C}_2(\lambda)=T\|g(t,x)\|^2_{H(\mathrm{Q})}\left(1+\frac{\lambda^2K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right),$$

при любом фиксированном $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Третье соотношение следует из того, что

$$\left\| v_k^m(t,x) - v_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(Q)}^2 =$$

$$= \int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] + \int_0^T \varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda) g_n(\tau) f(\tau, u_k(\tau)) d\tau \right\}^2 dt \le$$

$$\le 2 \int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \psi_n^2 2 \left[e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda) ds \int_0^T e^{-2\lambda_n^2 s} ds \right] + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \varepsilon_n^2(t,\tau,\lambda) g_n^2(\tau) d\tau \int_0^T f^2(\tau, u_k(\tau)) d\tau \right\} dt \le$$

$$\le 2 \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \psi_n^2 2 \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_n^2} \frac{K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \int_0^T \left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda) ds \int_0^T e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) g_n^2(\tau) d\tau \left\| f^2(t, u_k(t)) \right\|_{H(0,T)}^2 \right\} dt \le$$

$$\le 2 \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \frac{\|\psi(x)\|_{H(0,1)}^2}{\lambda_n^2} \left[1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_n^2} \frac{K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right] \|g(t,x)\|_{H(Q)}^2 \left\| f^2(t, u_k(t)) \right\|_{H(0,T)}^2 \right\} \le$$

$$\le \overline{C}_3(\lambda) \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0,$$

где

$$\overline{C}_3(\lambda) = 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \left\{ \|\psi(x)\|_{H(0,1)}^2 + \|g(t,x)\|_{H(Q)}^2 \left\| f^2(t, u_k(t)) \right\|_{H(0,T)}^2 \right\},$$

при любых фиксированных значениях $m, k = 1, 2, 3, \ldots$.

Все неравенства получены при непосредственных вычислениях с учетом свойств заданных функций.

Далее из соотношения

$$\begin{aligned}&\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\le\\&\le\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)+\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)+\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\le\\&\le\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}+\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}+\\&+\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(\mathrm{Q})}\xrightarrow[m,k,r\to 0]{}0\end{aligned},$$

следует сходимость приближения $\nu_k^{m,r}(t,x)$, которая применима на практике, к оптимальному процессу $\nu^0(t,x)$.

В соответствии с приближенными построениями оптимального процесса минимальное значение функционала будем приближать следующими способами:

1) m – е приближение минимального значения функционала

$$J_m\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[\nu^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u^0(t)\right)dt$$

в соответствии с процессом $\nu^m(t,x)$;

2) $m,\ k$ – е приближение минимального значения функционала

$$J_m\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u_k(t)\right)dt$$

в соответствии с процессом $\nu_k^m(t,x)$;

3) $m,\ k,\ r$ –е приближение минимального значения функционала

$$J_m^r\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[\nu_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u_k(t)\right)dt$$

в соответствии с процессом $\nu_k^{m,r}(t,x)$.

Как в главе I для функционалов

$$J\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u(t)\right)dt$$

и

$$J\left[\bar{u}(t)\right]=\int_0^1\left[\bar{\nu}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,\bar{u}(t)\right)dt$$

можно показать справедливость неравенства

$$\left|J\left[u(t)\right]-J\left[\bar{u}(t)\right]\right|\le\int_0^1\left\{\nu^2(T,x)-\bar{\nu}^2(T,x)-2\xi(x)\left(\nu(T,x)-\bar{\nu}(T,x)\right)\right\}dx+$$

$$+\beta\int_0^T\left(q^2\left(t,u(t)\right)-q^2\left(t,\bar{u}(t)\right)\right)dt=\int_0^1\left(\nu(T,x)+\bar{\nu}(T,x)-2\xi(x)\right)\left(\nu(T,x)-\bar{\nu}(T,x)\right)dx+$$

$$+\beta\int_0^T\left(q\left(t,u(t)\right)+q\left(t,\bar{u}(t)\right)\right)\left(q\left(t,u(t)\right)-q\left(t,\bar{u}(t)\right)\right)dt\le$$

$$\le\left\|\nu(T,x)+\bar{\nu}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\left\|\nu(T,x)-\bar{\nu}(T,x)\right\|_{H(0,1)}+$$

$$+\beta q_0\left\|q\left(t,u(t)\right)+q\left(t,\bar{u}(t)\right)\right\|_{H(0,T)}\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_{H(0,T)}\le$$

$$\le\bar{C}_1\left\|\nu(T,x)-\bar{\nu}(T,x)\right\|_{H(0,1)}+\bar{C}_2\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_{H(0,T)},\qquad(2.49)$$

где

$$\bar{C}_1=\left\|\nu(T,x)+\bar{\nu}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)},\bar{C}_2=\beta q_0\left\|u(t)+\bar{u}(t)\right\|_{H(0,T)}.$$

На основе неравенства (2.49) доказывается, что

1) $\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right|\le\bar{C}_{10}\left\|\nu^0(T,x)-\nu^m(T,x)\right\|_{H(0,1)}\xrightarrow[m\to\infty]{}0;;$

2) $\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|\le$

$\le\bar{C}_{11}\left\|\nu^m(T,x)-\nu_k^m(T,x)\right\|_{H(0,1)}+\bar{C}_{21}\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$

при каждом фиксированном m=1,2,3,…

3) $\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le\bar{C}_{31}\left\|\nu_k^m(T,x)-\nu_k^{m,r}(T,x)\right\|_{H(0,1)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$

при каждой фиксированной паре (m, k), m, k =1,2,3,…

где $\bar{C}_{10}$, $\bar{C}_{11}$, $\bar{C}_{21}$, $\bar{C}_{31}$ – некоторые константы.

Первое соотношение справедливо согласно (2.49) и, в силу (2.46), стремится к нулю при $m \to \infty$.

Второе соотношение справедливо согласно (2.43) и (2.49) и, в силу (2.42) и (2.47), стремится к нулю при $k \to \infty$ при любом фиксированном m=1,2,3,…

Третье соотношение справедливо согласно (2.49) и, в силу (2.48), стремится к нулю при $r \to \infty$ при каждой фиксированной паре (m, k), m, k =1,2,3,…

Приближение $J_m^r\left[u_k(t)\right]$ применимо на практике. Его сходимость к минимальному значению функционала $J\left[u^0(t)\right]$ следует из соотношения

$$\begin{aligned}
&\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right| \le \\
&\le \left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]+J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]+J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right| \le \\
&\le \left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right|+\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|+ \\
&+\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right| \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Задача равномерно рапределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными, часто встречается в приложениях при математическом описании различных технологических процессов. Как было отмечено ранее, равномерно распределенное управление отличается от распределенного управления. Поэтому, при решении задач оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями полученные результаты также не совпадают, несмотря на то, что обе задачи были исследованы по одной и той же схеме.

При оценке качества управления были использован квадратичный функционал. Исследование условия оптимальности показывает, что задача оптимизации может иметь решение лишь в некотором классе функций внешнего влияния. Найдены достаточные условия существования и единственности решения нелинейного интегрального уравнения оптимального управления. Получены достаточные условия существования и единственности решения нелинейной задачи равномерно распределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями. Получено полное решение задачи нелинейной оптимизации и доказана сходимость его приближений.

Глава III. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ НА ПРИМЕРАХ

В этой главе исследованы вопросы разрешимости одной модельной задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при равномерно распределенном управлении. Найдены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации, и разработан алгоритм построения её полного и приближенных решений. Доказана сходимость приближенных решений.

3.1 Постановка нелинейно-квадратичной задачи оптимизации с равномерно распределенным управлением

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u(t)\right)dt,\quad \beta>0,$$

где функция $v(t,x)$ является решением краевой задачи

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^T K\left(t,\tau\right)v\left(\tau,x\right)d\tau+g\left(t,x\right)f[t,u\left(t\right)],$$

$$v\left(0,x\right)=\psi\left(x\right),\quad 0<x<1$$

$$v_x\left(t,0\right)=0,\qquad v_x\left(t,1\right)+\alpha v\left(t,1\right)=0,\quad 0<t\le T,$$

$u(t)\in H(0,T)$ – функция управления; H – пространство Гильберта.

Слабообобщенное решение краевой задачи управляемого процесса определяем следующим образом

$$v_n\left(t\right)=\lambda\int_0^T R_n\left(t,s,\lambda\right)a_n\left(s\right)ds+a_n\left(t\right),$$

где

$$a_n\left(t\right)=e^{-\lambda_n^2t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n\left(\tau\right)f\left[\tau,u\left(\tau\right)\right]d\tau,$$

$R_n(t,s,\lambda)$ – резольвента ядра $K_n(t,s)=\int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)\,d\tau$, для которой справедливо $\int\limits_0^T R_n^2(t,s,\lambda)\,ds \le \dfrac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}$. Численное решение проделано при следующих данных

1. $T=2;$
2. $\xi(x)=1-x^2;$
3. $\beta=0,5;$
4. $q(t,u(t))=e^{-u^2(t)},\ q_u(t,u(t))=-2u(t)e^{-u^2(t)},$
   $q(t,u(t))q_u(t,u(t))=-2u(t)e^{-2u^2(t)},\ 1\le u(t)\le 2,$
   $q_0=\max\left|q_u(t,u(t))\right|\le 2e^{-1}\approx 0{,}735759;$
5. $g(t,x)=0.04*(x^2+t);$
6. $\psi(x)=x;$
7. $\alpha=0,5;\alpha=1;\alpha=1,5;$
8. $f(t,u(t))=u(t)e^{-2u^2(t)},\ f_u(t,u(t))=e^{-2u^2(t)}\left(-4u^2(t)+1\right),$
   $f_0=\max\left|\mathrm{f}_u(t,u(t))\right|\le\dfrac{3}{e^2}\le 0,41;$
9. $f_u(t,u(t))\left(\dfrac{q(t,u(t))q_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}\right)_u=e^{-2u^2(t)}\dfrac{2\left[1+8u^2(t)\right]}{4u^2(t)-1}>0,\ \ 1\le u(t)\le 2;$
10. $\beta\dfrac{q(t,u(t))q_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}=\beta\dfrac{-2u(t)e^{-2u^2(t)}}{e^{-2u^2(t)}\left(-4u^2(t)+1\right)}=\beta\dfrac{2u(t)}{4u^2(t)-1}=p(t),$
    $\dfrac{4}{15}\beta\le p(t)\le\dfrac{2}{3}\beta;$

Отсюда функцию $u(t)=\varphi(t,p(t),\beta)=\dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2+4p^2(t)}}{4p(t)}$ можно определять однозначно и

$$\varphi_0(\beta) = \max\left|\varphi_0\left[t, p(t), \beta\right]\right| = \frac{\beta}{4p^2(t)}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4p^2(t)}}\right)\Bigg|_{p(t)=\frac{4}{15}\beta} = \frac{225}{35\beta} = 13{,}235294,$$

при $\beta = 0{,}5$.

11. Вычислим численные значения λ_n , для которых справедливо

$$\lambda_n tg\lambda_n = \alpha$$

Таблица 1.

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
Значение $\alpha = \frac{1}{2}$	0.653271	3.29231	6.36162	9.47749	12.606	15.7397	18.876	22.0139	25.1526	28.292
Значение λ_n^2	0.426763	10.8393	40.4702	89.8227	158.912	247.739	356.305	484.61	632.654	800.438

Таблица 2.

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
Значение $\alpha = 1$	0.860334	3.42562	6.4373	9.52933	12.6453	15.7713	18.9024	22.0365	25.1724	28.3096
Значение λ_n^2	0.740174	11.7349	41.4388	90.8082	159.903	248.733	357.301	485.607	633.652	801.436

Таблица 3.

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
Значение $\alpha = \frac{3}{2}$	0.988241	3.54217	6.50966	9.58009	12.6841	15.8026	18.9286	22.059	25.192	28.3272
Значение λ_n^2	0.97662	12.5469	42.3757	91.7782	160.886	249.722	358.293	486.601	634.648	802.432

12. Численные значения коэффициентов Фурье функции $\psi(x) = x$

$$\psi_n = \int_0^1 x z_n(x) dx, \quad z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha\right)}} \cos \lambda_n x$$

Таблица 4.

ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
Значение $\alpha = 1/2$	0.36393	0.28322	0.27699	0.27566	0.27519	0.42288	0.27484	0.27477	0.27472	0.27468
Значение ψ_n^2	0.13245	0.080215	0.076721	0.07599	0.075727	0.075604	0.075537	0.075496	0.075469	0.075451

Таблица 5.

ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
Значение ($\alpha = 1$)	0.35076	0.28923	0.27917	0.27671	0.27579	0.27536	0.27512	0.27497	0.27487	0.27481
Значение ψ_n^2	0.12304	0.083655	0.077936	0.076571	0.076062	0.075821	0.075688	0.075608	0.075555	0.075519

Таблица 6.

ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
Значение ($\alpha = 3/2$)	0.34045	0.29315	0.28108	0.2777	0.27638	0.27574	0.27539	0.27517	0.27503	0.27493
Значение ψ_n^2	0.1159	0.085938	0.079007	0.077118	0.076387	0.076034	0.075838	0.075719	0.075641	0.075587

14. Численные значения коэффициентов Фурье функции $g(t,x) = 0.04(x^2 + t)$

$$g_n(t) = \int_0^1 0.04(x^2 + t) z_n(x) dx, \quad z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha\right)}} \cos \lambda_n x$$

Таблица 7.

g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
Значение $\alpha = 1/2$	0.0090388+0.03273t	0.0064755+0.028363t	0.0062783+0.028024t	0.0062365+0.027952t	0.0062214+0.027926t	0.0062143+0.027914t	0.0062105+0.027907t	0.0062081+0.027903t	0.0062066+0.0279t	0.0062056+0.027898t
Значение g_n^2	8.1699e-005+0.00059167t+0.0010712 t^2	4.1933e-005+0.00036733t+0.00080447 t^2	3.9417e-005+0.00035188t+0.00078533 t^2	3.8894e-005+0.00034864t+0.0007813 t^2	3.8706e-005+0.00034747t+0.00077985 t^2	3.8618e-005+0.00034693t+0.00077917 t^2	3.857e-005+0.00034663t+0.00077879 t^2	3.8541e-005+0.00034645t+0.00077857 t^2	3.8522e-005+0.00034633t+0.00077842 t^2	3.8509e-005+0.00034625t+0.00077832t^2

Таблица 8.

g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
Значение $\alpha = 1$	0.0086193+0.03202t	0.0066657+0.02869t	0.0063474+0.028143t	0.0062697+0.028009t	0.0062406+0.027959t	0.0062268+0.027935t	0.0062192+0.027922t	0.0062146+0.027914t	0.0062116+0.027909t	0.0062095+0.027905t
Значение g_n^2	7.4292e-005+0.00055198t+0.0010	4.4432e-005+0.00038248t+0.0008	4.0289e-005+0.00035727t+0.0007	3.931e-005+0.00035122t+0.0007	946e-005+0.00034896t+0.0007817 t^2	3.8773e-005+0.00034789t+0.0007	3.8678e-005+0.0003473t+0.00077	3.8621e-005+0.00034695t+0.0007	3.8583e-005+0.00034671t+0.0007	3.8558e-005+0.00034655t+0.0007

	253 t^2	2311 t^2	9201 t^2	845 t^2		8037 t^2	964t^2	7919 t^2	789 t^2	787t^2

Таблица 9.

g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
Значение $\alpha = 3/2$	0.0082909+0.031464t	0.0067898+0.028903t	0.0064078+0.028247t	0.006301+0.028063t	0.0062592+0.027991t	0.006239+0.027956t	0.0062278+0.027937t	0.0062209+0.027925t	0.0062165+0.027917t	0.0062134+0.027912t
Значение g_n^2	6.8739e-005+0.00052172t+0.00098996 t^2	4.6101e-005+0.00039249t+0.00083538 t^2	4.106e-005+0.000362t+0.00079787 t^2	3.9702e-005+0.00035364t+0.00078752 t^2	3.9178e-005+0.0003504t+0.00078349 t^2	3.8925e-005+0.00034884t+0.00078154 t^2	3.8785e-005+0.00034797t+0.00078046 t^2	3.87e-005+0.00034744t+0.0007798 t^2	3.8644e-005+0.00034709t+0.00077937 t^2	3.8606e-005+0.00034685t+0.00077907t^2

15. Численные значения коэффициентов Фурье функции $\xi(x) = 1 - x$

$$\xi_n = \int_0^1 (1-x^2) z_n(x) dx, \quad z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha\right)}} \cos \lambda_n x$$

Таблица 10.

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
Значение $\alpha = 1/2$	0.59227	0.54719	0.54364	0.54288	0.54261	0.54248	0.54241	0.54237	0.54234	0.54232
Значение ξ_n^2	0.35079	0.29942	0.29554	0.29472	0.29442	0.29429	0.29421	0.29416	0.29413	0.29411

Таблица 11.

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
Значение $\alpha = 1$	0.58503	0.55061	0.54488	0.54348	0.54296	0.54271	0.54257	0.54249	0.54243	0.54239
Значение ξ_n^2	0.34226	0.30317	0.2969	0.29537	0.2948	0.29453	0.29438	0.29429	0.29423	0.29419

Таблица 12.

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
Значение $\alpha = \frac{3}{2}$	0.57932	0.55283	0.54597	0.54405	0.54329	0.54293	0.54272	0.5426	0.54252	0.54246
Значение ξ_n^2	0.33561	0.30562	0.29809	0.29599	0.29517	0.29477	0.29455	0.29442	0.29433	0.29427

Для решения операторного уравнения $p(t) = G[p(t)] + h(t)$ используется метод последовательных приближений, т.е.

$$p_i(t) = G[p_{i-1}(t)] + h(t), \ i = 1,2,3,... \ ,$$

где $p_0(t) = h(t)$. Известно, для приближенного решения $p_i(t)$ справедлива оценка

$$\| p^0(t) - p_i(t) \|_{H(0,T)} \leq = \frac{\gamma^i}{1-\gamma} \| G[h(t)] \|_{H(0,T)} .$$

	$\| p^0(t) - p_i(t) \|_{H(0,T)} \leq \frac{\gamma^i}{1-\gamma} \| G[h(t)] \|_{H(0,T)}$		
i	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{3}{2}$
1	0.0114	0.0100	0.0100
2	0.0040	0.0032	0.0032

3	0.0014	0.0010	0.0010
4	4.8317e-04	3.3717e-04	3.2657e-04
5	1.6824e-04	1.0891e-04	1.0449e-04
6	5.8583e-05	3.5181e-05	3.3433e-05
7	2.0399e-05	1.1364e-05	1.0697e-05
8	7.1030e-06	3.6709e-06	3.4228e-06
9	2.4733e-06	1.1858e-06	1.0952e-06
10	8.6122e-07	3.8303e-07	3.5042e-07

3.2 Сходимость приближенного решения задачи нелинейной оптимизации

Полное решение задачи оптимизации найдено в виде тройки $\left(u^0(t), \nu^0(t,x), J[u^0(t)]\right)$. k-е приближение оптимальной управляющей функции определяем следующим образом

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta], \quad k = 1, 2, 3, ...,$$

Приближенные построения оптимального процесса будем проводить следующими способами:

1. m-е приближение по резольвенте

$$\nu^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^0(t) + \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) a_n^0(s) ds \right) z_n(x);$$

2. m, k-е приближение

$$\nu_k^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(k)}(t) + \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) a_n^{(k)}(s) ds \right) z_n(x);$$

3. m, k, r-е приближение

$$\nu_k^{m,r}(t,x) = \sum_{n=1}^{r}\left(a_n^{(k)}(t) + \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) a_n^{(k)}(s) ds \right) z_n(x).$$

В соответствии с приближенными построениями оптимального процесса минимальное значение функционала будем приближать следующими способами:

1. m-е приближение по резольвенте

$$J_m[u^0(t)] = \int_0^1 \left[\nu^m(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u^0(t)\right) dt;$$

2. m, k-е приближение

$$J_m[u_k(t)] = \int_0^1 \left[\nu_k^m(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u_k(t)\right) dt;$$

3. m,k,r-приближение

$$J_m^r[u_k(t)] = \int_0^1 \left[\nu_k^{m,r}(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u_k(t)\right) dt.$$

1. Сходимость приближений оптимального управления.

$$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} = \left\| \varphi[t, p^0(t), \beta] - \varphi[t, p_k(t), \beta] \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| p^0(t) - p_k(t) \right\|_{H(0,T)}.$$

	$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| p^0(t) - p_k(t) \right\|_{H(0,T)}$		
s	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	0.1515	0.1324	0.1319
2	0.0527	0.0428	0.0422
3	0.0184	0.0138	0.0135
4	0.0064	0.0045	0.0043
5	0.0022	0.0014	0.0014
6	7.7536e-04	4.6564e-04	4.4250e-04
7	2.6998e-04	1.5041e-04	1.4158e-04
8	9.4010e-05	4.8586e-05	4.5302e-05
9	3.2735e-05	1.5694e-05	1.4495e-05
10	1.1398e-05	5.0696e-06	4.6379e-06

2. Сходимость по оптимальному процессу.

2.1. Сходимость m-го приближения оптимального процесса

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)} \le \sqrt{\overline{C}_1(\lambda)}\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

где

$$\overline{C}_1(\lambda)=\frac{\lambda^2K_0T}{2}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\left\{\left\|\psi(x)\right\|^2_{H(0,1)}+\left\|g(t,x)\right\|^2_{H(Q)}\left\|f\left(\tau,u^0(\tau)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}\right).$$

	$\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}$		
s	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=1$	$\alpha=\frac{3}{2}$
1	0.8558	1.0990	1.5836
2	0.4852	0.7377	1.1304
3	0.2751	0.4952	0.8069
4	0.1560	0.3324	0.5759
5	0.0885	0.2231	0.4111
6	0.0502	0.1498	0.2934
7	0.0284	0.1005	0.2095
8	0.0161	0.0675	0.1495
9	0.0091	0.0453	0.1067
10	0.0052	0.0304	0.0762

2.2. Сходимость m,k-го приближения.

$$\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)} \le$$

$$\le\sqrt{\overline{C}_2(\lambda)}f_0\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,,\ \forall\ m=1,2,3,...,$$

где

$$\overline{C}_2(\lambda) = T\|g(t,x)\|^2_{H(Q)}\left(1+\frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right).$$

	$\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}$		
	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	0.0221	0.0186	0.0185
2	0.0077	0.0060	0.0059
3	0.0027	0.0019	0.0019
4	9.3468e-04	6.2822e-04	6.0558e-04
5	3.2546e-04	2.0293e-04	1.9376e-04
6	1.1333e-04	6.5550e-05	6.1998e-05
7	3.9461e-05	2.1174e-05	1.9837e-05
8	1.3741e-05	6.8397e-06	6.3472e-06
9	4.7846e-06	2.2094e-06	2.0309e-06
10	1.6660e-06	7.1367e-07	6.4981e-07

2.3. Сходимость m,k,r-го приближения.

$$\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)} \le \sqrt{\overline{C}_3(\lambda)}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{1/2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,\ \forall\ m,\ k=1,2,3,\ldots,$$

где

$$\overline{C}_3(\lambda) = 2\left(1+\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+\|g(t,x)\|^2_{H(Q)}\left\|f^2(t,u_k(t))\right\|^2_{H(0,T)}\right\}$$

	$\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}$		
	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$

1	0.9255	1.1774	1.3363
2	0.5667	0.7210	0.8183
3	0.4363	0.5550	0.6300
4	0.3658	0.4654	0.5282
5	0.3206	0.4078	0.4629
6	0.2886	0.3671	0.4167
7	0.2644	0.3364	0.3818
8	0.2454	0.3122	0.3543
9	0.2299	0.2925	0.3320
10	0.2170	0.2761	0.3134

2.4. Сходимость m,k,r-го приближения к оптимальному процессу. Эту сходимость доказываем по следующей схеме

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)} \le \left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)} +$$

$$+\left\|\nu^m(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)} \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0.$$

	$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}$		
	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	1.8033	2.2950	2.9384
2	1.0597	1.4647	1.9546
3	0.7141	1.0521	1.4387
4	0.5228	0.7984	1.1048
5	0.4094	0.6311	0.8742
6	0.3388	0.5169	0.7102
7	0.2929	0.4369	0.5913
8	0.2615	0.3797	0.5039
9	0.2391	0.3378	0.4387
10	0.2222	0.3065	0.3896

3. Сходимость значений приближений минимального значения функционала

$\overline{C}_{10} = \overline{C}_{11} = \overline{C}_{31} = \left\| \nu(T,x) + \overline{\nu}(T,x) - 2\xi(x) \right\|_{H(0,1)}$,

$\overline{C}_{21} = \beta q_0 \left\| u(t) + \overline{u}(t) \right\|_{H(0,T)}$.

3.1. Сходимость m-го приближения (по резольвенте).

$$\left| J\left[u^0(t)\right] - J_m\left[u^0(t)\right] \right| \le \overline{C}_{10} \left\| \nu^0(T,x) - \nu_m(T,x) \right\|_{H(0,1)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

	$\left\| J\left[u^0(t)\right] - J_m\left[u^0(t)\right] \right\|$		
s	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	8.2871	13.1022	21.1174
2	4.6991	8.7947	15.0734
3	2.6645	5.9034	10.7593
4	1.5109	3.9626	7.6799
5	0.8567	2.6599	5.4818
6	0.4858	1.7854	3.9129
7	0.2755	1.1984	2.7930
8	0.1562	0.8044	1.9936
9	0.0886	0.5400	1.4230
10	0.0502	0.3625	1.0157

3.2. Сходимость m,k-го приближения.

$$\left| J_m\left[u^0(t)\right] - J_m\left[u_k(t)\right] \right| \le \overline{C}_{11} \left\| \nu^m(T,x) - \nu_k^m(T,x) \right\|_{H(Q)} +$$

$$+\overline{C}_{21} \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\ \forall m = 1,2,3,....$$

	$\left\| J_m\left[u^0(t)\right] - J_m\left[u_k(t)\right] \right\|$		
s	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	0.5296	0.4977	0.5211
2	0.1844	0.1608	0.1667

3	0.0642	0.0519	0.0533
4	0.0224	0.0168	0.0171
5	0.0078	0.0054	0.0055
6	0.0027	0.0018	0.0017
7	9.4399e-04	5.6545e-04	5.5917e-04
8	3.2870e-04	1.8265e-04	1.7891e-04
9	1.1446e-04	5.9001e-05	5.7246e-05
10	3.9854e-05	1.9059e-05	1.8317e-05

3.3. *Сходимость m,k,r-го приближения.*

$$\left|J_m\left[u_m(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le \overline{C}_{31}\left\|v_k^m(T,x)-v_k^{m,r}(T,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[r\to 0]{}0,\ \forall m,k=1,2,3,....$$

	$\left\|J_s\left[u^s\right]-J_s^r\left[u^s\right]\right\|$		
	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	$\alpha=3/2$
1	8.9621	14.0367	17.8198
2	5.4881	8.5957	10.9123
3	4.2248	6.6170	8.4003
4	3.5426	5.5485	7.0439
5	3.1046	4.8625	6.1729
6	2.7944	4.3767	5.5563
7	2.5606	4.0105	5.0914
8	2.3764	3.7220	4.7252
9	2.2267	3.4874	4.4274
10	2.1018	3.2919	4.1791

3.4. Сходимость m,k,r-го приближения к минимальному значению функционала. Эту сходимость доказываем согласно следующей схемы

$$\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right|+$$

$$\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|+\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0.$$

	$\left\|J\left[u^{0}(t)\right]-J_{m}^{r}\left[u_{k}(t)\right]\right\|$		
	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	17.7788	27.6367	39.4583
2	10.3716	17.5512	26.1525
3	6.9535	12.5723	19.2130
4	5.0758	9.5279	14.7408
5	3.9691	7.5277	11.6603
6	3.2829	6.1639	9.4709
7	2.8370	5.2095	7.8849
8	2.5330	4.5267	6.7190
9	2.3153	4.0275	5.8504
10	2.1521	3.6544	5.1949

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы задачи нелинейной оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями. При этом основное внимание уделено:

1) процедуре построения слабообобщенного решения, коэффициенты Фурье которого, как в случае решения основной, так и в случае решения сопряженной краевых задач определяются соответственно как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода;
2) определению радиусов сходимости рядов Неймана при решении линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма II рода. Установлено, что радиусы сходимости совпадают в обоих случаях и расширяются с увеличением номера n=1,2,3,… коэффициентов Фурье;
3) установлению классов функций внешнего влияния, где задачи нелинейной оптимизации с распределенным и равномерно распределенным управлениями разрешимы;
4) нахождению достаточных условий существования и единственности решения задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями, при распределенном и равномерно распределенном управлениях;
5) созданию алгоритма построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказательству их сходимости по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу, как в случае распределенного, так и в случае равномерно распределенного управления.

Приведены результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы.

Теоретические результаты данного исследования получены впервые и являются новыми в теории оптимального управления тепловыми процессами, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае распределенного и равномерно распределенного управлений и представляют научный интерес с точки зрения теории и приложений, а также применимы при разработке новых методов решения нелинейных задач оптимального управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Авдонин С.А.** Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент [Текст]/ С.А. Авдонин, С.А. Иванов. – Киев: УМК ВО, 1989. – 244 с.
2. **Алексеев Б.В.** Физическая газодинамика реагирующих сред [Текст]/ Б.В. Алексеев, А.М. Гришин. – М.: Высшая школа, 1985. – 464 с.
3. **Арман Ж.Л.** Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций [Текст]/ Ж.Л. Арман. – М.: Мир, 1977. – 142 с.
4. **Аргучинцев А.В.** Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения [Текст]/ А.В. Аргучинцев // Изв. вузов. Математика. – 2002, №12. – С. 10-17.
5. **Аргучинцев А.В.** Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем первого порядка [Текст]/ А.В. Аргучинцев // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004, №5. – С. 42-48.
6. **Аргучинцев А.В.** Оптимизация гиперболических систем с управляемыми начально-краевыми условиями в виде дифференциальных связей [Текст]/ А.В. Аргучинцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004, №2. – С. 287-296.
7. **Асанова Ж.К.** Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление процессом теплопередачи [Текст]: автореф.дис..., канд.физ-мат.наук: 01.01.02 / Ж.К. Асанова. – Ош, 2012. – 18с.
8. **Бабат Г.И.** Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение – 2-е изд. [Текст]/ Г.И. Бабат. – М.-Л.: Энергия, 1965. – 552 с.
9. **Будак Б.М.** Кратные интегралы и ряды [Текст]/ Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1967. – 607 с.

10. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами [Текст]/ А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.

11. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами [Текст]/ А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

12. **Бутковский А.Г.** Управление системами с распределенными параметрами [Текст]: обзор/ А.Г. Бутковский // Автоматика и телемеханика. – 1979, №11. –С. 16-65.

13. **Бутковский А.Г.** Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами [Текст]/ А.Г. Бутковский, Л.М. Пустыльников. – М.: Наука, 1980. –384 с.

14. **Васильева А. Б.** Интегральные уравнения [Текст]/ А.Б Васильева, Н.А. Тихонов. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 156 с.

15. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач [Текст]/ Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

16. **Верлань А.Ф.** Математическое моделирование непрерывных динамических систем [Текст]/ А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с.

17. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики [Текст]/ В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. –512 с.

18. **Владимиров В.С.** Математические задачи односкоростной теории переноса частиц [Текст]/ В.С. Владимиров. // Труды МИАН. – 1961, Т.61. – С.3-158.

19. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст]/ В. Вольтера. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

20. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц [Текст]/ Ф.Р. Гантмахер. – М.: Госуд. изд-во техн.-теоретич. лит., 1957. – 491 с.

21. **Егоров А.И.** О приближенном решении одной задачи оптимального управления [Текст]/ А.И. Егоров, Р. Рафатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972, Т.12, №4. – С. 943-956.

22. **Егоров А.И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами [Текст]/ А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

23. **Егоров А.И.** Оптимальное управление линейными системами [Текст]/ А.И. Егоров. – Киев: Выща школа, Головное изд-во, 1988. – 278 с.

24. **Егоров А.И.** Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии [Текст]/ А.И. Егоров Р. Рафатов. – Фрунзе: Илим, 1990. – 336 с.

25. **Егоров А.И.** Основы теории управления [Текст]/ А.И. Егоров. – М.: Физматлит., 2004. – 504 с.

26. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ [Текст]/ Л.В.Канторович, Г.П. Акилов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

27. **Кадиримбетова А.К.** Решение одной задачи теории нелинейных интегральных уравнений. [Текст]/ А.Керимбеков, А.К. Кадиримбетова // Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец.вып.– 2013, №1. – С. 168-172.

28. **Кадиримбетова А.К.** О разрешимости задачи нелинейного граничного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова // Журнал «Вестник ОшГУ», –2013, №1. – С. 173-176.

29. **Кадиримбетова А.К.** Интегральное уравнение оптимального управления в задаче оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями. [Текст]/ А.Керимбеков, А.К. Кадиримбетова // Вестник АРГУ им. К. Жубанова.– 2015, №1. – С. 173-178.

30. **Кадиримбетова А.К**. Условия разрешимости интегрального уравнения в задаче управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово

интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А.К.Кадиримбетова // Вестник КРСУ им. Б.Н. Ельцина. – Бишкек, 2015. Т.15, №5. –С.74-76.

31. **Кадиримбетова А.К**. Приближенное решение задачи управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А.К.Кадиримбетова // Вестник КРСУ им. Б.Н. Ельцина. – Бишкек, 2015. Т.15, №5. –С.71-73.

32. **Керимбеков А.** Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами [Текст]: дис..., д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.Керимбеков –Бишкек, 2003. –224 с.

33. **Керимбеков А.** О разрешимости задачи нелинейного оптимального управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков // Доклады НАН КР, – 2014, №1. – С. 22-27.

34. **Kerimbekov A.** About the solvability of a nonlinear optimization of the processes described by integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov // ISAAC 9th congress. Krakov, Poland, – 2013, – P. 108-109.

35. **Kerimbekov A.** On the solvability of the problem of the boundary control of thermal processes, described by the Fredholm integro-differential equation [Текст]/ A. Kerimbekov // Abstracts of International Congress of Mathematicians. South Korea, Seoul, 13-21 August, 2014, – P. 570.

36. **Керимбеков А.** О разрешимости нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов при граничном управлении [Текст]/ А. Керимбеков, Г. Джээнбаева, И. Шаршенова // Вестник КГНУ, серия 3, Естественно-технические науки, –2001, Вып. 7. – С. 30-34.

37. **Kerimbekov A.** On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, A. Kadirimbetova // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 119.

38. **Керимбеков А.** Условия оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-

дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Материалы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», – 2013, №1. – С. 61-66.

39. **Керимбеков А.** О разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Вестник Актюбинского регионального государственного университета имени К.Жубанова, – 2014, №4(38). – С. 13-21.

40. **Kerimbekov A.** Boundary control of thermal processes described by Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014. – P. 277.

41. **Kerimbekov A.** On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 115.

42. **Kerimbekov A.** Approximate solution of the boundary control problem of thermal processes described by Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014. – P. 213-218.

43. **Красниченко Л.С.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при граничном управлении [Текст]: автореф.дис..., канд.физ-мат.наук: 01.01.02 / Л.С. Красниченко. – Бишкек, 2012. – 18с.

44. **Краснов М.В.** Интегральные уравнения [Текст]/ М.В. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 303 с.

45. **Крылов Н.В.** Управляемые процессы диффузионного типа [Текст] / Н.В. Крылов. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

46. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики [Текст]/ О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
47. **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст]/ Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
48. **Люстерник Л.А.** Элементы функционального анализа [Текст]/ Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
49. **Марчук Г.И.** Численные методы расчета ядерных реакторов [Текст]/ Марчук Г.И. – М.: Атомиздат, 1958. – 324 с.
50. **Маслов В.П.** Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. Эволюция диссипативных структур [Текст]/ В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
51. **Наметкулова Р.Ж.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2013, Т.13, №7. – С. 23-27.
52. **Наметкулова Р.Ж.** Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А.Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Механика и моделирование процессов технологии.– 2013, №2. – С. 80-86.
53. **Наметкулова Р.Ж.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями. [Текст]/ А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Тезисы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», –2013. – С. 50.
54. **Наметкулова Р.Ж.** Решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого интегро-дифференциальным уравнением

Фредгольма [Текст]/ А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2014, Т.14, №1. – С. 166-172.

55. **Наметкулова Р.Ж.** Оптимальное распределенное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями и приближенные решения краевых задач [Текст]/ А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям, – Бишкек: Илим, 2014. - Вып. 46. – С. 14-20.

56. **Наметкулова Р.Ж.** Приближенные решения «основной» и «сопряженной» краеых задач управляемого теплового процесса, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальными уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям, – Бишкек: Илим, 2014. - Вып. 47. – С. 24-28.

57. **Nametkulova R.** On the solvability of the problem of the optimal control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, R. Nametkulova // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 117.

58. **Наметкулова Р.Ж.** О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений [Текст] / Р.Ж. Наметкулова // Механика и технологии.– 2015, №2. – С. 42-47.

59. **Наметкулова Р.Ж.** О разрешимости нелинейного интегрального уравнения в задаче распределенного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2015, Т.15, №5. – С. 80-82.

60. **Наметкулова Р.Ж.** Приближенное решение задачи распределенного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2015, Т.15, №5. – С. 88-90.

61. **Наметкулова Р.Ж.** Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением

[Текст]/ А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Известия ИГУ, –2016, Т.15, сер. «Математика» – С. 50-61.

62. **Наметкулова Р.Ж.** Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмовым интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Известия ИГУ, –2016, Т.16, сер. «Математика» – С. 71-88.

63. **Nametkulova R.** On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls [Текст] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, R. Nametkulova, A. Kadirimbetova // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal - 2016, Vol. 10, No. 1, P. 215-223.

64. **Плотников В.И.** Энергетические неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций [Текст]/ В.И. Плотников // Изв. АН СССР серия мат. – 1968, т. 32, №4. – С. 743–755.

65. **Понтрягин Л.С.** Математическая теория оптимальных процессов [Текст]/ Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1983. – 392 с.

66. **Пузырев В.А.** Оптимальное управление системами с распределенными параметрами [Текст]: обзор/ В.А. Пузырев // Зарубежная радиоэлектроника. – 1975, №7. – С. 38-57.

67. **Рафатов Р.Р.** Решение интегро-дифференциальной краевой задачи Риккати в проблеме оптимизации процесса переноса частиц [Текст] / Р.Р. Рафатов // Проблемы автоматики и управления. –1999. – С. 75– 84.

68. **Рихтмайер Р.** Принципы современной математической физики [Текст]/ Р. Рихтмайер. – М.: Мир, 1982. – 488 с.

69. **Сейдакмат кызы Э.** Решение задачи граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Материалы 2-й

международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», –2013, №1. – С. 76-81.

70. **Сейдакмат кызы Э.** Вывод системы нелинейных интегральных уравнений в задаче граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Вестник КГУ им. И. Арабаева, –2014, №3. – С. 292-297.
71. **Сейдакмат кызы Э.** Приближенное решение задачи граничного векторного управления тепловыми процессам, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник КРСУ», – 2014, Т.14, №12. – С. 80-86.
72. **Сиразетдинов Т.К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами [Текст]/ Т.К. Сиразетдинов. – М.: Наука, 1977. – 497 с.
73. **Тихомиров В. В.** О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце [Текст]/ Е. И. Моисеев, В. В. Тихомиров // Нелинейная динамика и управление. 2005. Вып. 5. С. 42-52.
74. **Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики [Текст]/ А.Н Тихонов, Самарский А.А. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
75. **Урывская Т.Ю.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов [Текст]: автореф.дис..., канд.физ-мат.наук: 01.01.02 / Т.Ю. Урывская. – Бишкек, 2010. – 18с.
76. **Appel J.M.** Partial Integral Operators and Integro–Differential Equations [Текст] / J.M. Appel, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko // M. Dekkar, New York, 2000.
77. **Evans G.C.** Sull equazione integro-differenziale di tipo parabolico [Текст]/ G.C. Evans // Rend. Accad. dei Lincei. – 1912, №21(5), – P. 25-31.

78. **Khurshudyan A.** On optimal boundary and distributed control of partialintegro–differential equations [Текст] / A.zh. Khurshudyan // Archives of Control Sciences, Volume 24(LX), 2014, No. 1.-P. 5–25.

79. **Kowalewski A.** Optimal Control of an Infinite Order Hyperbolic System with Multiple Time-Varying Lags [Текст] / A. Kowalewski // Automatyka, Tom 15, 2011. - P.53-65.

80. **Sachs E.W.** Efficient solution of partial integro–differential equation in finance [Текст] / E.W. Sachs, A.K. Strauss // Applied Numerical Math., Vol. 58(11), 2008. -P. 1687-1703.

81. **Shen W.** Optimal control problem governed by a linear hyperbolic integro-differential equation and its finite element analysis [Текст] / W. Shen, D. Yang, W. Liu // Boundary Value Problems 2014, P.173.

82. **Thorwe J.** Solving partial integro–differential equations using Laplace transform method [Текст] / J. Thorwe, S. Bhalekar // American J. of Computational and Applied Math., Vol. 2(3), 2012. -P. 101-104.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Листинг программы (Matlab)

```
function Research
Graph=figure('color',[0 0.2 0.2],...
             'units','normal',...
             'menu', 'none',...
             'name','Постановка нелинейно-квадратичной задачи оптимизации с двумерным векторным управлением')

F =uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.1 0.9 0.2 0.05],...
                'string','x*tan(x)= alpha')
alfa_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.1 0.84 0.05 0.05],...
                'string','alfa=')
%Поле для ввода значения параметра альфа
alfa_edit =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.15 0.84 0.15 0.05],...
            'string','0.5')
%Позволяет нам выбрать функцию для интегрирования:
%Zadacha1 - Psi
%Zadacha2- g
%Zadacha1 - ksi
Methods_pop = uicontrol('units','normal',...
      'Style', 'popup',...
       'String', 'Zadacha1|Zadacha2|Zadacha3',...
       'Position', [0.15 0.78 0.15 0.05])
%------Таблица для получения 10 значений лямбда и мх квадратов-----------
l1_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.05 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda1')
lam =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'text',...
            'pos',[0 0.64 0.05 0.05],'string' ,'L')
lam2 =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'text',...
            'pos',[0 0.58 0.05 0.05],'string' ,'L^2')

l(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.05 0.64 0.08 0.05])
l2(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.05 0.58 0.08 0.05])
l2_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.14 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda2')
l(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.14 0.64 0.08 0.05])
 l2(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.14 0.58 0.08 0.05])
l3_txt=uicontrol('units','normal',...
```

```
                 'style', 'text',...
                 'pos',[0.23 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda3')
l(3) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.23 0.64 0.08 0.05])
l2(3) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.23 0.58 0.08 0.05])
l4_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style', 'text',...
                 'pos',[0.32 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda4')
l(4) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.32 0.64 0.08 0.05])
l2(4) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.32 0.58 0.08 0.05])
l5_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style', 'text',...
                 'pos',[0.41 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda5')
l(5) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.41 0.64 0.08 0.05])
l2(5) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.41 0.58 0.08 0.05])
l6_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style', 'text',...
                 'pos',[0.5 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda6')
l(6) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.5 0.64 0.08 0.05])
l2(6) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.5 0.58 0.08 0.05])
l7_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style', 'text',...
                 'pos',[0.59 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda7')
l(7) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.59 0.64 0.08 0.05])
l2(7) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.59 0.58 0.08 0.05])
l8_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style', 'text',...
                 'pos',[0.68 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda8')
l(8) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.68 0.64 0.08 0.05])
l2(8) =uicontrol('units','normal',...
             'style', 'edit',...
             'pos',[0.68 0.58 0.08 0.05])
l9_txt=uicontrol('units','normal',...
                 'style', 'text',...
                 'pos',[0.77 0.7 0.08 0.05],...
                 'string','lambda9')
```

```
l(9) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.77 0.64 0.08 0.05])
l2(9) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.77 0.58 0.08 0.05])
l10_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.86 0.7 0.09 0.05],...
                'string','lambda10')
l(10) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.86 0.64 0.09 0.05])
l2(10) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.86 0.58 0.09 0.05])
%-------------------------------------------------------------------------
%------------Таблица значений функций при найденных лямбда---------------
fi1_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.05 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F1')
fii_text =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'text',...
            'pos',[0 0.42 0.05 0.05],'string' ,'F')
fii2_text =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'text',...
            'pos',[0 0.36 0.05 0.05],'string' ,'F^2')

fi(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.05 0.42 0.08 0.05])
fi2(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.05 0.36 0.08 0.05])
fi2_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.14 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F2')
fi(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.14 0.42 0.08 0.05])
 fi2(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.14 0.36 0.08 0.05])
fi3_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.23 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F3')
fi(3) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.23 0.42 0.08 0.05])
fi2(3) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.23 0.36 0.08 0.05])
fi4_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.32 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F4')
fi(4) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.32 0.42 0.08 0.05])
fi2(4) =uicontrol('units','normal',...
```

```
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.32 0.36 0.08 0.05])
fi5_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.41 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F5')
fi(5) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.41 0.42 0.08 0.05])
fi2(5) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.41 0.36 0.08 0.05])
fi6_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.5 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F6')
fi(6) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.5 0.42 0.08 0.05])
fi2(6) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.5 0.36 0.08 0.05])
fi7_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.59 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F7')
fi(7) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.59 0.42 0.08 0.05])
fi2(7) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.59 0.36 0.08 0.05])
fi8_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.68 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F8')
fi(8) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.68 0.42 0.08 0.05])
fi2(8) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.68 0.36 0.08 0.05])
fi9_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.77 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F9')
fi(9) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.77 0.42 0.08 0.05])
fi2(9) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.77 0.36 0.08 0.05])
fi10_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.86 0.48 0.09 0.05],...
                'string','F10')
fi(10) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.86 0.42 0.09 0.05])
fi2(10) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.86 0.36 0.09 0.05])
%-------------------------------------------------------------------------
```

```
%кнопка для расчета данных
Run=uicontrol('units','normal',...
              'style', 'push',...
              'pos',[0.1 0.05 0.15 0.07],...
              'string','Count',...
              'call',{@RunCall});
%кнопка выхода
Exit=uicontrol('units','normal',...
               'style', 'push',...
               'pos',[0.5 0.05 0.15 0.07],...
               'string','Exit',...
    'call','close(gcf)')
%функция обработывающаяся при нажатии на кнопку Run
    function RunCall(source, eventdata)
        %получаем значение лямбда из поля alfa_edit и переводим со
        %строчного в числовой формат
        alfa = str2num(get(alfa_edit,'string'));
        x = 0:0.1:1;
        %определяем какая функция для вычисления выбрана
        index = get(Methods_pop,'value');
         if(index == 0)
            msgbox('Please choose Function');
            return;
         end
        for(k = 1:10)
            x0 = 0 + pi*(k-1);
            if(k==1)
                x0 = pi/4;
            end
            str = ['x.*tan(x)','-',num2str(alfa)];
            %находим к-ю лямбду
            lambda(k)=fzero(str,x0);
            %квадрат лямбды
            lambda2(k) = lambda(k)*lambda(k);
            %заполняем таблицу для значений лямбды
           set(l(k),'string',lambda(k));
           set(l2(k),'string',lambda2(k));
           %Если выбрана первая функция, то вычисляем интеграл для к-го
           %лямбда 0 <= x <= 1
           if(index == 1)
              z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
              y = x.*cos(z(k)*x);
              t(k) = trapz(x,y);
             t2(k) = t(k)^2;
             %заполняем таблицу
            set(fi(k),'string', num2str(t(k)));
            set(fi2(k),'string', num2str(t2(k)));
           else
                if(index == 2)
                    z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
                    y = 0.04*x.^2.*cos(z(k)*x);
                    t(k) = trapz(x,y);
                    y = 0.04*cos(z(k)*x);
                    t1(k) = trapz(x,y);
                    t2(k) = t(k)^2;
                    t11(k) = t1(k)^2;
                    t21(k) = 2*t1(k)*t(k);
                    set(fi(k),'string', [num2str(t(k)),'+',num2str(t1(k)),'t']);
                    set(fi2(k),'string',
[num2str(t2(k)),'+',num2str(t21(k)),'t+',num2str(t11(k)),'t^2']);
                else
```

```
                    z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
                    y = (1-x^2).*cos(z(k)*x);
                    t(k) = trapz(x,y);
                    t2(k) = t(k)^2;
                    set(fi(k),'string', num2str(t(k)));
                    set(fi2(k),'string', num2str(t2(k)));
                end
            end

        end
    end
end


function ResearchProgramm_Nametkulova
win1 = figure('color',[1 1 1],...
    'units','normal',...
    'menu','none',...
    'numbertitle','off',...
    'name','Approximate','Position', [0.1 0.1 0.8 0.8]);

clc;
%% tables
a = zeros(20,1);
colnames1 = { '||p^0(t)-p_n(t)||'};
 t1 = uitable(win1,'Data',a, 'ColumnName', colnames1, ...
  'Position', [430 190 150 400]);

colnames2 = { '||u^0(t)-u_n(t)||'};
 t2 = uitable(win1,'Data',a, 'ColumnName', colnames2, ...
  'Position', [600 190 150 400]);

%% x, T
txt_x  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.94 0.05 0.05],...
    'String','x');

edt_x  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.94 0.15 0.05],...
    'String','0:0.01:1');

txt_T  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.94 0.05 0.05],...
    'String','T');

edt_T  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.28 0.94 0.1 0.05],...
    'String','2');

%% Xi
txt_xi  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.88 0.05 0.05],...
    'String','Xi(x)');

edt_xi  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.88 0.15 0.05],...
    'String','1-x');

txt_xi_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.88 0.05 0.05],...
    'String','||Xi(x)||^2');
```

```
edt_xi_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.28 0.88 0.1 0.05]);
 %% K(t,tau)
  txt_K  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.82 0.05 0.05],...
    'String','K(t,tau)');

edt_K  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.82 0.15 0.05],...
    'String','t.^2 + tau');

txt_K_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.82 0.05 0.05],...
    'String','||K(t,tau)||^2 =K_0');

edt_K_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.28 0.82 0.1 0.05]);
%% g(t,x)
txt_g = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.76 0.05 0.05],...
    'String','g(t,x)');
edt_g = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.76 0.15 0.05],...
    'String','0.04*(x.^2+t)');
txt_g_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.76 0.05 0.05],...
    'String','||g(t,x)||^2 ');

edt_g_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.28 0.76 0.1 0.05]);

%%  psi(x)
txt_psi = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.7 0.05 0.05],...
    'String','psi(x)');
edt_psi = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.7 0.15 0.05],...
    'String','x');
txt_psi_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.7 0.05 0.05],...
    'String','||psi(x)||^2 ');

edt_psi_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.28 0.7 0.1 0.05]);
%% u
edt_u1 = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.01 0.64 0.05 0.05],...
    'String','1');
txt_u = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.06 0.64 0.07 0.05],...
    'String','<= u <=');
edt_u2 = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.13 0.64 0.05 0.05],...
    'String','2');

%% F(t,u(t))
txt_f = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.21 0.64 0.05 0.05],...
    'String','f(t,u(t))');
edt_f  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.26 0.64 0.12 0.05], 'string', 'u*exp(-2*u.^2)');

%% q[t,u(t)]
```

```
txt_q = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.58 0.05 0.05],...
    'String','q(t,u(t))');
edt_q  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.06 0.58 0.12 0.05], 'string', 'exp(-u.^2)');

%% beta
txt_beta = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.58 0.05 0.05],...
    'String','Beta');
edt_beta  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.27 0.58 0.1 0.05], 'string', '0.5');
%% phi
txt_phi = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.52 0.1 0.05],...
    'String','phi(t,p(t),beta)');
txt_fphi  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.115 0.52 0.2 0.05]);
%% alpha
alfa_txt = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.46 0.05 0.05], 'string', 'alpha');
alfa_edit = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.28 0.46 0.05 0.05], 'string', '0.5');
%% alpha_0
txt_alpha = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.46 0.05 0.05],...
    'String','alpha_0');
edt_alpha  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.06 0.46 0.05 0.05], 'string', '0.4');
%% gamma
txt_gamma  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.12 0.46 0.05 0.05],...
    'String','gamma');
edt_gamma  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.175 0.46 0.05 0.05]);
%% ||G[p_0(t)]-p_0(t)]||_H(0,T)
txt_Gp  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.4 0.15 0.05],...
    'String','||G[p_0(t)]-p_0(t)]||_H(0,T)');
edt_Gpn  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.165 0.4 0.1 0.05]);
%% Buttons
norm_= uicontrol('units','normal','String','Нахож. нормы',...
              'Position',[0.01 0.01 0.1 0.1],'call',{@Norm});
ch_Op = uicontrol('units','normal','String','Проверка на оптим.',...
              'Position',[0.11 0.01 0.1 0.1],'call',{@Check_for_Optimality});
find_phi = uicontrol('units','normal','String','Нахож. управления',...
              'Position',[0.21 0.01 0.1 0.1],'call',{@Find_Control},'enable'
,'off');
find_gamma = uicontrol('units','normal','String','Нахож. гаммы',...
              'Position',[0.31 0.01 0.1 0.1],'call',{@Find_Gamma},'enable'
,'off');
convergence_optimal_processes = uicontrol('units','normal','String','Сходимость
прибл. опт. процесса',...
              'Position',[0.55 0.01 0.15
0.1],'call',{@Convergence_Process},'enable' ,'off');
convergence_appsolution = uicontrol('units','normal','String','Сходимость прибл.
решений',...
              'Position',[0.385 0.25 0.15
0.05],'call',{@Convergence_Solution},'enable' ,'off');
convergence_optimal_control = uicontrol('units','normal','String','Сходимость
прибл. опт. упр.',...
```

```
                'Position',[0.545 0.25 0.15
0.05],'call',{@Convergence_Control},'enable' ,'off');
  %% variables
     x = 0:0.01:1;  t = 0:0.01:1; T = 1;
     K_0 = 0;  KT = 0;
     u = 0:0.1:1;
     D = u;
     g = 0; psi = 0; xi = 0;
     f0= 0; fn = 0;
     phi0 = 0;
     lambda(1)=0.988241;
     % alpha = 0.5  =>  lambda_1 = 0.653271
     % alpha = 1.5 =>  lambda_1 =  0.988241;
     % alpha = 1   =>  lambda_1 =  0.860334;
     gamma = 0;  GN = 0;
     alpha_0 = 0; beta = 0;
     result = 0; result1 = 0;
     qn = 0; q0 = 0; Up = 0;
     %% functions
  function Xi_f(source, eventdata)
        x =  eval(get(edt_x,'string'));
        y =  eval(get(edt_xi,'string'));
        y =y.^2;
        xi = trapz(x,y);
       set(edt_xi_n, 'String', num2str(xi));
  end
 function psi_f(source, eventdata)
        x =  eval(get(edt_x,'string'));
        y =  eval(get(edt_psi,'string'));
        y =y.^2;
        psi = trapz(x,y);
       set(edt_psi_n, 'String', num2str(psi));
  end
    function K_f(source, eventdata)
        T = str2num(get(edt_T,'String'));
         t = 0:0.01:T;
         tau = 0:0.01:T;
         str = get(edt_K,'string');
        K = inline(['(',str,').^2']);
        K_0 = dblquad(K,0, T, 0, T);
        set(edt_K_n, 'String', K_0);
        KT = sqrt(K_0*T);
    end
function g_f(source, eventdata)
        str = get(edt_g,'string');
        i = inline(['(',str,').^2']);
        g = dblquad(i,0, 1, 0, T);
        set(edt_g_n, 'String', g);
        KT = sqrt(K_0*T);
    end
function Norm(source, eventdata)
         Xi_f(source,eventdata);
         K_f(source,eventdata);
         g_f(source,eventdata);
         psi_f(source,eventdata);
end
function Check_for_Optimality(source, eventdata)
     u_1 = str2num(get(edt_u1,'string'));
     u_2 = str2num(get(edt_u2,'string'));
     u = sym('u');
      f = eval(get(edt_f,'string'));
      q = eval(get(edt_q,'string'));
       f_u = diff(f);
```

```
        q_u = diff(q);
        D = q*q_u/f_u;
        D = simplify(D);
        D_u = diff(D);
        F = f_u*D_u;
        str = char(F);
        for u = u_1:0.01:u_2
            res = eval(F);
            f0 = max(f0,abs(eval(f_u)));
            fn = max(fn,abs(eval(f)));
            qn = max(qn,abs(eval(q)));
            q0 = max(q0, abs(eval(q_u)));
            if(res < 0)
                msgbox('Не выполняется');
                return;
            end
        end
        msgbox('Выполняется. All right!');
        set(find_phi ,'enable','on');
end
    function Find_Control(source, eventdata)
         u_1 = str2num(get(edt_u1,'string'));
         u_2 = str2num(get(edt_u2,'string'));
         beta = get(edt_beta,'string');
         u = u_1;
         D1 = D*beta;
         p1 = eval(char(D1));
         u = u_2;
         p2 = eval(char(D1));
         P = solve([beta,'*', char(D),'-p'],'u');
         c = 0;
         phi =P(1);
         for i =1:length(P)
             p = p1;
             pr1 = eval(P(i));
             p = p2;
             pr2 = eval(P(i));
             if pr1 >= u_1  & pr1 <= u_2
                 if pr2 >= u_1  & pr2 <= u_2
                 c =c+1;
                 phi =P(i);
                 end
             end
         end

         if( c==1)
             set(txt_fphi,'string',char(phi));
              p = sym('p');
              pu = diff(phi);
               p = p1;
               pr1 = eval(pu);
               p = p2;
               pr2 = eval(pu);
               phi0 = max(abs(pr1),abs(pr2));
         else
             msgbox('Не выполняется однозначность');
             return;
         end
         set(find_gamma ,'enable','on');
    end
    function Find_Gamma(source,eventdata)
        Find_Lambda(source,eventdata);
        alpha_0 = eval(get(edt_alpha,'string'));
```

```
        gamma = g*(1/lambda(1)^2 +1/6)*(1+lambda(1)^2/alpha_0^2)*phi0*f0;
        set(edt_gamma, 'string', gamma);
        set(convergence_appsolution ,'enable','on');
    end
    function Find_Lambda(source, eventdata)
        alfa = str2num(get(alfa_edit,'string'));
        for(k = 1:10)
            x0 = 0 + pi*(k-1);
            if(k==1)
                x0 = pi/4;
            end
            str = ['x.*tan(x)','-',num2str(alfa)];
            lambda(k)=fzero(str,x0);
        end
        end
    function Convergence_Solution(source,eventdata)
         GN = g*(1/lambda(1)^2 +1/6)*(1+2*lambda(1)^2/alpha_0^2)*fn;
         set(edt_Gpn, 'string',GN);
         for i=1:20
             r = gamma^i/(1-gamma)*GN;
             result(i,1) = r;
         end
         set(t1, 'Data', result);
          set(convergence_optimal_control ,'enable','on');
    end
    function Convergence_Control(solution,eventdata)
         for i=1:20
             r = result(i,1)*phi0;
             result1(i,1) = r;
             Up(i) = r;
         end
         set(t2, 'Data', result1);
         set(convergence_optimal_processes  ,'enable','on');
    end
    function Convergence_Process(solution,eventdata)
         C1 = lambda(1)^2*(1-1/log((sqrt(2)*lambda(1)-
alpha_0)/sqrt(2)*lambda(1)))^2*(psi + g*fn^2*T)*(1/lambda(1)^4+1/pi^4*4/3);
         C2 = T*g*(1+ 2*lambda(1)^2/(T*alpha_0^2))*(1/lambda(1)^2+1/6);
         C3 = 2*(1+2*lambda(1)^2/alpha_0^2)*(psi +g*fn^2*T);
         C11 = 4*T*(1+2*lambda(1)^2/alpha_0^2)*(psi +g*fn^2*T);
         C22 = eval(beta)*q0*2*max(u)*sqrt(T);
         ConvergenceProcess(C1, C2, C3, Up, lambda, alpha_0,f0,C11, C22);
    end
end

function Process = ConvergenceProcess(C1, C2, C3, u, lambda, alpha_0,
f0,C11,C22)
win1 = figure('color',[1 1 1],...
    'units','normal',...
    'menu','none',...
    'numbertitle','off',...
    'name','Approximate_Solutions_of_Process','Position', [0.1 0.1 0.8 0.8]);

a = zeros(20,1);
colnames1 = { '||V^0(t,x)-V^m(t,x)||'};
 t1 = uitable(win1,'Data',a, 'ColumnName', colnames1, ...
  'Position', [100 190 150 400]);

colnames2 = { '||V^m(t,x)-V^m_k(t,x)||'};
t2 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [370 190 150 400]);

colnames3 = { '||V^m_k(t,x)-V^{m,r}_k(t,x)||'};
```

```
t3 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [640 190 150 400]);

colnames4 = { '||V^0(t,x)-V^{m,r}_k(t,x)||'};
t4 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [910 190 150 400]);

V_1 = uicontrol('units','normal','String','||V^0(t,x)-V^m(t,x)||_{H(Q)}',...
              'Position',[0.085 0.25 0.15 0.05],'call',{@V1});
V_2 = uicontrol('units','normal','String','||V^m(t,x)-V^m_k(t,x)||_{H(Q)}',...
              'Position',[0.33 0.25 0.15 0.05],'call',{@V2},'enable','off');
V_3 = uicontrol('units','normal','String','||V^m_k(t,x)-
V^{m,r}_k(t,x)||_{H(Q)}',...
              'Position',[0.57 0.25 0.17 0.05],'call',{@V3},'enable','off');
V_4 = uicontrol('units','normal','String','||V^0(t,x)-
V^{m,r}_k(t,x)||_{H(Q)}',...
              'Position',[0.815 0.25 0.17 0.05],'call',{@V4},'enable','off');
Functional = uicontrol('units','normal','String','Сходимость функционала',...
              'Position',[0.45 0.1 0.15 0.1],'call',{@Convergence_Functional},
'enable','off');

r1 = zeros(20:1);
r2 = zeros(20:1);
r = zeros(20:1);
c = 0;
 function V1(source,eventdata)
        c =   sqrt(abs(C1));
for i =1:20
    l(i) = ((sqrt(2)*lambda(1)-alpha_0)/(sqrt(2)*lambda(1)))^i;
end
r1 = abs(c*l');
set(t1, 'Data', r1);
set(V_2, 'enable', 'on');
 end
 function V2(source,eventdata)
    r  = sqrt(C2) * f0*u';
set(t2, 'Data', r);
set(V_3, 'enable', 'on');
 end
function V3(source,eventdata)
        c_0 = sqrt(abs(C3));
        l = 0;
        for i =1:20
           l(i) = c_0*sqrt((i+1)/i^2);
       end
    r2 =abs( l');
set(t3, 'Data', r2);
set(V_4, 'enable', 'on');
end
 function V4(source,eventdata)
    l  = r+r1+r2;
set(t4, 'Data', l);
set(Functional, 'enable', 'on');
 end
 function Convergence_Functional(source,eventdata)
     ConvergenceFunctional( C11, C22,r1,r,r2,u')
 end
end

function Process = ConvergenceFunctional( C11, C22,v1,v2,v3,u)
win1 = figure('color',[1 1 1],...
    'units','normal',...
    'menu','none',...
```

```
    'numbertitle','off',...
    'name','Approximate_Solutions_of_Process','Position', [0.1 0.1 0.8 0.8]);

a = zeros(20,1);
colnames1 = { '|I[u^0]-I_m[u^0]|'};
 t1 = uitable(win1,'Data',a, 'ColumnName', colnames1, ...
  'Position', [100 190 150 400]);

colnames2 = { '|I_m[u^0]-I_m[u_k]|'};
t2 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [370 190 150 400]);

colnames3 = { '|I_m[u_k]-I_m^r[u_k]|'};
t3 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [640 190 150 400]);

colnames4 = { '|I[u^0]-I_m^r[u_k]|'};
t4 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [910 190 150 400]);

I_1 = uicontrol('units','normal','String','|I[u^0]-I_m[u^0]|',...
               'Position',[0.085 0.25 0.15 0.05],'call',{@I1});
I_2 = uicontrol('units','normal','String','|I_m[u^0]-I_m[u_k]|',...
               'Position',[0.33 0.25 0.15 0.05],'call',{@I2},'enable','off');
I_3 = uicontrol('units','normal','String','|I_m[u_k]-I_m^r[u_k]|',...
               'Position',[0.57 0.25 0.17 0.05],'call',{@I3},'enable','off');
I_4 = uicontrol('units','normal','String','|I[u^0]-I_m^r[u_k]|',...
               'Position',[0.815 0.25 0.17 0.05],'call',{@I4},'enable','off');
r1 = zeros(20:1);
r2 = zeros(20:1);
r = zeros(20:1);
v = 0;
 function I1(source,eventdata)
        set(I_2, 'enable', 'on');
       r1 = C11*v1;
     set(t1, 'Data', r1);
 end
 function I2(source,eventdata)
    r  = C11*v2+C22*u;
   set(t2, 'Data', r);
   set(I_3, 'enable', 'on');
 end
function I3(source,eventdata)
    r2 = C11*v3;
set(t3, 'Data', r2);
set(I_4, 'enable', 'on');
end
 function I4(source,eventdata)
    l  = r+r1+r2;
set(t4, 'Data', l);
 end
end
```