МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 514.757.3

КУРБАНБАЕВА НУРЖАМАЛ НАЖИМИДИНОВНА

ДВОЙНЫЕ ЛИНИИ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА E_4, ПОРОЖДАЕМОГО ЗАДАННЫМ СЕМЕЙСТВОМ ГЛАДКИХ ЛИНИЙ

Специальность 01.01.04 – Геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор **Матиева Гулбадан**

Ош-2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ f_i^j И ПАР $\left(f_i^j, \Delta_{(ijk)}\right)$

Перечень условных обозначений и основных определений

Обозначения

$\Leftrightarrow$ – эквивалентность (равносильность) высказываний;

$\|$ – коллинеарность векторов;

$\perp$ – ортогональность векторов;

E_n – n-мерное евклидово пространство;

$\vec{X} = \vec{X}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – радиус-вектор точки $X \in \Omega$;

ω^i – интегральная линия векторного поля $\vec{e}_i$;

d_i – символ дифференцирования вдоль линии ω^i (или по направлению вектора $\vec{e}_i$);

$\wedge$ – внешнее произведение;

$\Delta_2 = (X, \vec{e}_i, \vec{e}_j)$ – двумерное распределение;

$(X, \vec{e}_i)$ – прямая, проходящая через точку $X \in \Omega$ с направляющим вектором $\vec{e}_i$;

$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера (δ_{ij}, δ^{ij} – только в таком смысле);

Запись вида $a_i b^i$ обозначает, что по i производится суммирование;

«Плоскость» – собственное подпространство любой размерности основного пространства E_n;

F_i^j – псевдофокус прямой $(X, \vec{e}_i)$ $(i \neq j)$;

Δ_p – p-мерное распределение $(p < n)$;

$\vec{M}_p$ – вектор средней кривизны распределения Δ_p в E_n;

Σ_n – сеть Френе в $\Omega \subset E_n$;

$\tilde{\Sigma}_n$ – циклическая сеть Френе;

k_i^j – i-тая кривизна линии ω^j сети Σ_n;

$\Delta_{(ij)}$ –двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_j$

$\Delta_{(ijk)}$ – трехмерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$;

$\vec{k}_{ij}$ – i-тый вектор кривизны линии ω^j сети Σ_n;

$\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$ – вынужденная кривизна линии ω^i вдоль направлении $\vec{e}_j$.

Основные определения

Говорят, что в области G n-мерного вещественного C^∞ – многообразия M задана сеть $\sum_n$, если в G заданы n семейств линий таких, что через каждую точку $X \in G$ проходит одна и только одна линия каждого семейства, причем векторы, касательные к этим кривым в точке X, образуют базис векторного пространства T_X – касательного пространства к многообразию M в точке X [11].

Точка $S \in (X, \vec{e}_1)$, определяемая радиус-вектором $\vec{S} = \vec{X} + v\vec{e}_1$, называется фокусом [5] прямой $(X, \vec{e}_1)$, если $d\vec{S} \parallel \vec{e}_1$ при смещении точки X по площадке $(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (т.е. $\omega^1 = 0$).

Псевдофокусом касательной $(X, \vec{e}_i)$ к линии ω^i данной сети называется такая точка $F_i^j \in (X, \vec{e}_i)$, смещение которой принадлежит плоскости $(X, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i-1}, e_{i+1}, ..., \vec{e}_n)$, когда точка X смещается в направлении линии $\omega^j (i \neq j)$ [5].

Линии $\omega^i, f(\omega^i) = \varpi^i$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f(X)$ пересекаются, либо параллельны [15].

Линия ℓ называется двойной линией пары (f, Δ_p), если она является двойной линией отображения f и принадлежит распределению Δ_p [15].

Для линии ω^i сети Σ_p в $\Omega \subset E_4$ (все ω^k=0, кроме ω^i, i-фиксировано) ($i, j = 1,...,p$; $\alpha = p+1,...,n$; $k = p+1,...,n$) векторы $\vec{a}_{ij} = a_{ij}^k \vec{e}_k$, $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$ называются соответственно вектором относительной и вектором вынужденной кривизны поля $\vec{e}_i$ вдоль линии ω^j [65].

Сеть Σ_3 в $\Omega \subset E_3$ называется сетью Френе для линии ω^1, если $(X, \vec{e}_2)$ – касательная к линии ω^2 является вектором первой кривизны для линии ω^1, $(X, \vec{e}_3)$ – касательная к линии ω^3 сети Σ_3 является вектором второй кривизны для этой же линии ω^1 сети Σ_3.

Сеть Σ_3 в $\Omega \subset E_3$ называется циклической сетью Френе, если реперы $\Re(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \Re'(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1), \Re''(X, \vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ являются, соответственно, реперами Френе для линий $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ одновременно. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_3$ [48].

Полем Δ_p p-мерных подпространств или p-распределением на многообразии X_n называется соответствие

$$\Delta_p: \; x \in X_n \to \Delta_p(x) \subset T_x(X_n), \; p \le n,$$

где $T_x(X_n)$ – касательное пространство многообразия X_n в точке $x \in X_n$, $\Delta_p(x)$ – p-мерное подпространство в $T_x(X_n)$ [29].

Вектор $\vec{M}_p = \dfrac{1}{p} g^{ij} \Lambda_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$ $\left(i, j = 1, 2, ..., p, \; \alpha = p+1, p+2, ..., n\right)$ называется вектором средней кривизны распределения Δ_p [76].

Линии ω^i, $g\left(\omega^i\right) = \overline{\omega}^i$ в пространстве E_4 называются квазидвойными линиями отображения g, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4.

Линия ℓ в пространстве E_4 называется квазидвойной линией пары $\left(g, \Delta_p\right)$, если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Данное исследование относится к основным разделам современной дифференциальной геометрии – теории гладких отображений, сетей и распределений.

Точечные соответствия пространств одинаковой размерности изучали А.П. Норден, В.В. Рыжков, М.А. Акивис, В.Т. Базылев, Й. Микеш, Н.И. Гусева, и их ученики, а также другие геометры.

Основы геометрии плоских многомерных сетей а также сетей двойных линий заложены в работах В.Т. Базылева. Работы В.Т. Базылева посвящены различным вопросам дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерном проективном, аффинном, евклидовом пространствах.

Теория дифференцируемых частичных отображений евклидова пространства, имеет большой интерес не только для самой геометрии, она имеет широкое приложение в теоретической физике и в других областях математики.

Значительный интерес представляют дифференцируемые, частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданным семейством гладких линий, так как от выбора сети зависит не только математическое моделирование физических явлений и процессов, а также их рациональные решения.

Сети, линии которых являются двойными линиями в частичных отображениях, применяются в решении многих задач теории линейных и нелинейных волн.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи существования двойных линий частичных отображений f_i^j пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$. Введены понятия квазидвойной линии частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, исследованы задачи существования квазидвойных линий частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$ [77].

Цель работы

1. Исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий частичных отображений четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий;
2. Исследовать задачи существования двойных (квазидвойных) линий пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$, где f_i^j – частичное отображение пространства E_4, $\Delta_{(k\ell)}$– 2-мерное распределение в E_4 $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right), \Delta_{(ik\ell)} -\right.$ 3-мерное распределение в $\left.E_4\right)$;
3. Найти необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений f_i^j пространства E_4.

Методы исследования. В данной работе использованы следующие методы: метод внешних форм Картана, метод подвижного репера с использованием теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф. Лаптева [51]-[55].

Научная новизна работы. В данной работе

1. Доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений $f_i^j : \Omega \to \Omega_i^j$ четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семейством гладких линий;

2. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий;

3. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар $(f, \Delta_{(k\ell)})$, где $\Delta_{(k\ell)} = \left(X, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell\right)$ – двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_k, \vec{e}_\ell$; б) квазидвойными линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, где $\Delta_{(ik\ell)}$ – трехмерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i$, $\vec{e}_k$, $\vec{e}_\ell$;

4. Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$;

5. Найдена зависимость вырожденности частичного отображения f_i^j от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

<u>Теоретическая и практическая ценность.</u> Результаты данной работы представляют, прежде всего, теоретический интерес. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по геометрии отображений погруженных многообразий и в теории сетей на многообразиях. Результаты диссертации также могут быть использованы в теории графов, компьютерной геометрии.

<u>Основные положения, выносимые на защиту:</u>

– Доказательство необходимого и достаточного условий

а) вырожденности частичных отображений f_i^j: $\Omega \to \Omega_i^j$ четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий.

б) для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j.

в) для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

г) для того, чтобы любая линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

– Нахождение зависимости вырожденности частичного отображения f_i^j от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались: на международной научной конференции «Роль науки и образования в современных условиях глобализации», посвященной 75-летию общественного деятеля, академика НАН КР, д.х.н. профессора Б.М. Мурзубраимова (Ош 2015), на семинаре по геометрии и топологии факультета математики, информатики и кибернетики Кыргызского Национального Университета им. Ж. Баласагына (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Чекеев А.А.), на научно-методическом семинаре «Современные проблемы математики и технология преподавания математики» при ЖАГУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Алыбаев К.С.), на межвузовском семинаре «Актуальные проблемы математики и информатики» при ФМИТ ОшГУ (руководитель - д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН КР Алымкулов К.), а так же на научно-теоретическом семинаре кафедры алгебры и геометрии ОшГУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Матиева Г.).

Публикации по теме диссертации. Основное содержание диссертации опубликовано в 11 работах [40-50]. Из них 7 статей в российских периодических изданиях [40-42, 47-50] индексируемых в РИНЦ и 2 статьи в кыргызских периодических изданиях [45, 46] индексируемых в РИНЦ.

Личный вклад автора в совместных работах

В работах [42], [44] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, а получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой.

В работах [40], [41], [47], [49], [50] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой, выяснение геометрических смыслов конечных соотношений – Ч.Х. Абдуллаевой.

В работах [48] идея постановки задач принадлежит Г. Матиевой, получение результатов – Н.Н. Курбанбаевой, выяснение геометрических смыслов конечных соотношений – Г.М. Борбоевой.

Структура, объем и краткое содержание диссертации: диссертация состоит из введения, трёх глав, состоящих из 11 разделов, списка использованных источников из 86 наименований и заключения. Нумерация разделов двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем, лемм и формул – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста 90 страниц.

ГЛАВА 1

Обзор литератур по теории дифференцируемых отображений, сетей и распределений

§1.1 Обзор литератур по геометрии дифференцируемых отображений, сетей и распределений

Геометрии дифференцируемых отображений гладких многообразий посвящено большое число работ. Основные понятия и результаты дифференциальной геометрии точечных соответствий между пространствами приведены в обзорной работе В.В. Рыжкова [73].

В работах [8]-[10], [14] В.Т. Базылева рассматриваются различные вопросы дифференцируемых отображений областей и поверхностей в n-мерных проективном, аффинном, евклидовом пространствах, вводится понятие графика отображения.

В работе Л.И. Алексеевой [1] найдены необходимое и достаточное условие для того, чтобы график V_3 отображения $f : E_3 \to E_3'$ был поверхностью нулевой скалярной кривизны в случае, когда основание отображения образовано характеристическими линиями отображения f. Доказано, что вторая поляра точки $X \in V_3$ будет при этом конусом второго порядка.

М.А. Чешкова в работе [79] рассматривает две гладкие поверхности M^n, $\overline{M}^n$ и диффеоморфизм $f : M^n \to \overline{M}^n$. Установлено, что если f конформное отображение, а касательные плоскости $T_p M^n$ и $T_{f(p)}\overline{M}^n$ ортогональны для всех $p \in M^n$, то в соответствующих точках поверхностей равны тензоры Риччи, а отображение $f : M^n \to \overline{M}^n$ сохраняет линии кривизны, определяемые относительно векторов средних кривизн поверхностей.

В работах [83], [84] Й. Микеша рассматривается геодезические отображения Римановых пространств и пространств аффинной связности, также геодезические отображения Риччи пространств Эйнштейна.

В работе [37] С.В. Киреева рассматривает в проективном пространстве отображение $g : \Omega \to \Omega'$, в котором каждая линия двойная, в случае, когда области $\Omega \subset P_n$ и $\Omega' \subset P_n$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей. В работе [38] она рассматривает отображение f области Ω проективного пространства P_n в области $\Omega' \subset P_n$, переводящее точку A в точку B. Области Ω и Ω' нормализованы в смысле А.П. Нордена одним и тем же семейством плоскостей $A \to \Pi_{n-1}(A)$, $B \to \Pi_{n-1}(A)$. Исследованы объекты отображения f и его характеристические направления.

В работе [2] Н. Алиева рассматривает n-мерные евклидовы пространства E и D (E, D – ортогональные пространства собственно $2n$-мерного евклидова пространства C, имеющие одну общую точку O). Исследовано дифференцируемое взаимно-однозначное отображение $T \subset V$ в W, которое переводит область $M \subset V$ в некоторую область $N \subset W$. Если точка x описывает область M, точка $y=T(x)$ описывает область N, а точка z с радиус вектором $z = x + y$ опишет область M^* поверхности V^*, называемое графиком отображения T. Доказано, что поле вектора средней кривизны порождает на поверхности V и W одномерное распределение F и G, соответственно.

В.И. Грачева в работах [23]-[26] рассмотрела дифференцируемое биективное отображение T области Ω на $\bar{\Omega}$, где $\Omega \subset E_n, \bar{\Omega} \subset \bar{E}_n$, причем, n-мерные плоскости $E_n, \bar{E}_n$ вполне ортогональны в E_{2n} и имеют общую точку O. Если $x_1 \in \Omega,\ x_2 = T\left(x_1\right) \in \bar{\Omega}$ и $x^i,\ \bar{x}^i$ соответственно являются координатами точек x_1, x_2 относительно некоторых ортонормированных реперов в $E_n, \overline{E}_n$, то отображение T описывается функциями $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые считаются достаточное число раз дифференцируемыми и имеющими в области Ω отличный от нуля якобиан. Множество точек $x \in E_{2n}$, для которых $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{Ox_1} + \overrightarrow{Ox_2}$, описывает в E_{2n} n-мерную поверхность, называемую графиком отображения T. Изучены условия соответствия фокусов, а также псевдофокусов, взятых на прямых в указанных n-пространствах.

О.В. Казниной [34]-[36] рассмотрено одно из свойств сетей Σ_p и $\overline{\Sigma}_p$, сохраняющееся в отображении $f : (V_p \subset E_n) \to (\overline{V}_p \subset E_{p+r})$. Найдены признаки некоторых свойств сетей $\Sigma_p \subset V_p$ и $\overline{\Sigma}_p \subset \overline{V}_p$.

В работе [22] А.А. Борубаева и А.А. Чекеева исследованы равномерные аналоги некоторых важнейших классов топологических пространств, топологических групп и их непрерывных отображений и непрерывных гомоморфизмов.

В работах [59]-[64] Г. Матиевой изучены частичные отображения евклидова пространства, порождаемые заданным распределением, при этом вскрыты тесные связи между теориями отображений, сетей и распределений.

Заданием p-мерного распределения Δ_p в некоторой области Ω евклидова пространства E_n инвариантным образом определяется распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$, ортогонально дополнительное данному распределению.

Когда $p = 1, n = 3$ в области $\Omega \subset E_3$ имеется семейство гладких линий (интегральные линии 1-мерного распределения Δ_1) такое, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. На каждой прямой $(X, \vec{e}_i)$ (где $(X, \vec{e}_i)$–координатные прямые репера Френе для линии ω^1 заданного семейства, $i, j = 1,2,3$) инвариантным образом определяется точка $F_i^j (i \neq j)$, так называемая псевдофокусом этой прямой. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_i^j описывает свою область Ω_i^j. Получается отображение f_i^j области Ω в область Ω_i^j такое, что точка X переходит в точку F_i^j. Изучены свойства этих частичных отображений f_i^j.

При *p>1* имеется два вектора $\vec{M}_p, \vec{\overline{M}}_{n-p}$– вектора средних кривизн распределений Δ_p, $\overline{\Delta}_{n-p}$ соответственно. Когда точка *X* смещается в области $\Omega \subset E_n$ точка *M*, определенная радиус-вектором $\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{\overline{M}}_{n-p}$, описывает свою область $\overline{\Omega}$. Получено отображение $f : \Omega \to \overline{\Omega}$ такое, что точка *X* переходит в точку *M*. Изучены некоторые свойства этого частичного отображения.

В работах [16]-[21] Г.М. Борбоевой исследованы дифференцируемые, взаимно однозначные отображения поверхностей *Ф, Ф'* $\left(Dim\hat{O} = Dim\hat{O}'\right)$ в одном и том же евклидовом пространстве E, порождаемые заданной сетью Σ.

Найдены связи между геодезичностью и сопряженностью заданной сети и коразмерностью отображаемых пространств, изучена связь геометрии этого отображения с геометрией некоторых алгебраических образов в нормальной плоскости $N(X)$ поверхности Φ.

В работах [79], [82], [83] рассматривалась геометрия отображений евклидовых пространств $T : E_n \to E'_n$, обобщающие конформные отображения.

В работах [16] – [21] Г.М. Борбоевой рассматриваются дифференцируемые, взаимно однозначные отображения поверхностей Φ, Φ' одинаковой размерности в одном и том же евклидовом пространстве E, порождаемые заданной сетью Σ. Выявлена связь между геодезичностью и сопряженностью заданной сети и коразмерностью отображаемых пространств, изучена связь геометрией этого отображения с геометрией некоторых алгебраических образов в нормальной плоскости поверхности Φ.

В работах [65] – [70] Т.М. Папиевой исследованы частичные отображения евклидовых пространств $E_{4,} E_n$, порождаемых заданной циклической сетью Френе $\widetilde{\Sigma}_4, \widetilde{\Sigma}_n$ соответственно.

Найдены необходимые и достаточные условия ортогональности образа заданной циклической сети Френе в каждом из рассматриваемых частичных отображениях;

получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы рассматриваемые частичные отображения являлись движениями;

найден геометрический смысл полученных необходимых и достаточных условий;

выявлена связь между векторами средних кривизн двумерных и трехмерных распределений, определяемых заданной циклической сетью Френе, а также связь между этими векторами и векторами кривизн линий заданной сети;

доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии заданной циклической сети являлись двойными линиями рассматриваемых отображений.

§1.2 Обзор литератур по геометрии двойных линий отображения f пары (f, Δ_p)

Многомерные сети двойных линий исследовались в работе [15] В.Т.Базылева.

Свойства сетей двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей и в соответствии A – поверхностей исследовались в работе [78] С.П. Финикова.

В работах [57], [58] М.Н. Марюкова рассмотрены некоторые свойства линий кривизны пары p-распределений, заданных в областях Ω и Ω' пространства E_n, между которыми установлен диффеоморфизм. Найдены необходимое и достаточное условия их соответствия в отображении $f:\Omega \to \Omega'$. Исследована геометрия пары $\left(f,\ \Delta_p\right)$ в n-мерном евклидовом пространстве. Парой $\left(f,\ \Delta_p\right)$ называется диффеоморфизм f области Ω в область Ω', где области Ω и Ω' принадлежат евклидову пространству E_n и Δ_p – распределение, заданное в области Ω. Установлены свойства новых сетей и тканей, определяемых с помощью пары $\left(f,\ \Delta_p\right)$.

В работе [75] Г.М. Силаевой исследована связь сети двойных линий отображения поверхностей в n - мерном евклидовом пространстве и её образ при гиперсферическом изображении.

Рассмотрены две гиперповерхности V_{n-1} и $\overline{V}_{n-1}$ в n-мерном евклидовом пространстве E_n и диффеоморфизм $f:\ V_{n-1} \to \overline{V}_{n-1}$. Предположен, что $\forall x \in V_{n-1}:\ \ y = f(x) \neq x$. Рассмотрена отображение S прямых (xy) на точки единичной гиперсферы S_{n-1} с центром в некоторой точке O, при котором каждой прямой ставится в соответствие точка $\widetilde{x}$ гиперсферы с радиусом-вектором $\overrightarrow{O\widetilde{x}} = \widetilde{e}_n$, параллельным прямой (xy), называемое гиперсферическим изображением.

Доказаны, что а) если поверхность V_{n-1} отнесена к некоторой сети Σ_{n-1}, поверхность $\overline{V}_{n-1}$ - сети $f(\Sigma_{n-1})$, то сеть Σ_{n-1} является сетью двойных линий отображения f тогда и только тогда, когда $S(\Sigma_{n-1}) = S(f(\Sigma_{n-1}))$;
б) сеть $\{\omega^i\}$ на поверхности V_{n-1} в гиперсферическом изображении S переходит в сеть $\{\Omega^i\}$, где $\Omega^i = m\omega^i$, тогда и только тогда, когда сеть $\{\omega^i\}$ является сетью двойных линий отображения f.

Т.А. Дулалаевой исследованы [27] различные вопросы дифференциальной геометрии пары гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве. Парой гиперраспределения, заданных в областях Ω и Ω' n-мерного проективного пространства называется пара$\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$, где Δ – (n-1)-мерное распределение в области Ω и $\overline{\Delta}$– в области Ω', причем области Ω и Ω' диффеоморфны. В этой работе уделяется внимание к изучению свойств сетей двойных линий отображения, инвариантно связанной с заданной парой. В работе [28] этого же автора доказано, что любая линия, принадлежащая гиперраспределению Δ, является линией пары гиперраспределений $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_i^n = 0$. Геометрический смысл этого равенства, заключается в том, что соответствуют площадки гиперраспределений $\Delta(A)$ и $\overline{\Delta}(A)$ в индуцированном отображении f_*. Обращение в нуль относительного инварианта $\left(\Lambda_n^n\right)$ является необходимым и достаточным условием принадлежности образа линии ω^n, $\omega^i = 0$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$, $\omega^n = \ell^n\theta$ в отображении f гиперраспределению $\overline{\Delta}$.

§1.3 Обзор результатов

В первой главе работы приводится обзор литературы и результатов других авторов, связанных с темой диссертации.

Во второй главе диссертации исследовано существование двойных линий частичных отображений $f_i^j : \Omega \to \Omega_i^j$ и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik)}\right)$ в пространстве E_4.

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{2.1.1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2.1.2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^i заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_4, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{2.1.3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{2.1.4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l \right) \omega^m . \qquad (2.1.5)$$

Система величин $\left\{ \Lambda_{ij}^k , \Lambda_{ijm}^k \right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$\begin{aligned} d_1\vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2 , \\ d_1\vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3 , \\ d_1\vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4 , \\ d_1\vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

и

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{31}^1 = 0 ,\ \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0 , \qquad (2.1.6)$$

$$\Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0 . \qquad (2.1.7)$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 – символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети Σ_4 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (2.1.8)$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть Σ_4 в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы $\Re_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети Σ_4 одновременно.

Пусть сеть Σ_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$.

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in (X,\vec{e}_3)$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \qquad (2.1.9)$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Получается частичное отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$.

В разделе 2.1. рассмотрено частичное отображение f_3^2 и исследовано проблема существования двойных линий этого отображения и пар $(f_3^2, \Delta_{(ik)})$.

Доказаны необходимое и достаточное условия вырожденности отображения f_3^2 (Теорема 2.1.1), а также доказано, что если линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$, то частичное отображение f_3^2 является вырожденным (Следствие 2.1.1).

Также доказаны:

Теорема 2.1.2. Если линия ω^4 является двойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(34)})$, то никакая другая линия (отличная от линий ω^3, ω^4), принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, не может быть двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(34)}\right)$.

Теорема 2.1.3. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(23)}$, является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию: $\dfrac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\dfrac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{33}^4}$.

Следствие 2.1.2. Если линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$, то эта пара не имеет других (кроме линии ω^2) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(23)}$.

Теорема 2.1.4. Произвольная линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям:

$$\Lambda_{31}^2 = 0, \qquad \frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{33}^4},$$

где β^1, β^3 – первая и третья координаты касательного вектора $\vec{\beta}$ линии β.

Следствие 2.1.3. Если линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$, то это пара не имеет других (кроме линии ω^1) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(13)}$.

В разделе 2.2. рассмотрено частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$, определяемое псевдофокусом $F_1^4 \in \left(X, \vec{e}_1\right)$ и задача существования двойных линий этого отображения f_1^4 и пар $\left(f_1^4, \Delta_{(ik)}\right)$.

Доказаны необходимое и достаточное условия вырожденности отображения f_1^4 (Теорема 2.2.1), а также доказано, что линии ω^1, $\overline{\omega}^1 = f_1^4\left(\omega^1\right)$ всегда являются двойными линиями частичного отображения

f_1^4, а линия ω^1 сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$ (Лемма 2.2.1).

Также получены результаты: доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы а) линии ω^2, $\overline{\omega}^2 = f_1^4\left(\omega^2\right)$ являлись двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^2 являлась двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$;

б) линии ω^3, $\overline{\omega}^3 = f_1^4\left(\omega^3\right)$ являлись двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^3 являлась двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(13)}\right)$;

в) линии ω^4, $\overline{\omega}^4 = f_1^4\left(\omega^4\right)$ являлись двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^4 являлась двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$.

Далее доказано, что если линия ω^2 сети $\widetilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, то частичное отображение f_1^4 становится вырожденным.

Получены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, являлась двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$ (Теорема 2.2.4).

Установлено, что если линия ω^4 сети $\widetilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$, то никакая другая линия, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, не может быть двойной линией этой пары (Следствие 2.2.2).

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы любая линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, являлась двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(13)}\right)$ (Теорема 2.2.5).

В разделе 2.3. рассмотрено частичное отображение $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$, определяемое псевдофокусом $F_4^3 \in \left(X, \vec{e}_4\right)$ и исследована задача существования двойных линий этого отображения f_4^3 и пар $\left(f_4^3, \Delta_{(ik)}\right)$.

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы:

а) линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, являлась двойной линией пары $\left(f_4^3, \Delta_{(34)}\right)$ (Теорема 2.3.1);

б) линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, являлась двойной линией пары $\left(f_4^3, \Delta_{(14)}\right)$ (Теорема 2.3.2);

в) линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(24)}$, являлась двойной линией пары $\left(f_4^3, \Delta_{(24)}\right)$ (Теорема 2.3.3).

В разделе 2.4. рассмотрено частичное отображение $f_2^1: \ \Omega \to \Omega_2^1$, определяемое псевдофокусом $F_2^1 \in \left(X, \vec{e}_2\right)$ и исследована задача существования двойных линий этого отображения f_2^1 и пар $\left(f_2^1, \Delta_{(ik)}\right)$.

Доказаны

Теорема 2.4.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)}$, является двойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(12)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора $\vec{\gamma}$ удовлетворяют условию: $\dfrac{\bar{\gamma}^1}{\bar{\gamma}^2} = -\dfrac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^3}$,

где Λ_{22}^3 – первая кривизна линии ω^2 сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$,

Λ_{21}^3 – вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\tilde{\Sigma}}_4$.

Теорема 2.4.2. Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, является двойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(34)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\frac{\Lambda_{23}^1}{\beta_{213}^1} = \frac{\Lambda_{24}^1}{\Lambda_{214}^1},$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\frac{\vec{e}_1\vec{\Lambda}_{23}}{\vec{e}_1 d_3\vec{\Lambda}_{21}} = \frac{\vec{e}_1\vec{\Lambda}_{24}}{\vec{e}_1 d_4\vec{\Lambda}_{21}},$$

где d_i – символ дифференцирования вдоль направления $\vec{e}_i$, $\vec{\Lambda}_{ij} = d_j\vec{e}_i$.

В третьей главе исследовано существование квазидвойных линий частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(i\hat{e}\ell)}\right)$.

В разделе 3.1. рассмотрено частичное отображение $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f(x) = F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$. Введены определения квазидвойных линий частичного отображения f_i^j и квазидвойной линии пар $\left(f_i^j, \Delta_{(i\hat{e}\ell)}\right)$:

Введем определения:

1) линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega^i}$ в E_4 называются квазидвойными линиями отображения g, если касательные к ним взятые в соответствующих точках $X,\ g(X)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) Линия l называется квазидвойной линией пары $(g,\ \Delta_p)$, если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Доказаны: необходимое и достаточное условия для того, чтобы

а) линия γ, принадлежащая трёхмерному распределению $\Delta_{(234)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_4^3, \Delta_{(234)}\right)$ (Теорема 3.1.1);

б) линия α, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(123)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_4^3, \Delta_{(123)}\right)$ (Теорема 3.1.2);

в) линия m, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_4^3, \Delta_{(124)}\right)$;

г) линия β, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(134)}$, являлась квазидвойной линией пары $\left(f_4^3, \Delta_{(134)}\right)$ (Теорема 3.1.3).

Выяснен геометрический смысл конечных соотношений.

В разделе 3.2. рассмотрено частичное отображение $f_3^2: \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$.

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы:

а) линия ℓ, принадлежащая трёхмерному распределению $\Delta_{(123)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(123)})$;

б) линия γ, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(124)})$ (Теорема 3.2.1);

в) линия α, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(134)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_3^2, \Delta_{(134)})$ (Теорема 3.2.2).

Выяснен геометрический смысл конечных соотношений.

В разделе 3.3. рассмотрено частичное отображение $f_1^4: \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f_1^4(X) = F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$.

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы:

а) линия ℓ, принадлежащая трёхмерному распределению $\Delta_{(123)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(123)})$;

б) любая линия β, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(124)})$ (Теорема 3.3.1);

Получены необходимое и достаточное условия для того, чтобы: а) линия γ, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(234)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(234)})$;

б) линия α принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(134)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(134)})$ (Теорема 3.3.2).

В разделе 3.4 рассмотрено частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $f_2^1(X) = F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$.

Доказаны:

Теорема 3.4.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(124)})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\Lambda_{21}^3 \gamma^1 + \Lambda_{22}^3 \gamma^2 + \Lambda_{24}^3 \gamma^4 = 0,$$

геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\vec{\theta} \cdot \vec{\gamma} = 0,$$

где $\vec{\gamma} = \{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^4\}$ – касательный вектор линии γ,

$$\vec{\theta} = (\vec{e}_3 d_1 \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{e}_3 d_2 \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_3 d_4 \vec{e}_2)\vec{e}_4.$$

Теорема 3.4.2 1) Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(234)})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\frac{\beta^3}{\beta^4} = -\frac{\Lambda_{24}^1}{\Lambda_{23}^1},$$

где $-\Lambda_{24}^1 = \Lambda_{14}^2$ – вторая кривизна, $-\Lambda_{23}^1 = \Lambda_{13}^2$ – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

2) Линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, являлась квазидвойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(134)})$ тогда и только тогда, когда имеет место условие:

$$B_{211}^1 \alpha^1 + B_{213}^1 \alpha^3 + B_{214}^1 \alpha^4 = 0,$$

геометрический смысл которого заключается в том, что векторы $\vec{\xi} = B_{211}^1 \vec{e}_1 + B_{213}^1 \vec{e}_3 + B_{214}^1 \vec{e}_4$ и $\vec{\alpha} = \alpha^1 \vec{e}_1 + \alpha^3 \vec{e}_3 + \alpha^4 \vec{e}_4$ ортогональны.

Глава 2

Существование двойных линий частичных отображений f_i^j и пар $(f_i^j, \Delta_{(k\ell)})$ в пространстве E_4

§2.1 О двойных линиях частичного отображения f_3^2, порождаемого псевдофокусом $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$

В области Ω евклидова пространства E_4, рассмотрено множество гладких линии так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства.

Выберем в области Ω подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i\right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4\right)$ так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы, т.е. формулы, выражающие движения этого репера, имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{2.1.1}$$

Дифференциальные формы $\omega^i,\ \omega_i^k$ удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k,\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2.1.2}$$

Интегральные линии координатных векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4 для линии ω^1 заданного семейства. Так как подвижной репер $\Re$ построен на касательных прямых к линиям сети Σ_4, дифференциальные формы ω_i^k являются главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{2.1.3}$$

Учитывая последнего равенства формулы (2.1.2) получим:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{2.1.4}$$

Продифференцируем внешним образом равенство (2.1.3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j .$$

Применяя формулу (2.1.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j .$$

В силу равенства (2.1.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell .$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell \right) \wedge \omega^j = 0 .$$

Применяя лемму Картана [3] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l \right) \omega^m . \tag{2.1.5}$$

Система величин $\left\{ \Lambda_{ij}^k , \Lambda_{ijm}^k \right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного множества линий имеют вид:

$$\begin{aligned}
d_1\vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2 , \\
d_1\vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3 , \\
d_1\vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4 , \\
d_1\vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3
\end{aligned}$$

и

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{31}^1 = 0 , \; \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0 , \tag{2.1.6}$$

$$\Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0 . \tag{2.1.7}$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Точка [4] F_i^j $(i \neq j)$ касательной прямой к линии ω^i сети Σ_4 определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (2.1.8)$$

На каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X, \vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X, \vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X, \vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X, \vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть Σ_4 в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [5], если реперы

$$\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4),$$
$$\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1),$$
$$\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2),$$
$$\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети Σ_4 одновременно.

Пусть сеть Σ_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$.

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \qquad (2.1.9)$$

Когда точка X движется в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Имеем частичное отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$. Присоединим к области Ω_3^2 подвижной репер $\Re' = (F_3^2, \vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4)$, где векторы $\vec{m}_i$ определяются следующим образом.

Продифференцируя обычным образом равенство (2.1.9) и учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 \right) = d\vec{X} - d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2} \right)\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2} d\vec{e}_3 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i \vec{e}_i .$$

В силу равенства (2.1.4) отсюда получим:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{\left(\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i \vec{e}_i .$$

Введем обозначение:

$$B_{32m}^2 = \Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell + \Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell .$$

Тогда, в силу равенства (2.1.3), отсюда имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{32m}^2\omega^m}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i$$

или

$$d\vec{F}_3^2 = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^2 +$$

$$+ \left[\vec{e}_3 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i \right]\omega^4 .$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1 &= \vec{e}_1 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i ; \\
\vec{m}_2 &= \vec{e}_2 + \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i ; \\
\vec{m}_2 &= \vec{e}_3 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i ; \\
\vec{m}_4 &= \vec{e}_4 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i .
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^1\vec{m}_1 + \omega^2\vec{m}_2 + \omega^3\vec{m}_3 + \omega^4\vec{m}_4. \tag{2.1.11}$$

Поскольку заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе [5] получим:

$$\vec{m}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{m}_2 = \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;$$

$$\vec{m}_3 = \left[1 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4; \tag{2.1.12}$$

$$\vec{m}_4 = -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Эти формулы получены Т.М. Папиевой в работах [66]

Из условия линейной зависимости векторов $\vec{m}_i$ получим:

$$\Lambda_{34}^2 = 0 \tag{2.1.13}$$

или

$$B_{322}^2\Lambda_{33}^4 - \Lambda_{32}^4\left[\left(\Lambda_{32}^2\right)^2 + B_{323}^2\right] = 0. \tag{2.1.14}$$

Обратно, если выполнено одно из условий (2.1.13), (2.1.14), то отображение f_3^2 является вырожденным.

Таким образом доказана

Теорема 2.1.1. Для того, чтобы частичное отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ являлась вырожденным отображением необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий (2.1.13), (2.1.14).

Рассмотрим векторы $\vec{e}_4, \vec{m}_4, \overrightarrow{XF_3^2} = -\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3$.

$\vec{e}_4, \vec{m}_4, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(34)}$ имеем:

$$\Lambda_{34}^{2}=0. \qquad (2.1.15)$$

Следовательно, линии $\omega^{4}, f_{3}^{2}\left(\omega^{4}\right)=\omega^{4}$ являются двойными линиями частичного отображения f_{3}^{2} (тем самым линия ω^{4} сети $\tilde{\Sigma}_{4}$ является двойной линией пары $\left(f_{3}^{2}, \Delta_{(34)}\right)$) тогда и только тогда, когда имеем место равенство (2.1.15). Справедливо

Следствие 2.1.1. Если линия ω^{4} сети $\tilde{\Sigma}_{4}$ является двойной линией пары $\left(f_{3}^{2}, \Delta_{(34)}\right)$, то частичное отображение f_{3}^{2} является вырожденным отображением.

Линия $\omega^{i}, f_{3}^{2}(\omega^{i})=\overline{\omega}^{i}$ называются двойными линиями частичного отображения f_{3}^{2}, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f_{3}^{2}(X)$, пересекаются, либо параллельны [7].

Линия l называются двойной линией пары $\left(f_{3}^{2}, \Delta_{p}\right)$ (где Δ_{p} $- p$-мерное распределение, определенное векторными полями $\vec{e}_{1},....,\vec{e}_{p}$), если она является двойной линией отображения f_{3}^{2} и принадлежит распределению Δ_{p} [7].

Рассмотрим векторы $\vec{e}_{3}, \vec{m}_{3}, \overrightarrow{XF_{3}^{2}}=-\dfrac{1}{\Lambda_{32}^{2}}\vec{e}_{3}$. Учитывая (2.1.12) получим, что $\vec{e}_{3}, \vec{m}_{3}, \overrightarrow{XF_{3}^{2}}\in\Delta_{(34)}$, т.е. линии $\omega^{3}, \overline{\omega}^{3}=f_{3}^{2}\left(\omega^{3}\right)$ всегда являются двойными линиями частичного отображения f_{3}^{2} (тем самым линия ω^{3} сети $\tilde{\Sigma}_{4}$ всегда является двойной линией пары $\left(f_{3}^{2}, \Delta_{(34)}\right)$.

Рассмотрим произвольную линию l принадлежащую распределению $\Delta_{(34)}=\left(X,\vec{e}_{3},\vec{e}_{4}\right)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{l}=l^{3}\vec{e}_{3}+l^{4}\vec{e}_{4}$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{l}}=f_{3}^{2}(\vec{l})$ линии $f_{3}^{2}(l)=\bar{l}$. Учитывая (10) имеем:

$$\vec{\bar{l}}=l^{3}\vec{m}_{3}+l^{4}\vec{m}_{4}=l^{3}\left(m_{3}^{3}\vec{e}_{3}+m_{3}^{4}\vec{e}_{4}\right)+l^{4}\left(m_{4}^{2}\vec{e}_{2}+m_{4}^{3}\vec{e}_{3}+\vec{e}_{4}\right)=$$
$$=l^{4}\vec{m}_{4}^{2}\vec{e}_{2}+\left(l^{3}m_{3}^{3}+l^{4}m_{4}^{3}\right)\vec{e}_{3}+\left(l^{3}m_{3}^{4}+1\cdot l^{4}\right)\vec{e}_{4},$$

где m_i^j $-$ j-тая координата вектора $\vec{m}_i$.

Из условия $\vec{l}\,,\vec{\bar{l}}\,,\overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(34)}$ получим: $l^4 m_4^2 = 0$, где $l^4 \neq 0$ (т.к. линия l не совпадает с линией ω^3). Следовательно, имеем $m_4^3 = 0$, т.е. $\Lambda_{34}^2 = 0$. Мы получим условие (13). Таким образом доказана

Теорема 2.1.2. Если линия ω^4 является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(34)}\right)$, то никакая другая линия (отличная от линий ω^3, ω^4), принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, не может быть двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(34)}\right)$.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_2, \vec{m}_2, \overrightarrow{XF_3^2}$. Из условия $\vec{e}_2, \vec{m}_2, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(23)}$ получим:

$$\Lambda_{32}^4 = 0. \qquad (2.1.16)$$

Следовательно, линии $\omega^2, \overline{\omega}^2 = f_3^2(\omega^2)$ являются двойными линиями частичного отображения f_3^2 (тем самым линия) ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (2.1.16).

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(23)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_3^2(\gamma)$. Учитывая (2.1.10)

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2 \vec{m}_2 + \gamma^3 \vec{m}_3 = \gamma^2\left(m_2^3 \vec{e}_3 + m_2^4 \vec{e}_4\right) + \gamma^3\left(m_3^3 \vec{e}_3 + m_3^4 \vec{e}_4\right) =$$

$$= \left(\gamma^2 m_2^3 + \gamma^2 m_3^3\right)\vec{e}_3 + \left(\gamma^2 m_2^4 + \gamma^3 m_3^4\right)\vec{e}_4,$$

где m_i^j $-$ j-тая координата вектора $\vec{m}_i$. Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(23)}$ получим: $\gamma^2 m_2^4 + \gamma^3 m_3^4 = 0$. Отсюда имеем:

$$\frac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\frac{m_2^4}{m_3^4}.$$

Учитывая (10) отсюда получим:

$$\frac{\gamma^3}{\gamma^2} = -\frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{33}^4}. \qquad (2.1.17)$$

Обратно, если имеет место условие (2.1.17), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(23)}$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.1.3. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(23)}$, является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию (2.1.17).

Из (2.1.16), (2.1.17) получим, что справедливо

Следствие 2.1.2. Если линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(23)}\right)$, то эта пара не имеет других (кроме линий ω^2) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(23)}$.

Из условия $\vec{e}_1, \vec{m}_1, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(31)}$ получим:

$$\Lambda_{31}^2 = 0, \ \Lambda_{31}^4 = 0. \qquad (2.1.18)$$

Геометрических смысл этих равенств заключаются в следующем: $\vec{\Lambda}_{31} = \vec{0}$, где $\vec{\Lambda}_{31} = d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4\vec{e}_4$.

Следовательно, если имеет место условия (2.1.17), то линии $\omega^1, \overline{\omega}^1 = f_3^2(\omega^1)$ являются двойными линиями частичного отображения f_3^2, а линия ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$.

Теперь рассмотрим произвольную линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(13)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f_3^2(\beta)$:

$$\vec{\vec{\beta}} = \beta^1 \vec{m}_1 + \beta^3 \vec{m}_3 = \beta^1 \left(\vec{e}_1 + m_1^2 \vec{e}_2 + m_1^3 \vec{e}_3 + m_1^4 \vec{e}_4\right) + \beta^3 \left(m_3^3 \vec{e}_3 + m_3^4 \vec{e}_4\right) =$$
$$= \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^1 m_1^2 \vec{e}_2 + \left(\beta^1 m_1^3 + \beta^3 m_3^3\right)\vec{e}_3 + \left(\beta^1 m_1^4 + \beta^3 m_3^4\right)\vec{e}_4 .$$

Из условия $\vec{\beta}, \vec{\vec{\beta}}, \overrightarrow{XF_3^2} \in \Delta_{(13)}$ получим:

$$\begin{cases} \beta^1 m_1^2 = 0; \\ \beta^1 m_1^4 + \beta^3 m_3^4 = 0. \end{cases}$$

Из первого равенства имеем $m_1^2 = 0$ (т.к. $\beta^1 \neq 0$). Из второго получим:

$$\frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{m_1^4}{m_3^4} .$$

Учитывая (2.1.12) эти условия имеют вид:

$$\Lambda_{31}^2 = 0 , \tag{2.1.19}$$

$$\frac{\beta^3}{\beta^1} = -\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{33}^4} . \tag{2.1.20}$$

Обратно если имеют места равенства (2.1.19) и (2.1.20), то линия β является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2.1.4. Произвольная линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты её касательного вектора удовлетворяют условиям (2.1.19) и (2.1.20).

Из (2.1.19), (2.1.20), (2.1.18) получим, что справедливо.

Следствие 2.1.3. Если линия ω^1 сети $\widetilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(13)}\right)$, то это пара не имеет других (кроме линий ω^1) двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(13)}$.

§2.2 Существование двойных линий частичного отображения f_1^4 и пар $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$, $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$

Рассмотрим частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$, определяемое псевдофокусом $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$. Область Ω_1^4 отнесена к подвижному реперу $R_1^4 = (X, \vec{b}_i)$ [41], где

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{12}^4}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i + \vec{e}_3;$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i + \vec{e}_4.$$

Поскольку заданная сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \left[1 + \frac{B_{141}^4}{(\Lambda_{14}^4)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2; \\
\vec{b}_2 &= \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_4; \\
\vec{b}_3 &= \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{13}^4}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_4 + \vec{e}_3; \\
\vec{b}_4 &= \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

В общем случае эти векторы линейно независимы. Найдем необходимое и достаточное условия вырожденности отображения $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$. Потребуя линейной зависимости векторов $\vec{b}_i$ получим:

$$\Lambda_{12}^4 \left\{ \Lambda_{14}^2 \left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2 + B_{141}^4 \right] - \Lambda_{11}^2 B_{144}^4 \right\} = 0 .$$

Отсюда имеем: а) $\Lambda_{12}^4 = 0$ (2.2.2)

или б) $\Lambda_{14}^2 \left[\left(\Lambda_{14}^4\right)^2 + B_{141}^4 \right] - \Lambda_{11}^2 B_{144}^4 = 0 .$ (2.2.3)

Геометрический смысл равенств (2.2.2), (2.2.3) заключаются в следующем: $d_2 \vec{e}_1 = \vec{0}$, $k_1^1 \left(-\vec{e}_1 d_4 \vec{k}_{14} \right) = \left[\left(k_4^1 \right)^2 - \vec{e}_1 d_1 \vec{k}_{14} \right] k_2^4$, соответственно, где $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$ – первая кривизна линии ω^1, $k_1^4 = \Lambda_{44}^1 = -\Lambda_{14}^4$ – первая кривизна, $\vec{k}_{14} = \Lambda_{44}^1 \vec{e}_1 = -\Lambda_{14}^4$ – вектор первой кривизны линии ω^4 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе, d_i – символ дифференцирования вдоль линии ω^i.

Обратно, если имеет место одно из условий (2.2.2), (2.2.3), то частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ является вырожденным. Таким образом, доказана

Теорема 2.2.1. Для того, чтобы частичное отображение f_1^4 являлось вырожденным необходимо и достаточно выполнения одного из условий (2.2.2), (2.2.3).

Линий ω^i, $\left(\omega^i\right) = \overline{\omega}^i$ называют двойными линиями отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках x и $g(x)$ пересекаются, либо параллельны [7].

Линию ℓ называют двойной линией пары $(g,\ \Delta_p)$, если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Рассмотрим векторы: $\vec{e}_1, \vec{b}_1, \overrightarrow{XF}{}_1^4 = -\left({}^{1}\!\!\diagup_{\Lambda_{14}^4} \right)\vec{e}_1$ где $\vec{b}_1 = f_1^4(\vec{e}_1)$.

Учитывая первое равенство формулы (2.2.1) получим, что эти векторы принадлежат плоскости $(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Следовательно, справедлива

Лемма 2.2.1. Линии $\omega^1,\ f_1^4,\ (\omega^1) = \overline{\omega}^1$ всегда являются двойными линиями частично отображения f_1^4, а линия ω^1 циклические сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$, где $\Delta_{(12)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Из условия $\vec{e}_2, \vec{b}_2 = f_1^4(\vec{e}_2), \overrightarrow{XF}{}_1^4 \in (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2,)$

имеем:
$$\Lambda_{12}^4 = 0, \tag{2.2.4}$$

геометрический смысл, которого заключается в следующем:

$$d_2\vec{e}_1 = \Lambda_{12}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{12}^3\vec{e}_3 + \Lambda_{12}^4\vec{e}_4 = \vec{0}.$$

Следовательно, линии $\omega^2, \overline{\omega}^2 = f_1^4(\omega^2)$ является двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^2 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$, где $\Delta_{(12)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ тогда и только тогда, когда имеет место условия (2.2.4).

Рассмотрим векторы $\vec{e}_3, \vec{b}_3 = f_1^4(\vec{e}_3), \overrightarrow{XF}{}_1^4$. Из условия компланарности этих векторов получим:

$$\Lambda_{13}^2 = 0, \quad \Lambda_{13}^4 = 0, \tag{2.2.5}$$

геометрический смысл которых заключаются в следующем:

$$d_3\vec{e}_1 = \Lambda_{13}^2\vec{e}_2 + \Lambda_{13}^4\vec{e}_4 = \vec{0}.$$

Следовательно, линии $\omega^3,\ \overline{\omega}^3 = f_1^4(\omega^3)$ являются двойными линиями частичного отображения f_1^4, а линия ω^3 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$, где $\Delta_{(13)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ тогда и только тогда, когда имеют места условия (2.2.5).

Из условия $\vec{b}_4, \vec{e}_4, \overrightarrow{XF}{}^4_1 \in \Delta_{(14)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_4\right)$

получим: $$\Lambda^2_{14} = 0. \qquad (2.2.6)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.2.2. а) Линии $\omega^2,\ \overline{\omega}^2 = f^4_1(\omega^2)$ является двойными линиями частичного отображения f^4_1, а линия ω^2 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f^4_1, \Delta_{(12)}\right)$, где $\Delta_{(12)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (2.2.4);

б) линии $\omega^3,\ \overline{\omega}^3 = f^4_1(\omega^3)$ являются двойными линиями частичного отображения f^4_1, а линия ω^3 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f^4_1, \Delta_{(13)}\right)$ (где $\Delta_{(13)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.2.5);

в) линий $\omega^4,\ \overline{\omega}^4 = f^4_1\left(\omega^4\right)$ являются двойными линиями частичного отображения f^4_1, а линия ω^4 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f^4_1, \Delta_{(14)}\right)$, (где $\Delta_{(14)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_4\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.2.6).

Из (2.2.2),(2.2.4) получим

Следствие 2.2.1. Если линия ω^2 сети $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f^4_1, \Delta_{(12)}\right)$, то частичное отображение f^4_1 становится вырожденным.

Рассмотрим линию ℓ, принадлежащую двумерному распределению $\Delta_{(12)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$. Ее касательный вектор имеет вид $\vec{e} = \left(\ell^1 \vec{e}_1 + \ell^2 \vec{e}_2\right)$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\ell}}$ образа линии e в отображение f^4_1: $\vec{\bar{\ell}} = \ell^1 \overrightarrow{b_1} + \ell^2 \vec{b}_2$.

Учитывая формул (2.2.1) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\ell}} = \left(\ell^1 b_1^1 + \ell^2 b_2^1\right)\vec{e}_1 + \left(\ell^1 b_1^1 + \ell^2\right)\vec{e}_2 + \ell^2 b_2^4 \vec{e}_4.$$

Отсюда получим:

$$\vec{\ell}, \vec{\bar{\ell}}, \overrightarrow{XF}{}_1^4 \in \Delta_{(12)} \Leftrightarrow \ell^2 b_2^4 = 0,$$

где b_i^j – j –та координата вектора $\vec{b}_i$, $\quad b_2^4 = -\dfrac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4}.$

Следовательно, имеем: либо

а) $\ell^2 = 0;$ либо б) $\Lambda_{12}^4 = 0.$ Из условия а) определяется линия ω^1, а из условия б) имеем, что линии ω^2 является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.2.3. Если линия ω^2 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(12)}\right)$,то такая другая линия ℓ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ не может быть двойной линией этой пары.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(14)} = \left(x, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^4\vec{e}_4.$ Найдем касательный вектор $\vec{\bar{a}}$ линии $f_1^4(\gamma) = \bar{\gamma}:$ $\qquad \vec{\bar{a}} = a^1\vec{e}_1 + a^4\vec{e}_4.$

Учитывая (2.2.1), отсюда получим $\vec{\bar{a}} = \left(a^1\vec{e}_1 + a^4\vec{e}_4\right)\vec{e}_1 + \left(a^1 b_1^2 + a^4 b_4^2\right)\vec{e}_2.$

Из условия $\vec{a}, \vec{\bar{a}}, \overrightarrow{XF}{}_1^4 \in \Delta_{(14)}$ имеем: $a^1 b_1^2 + a^4 b_4^2 = 0.$ или

$$\frac{a^1}{a^4} = -\frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{11}^2}. \tag{2.2.7}$$

Верно и обратное. Следовательно доказана

Теорема 2.2.4. Линия γ, принадлежащий распределению $\Delta_{(14)}$, является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$ тогда и только тогда, когда координаты ее касательного вектора удовлетворяют условию (2.2.7) .

Следствие 2.2.2. Если линия ω^4 циклической сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(14)}\right)$, то ни какая другая линия, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$ не может быть двойной линией этой пары.

Рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(13)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ и её касательный вектор $\vec{m} = m^1\vec{e}_1 + m^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{m}} = m^1\overrightarrow{\overline{b}_1} + m^3\vec{b}_3$ линии $f_1^4(\beta) = \overline{\beta}$.

В силу равенств (2.2.1) имеем:

$\vec{m} = (m^1\vec{b}_1 + m^3\vec{b}_3)\vec{e}_1 + (m^1 b_1^2 + m^3)\vec{e}_2 + m^3 b_2^4 \vec{e}_4$.

Из условия $\overline{m}$, $\vec{\overline{m}}$ $\overrightarrow{XF_1^4} \in \Delta_{(13)}$ получим: $\begin{cases} m^1 b_1^2 + m^3 = 0; \\ m^3 b_2^4 = 0. \end{cases}$

Из второго равенства (т.к. $m^3 \neq 0$) имеем:

$b_2^4 = 0$, т.е. $\Lambda_{12}^4 = 0$ - это есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы линия ω^2 циклической сети Френе являлась двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$. Из первого равенства системы имеем:

$$m^1 b_1^2 = -m^3 \Rightarrow \frac{m^3}{m^1} = -b_1^2 \text{ или } \frac{m^3}{m^1} = \Lambda_{11}^2. \qquad (2.2.8)$$

Обратно, если линия ω^2 циклической сети Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$ и имеем место (2.2.2), то линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.2.5. Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(13)}$, является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(13)})$ тогда и только тогда, когда линия ω^2 циклической сети Френе является двойной линией пары $(f_1^4, \Delta_{(12)})$ и координаты m^1, m^3 касательного вектора $\vec{m}$ линии β удовлетворяют условию $(2.2.8)$.

§2.3 Существование двойных линий частичного отображения f_4^3 и пар $\left(f_4^3, \Delta_{(43)}\right), \left(f_4^3, \Delta_{(14)}\right)$

Рассмотрим частичное отображение $f_4^3 : \Omega \to \Omega_4^3$, определяемое псевдофокусом $F_4^3 \in (X, \vec{e}_4)$. Область Ω_4^3 отнесем к подвижному реперу $R_4^3 = (X, \vec{c}_i)$ [45], где

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{41}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_2 = \vec{e}_2 + \frac{B_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{42}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{43}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k;$$

$$\vec{c}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{44}^k}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_k.$$

Так как сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{c}_i$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{c}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{41}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4;\\
\vec{c}_2 &= -\frac{\Lambda_{42}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{42}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4;\\
\vec{c}_3 &= -\frac{\Lambda_{43}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \frac{B_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4;\\
\vec{c}_4 &= -\frac{\Lambda_{44}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \left(1 + \frac{B_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\right)\vec{e}_4.
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(34)} = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^3 \vec{e}_3 + \gamma^4 \vec{e}_4$. Найдем координаты касательного вектора $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_4^3(\gamma)$: $\vec{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma}^3 \vec{c}_3 + \bar{\gamma}^4 \vec{c}_4$.
Учитывая (10) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\bar{\gamma}^3 c_3^1 + c_4^1 \bar{\gamma}^4)\vec{e}_1 + (\bar{\gamma}^3 c_3^4 + \bar{\gamma}^4 c_4^4)\vec{e}_4,$$

где c_i^j – j-тая координата вектора $\vec{c}_i$.

Из условия компланарности векторов:
$\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF_4^3} = -(1/\Delta_{43}^3)\vec{e}_4$ имеем:

$$\frac{\bar{\gamma}^4}{\bar{\gamma}^3} = -\frac{\Lambda_{43}^1}{\Lambda_{44}^1}. \tag{2.3.2}$$

Обратно, если выполнено условие (2.3.2), то линия γ является двойной линией частичного отображения f_4^3 (тем самым и двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(34)})$, т.к. $\gamma \in \Delta_{(34)}$). Следовательно, справедлива

Теорема 2.3.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, является двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(34)})$ тогда и только тогда, когда выполнено условию (2.3.1) (где Λ_{44}^1 – первая кривизна линии ω^4 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе, Λ_{43}^1 – первая кривизна линии ω^3 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе).

Аналогично, рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(14)} = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_4^3(\beta)$: $\vec{\bar{\beta}} = \bar{\beta}^1 \vec{c}_1 + \beta^4 \vec{c}_4$.
Учитывая (2.3.1) отсюда получим: $\bar{\beta}^1 c_1^3 = 0$, где c_1^3 – третья координата вектора $\vec{c}_1$.

В силу первого равенства формулы (2.3.1) отсюда имеем: $\overline{\beta}^1\Lambda_{41}^3 = 0$, следовательно (т.к. $\overline{\beta}^1 \neq 0$, т.е. линия β не совпадает с линией ω^4) $\Lambda_{41}^3 = 0$ (- $\Lambda_{41}^3 = \Lambda_{31}^4 = k_3^1$ – третья кривизна линии ω^1 заданного семейства).

Верно и обратное утверждение. Таким образом доказана

Теорема 2.3.2. Для того, чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(14)}$, являлась двойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(14)})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\Lambda_{41}^3 = 0$.

Следствие 2.3.1. Если линия $\beta \in \Delta_{(14)}$ совпадает с координатной линией ω^4 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе (ω^4 всегда является двойной линией отображения f_4^3 [66], то пара $(f_4^3, \Delta_{(14)})$ не имеет других двойных линий, принадлежащих распределению $\Delta_{(14)}$.

Рассмотрим линию α, принадлежащую распределению $\Delta_{(24)} = (x, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$. Её касательный вектор $\overline{\alpha}$ имеет координаты: $\vec{\alpha} = \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\alpha}}$ линии $f_4^3(\alpha) = \overline{\alpha}$: $\vec{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}^2\vec{c}_2 + \overline{\alpha}^4\vec{c}_4$.

Учитывая (2.3.1) отсюда имеем:

$$\vec{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha}^2(c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\vec{e}_2 + c_2^3\vec{e}_3 + c_2^4\vec{e}_4) + \overline{\alpha}^4(c_4^1\vec{e}_1 + c_4^4\vec{e}_4) = (\overline{\alpha}^2 c_2^1 + \overline{\alpha}^4 c_4^1)\vec{e}_1 +$$
$$+ c_2^2\overline{\alpha}^2\vec{e}_2 + \overline{\alpha}^2 c_2^3\vec{e}_3 + (\overline{\alpha}c_2^4 + \overline{\alpha}^4 c_4^4)\vec{e}_4.$$

Из условия компланарности векторов $\vec{\alpha}, \vec{\overline{\alpha}}, \overrightarrow{XF_4^3}$ получим:

$$\begin{cases} \overline{\alpha}^2 c_2^3 = 0; \\ \overline{\alpha}^2 c_2^1 + \overline{\alpha}^4 c_4^1 = 0. \end{cases}$$

Учитывая (2.3.1) отсюда имеем:

$$\begin{cases} \overline{\alpha}^2 \Lambda_{42}^3 = 0; \\ \overline{\alpha}^2 \Lambda_{42}^1 + \overline{\alpha}^4 \Lambda_{44}^1 = 0. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Отсюда, так как $\overline{\alpha}^2 \neq 0$, получим

$$\Lambda^{3}_{42} = 0, \tag{2.3.4}$$

$$\frac{\overline{\alpha}^{4}}{\overline{\alpha}^{2}} = -\frac{\Lambda^{1}_{42}}{\Lambda^{1}_{44}}. \tag{2.3.5}$$

Обратно, если имеют места равенства (2.3.4), (2.3.5), то линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(24)}$, являлась двойной линией пары $(f^{3}_{4}, \Delta_{(24)})$. Следовательно доказана

Теорема 2.3.3. Для того, чтобы линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(24)}$, являлась двойной линией пары $(f^{3}_{4}, \Delta_{(24)})$ необходимо и достаточно выполнения условий (2.3.4), (2.3.5).

§2.4 Существование двойных линий частичного отображения f_2^1 и пар $(f_2^1, \Delta_{(12)}), (f_2^1, \Delta_{(34)})$

Рассмотрим частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$, определяемое псевдофокусом $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$. Область Ω_2^1 отнесем к подвижному реперу $R_2^1 = (X, \vec{a}_i)$, где

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{211}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{21}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_2 = \left[1 + \frac{B_{212}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{22}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B_{213}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{23}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k;$$

$$\vec{a}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B_{214}^1}{(\Lambda_{21}^1)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{24}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_k.$$

Так как сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{a}_i$ имеют вид [42]:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= \vec{e}_1 + \frac{B_{211}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{21}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3; \\
\vec{a}_2 &= \left[1 + \frac{B_{212}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{22}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3; \\
\vec{a}_3 &= -\frac{\Lambda_{23}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_1 + \frac{B_{213}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \\
\vec{a}_4 &= -\frac{\Lambda_{24}^k}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_1 + \frac{B_{214}^1}{\left(\Lambda_{21}^1\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{24}^3}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ является невырожденным.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(12)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2$.

Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $f_2^1(\gamma) = \bar{\gamma}$:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma}^1 \vec{a}_1 + \bar{\gamma}^2 \vec{a}_2 = \bar{\gamma}^1 a_1^1 \vec{e}_1 + (\bar{\gamma} a_1^2 + \bar{\gamma}^2 a_2^2)\vec{e}_2 + (\bar{\gamma}^1 a_1^3 + \bar{\gamma}^2 a_2^3)\vec{e}_3,$$

где a_i^j – j-тая координата вектора $\vec{a}_i$. Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(12)}$ получим: $\bar{\gamma}^1 a_1^3 + \bar{\gamma}^2 a_2^3 = 0$. Учитывая (2.4.1) отсюда имеем:

$$\frac{\bar{\gamma}^1}{\bar{\gamma}^2} = -\frac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^3}. \qquad (2.4.2)$$

Обратно, если имеет место равенство (2.4.2), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)}$, является двойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(12)})$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.4.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(12)}$, является двойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(12)})$ тогда и только тогда, когда координаты её касательно вектора удовлетворяют условию (2.4.2).

Рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(34)} = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^3 \vec{e}_3 + \beta^4 \vec{e}_4$.

Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_2^1(\beta)$:

$$\vec{\bar{\beta}} = (\bar{\beta}^3 a_3^1 + \bar{\beta}^4 a_4^1)\vec{e}_1 + (\bar{\beta}^3 a_3^2 + \bar{\beta}^4 a_4^2)\vec{e}_2 + (\bar{\beta}^3 + a_4^3 \bar{\beta}^4)\vec{e}_3 + \bar{\beta}^4 \vec{e}_4,$$

где a_i^j – j-тая координата вектора $\vec{a}_i$. Из условия $\vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}}, \overrightarrow{XF_2^1} \in \Delta_{(34)}$.

Имеем систему:

$$\begin{cases} \overline{\beta}^3 a_3^1 + \vec{\beta}^4 a_4^1 = 0; \\ \overline{\beta}^3 a_3^2 + \overline{\beta}^4 a_4^2 = 0. \end{cases}$$

Учитывая (2.4.1) отсюда имеем:

$$\begin{cases} \overline{\beta}^3 a_3^1 + \vec{\beta}^4 a_4^1 = 0; \\ \beta_{213}^1 \overline{\beta}^3 + \beta_{214}^1 \overline{\beta}^4 = 0. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Эта система уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{23}^1 & \Lambda_{24}^1 \\ B_{213}^1 & B_{214}^1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\Lambda_{23}^1}{B_{213}^1} = \frac{\Lambda_{24}^1}{B_{214}^1}. \tag{2.4.4}$$

Верно и обратное утверждение.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.4.2. Для того, чтобы линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(34)}$, являлась двойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(34)})$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство (2.4.4), геометрический смысл которого заключается в следующем:

$$\frac{\vec{e}_1 \vec{\Lambda}_{23}}{\vec{e}_1 d_3 \vec{\Lambda}_{21}} = \frac{\vec{e}_1 \vec{\Lambda}_{24}}{\vec{e}_1 d_4 \vec{\Lambda}_{21}},$$

d_i - символ дифференцирования вдоль направлении $\vec{e}_i$, $\vec{\Lambda}_{ij} = d_j \vec{e}_i$.

Заключение по главе 2

В второй главе диссертации исследовано существование двойных линий частичных отображений $f_i^j:\ \Omega \to \Omega_i^j$ и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik)}\right)$ в пространстве E_4.

Получены следующие результаты:

1. Доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений $f_i^j:\ \Omega \to \Omega_i^j$ четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семействам гладких линий;

2. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семействам гладких линий;

3. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными линиями пар $(f, \Delta_{(k\ell)})$, где $\Delta_{(k\ell)} = \left(X, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell\right)$ – двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_k, \vec{e}_\ell$.

Глава 3

Существование квазидвойных линий частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ijk)}\right)$

§3.1 Существование квазидвойных линий пары $\left(\boldsymbol{f_4^3}, \Delta_{(\boldsymbol{ijk})}\right)$

Рассмотрим частичное отображение $\mathrm{f}_4^3 : \ \Omega \to \Omega_4^3$ такое, что $f_4^3(\mathrm{X}) = F_4^3$.

Область Ω_4^3 отнесём к подвижному реперу $\Re^1 = (F_3^4, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)$, где векторы $\vec{c}_i$ имеют координаты [66] (в случае когда сеть Френе являются циклической сетью Френе):

$$\begin{aligned}
\vec{c}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{41}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4; \\
\vec{c}_2 &= -\frac{\Lambda_{42}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{42}^3}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_3 + \frac{B_{432}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4; \\
\vec{c}_3 &= -\frac{\Lambda_{43}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \frac{B_{433}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\vec{e}_4; \\
\vec{c}_4 &= -\frac{\Lambda_{44}^1}{\Lambda_{43}^3}\vec{e}_1 + \left(1 + \frac{B_{434}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2}\right)\vec{e}_4.
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $\mathrm{f}_4^3 : \ \Omega \to \Omega_4^3$ является невырожденным.

Линии ω^i, $g(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ назовем двойными линиями отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(x)$ пересекаются, либо параллельны $[7]$.

Линия ℓ называются двойной линией пары (g,Δ_p), если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p $[7]$.

Введем определения: 1) линии ω^i, $g(\omega^i)$ в E_4 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(x)$ принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) Линия ℓ называется квазидвойной линией пары (g,Δ_p), если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(234)} = \Delta(X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$. Её касательный вектор имеет вид:

$\vec{\gamma} = \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $f_4^3(\gamma) = \bar{\gamma}$. Он имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^2\vec{c}_2 + \gamma^3\vec{c}_3 + \gamma^4\vec{c}_4$.

Учитывая формул (3.1.1) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2(c_2^1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + c_2^3\vec{e}_3 + c_2^4\vec{e}_4) + \gamma^3(c_3^1\vec{e}_1 + c_4^3\vec{e}_4) + \bar{\gamma}^4(c_4^1\vec{e}_1 + c_4^4\vec{e}_4)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\gamma^2 c_2^1 + \gamma^3 c_3^1 + \gamma^4 c_4^1)\vec{e}_1 + \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^2 c_2^3\vec{e}_3 + (\gamma^2 c_2^4 + \bar{\gamma}^3 c_3^4 + \bar{\gamma}^4 c_4^4)\vec{e}_4 .$$

где c_i^j – j-тая координата вектора $\vec{c}_i$.

Потребуем чтобы векторы $\vec{\gamma},\vec{\bar{\gamma}}$ принадлежали $\Delta_{(234)}$. Из этого условия получим: $\gamma^2 c_2^1 + \gamma^3 c_3^1 + \gamma^4 c_4^1 = 0$.

Учитывая (10) отсюда имеем:

$$-\frac{\Lambda_{42}^1}{\Lambda_{43}^3}\gamma^2 - \frac{\Lambda_{43}^1}{\Lambda_{43}^3}\gamma^3 - \frac{\Lambda_{44}^1}{\Lambda_{43}^3}\gamma^4 = 0$$

или

$$\Lambda_{42}^1\gamma^2 + \Lambda_{43}^1\gamma^3 + \Lambda_{44}^1\gamma^4 = 0 . \qquad (3.1.2)$$

Обратно, если имеет место (3.1.2), то $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}}, \overrightarrow{XF}_4^3 \in \Delta_{(234)}$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.1.2). Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} \vec{\Lambda}_{42} &= d_2\vec{e}_4 = \Lambda_{42}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{42}^3\vec{e}_3; \\ \vec{\Lambda}_{43} &= d_3\vec{e}_4 = \Lambda_{43}^1\vec{e}_1 + \Lambda_{43}^3\vec{e}_3; \\ \vec{\Lambda}_{44} &= \Lambda_{44}^1\vec{e}_1, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

где d_i – символ дифференцирования по направлению $\vec{e}_i$.

Определим такой вектор $\vec{p}$:

$$\vec{p} = (\vec{\Lambda}_{42}\vec{e}_1)\vec{e}_2 + (\vec{\Lambda}_{43}\vec{e}_1)\vec{e}_3 + (\vec{\Lambda}_{44}\vec{e}_1)\vec{e}_4. \tag{3.1.4}$$

Найдем:

$$\vec{p}\vec{\gamma} = (\vec{\Lambda}_{42}\vec{e}_1)\gamma^2 + (\vec{\Lambda}_{43}\vec{e}_1)\gamma^3 + (\vec{\Lambda}_{44}\vec{e}_1)\gamma^4.$$

Учитывая (3.1.3) отсюда имеем:

$$\vec{p}\vec{\gamma} = \vec{\Lambda}_{42}\gamma^2 + \vec{\Lambda}_{43}\gamma^3 + \vec{\Lambda}_{44}\gamma^4.$$

Следовательно, геометрический смысл равенства (3.1.2) заключается в том, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Таким образом, доказана

Теорема 3.1.1. Линия $\gamma \in \Delta_{(234)}$ является квазидвойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(234)})$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Теперь рассмотрим линию α, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(234)}$. Её касательный вектор имеет вид:

$\vec{\alpha} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\alpha}}$ линии $f_4^3(\alpha) = \bar{\alpha}$. Он имеет вид: $\vec{\alpha} = \alpha^1\vec{c}_1 + \alpha^2\vec{c}_2 + \alpha^3\vec{c}_3$. Учитывая формул (3.1.1) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1(\vec{e}_1 + c_3^1\vec{e}_3 + c_1^4\vec{e}_4) + \alpha^2(c_2^1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + c_2^3\vec{e}_3 + c_2^4\vec{e}_4) + \alpha^3(c_3^1\vec{e}_1 + c_3^4\vec{e}_4)$$

или

$$\vec{\bar{\alpha}} = (\alpha^1 + \alpha^2c_2^1 + \alpha^3c_3^1)\vec{e}_1 + \alpha^2\vec{e}_2 + (\alpha^1c_1^3 + \alpha^2c_2^3)\vec{e}_3 + (\alpha^1c_1^4 + \alpha^2c_2^4 + \alpha^3c_3^4)\vec{e}_4.$$

Рассмотрим векторов $\vec{\alpha}, \vec{\bar{\alpha}}$.

Из условия $\vec{\alpha}, \vec{\vec{\alpha}} \in \Delta_{(123)}$ имеем:

$$\alpha^1 c_1^4 + \alpha^2 c_2^4 + \alpha^3 c_3^4 = 0.$$

Учитывая формул (3.1.1) отсюда получим:

$$\alpha^1 \frac{B_{431}^3}{(\Lambda_{43}^3)^2} + \alpha^2 \frac{B_{432}3}{(\Lambda_{43}^3)^2} + \alpha^3 \frac{B_{433}3}{(\Lambda_{43}^3)^2} = 0$$

или
$$B_{431}^3\alpha^1 + B_{432}^3\alpha^2 + B_{433}^3\alpha^3 = 0. \tag{3.1.4}$$

Обратно, если имеет место (3.1.4), то линия $\alpha \in \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(123)})$.

Найдем геометрический смысл равенства (3.1.4):

$$B_{431}^3 = -\vec{e}_4 d_1 \vec{k}_{13}, \quad B_{432}^3 = -\vec{e}_4 d_2 \vec{k}_{13}, \quad B_{433}^3 = -\vec{e}_4 d_3 \vec{k}_{13},$$

где $\vec{k}_{13}$ – вектор первой кривизны линии ω^3 циклической сети Френе $\widetilde{\Sigma}_4$.

Определим вектор $\vec{S}$ следующим образом:

$$\vec{S} = (np_{\vec{e}_4} d_1\vec{k}_{13})\vec{e}_1 + (np_{\vec{e}_4} d_2\vec{k}_{13})\vec{e}_2 + (np_{\vec{e}_4} d_3\vec{k}_{13})\vec{e}_3.$$

Тогда имеем:

$$\vec{\alpha}\vec{s} = -(B_{431}^3\alpha^1 + B_{432}^3\alpha^2 + B_{433}^3\alpha^3).$$

Следовательно, геометрический смысл равенства (3.1.4) заключается в том, что векторы $\vec{\alpha}$ и $\vec{s}$ ортогональны.

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1.2. Линия α, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(123)})$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство (3.1.4) (т.е. $\vec{\alpha} \perp \vec{s}$).

Аналогично доказывается

Теорема 3.1.3. а) Линия m, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $(f_4^3, \Delta_{(124)})$ тогда и только тогда, когда координаты m^1, m^2 её касательного вектора удовлетворяют условию:

$$\frac{m^1}{m^2} = -\frac{\Lambda^3_{42}}{\Lambda^3_{41}},$$

где $-\Lambda^3_{42} = \Lambda^4_{32}$ – вторая кривизна линии ω^2 сети $\widetilde{\Sigma}_4$, $-\Lambda^3_{41} = \Lambda^4_{31}$ – третья кривизна линии ω^1 сети $\widetilde{\Sigma}_4$.

б) Любая линия β, принадлежащая трехмерному распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $(f^3_4, \Delta_{(134)})$.

§3.2 Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии пары $\left(f_3^2, \Delta_{(ijk)}\right)$

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in \left(X, \vec{e}_3\right)$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \tag{3.2.1}$$

Когда точка X движется в области $\Omega \subset E_4$, точка F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_4$. Таким образом имеем частичное отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$. Присоединим к области Ω_3^2 подвижной репер $\Re' = \left(F_3^2, \vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4\right)$, где векторы $\vec{m}_i$ определяются следующим образом [66] :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{m_1} &= \overrightarrow{e_1} + \frac{B_{321}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^2}\overrightarrow{e} - \frac{\Lambda_{31}^{i}}{\Lambda_{32}^{2}} e_i;\\
\overrightarrow{m_2} &= \overrightarrow{e_1} + \frac{B_{322}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{32}^{i}}{\Lambda_{32}^{2}} \overrightarrow{e_i};\\
\overrightarrow{m_3} &= \overrightarrow{e_1} + \frac{B_{323}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{33}^{i}}{\Lambda_{32}^{2}} \overrightarrow{e_i};\\
\overrightarrow{m_4} &= \overrightarrow{e_1} + \frac{B_{324}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{34}^{i}}{\Lambda_{32}^{2}} \overrightarrow{e_i}.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Поскольку заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе [5] получим:

$$\overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{31}^{2}}{\Lambda_{32}^{2}}\overrightarrow{e_2} + \frac{B_{321}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{31}^{4}}{\Lambda_{32}^{2}}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{m_2} = \frac{B_{322}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{\Lambda_{32}^{4}}{\Lambda_{32}^{2}}\overrightarrow{e_4};$$

$$\overrightarrow{m_3} = \left[1 + \frac{B_{323}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^2} \right] \overrightarrow{e_2} - \frac{\Lambda_{33}^{4}}{\Lambda_{32}^{2}} \overrightarrow{e_4} \; ;$$

$$\overrightarrow{m_4} = -\frac{\Lambda_{34}^{2}}{\Lambda_{32}^{2}} \overrightarrow{e_2} + \frac{B_{324}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^2} \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4} \; . \qquad (3.2.3)$$

Линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках $X,\; g(X)$, пересекаются, либо параллельны [7].

Линия l называется двойной линией пары $(g,\; \Delta_p)$, если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Введем определения: 1) линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega^i}$ в E_4 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним взятые в соответствующих точках $X,\; g(X)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) Линия l называется квазидвойной линией пары $(g,\; \Delta_p)$, если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Рассмотрим линию l, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)} = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\overline{l} = l^1 \overrightarrow{e_1} + l^2 \overrightarrow{e_2} + l^3 \overrightarrow{e_3}$. Найдем касательный вектор $\overrightarrow{\overline{l}}$ линии $f_3^2(l) = \overline{l}$. Его ищем в виде:

$$\overrightarrow{\overline{l}} = l^1 \overrightarrow{m_1} + l^2 \overrightarrow{m_2} + l^3 \overrightarrow{m_3} \, .$$

Учитывая формул (3.2.3) отсюда получим:

$$\overrightarrow{\overline{l}} = l^1 \left(\overrightarrow{e_1} + m_1^2 \overrightarrow{e_2} + m_1^3 \overrightarrow{e_3} + m_1^4 \overrightarrow{e_4} \right) + l^2 \left(m_2^3 \overrightarrow{e_3} + m_2^4 \overrightarrow{e_4} \right) + l^3 \left(m_3^3 \vec{e}_3 + m_3^4 \vec{e}_4 \right)$$

или

$$\vec{\vec{l}} = l^1\overrightarrow{e_1} + m_1^2\overrightarrow{e_2} + \left(l^1 m_1^3 + l^2 m_2^3 + l^3 m_3^3\right)\overrightarrow{e_3} + \left(l^1 m_1^4 + l^2 m_2^4 + l^3 m_3^4\right)\overrightarrow{e_4},$$

где $m_i^j - j$ -тая координата вектора $\overrightarrow{m_i}$.

Рассмотрим векторов $\vec{l}, \vec{\vec{l}}$.

Из условия $\vec{l}, \vec{\vec{l}} \in \Delta_{(123)}$ имеем:

$$l^1 m_1^4 + l^2 m_2^4 + l^3 m_3^4 = 0 .$$

Учитывая формул (3.2.3) отсюда получим:

$$l^1\left(-\frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\right) + l^2\left(-\frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\right) + l^3\left(-\frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\right) = 0 .$$

или

$$\Lambda_{31}^4 l^1 + \Lambda_{32}^4 l^2 + \Lambda_{33}^4 l^3 = 0 . \qquad (3.2.4)$$

Верно и обратное утверждение, т.е. если имеет место (3.2.4), то линия l, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(123)}\right)$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.2.4) Рассмотрим векторов:

$$d_1\overrightarrow{e_3} = \Lambda_{31}^2\overrightarrow{e_2} + \Lambda_{31}^4\overrightarrow{e_4}$$

$$d_2\overrightarrow{e_3} = \Lambda_{31}^1\overrightarrow{e_1} + \Lambda_{32}^2\overrightarrow{e_2} + \Lambda_{32}^4\overrightarrow{e_4}$$

$$d_3\overrightarrow{e_3} = \Lambda_{33}^1\overrightarrow{e_1} + \Lambda_{33}^2\overrightarrow{e_2} + \Lambda_{33}^4\overrightarrow{e_4}$$

Определим вектор $\vec{q}$, с координатами:

$$\Lambda_{31}^4 = \overrightarrow{e_4} d_1\overrightarrow{e_3}, \quad \Lambda_{32}^4 = \overrightarrow{e_4} d_2\overrightarrow{e_3}, \quad \Lambda_{33}^4 \overrightarrow{e_4} d_3\overrightarrow{e_3}, \quad \text{т.е.}$$

$$\vec{q} = \Lambda_{31}^4\overrightarrow{e_1} + \Lambda_{32}^4\overrightarrow{e_2} + \Lambda_{33}^4\overrightarrow{e_3} .$$

Тогда $\vec{q} \cdot \vec{l} = \Lambda_{31}^4 l^1 + \Lambda_{32}^4 l^2 + \Lambda_{33}^4 l^3$.

Следовательно, геометрический смысл равенства (3.2.4) заключается в том, что векторы $\vec{q}$ и $\vec{l}$ ортогональны.

Теперь рассмотрим линию γ, принадлежащую распределению $\Delta_{(124)}$.

Ее касательный вектор $\vec{\gamma}$ имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{e_1} + \gamma^2\vec{e_2} + \gamma^4\vec{e_4}$.

Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_3^2(\gamma)$. Его ищем в виде:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{m_1} + \gamma^2\vec{m_2} + \gamma^4\vec{m_4} .$$

Учитывая формул (3.2.3) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\left(\vec{e_1} + m_1^2\vec{e_2} + m_1^3\vec{e_3} + m_1^4\vec{e_4}\right) + \gamma^2\left(m_2^3\vec{e_3} + m_2^4\vec{e_4}\right) + \gamma^4\left(m_4^2\vec{e_2} + m_4^3\vec{e_3} + \vec{e_4}\right)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^1\vec{e_1} + \left(\gamma^1 m_1^2 + \gamma^4 m_4^2\right)\vec{e_2} + \left(\gamma^1 m_1^3 + \gamma^2 m_2^3 + \gamma^4 m_4^3\right)\vec{e_3} + \left(\gamma^1 m_1^4 + \gamma^2 m_2^4 + \gamma^4\right)\vec{e_4} .$$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}} \in \Delta_{(124)}$ имеем:

$$\gamma^1 m_1^3 + \gamma^2 m_2^3 + \gamma^4 m_4^3 = 0 .$$

Учитывая формулу (3.2.3) отсюда получим:

$$\gamma^1 \frac{B^{\,2}_{321}}{\left(\Lambda^{2}_{32}\right)^2} + \gamma^2 \frac{B^{\,2}_{322}}{\left(\Lambda^{2}_{32}\right)^2} + \gamma^4 \frac{B^{\,2}_{324}}{\left(\Lambda^{2}_{32}\right)^2} = 0$$

или (т.к. $\Lambda_{32}^2 \neq 0$)

$$B^{\,2}_{321}\gamma^1 + B^{\,2}_{322}\gamma^2 + B^{\,2}_{324}\gamma^4 = 0 . \qquad (3.2.5)$$

Обратно, если имеет место равенство (3.2.5) то линия γ является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(124)}\right)$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.2.5).

Рассмотрим вектор $\vec{k_{12}} = \Lambda_{22}^3\vec{e_3} = -\Lambda_{32}^2\,\vec{e_3}$ − вектор первой кривизны линии ω^2 циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе. Найдем производные этого вектора вдоль направлениях $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_4}$ [66]:

$$d_1\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{321}\overrightarrow{e_3} - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^2_{31}\overrightarrow{e_2} + \Lambda^4_{31}\overrightarrow{e_4}\right),$$

$$d_2\overrightarrow{k_{12}} = -B^{\,2}_{322}\overrightarrow{e_3} - \Lambda^2_{32}\left(\Lambda^2_{32}\overrightarrow{e_2} + \Lambda^4_{32}\overrightarrow{e_4}\right),$$

$$d_4\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{324}\overrightarrow{e_3} - \Lambda^2_{32}\,\Lambda^2_{34}\overrightarrow{e_2}\,.$$

Определим вектор $\vec{\tau}$ с координатами:

$$\overrightarrow{e_3}d_1\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{321}\,, \quad \overrightarrow{e_3}d_2\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{322}\,, \quad \overrightarrow{e_3}d_4\overrightarrow{k_{12}} = -B^2_{324}\,,$$

т.е.

$$\vec{\tau} - \left[\left(\overrightarrow{e_3}d_1\overrightarrow{k_{12}}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\overrightarrow{e_3}d_2\overrightarrow{k_{12}}\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\overrightarrow{e_3}d_4\overrightarrow{k_{12}}\right)\overrightarrow{e_4}\right].$$

Найдем

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\gamma} = B^2_{321}\gamma^1 + B^2_{322}\gamma^2 + B^2_{324}\gamma^4\,.$$

Следовательно, геометрический смысл равенство (3.2.5) заключается в том, что векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Таким образом, доказана

Теорема 3.2.1. а) Линия l, принадлежащая распределению $\Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f^2_3,\, \Delta_{(123)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.2.4);

б) линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f^2_3,\, \Delta_{(124)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.2.5).

Рассмотрим линию β, принадлежащую трехмерному распределению

$$\Delta_{(234)} = \left(X, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right).$$

Ее касательный вектор $\vec{\beta}$ имеет вид:

$\vec{\beta} = \beta^2\overrightarrow{e_2} + \beta^3\overrightarrow{e_3} + \beta^4\overrightarrow{e_4}$. Найдем касательный вектор $\overrightarrow{\overline{\beta}}$ линии $\overline{\beta} = f^2_3(\beta)$.

Его ищем в виде: $\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^2\overrightarrow{m_2} + \beta^3\overrightarrow{m_3} + \beta^4\overrightarrow{m_4}$.

Учитывая формул (3.2.3) имеем:

$$\overline{\overline{\beta}} = \beta^2\left(m_2^3\overrightarrow{e_3} + m_2^4\overrightarrow{e_4}\right) + \beta^3\left(m_3^3\overrightarrow{e_3} + m_3^4\overrightarrow{e_4}\right) + \beta^4\left(m_4^2\overrightarrow{e_2} + m_4^3\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$$

или

$$\overline{\overline{\beta}} = \left(\beta^4 m_4^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\beta^2 m_2^3 + \beta^3 m_3^3 + \beta^4 m_4^3\right)\overrightarrow{e_3} + \left(\beta^2 m_2^4 + \beta^3 m_3^4 + \beta^4\right)\overrightarrow{e_4} \ .$$

Очевидно, что $\overrightarrow{\beta}, \overline{\overline{\beta}} \in \Delta_{(234)}$. Следовательно, любая линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(234)}\right)$

Рассмотрим линию α, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(134)} = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$. Ее касательный вектор $\overrightarrow{\alpha}$ имеет вид:

$$\overrightarrow{\alpha} = \alpha^1\overrightarrow{e_1} + \alpha^3\overrightarrow{e_3} + \alpha^4\overrightarrow{e_4} \ .$$

Найдем касательный вектор $\overline{\overline{\alpha}}$ линии $\overline{\alpha} = f_3^2(\beta)$.

Его ищем в виде: $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha^1\overrightarrow{m_1} + \alpha^3\overrightarrow{m_3} + \alpha^4\overrightarrow{m_4}$.

Учитывая формул (3.2.3) имеем:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha^1\left(\overrightarrow{e_1} + m_1^2\overrightarrow{e_2} + m_1^3\overrightarrow{e_3} + m_1^4\overrightarrow{e_4}\right) + \alpha^3\left(m_3^3\overrightarrow{e_3} + m_3^4\overrightarrow{e_4}\right) + \alpha^4\left(m_4^2\overrightarrow{e_2} + m_4^3\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$$

или

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha^1\overrightarrow{e_1} + \left(\alpha^1 m_1^2 + \alpha^4 m_4^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\alpha^1 m_1^3 + \alpha^3 m_3^3 + \alpha^4 m_4^3\right)\overrightarrow{e_3} + \left(\alpha^1 m_1^4 + \alpha^3 m_3^4 + \alpha^4\right)\overrightarrow{e_4} \ .$$

Из условия $\overrightarrow{\alpha}, \overline{\overline{\alpha}} \in \Delta_{(134)}$ имеем:

$$\alpha^1 m_1^2 + \alpha^4 m_4^2 = 0 \ .$$

Учитывая формул (3.2.3) отсюда имеем:

$$\alpha^1\left(-\frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\right) + \alpha^4\left(-\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\right) = 0$$

или

$$\Lambda_{31}^{\,2}\alpha^1 + \Lambda_{34}^{\,2}\alpha^4 = 0 \ . \qquad (3.2.6)$$

Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (3.2.6), то линия α , принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(134)}\right)$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.2.6). Равенство (3.2.6) можно переписать в виде:

$$\frac{\alpha^1}{\alpha^4} = -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{31}^2} \ , \tag{3.2.7}$$

где $-\Lambda_{34}^2 = \Lambda_{24}^3$ − третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$, $-\Lambda_{31}^2 = \Lambda_{21}^3$ − вторая кривизна линии ω^1 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Следовательно, справедлива

Теорема 3.2.2. Линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_3^2, \Delta_{(134)}\right)$ тогда и только тогда, когда первая и четвертая координаты касательного вектора этой линии удовлетворяют условию (3.2.7).

§3.3 Существование квазидвойной линий пары $\left(f_1^4, \Delta_{(ijk)}\right)$

Пусть сеть E_4 является циклической сетью Френе. Ее обозначим через $\tilde{\Sigma}_4$. Псевдофокус $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$ определяется радиус-вектором:

$$F_1^4 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^1}\vec{e}_1. \qquad (3.3.1)$$

Когда точка X движется в области $\Omega \subset E_4$, точка F_1^4 описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Определяется частичное отображение f_1^4: $\Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f_1^4(X) = F_1^4$.

Присоединим к области Ω_1^4 подвижной репер $R' = \left(F_1^4, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right)$, где векторы $\vec{b}_i$ определены [66] в следующем виде:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{12}^4}\vec{e}_i;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i + \vec{e}_3;$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_i + \vec{e}_4.$$

Так как заданная сеть E_4 является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4}\vec{e}_2;$$

$$\vec{b}_2 = \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{12}^4}\vec{e}_4;$$

$$\vec{b}_3 = \frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4 + \vec{e}_3;$$

$$\vec{b}_4 = \frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2. \qquad (3.3.2)$$

В общем случае эти векторы линейно независимы.

Линий ω^i, $(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X, $g(X)$ пересекаются, либо параллельны [7].

Линия ℓ называется двойной линией пары (g, Δ_p), если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Введем определения: 1) линии ω^i, $g(\omega^i) = \omega^i$ в пространстве E_4 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках X и $g(X)$ принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) линия ℓ называется квазидвойной линией пары (g, Δ_p), если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Рассмотрим линию ℓ, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Её касательный вектор имеет вид:

$$\vec{\ell} = \ell^1\vec{e}_1 + \ell^2\vec{e}_2 + \ell^3\vec{e}_3.$$

Найдем касательный вектор $\vec{\overline{\ell}}$ линии $\overline{\ell} = f^4_1(\ell)$. Его ищем в виде: $\vec{\overline{\ell}} = \ell^1\vec{b}_1 + \ell^2\vec{b}_2 + \ell^3\vec{b}_3$. Учитывая формул (3.3.2) отсюда имеем:

$$\vec{\overline{\ell}} = \ell^1\left(b^1_1\vec{e}_1 + b^2_1\vec{e}_2\right) + \ell^2\left(b^1_2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b^4_2\vec{e}_4\right) + \ell^3\left(b^1_3\vec{e}_1 + b^2_3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b^4_3\vec{e}_4\right)$$

или

$$\vec{\overline{\ell}} = \left(\ell^1\vec{b}^1_1 + \ell^2\vec{b}^1_2 + \ell^3\vec{b}^1_3\right)\vec{e}_1 + \left(\ell^1\vec{b}^2_1 + \ell^2 + \ell^3\vec{b}^2_3\right)\vec{e}_2 + \ell^3\vec{e}_3 + \left(\ell^2\vec{b}^4_2 + \ell^3\vec{b}^4_3\right)\vec{e}_4,$$

где b_i^j – i-тая координата вектора $\vec{b}_i$.

Из условия $\vec{e}, \vec{\bar{e}} \in \Delta_{(123)}$ получим:

$$\ell^2 b_2^4 + \ell^3 b_3^4 = 0 .$$

Учитывая формул (3.3.2) отсюда имеем:

$$\ell^2 \left(-\frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4} \right) + \ell^3 \left(-\frac{\Lambda_{13}^4}{\Lambda_{14}^4} \right) = 0$$

или

$$\Lambda_{12}^4 \ell^2 + \Lambda_{13}^4 \ell^3 = 0, \tag{3.3.3}$$

где Λ_{12}^4 – третья кривизна линии ω^2 сети $\widetilde{\Sigma}_4$, $-\Lambda_{13}^4 = \Lambda_{43}^1$ – вторая кривизна линии ω^3 сети $\widetilde{\Sigma}_4$.

Верно и обратное, т.е. если имеет место условие (3.3.3), то линия $\ell \in \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(123)}\right)$.

Рассмотрим линию β, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(124)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4\right)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\beta} = \beta^1 \vec{e}_1 + \beta^2 \vec{e}_2 + \beta^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\beta}}$ линии $\bar{\beta} = f_1^4(\beta)$. Его ищем в виде: $\vec{\bar{\beta}} = \beta^1 \vec{b}_1 + \beta^2 \vec{b}_2 + \beta^4 \vec{b}_4$. Учитывая формул (3.3.2) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\beta}} = \beta^1 \left(b_1^1 \vec{e}_1 + b_1^2 \vec{e}_2 \right) + \beta^2 \left(b_2^1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b_2^4 \vec{e}_2 \right) + \beta^4 \left(b_4^1 \vec{e}_1 + b_4^2 \vec{e}_2 \right)$$

или

$$\vec{\bar{\beta}} = \left(\beta^1 \vec{b}_1^1 + \beta^2 \vec{b}_2^1 + \beta^3 \vec{b}_4^1 \right) \vec{e}_1 + \left(\beta^1 \vec{b}_1^2 + \beta^2 + \beta^4 \vec{b}_4^2 \right) \vec{e}_2 + \beta^2 \vec{b}_2^4 \vec{e}_4 .$$

Очевидно, что $\vec{\beta}, \vec{\bar{\beta}} \in \Delta_{(124)}$. Следовательно, любая линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(124)}\right)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3.3.1. а) линии $\ell \in \Delta_{(123)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(123)}\right)$ тогда и только тогда, когда вторая и третья координаты её касательного вектора удовлетворяют условию (3.3.3);
б) любая линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_1^4, \Delta_{(124)}\right)$.

Рассмотрим линию γ принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(234)} = \left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$. Её касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + \gamma^4 \vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_1^4(\gamma)$. Он имеет вид: $\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2 \vec{b}_2 + \gamma^3 \vec{b}_3 + \gamma^4 \vec{b}_4$. Учитывая формул (3.3.2) отсюда получим:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2\left(b_2^1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + b_2^4 \vec{e}_4\right) + \gamma^3\left(b_3^1 \vec{e}_1 + b_3^2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b_3^4 \vec{e}_4\right) + \gamma^4\left(b_4^1 \vec{e}_1 + b_4^2 \vec{e}_2\right)$$

или

$$\vec{\bar{\gamma}} = \left(\gamma^2 \vec{b}_2^1 + \gamma^3 \vec{b}_3^1 + \gamma^4 \vec{b}_4^1\right)\vec{e}_1 + \left(\gamma^2 + \gamma^3 \vec{b}_3^2 + \gamma^4 \vec{b}_4^2\right)\vec{e}_2 + \gamma^3 \vec{e}_3 + \left(\gamma^2 b_2^4 + \gamma^3 b_3^4\right)\vec{e}_4 .$$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\bar{\gamma}} \in \Delta_{(234)}$ имеем:

$$\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 = 0 .$$

Учитывая формул (3.3.2) отсюда имеем:

$$\gamma^2 \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} + \gamma^3 \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} + \gamma^4 \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} = 0 .$$

или

$$B_{142}^4 \gamma^2 + B_{143}^4 \gamma^3 + B_{144}^4 \gamma^4 = 0 . \qquad (3.3.4)$$

Выясним геометрический смысл этого равенства. Рассмотрим вектор первой кривизны $\vec{k}_{14} = \Lambda_{44}^1 \vec{e}_1 = -\Lambda_{14}^4 \vec{e}_1$ линии ω^4 циклической сети $\tilde{\Sigma}_4$ Френе. Найдем векторов $d_2 \vec{k}_{14}$, $d_3 \vec{k}_{14}$, $d_4 \vec{k}_{14}$, где d_2, d_3, d_4 – символы дифференцирования вдоль линий $\omega^2, \omega^3, \omega^4$:

$$d_2\vec{k}_{14} = -B^4_{142}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\Lambda^4_{12}\vec{e}_4,$$
$$d_3\vec{k}_{14} = -B^4_{143}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{13}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{13}\vec{e}_4\right),$$
$$d_4\vec{k}_{14} = -B^4_{144}\vec{e}_1 - \Lambda^4_{14}\left(\Lambda^2_{14}\vec{e}_3 + \Lambda^4_{14}\vec{e}_4\right).$$

Определим вектор $\vec{t}$ координатами:

$$\vec{t} = \left(-\vec{e}_1 d_2\vec{k}_{14}\right)\vec{e}_2 + \left(-\vec{e}_1 d_3\vec{k}_{14}\right)\vec{e}_3 + \left(-\vec{e}_1 d_4\vec{k}_{14}\right).$$

Тогда имеем:

$$\vec{t} = B^4_{142}\vec{e}_2 + B^4_{143}\vec{e}_3 + B^4_{144}\vec{e}_4.$$

Найдем

$$\vec{t}\vec{\gamma} = B^4_{142}\gamma^2 + B^4_{143}\gamma^3 + B^4_{144}\gamma^4.$$

Следовательно, геометрический смысл равенства (3.3.4) заключается в том, что векторы $\vec{t}$ и γ ортогональны.

Аналогично вышеизложенному рассмотрим линию α, принадлежащую распределению $\Delta_{(134)} = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$ с касательным вектором $\vec{\alpha} = \alpha^1\vec{e}_1 + \alpha^3\vec{e}_3 + \alpha^4\vec{e}_4$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{\alpha}}$ линии $\overline{\alpha} = f^4_1(\alpha)$: $\vec{\alpha} = \alpha^1\vec{b}_1 + \alpha^3\vec{b}_3 + \alpha^4\vec{b}_4$.

Учитывая формул (3.3.2) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{\alpha}} = \alpha^1\left(b^1_1\vec{e}_1 + b^2_1\vec{e}_2\right) + \alpha^3\left(b^1_3\vec{e}_1 + b^2_3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + b^4_3\vec{e}_4\right) + \alpha^4\left(b^1_4\vec{e}_1 + b^2_4\vec{e}_2\right)$$

или

$$\vec{\bar{\alpha}} = \left(\alpha^1\vec{b}^1_1 + \alpha^3\vec{b}^1_3 + \alpha^4\vec{b}^1_4\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha^1 b^2_1 + \alpha^3\vec{b}^2_3 + \alpha^4\vec{b}^2_4\right)\vec{e}_2 + \alpha^3\vec{e}_3 + \alpha^4\left(\alpha^3 b^4_3\right)\vec{e}_4,$$

где b^j_i – j-тая координата вектора $\vec{b}_i$.

Из условия $\vec{\alpha}, \vec{\bar{\alpha}} \in \Delta_{(134)}$ имеем:

$$\alpha^1 b^2_1 + \alpha^3 b^2_3 + \alpha^4 b^2_4 = 0.$$

Учитывая формул (3.3.2) отсюда получим:

$$\alpha^1\left(-\frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^4_{14}}\right) + \alpha^3\left(-\frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^4_{14}}\right) + \alpha^4\left(-\frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}}\right) = 0$$

или

$$\Lambda^{2}_{11}\alpha^{1}+\Lambda^{2}_{13}\alpha^{3}+\Lambda^{2}_{14}\alpha^{4}=0\ . \qquad (3.3.5)$$

Верно и обратное, т.е. если имеет место условие (3.3.5), то линия $\alpha\in\Delta_{(134)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f^{4}_{1},\Delta_{(134)}\right)$.

Выясним геометрический смысл равенства (3.3.5). Рассмотрим векторов:

$$d_1\vec{e}_1=\Lambda^{2}_{11}\vec{e}_2\,,\quad d_3\vec{e}_1=\Lambda^{2}_{13}\vec{e}_2+\Lambda^{4}_{13}\vec{e}_4\,,\quad d_4\vec{e}_1=\Lambda^{2}_{14}\vec{e}_2+\Lambda^{2}_{14}\vec{e}_4\,. \qquad (3.3.6)$$

Определим вектор $\vec{s}$ с координатами:

$$\vec{s}=\left(np_{\vec{e}_2}d_1\vec{e}_1\right)\vec{e}_1+\left(np_{\vec{e}_2}d_3\vec{e}_1\right)\vec{e}_3+\left(np_{\vec{e}_2}d_4\vec{e}_1\right)\vec{e}_4$$

или

$$\vec{s}=\Lambda^{2}_{11}\vec{e}_1+\Lambda^{2}_{13}\vec{e}_3+\Lambda^{2}_{14}\vec{e}_4,$$

где Λ^{2}_{11} – первая кривизна линии ω^{1}, Λ^{2}_{13} – третья кривизна линии ω^{3}, Λ^{2}_{14} – вторая кривизна линии ω^{4} сети $\widetilde{\Sigma}_{4}$.

Тогда имеем:

$$\vec{s}\cdot\vec{\alpha}=\Lambda^{2}_{11}\alpha^{1}+\Lambda^{2}_{13}\alpha^{3}+\Lambda^{2}_{14}\alpha^{4}\,,$$

$$\vec{s}\cdot\vec{\alpha}=\Lambda^{2}_{11}\alpha^{1}+\Lambda^{2}_{13}\alpha^{3}+\Lambda^{2}_{14}\alpha^{4}\,.$$

Следовательно, геометрический смысл равенства (3.3.5) заключается в том, что векторы $\vec{s}$ и $\vec{\alpha}$ ортогональны.

Таким образом, доказана

Теорема 3.3.2. а) Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f^{4}_{1},\Delta_{(234)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство (3.3.4);

б) линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f^{4}_{1},\Delta_{(134)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место (3.3.5).

§3.4 О существовании квазидвойной линий пары $\left(f_2^1, \Delta_{(ijk)}\right)$

Рассмотрим равенство:

$$\vec{F}_2^1 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{21}^1}\vec{e}_2, \tag{3.4.1}$$

которое определяет псевдофокус $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ на касательной прямой $(X, \vec{e}_2)$ к линии заданной циклической сети Френе Σ_4. Когда точка X движется в области $\Omega \subset E_4$, точка $F_2^1 \in (X, \vec{e}_2)$ опишет свою область. $\Omega_2^1 \subset E_4$. Получаем частичное отображение $f_2^1 : \Omega \to \Omega_2^1$ такое, что $f_2^1(X) = F_2^1$.

К области Ω_2^1 присоединим подвижной репер $\Re' = \left(F_2^1\, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\right)$, где векторы $\vec{a}_i$ определяются следующим образом [66]:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{211}^{\ 1}}{\left(\Lambda_{21}^{\ 1}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{31}^{\ i}}{\Lambda_{32}^{\ 2}}\vec{e}_k\,;$$

$$\vec{a}_2 = \left[1 + \frac{B_{212}^{\ 1}}{\left(\Lambda_{21}^{\ 1}\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{22}^{\ k}}{\Lambda_{21}^{\ 1}}\vec{e}_k\,;$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_3 + \frac{B_{213}^{\ 1}}{\left(\Lambda_{21}^{\ 1}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{23}^{\ k}}{\Lambda_{21}^{\ 1}}\vec{e}_k\,;$$

$$\vec{a}_4 = \vec{e}_4 + \frac{B_{214}^{\ 1}}{\left(\Lambda_{21}^{\ 1}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{24}^{\ k}}{\Lambda_{21}^{\ 1}}\vec{e}_k\,.$$

Тогда имеем:

$$dF_2^1 = \omega^1\vec{a}_1 + \omega^2\vec{a}_2 + \omega^3\vec{a}_3 + \omega^4\vec{a}_4\,.$$

Так как сеть Σ_4 является циклической сетью Френе, векторы получим: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ имеют вид:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \frac{B_{211}^{\ 1}}{\left(\Lambda_{21}^{\ 1}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{21}^{\ 3}}{\Lambda_{22}^{\ 2}}\vec{e}_3\,;$$

$$\vec{a}_2 = \left[1 + \frac{B_{212}^{\ 1}}{\left(\Lambda_{21}^{\ 1}\right)^2}\right]\vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{22}^{\ 3}}{\Lambda_{21}^{\ 1}}\vec{e}_3\,; \tag{3.4.2}$$

$$\vec{a}_3 = -\frac{\Lambda^1_{23}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_1 + \frac{B^{\ 1}_{213}}{\left(\Lambda^{\ 1}_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3;$$

$$\vec{a}_4 = -\frac{\Lambda^1_{24}}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_1 + \frac{B^{\ 1}_{214}}{\left(\Lambda^{\ 1}_{21}\right)^2}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^{\ 3}_{24}}{\Lambda^{\ 1}_{21}}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение является невырожденным.

Линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним, взятые в соответствующих точках $X,\ g(X)$, пересекаются, либо параллельны [7].

Линия l называется двойной линией пары $(g,\ \Delta_p)$, если она является двойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p [7].

Введем определения: 1) линии $\omega^i, g(\omega^i) = \overline{\omega^i}$ в E_4 называются квазидвойными линиями частичного отображения g, если касательные прямые к ним взятые в соответствующих точках $X,\ g(X)$, принадлежат одному и тому же трехмерному подпространству пространства E_4;

2) линия l называется квазидвойной линией пары $(g,\ \Delta_p)$, если она является квазидвойной линией отображения g и принадлежит распределению Δ_p.

Рассмотрим линию l, принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(123)} = \left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ с касательным вектором $\overline{l} = l^1\overrightarrow{e_1} + l^2\overrightarrow{e_2} + l^3\overrightarrow{e_3}$. Найдем касательный вектор $\overrightarrow{\overline{l}}$ линии $f_2^1(l) = \overline{l}$. Его ищем в виде:

$$\overrightarrow{\overline{l}} = l^1\overrightarrow{a_1} + l^2\overrightarrow{a_2} + l^3\overrightarrow{a_3}.$$

Учитывая формул (3.4.2) отсюда имеем:

$$\vec{\overline{l}} = l^1\left(\vec{e}_1 + a_1^2\vec{e}_2 + a_1^3\vec{e}_3\right) + l^2\left(a_2^2\vec{e}_2 + a_2^3\vec{e}_3\right) + l^3\left(a_3^3\vec{e}_1 + a_3^2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)$$

или

$$\vec{\vec{l}} = \left(l^1 + l^3 a_3^1\right)\vec{e}_1 + \left(l^1 a_1^2 + l^2 a_2^2 + l^3 a_3^3\right)\vec{e}_2 + \left(l^1 a_1^3 + l^2 a_2^3 + l^3\right)\vec{e}_3,$$

где a_i^j – j-тая координата вектора $\vec{a}_i$.

Очевидно, что $\vec{l}, \vec{\vec{l}} \in \Delta_{(123)}$. Следовательно, любая линия $l \in \Delta_{(123)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(123)}\right)$.

Пусть линия γ, принадлежит распределению $\Delta_{(124)}$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{e}_1 + \gamma^2 \vec{e}_2 + \gamma^4 \vec{e}_4$.

Найдем касательный вектор $\vec{\vec{\gamma}}$ линии $\bar{\gamma} = f_2^1(\gamma)$. Он имеет вид:

$$\vec{\vec{\gamma}} = \gamma^1 \overrightarrow{a_1} + \gamma^2 \overrightarrow{a_2} + \gamma^4 \overrightarrow{a_4}.$$

Учитывая формул (3.4.2) отсюда получим:

$$\vec{\vec{\gamma}} = \gamma^1\left(\overrightarrow{e_1} + a_1^2 \overrightarrow{e_2} + a_1^3 \overrightarrow{e_3}\right) + \gamma^2\left(a_2^2 \overrightarrow{e_2} + a_2^3 \overrightarrow{e_3}\right) + \gamma^4\left(a_4^1 \overrightarrow{e_1} + a_4^2 \overrightarrow{e_2} + a_4^3 \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$$

или

$$\vec{\vec{\gamma}} = \left(\gamma^1 + \gamma^4 a_4^1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\gamma^1 a_1^2 + \gamma^2 a_2^2 + \gamma^4 a_4^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\gamma^1 a_1^3 + \gamma^2 a_2^3 + \gamma^4 a_4^3\right)\overrightarrow{e_3} + \gamma^4 \overrightarrow{e_4}.$$

Из условия $\vec{\gamma}, \vec{\vec{\gamma}} \in \Delta_{(124)}$ имеем:

$$\gamma^1 a_1^3 + \gamma^2 a_2^3 + \gamma^4 a_4^3 = 0.$$

Учитывая формул (3.4.2) отсюда получим:

$$\gamma^1\left(-\frac{\Lambda_{21}^3}{\Lambda_{21}^2}\right) + \gamma^2\left(-\frac{\Lambda_{22}^3}{\Lambda_{21}^1}\right) + \gamma^4\left(-\frac{\Lambda_{24}^3}{\Lambda_{21}^2}\right) = 0$$

или

$$\Lambda_{21}^3 \gamma^1 + \Lambda_{22}^3 \gamma^2 + \Lambda_{24}^3 \gamma^4 = 0. \qquad (3.4.3)$$

Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (3.4.3) то линия $\gamma \in \Delta_{(124)}$ является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(124)}\right)$.

Найдем геометрический смысл этого равенства.

Рассмотрим векторов $d_1\vec{e}_2$, $d_1\vec{e}_2$, $d_4\vec{e}_2$ и определим следующий вектор $\vec{\theta}$ с координатами:

$$\vec{\theta} = (\vec{e}_3 d_1 \vec{e}_2)\vec{e}_1 + (\vec{e}_3 d_2 \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_3 d_4 \vec{e}_2)\vec{e}_4 .$$

Тогда имеем:

$$\vec{\theta} \cdot \vec{\gamma} = \Lambda^{3}_{21}\gamma^1 + \Lambda^{3}_{22}\gamma^2 + \Lambda^{3}_{24}\gamma^4 . \qquad (3.4.4)$$

Следовательно, геометрический смысл равенство (3.4.3) заключается в том, что векторы $\vec{\theta}$ и $\vec{\gamma}$ ортогональны.

Таким образом, доказана

Теорема 3.4.1. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(124)}$, является квазидвойной линией пары $(f_2^1, \Delta_{(124)})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.4.3), геометрический смысл которого заключается в (3.4.4).

Теперь рассмотрим линию β, принадлежащую распределению $\Delta_{(234)} = (X, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$. Ее касательный вектор имеет вид: $\overrightarrow{\beta} = \beta^2\overrightarrow{e_2} + \beta^3\overrightarrow{e_3} + \beta^4\overrightarrow{e_4}$. Найдем касательный вектор линии $\overline{\beta} = f_2^1(\beta)$.
Его ищем в виде: $\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^2\overrightarrow{a_2} + \beta^3\overrightarrow{a_3} + \beta^4\overrightarrow{a_4}$.

Учитывая формул (3.4.2) отсюда получим:

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \beta^2\left(a_2^2\overrightarrow{e_2} + a_2^3\overrightarrow{e_3}\right) + \beta^3\left(a_3^1\overrightarrow{e_1} + a_3^2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\right) + \beta^4\left(a_4^1\overrightarrow{e_1} + a_4^2\overrightarrow{e_2} + a_4^3\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$$

или

$$\overrightarrow{\overline{\beta}} = \left(\beta^3 a_3^1 + \beta^4 a_4^1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\beta^2 a_2^2 + \beta^3 a_3^2 + \beta^4 a_4^2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\beta^2 a_2^3 + \beta^3 + \beta^4 a_4^3\right)\overrightarrow{e_3} + \beta^4\overrightarrow{e_4} .$$

Из условия $\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\overline{\beta}} \in \Delta_{(234)}$ имеем:

$$\beta^3 a_3^1 + \beta^4 a_4^1 = 0 .$$

Учитывая формулы (3.4.2) отсюда получим:

$$\Lambda^1_{23}\beta^3 + \Lambda^1_{24}\beta^4 = 0$$

или

$$\frac{\beta^3}{\beta^4} = -\frac{\Lambda^1_{24}}{\Lambda^1_{23}} . \qquad (3.4.5)$$

где $-\Lambda_{24}^{1}=\Lambda_{14}^{2}$ – вторая кривизна линии ω^4 сети $\widetilde{\Sigma}_4$, $-\Lambda_{23}^{1}=\Lambda_{13}^{2}$ – третья кривизна линии ω^4 сети $\widetilde{\Sigma}_4$. Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (3.4.5), то линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1,\, \Delta_{(234)}\right)$.

Рассмотрим линию α , принадлежащую трехмерному распределению $\Delta_{(134)}=\left(X,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\right)$ с касательным вектором

$$\overrightarrow{\alpha}=\alpha^1\overrightarrow{e_1}+\alpha^3\overrightarrow{e_3}+\alpha^4\overrightarrow{e_4}\ .$$

Ищем касательный вектор $\overset{\Rightarrow}{\alpha}$ линии $\overline{\alpha}=f_2^1(\alpha)$.

Он имеет вид: $\overset{\Rightarrow}{\alpha}=\alpha^1\overrightarrow{a_1}+\alpha^3\overrightarrow{a_3}+\alpha^4\overrightarrow{a_4}$.

Учитывая формул (3.4.2) отсюда получим:

$$\overset{\Rightarrow}{\alpha}=\alpha^1\left(\overrightarrow{e_1}+a_1^2\overrightarrow{e_2}+a_1^3\overrightarrow{e_3}\right)+\alpha^3\left(a_3^1\overrightarrow{e_1}+a_3^2\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}\right)+$$
$$+\alpha^4\left(a_4^1\overrightarrow{e_1}+a_4^2\overrightarrow{e_2}+a_4^3\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_4}\right)$$

или

$$\overset{\Rightarrow}{\alpha}=\left(\alpha^1+\alpha^3a_3^1+\alpha^4a_4^1\right)\overrightarrow{e_1}+\left(\alpha^1a_1^2+\alpha^3a_3^2+\alpha^4a_4^2\right)\overrightarrow{e_2}+$$
$$+\left(\alpha^1a_1^3+\alpha^3+\alpha^4a_4^2\right)\overrightarrow{e_3}+\left(\alpha^1a_1^3+\alpha^3+\alpha^4a_4^3\right)\overrightarrow{e_3}+\alpha^4\,\overrightarrow{e_4}.$$

Из условия $\overrightarrow{\alpha}\,,\overset{\Rightarrow}{\alpha}\,,\overrightarrow{XF_2}\in\Delta_{(134)}$ имеем:

$$\alpha^1a_1^2+\alpha^1a_3^2+\alpha^4a_4^2=0\ .$$

Учитывая формул (3.4.2) отсюда получим:

$$\alpha^1\frac{B^1_{211}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}+\alpha^3\frac{B^1_{213}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}+\alpha^4\frac{B^1_{214}}{\left(\Lambda^1_{21}\right)^2}=0$$

или

$$B^1_{211}\alpha^1+B^1_{213}\alpha^3+B^1_{214}\alpha^4=0\ . \qquad (3.4.6)$$

Найдем геометрический смысл этого равенства. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{k_{11}} = \Lambda_{11}^2 \overrightarrow{e_2} = -\Lambda_{21}^1 \overrightarrow{e_2}$ первой кривизны линии ω^1 циклической сети $\widetilde{\Sigma}_4$ Френе. Найдем векторы $d_1\overrightarrow{k_{11}}$, $d_3\overrightarrow{k_{11}}$, $d_4\overrightarrow{k_{11}}$ где $d_i -$ символ дифференцирования вдоль направлений $\vec{e}_i$.

Тогда имеем:

$$d_1\overrightarrow{k_{11}} = -B_{211}^1 \overrightarrow{e_2} - \Lambda_{21}^1 \left(\Lambda_{21}^1 \overrightarrow{e_1} + \Lambda_{21}^3 \overrightarrow{e_3}\right);$$

$$d_3\overrightarrow{k_{11}} = -B_{213}^1 \overrightarrow{e_2} - \Lambda_{21}^1 \Lambda_{23}^1 \overrightarrow{e_1};$$

$$d_4\overrightarrow{k_{12}} = -B_{214}^1 \overrightarrow{e_2} - \Lambda_{21}^1 \left(\Lambda_{24}^1 \overrightarrow{e_1} + \Lambda_{24}^3 \overrightarrow{e_3}\right).$$

Отсюда найдем:

$$B_{211}^1 = -\overrightarrow{e_2} d_1\overrightarrow{k_{11}}\ ; \quad B_{213}^1 = -\overrightarrow{e_2} d_3\overrightarrow{k_{11}}\ ; \quad B_{214}^1 = -\overrightarrow{e_2} d_4\overrightarrow{k_{11}}\ .$$

Определим вектор $\overrightarrow{\xi}$ с координатами:

$$\vec{\xi} = B_{211}^1 \vec{e}_1 + B_{213}^1 \vec{e}_3 + B_{214}^1 \vec{e}_4 .$$

Тогда получим:

$$\vec{\xi} \cdot \overrightarrow{\alpha} = B_{211}^1 \alpha^1 + B_{213}^1 \alpha^3 + B_{214}^1 \alpha^4 .$$

Следовательно, геометрический смысл равенство (3.4.6) заключается в том, что векторы $\vec{\xi}$ и $\overrightarrow{\alpha}$ ортогональны.

Верно и обратное, т.е. если имеет место равенство (3.4.6), то линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(134)}\right)$.

Таким образом, доказана

Теорема 3.4.2. 1) Линия β, принадлежащая распределению $\Delta_{(234)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(234)}\right)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.4.5);

2) линия α, принадлежащая распределению $\Delta_{(134)}$, является квазидвойной линией пары $\left(f_2^1, \Delta_{(134)}\right)$ тогда и только тогда, когда имеет место условие (3.4.6).

Заключение по главе 3

В третьей главе исследовано существование квазидвойных линий частичных отображений f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(\kappa\ell)}\right)$.

1. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись квазидвойными линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, где $\Delta_{(ik\ell)}$ – трехмерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell$;

2. Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$;

3. Найдена зависимость вырожденности частичного отображения f_i^j от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары $\left(f_i^j, \Delta_{(ke)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ike)}\right)\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассмотрены частичное отображения f_i^j: $\Omega \to \Omega_i^j$ евклидова пространства E_4, порождаемые заданным семейством гладких линий. Исследована роблема существования двойных (квазидвойных) линий частичного отображения f_i^j и пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Получены следующие результаты:

– Доказаны необходимые и достаточные условия вырожденности частичных отображений f_i^j: $\Omega \to \Omega_i^j$ четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемых заданным семействам гладких линий;

– Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись двойными (квазидвойными) линиями частичного отображения f_i^j четырехмерного евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семействам гладких линий;

– Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линии ω^i циклической сети Френе являлись: а) двойными линиями пар $(f, \Delta_{(k\ell)})$, где $\Delta_{(k\ell)} = \left(X, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell\right)$ – двумерное распределение, определяемое векторными полями $\vec{e}_k, \vec{e}_\ell$; б) квазидвойными линиями пар $\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)$, где $\Delta_{(ik\ell)}$ – трехмерное распределение, определяемое векторными полями $\left(\vec{e}_i, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell\right)$;

– Доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_{(k\ell)}$ $\left(\Delta_{(ik\ell)}\right)$ являлась двойной (квазидвойной) линией пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$;

– Найдена зависимость вырожденности частичного отображения f_i^j от того, что какие линии циклической сети Френе являются двойными (квазидвойными) линиями пары $\left(f_i^j, \Delta_{(k\ell)}\right)$ $\left(\left(f_i^j, \Delta_{(ik\ell)}\right)\right)$.

Список использованных источников

1. **Алексеева, Л.И.** К геометрии отображений трехмерных евклидовых пространств [Текст] / Л.И. Алексеева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр. – Калининград, 1988. – Вып.19. – С. 10-14.
2. **Алиев, Н.** О некоторых отображениях поверхностей евклидовых пространств [Текст] / Н. Алиев // Материалы III конгресса всемирного математического общества тюркоязычных стран. КазНУ им.Аль-Фараби. – Алматы, 2009. – С. 68.
3. **Базылев, В.Т.** О многомерных сетях и преобразованиях [Текст] / В.Т. Базылев // Итоги науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 138-164.
4. **Базылев, В.Т.** К геометрии плоских многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.243. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1965. – С. 29-37.
5. **Базылев, В.Т.** О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т. Базылев // Литовский математический сборник, 1966.VI. – №4. – С. 475-491.
6. **Базылев, В.Т.** Об одном аддитивном представлении тензора Риччи *p*-поверхности евклидова пространства [Текст] / В.Т. Базылев // Сибирский математический журнал, Т.3. – Москва, 1966. – С. 499-511.
7. **Базылев, В.Т.** О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Изв. вузов. Математика, Т.9. – Москва, 1967. – С. 3-11.
8. **Базылев, В.Т.** К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространств [Текст] / В.Т. Базылев // В кн: III Межвузовская конференция по проблемам геометрии. Тезисы докладов. – Казань: Казанский университет, 1967. – С. 8.

9. **Базылев, В.Т.** Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.1., № 374. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. – С. 28-40.

10. **Базылев, В.Т.** К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых *n*-пространства [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки. Т.1. №374. – Москва: МГПИ им. В.И.Ленина, 1970. – С. 41-51.

11. **Базылев, В.Т.** Сети на многообразиях [Текст] / В.Т. Базылев // Труды геометрического семинара. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1974. – Т.6. – С. 189-205.

12. **Базылев, В.Т.** Об одном замечательном классе сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Проблемы геометрии. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1975. – Т.7. – С. 105-116.

13. **Базылев, В.Т.** О конструктивных способах задания многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылев // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии – Вильнюс, 1975. – С. 21-22.

14. **Базылев, В.Т.** К геометрии отображений гладких многообразий [Текст] / В.Т. Базылев // Тезисы докладов VI Прибалтийской геометрической конференции. – Таллин, 1984. – С. 18.

15. **Базылев, В.Т.** Многомерные сети двойных линий [Текст] / В.Т. Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.6. – Москва, 1975. – С. 19-25.

16. **Борбоева, Г.М.** Характеристические линии отображения поверхностей евклидово трехмерного пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук, №5. – Ош, 2002. – С. 137-142.

17. **Борбоева, Г.М.** Об одном отображении двумерных поверхностей трехмерного евклидово пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник ОшГУ: Серия физ.-мат.наук, №5. – Ош, 2002. – С. 143-149.

18. **Борбоева, Г.М.** Об одном отображении двумерных поверхностей евклидова четырехмерного пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Наука.

Образование. Техника. Международный научный журнал кыргызско-узбекского университета, №1. – Ош, 2007.– С. 65-70.

19. **Борбоева, Г.М.** К геометрии отображений трехмерных поверхностей четырехмерного евклидова пространства [Текст] / Г.М. Борбоева // Вестник КазНУ им.Аль-Фараби, серия математика, №2 (53). – Шымкент, 2007. – С. 16-21.

20. **Борбоева, Г.М.** К геометрии отображений гиперповерхностей евклидова пространства [Текст] / Г.М. Борбоева, Г. Матиева // Вестник ОшГУ: Серия пед.-психолог.наук, №1. – Ош, 2008. – С. 145-149.

21. **Борбоева, Г.М.** Необходимое и достаточное условие геодезичности линий образа данной сети в отображении гиперповерхностей евклидова пространства [Текст] / Г.М. Борбоева, Г. Матиева // Вестник ОшГУ: Серия пед.-психолог. наук, №1. – Ош, 2008. – С. 149-152.

22. **Борубаев, А.А.** Равномерные пространства [Текст] / А.А. Борубаев, А.А. Чекеев // Бишкек, 2003. – 245с.

23. **Грачева, В.И.** О некоторых случаях дифференцируемых отображений евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Изв. вузов. Математика, № 8 (111). – Москва, 1970. С. 22-30.

24. **Грачева, В.И.** К вопросу о K_{af}– линеаризирующих прямых и плоскостях дифференцируемых отображений евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Известия вузов: Математика, №5. – Москва, 1978. – С. 19-31.

25. **Грачева, В.И.** К вопросу о дифференцируемых отображениях евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Труды Международного конгресса ассоциации «Женщины – математики». – Вып.3. – Нижний Новгород: ННГУ, 1994. – С. 11-15.

26. **Грачева, В.И.** К вопросу о свойствах K_{af}–линеаризующего соответствия прямых при дифференцируемых отображениях евклидовых пространств [Текст] / В.И. Грачева // Труды III Международной конференции

женщин – математиков. Вып.2. – Нижний Новгород: ННГУ, 1996. – С. 99-105.

27. **Дулалаева, Т.А.** О некоторых свойствах двойных линий пары гиперраспределений [Текст] / Т.А. Дулалаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Сборник научных трудов Калининградского госуниверситета. Вып.15. – Калининград, 1984. – С. 48-53.

28. **Дулалаева, Т.А.** К геометрии пары гиперраспределений в проективном пространстве P_n [Текст] / Т.А. Дулалаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Сборник научных трудов Калининградского госуниверситета, вып.12. – Калининград, 1998. – С. 23-26.

29. **Евтушик, Л.Е.** Дифференциально геометрические структуры на многообразиях [Текст] / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Проблемы геометрии, Т.9. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1979. – С. 7-234.

30. **Есин, В.А.** К геометрии сетей на поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Геометрия погруженных многообразий. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1980. – С. 29-32.

31. **Есин, В.А.** О сопряженных и ортогональных сетях на поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12. – Калининград: Калининградский государственный университет, 1981. – С. 27-30.

32. **Есин, В.А.** О поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Геометрия погруженных многообразий. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1981. – С. 40-44.

33. **Казанова, Р.О.** гармоническом полюсе [Текст] / Р. Казанова //Реферативный журнал. Математика, №5. – Москва, 1956. – С. 104.

34. **Казнина, О.В.** Об отображении $f:\left(V_p \subset E_n\right) \to \left(\overline{V_p} \subset E_{p+r}\right)$ в задаче Фубини-Чеха. [Текст] / О.В. Казнина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып.17. – Калининград: КГУ, 1986. – С. 40-42.

35. **Казнина, О.В.** Об отображении сетей в задаче Фубини-Чеха [Текст] / О.В. Казнина // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч. тр. – Вып.16. – Калининград, 1988. – С. 27-29.

36. **Казнина, О.В.** О свойствах проектирования Фубини-Чеха. [Текст] / О.В. Казнина // Труды III Международной конференции женщин-математиков. Воронеж, 29-мая – 2-июня 1995. – Вып.2. – Н. Новгород: ННГУ, 1996. – С. 120-124.

37. **Киреева, С.В.** О паре сетей [Текст] / С.В. Киреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. – Калининград: КГУ, 1983. – С. 26-31.

38. **Киреева, С.В.** О геометрии пары сетей [Текст] / С.В. Киреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып.16. – Калининград: КГУ, 1985. – С. 30-33.

39. **Кузьмин, М.К.** Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n [Текст] / М.К. Кузьмин // Проблемы геометрии. – Т.7. – Москва: ВИНИТИ, 1975. –С. 215-229.

40. **Курбанбаева, Н.Н.** О двойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №10-1. – Уфа, 2015. – С. 20-26.

41. **Курбанбаева, Н.Н.** О свойствах одного частичного отображения евклидова пространства E_4, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // СИМВОЛ НАУКИ. – №1-1(13). – Уфа, 2016. – С. 43-49.

42. **Курбанбаева, Н.Н.** Существование двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // IN-SITU. – №4. – Москва, 2015. – С. 14-20.

43. **Курбанбаева, Н.Н.** Об одной двойной линии частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 50-55.

44. **Курбанбаева, Н.Н.** К геометрии частичных отображений евклидова пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Н.Н. Курбанбаева // Вестник ОшГУ. – №4-4. – Ош, 2015. – С. 55-60.

45. **Курбанбаева, Н.Н.** О существовании двойных линий одного частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инноваци. – №1. – Бишкек, 2016. – С. 3-6.

46. **Курбанбаева, Н.Н.** О квазидвойных линиях частичного отображения евклидова пространства E_4 [Текст] / Н.Н. Курбанбаева // Наука, новые технологии и инновации. – №1. – Бишкек, 2016. – С. 7-10.

47. **Курбанбаева, Н.Н.** Существования квазидвойных линий частичного отображения евклидова пространство E_4 [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // СИМВОЛ НАУКИ. – №3-4. – Уфа, 2016. – С. 25-30.

48. **Курбанбаева, Н.Н.** Необходимое и достаточное условия существования квазидвойных линий частичного отображения пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. -№3-4. – Уфа, 2016. – С. 24-30.

49. **Курбанбаева, Н.Н.** О квазидвойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // CETERIS PARIBUS. – №4. – Москва, 2016. – С. 6-13.

50. **Курбанбаева, Н.Н.** Необходимое и достаточное условия существования квазидвойной линии одного частичного отображения пространства E_4 [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева // Инновационная наука. – №4-4. – Уфа, 2016. – С. 8-14.

51. **Лаптев, Г.Ф.** Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды Московского Математического Общества, №2. – Москва, 1953. – С. 275-382.

52. **Лаптев, Г.Ф.** Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды 3Oго Всесоюзного математического съезда. Т.2. – Москва: АН СССР, 1956. – С. 60-62.

53. **Лаптев, Г.Ф.** О распределениях m-мерных линейных элементов в n-мерно проективном пространстве [Текст] / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // №3683-71. Деп. – Москва: ВИНИТИ, 1971. – 136 с.

54. **Лаптев, Г.Ф.** Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I [Текст] / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Труды геом.семинара. – Т.3. – Москва, 1971. – С. 49-94.

55. **Лаптев, Г.Ф.** Распределения касательных элементов [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Труды геометрического семинара. – Т.3. – Москва, 1976.– С. 29-48.

56. **Локотков, Н.Н.** Об одном специальном отображении T: $T_x \to N_x$ [Текст] / Н.Н. Локотков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр. – Вып.14. – Калининград, 1983. – С. 49-53.

57. **Марюков, М.Н.** О некоторых частичных отображениях евклидовых n-пространств [Текст] / М.Н. Марюков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып. 16. – Калининград: КГУ, 1985. – С. 41-44.

58. **Марюков, М.Н.** О сетях, инвариантно связанных с парой p-распределений в E_n [Текст] / М.Н. Марюков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. -Вып. 17. – Калининград: КГУ, 1986. – С. 66-69.

59. **Матиева, Г.** Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Монография. – Ош, 2003. – С. 212-219.

60. **Матиева, Г.** Об одном дифференцируемом отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Вып. 29. – Бишкек: Илим, 2000. – С. 430-437.

61. **Матиева, Г.** Сеть, определенная образами заданных распределений в частичном отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: труды международной научной конференции, посвященной 70-летию академика М.И. Иманалиева. – Бишкек: КГНУ, 2001. – 307 С. /Вестник КГНУ: сер. 3. Естественно-технические науки, №6. – Бишкек, 2001.– С. 232-235.

62. **Матиева, Г.** Критерий минимальности образа распределения в частичном отображении [Текст] / Г. Матиева // Проблемы образования, науки и культуры в начале XXI века: труды международной научно–теоретической конференции. – Ош: Билим, Вестник ОшГУ. Серия физ.-мат.наук, №4. – Ош, 2001. – С. 164-168.

63. **Матиева, Г.** Необходимое и достаточное условия ортогональности образа сети Френе в частичном отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Вып. 31. – Бишкек: Илим, 2002. – С. 259-264.

64. **Матиева, Г.** Необходимое и достаточное условие геодезичности образа данной сети в отображении *p*-мерных поверхностей *n*-мерного евклидова пространствам [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева // Актуальные теории управления, топологии и операторных уравнений. Труды международной юбилейной научной конференции, посвященная 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета. – Бишкек, 2008. – С. 122-126.

65. **Папиева, Т.М.** Циклическая сеть Френе в четырехмерном евклидовом пространстве [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-

дифференциальным уравнениям, вып. 40. – Бишкек: Илим, 2009. – С. 294-298.

66. **Папиева, Т.М.** Геометрия частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 180-184.

67. **Папиева, Т.М.** Двойные линии частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 42. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 185-189.

68. **Папиева, Т.М.** Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 43. – Бишкек: Илим, 2010. – С. 199-203.

69. **Папиева, Т.М.** Циклическая сеть Френе в n- мерном евклидовом пространстве E_n [Текст] / Т.М. Папиева // Вестник КРСУ, том 10, № 9. – Бишкек, 2010. – С. 40-43.

70. **Папиева, Т.М.** Свойства частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т.М. Папиева // Вестник ОшГУ. № 2. вып. 1. – Ош, 2012. – С. 161-165.

71. **Рашевский, П.К.** Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] / П.К. Рашевский // Москва, Наука, 1967. – С. 481-482.

72. **Романов, В.И.** К геометрии точечных отображений четырехмерных евклидовых пространств [Текст] / В.И. Романов // Труды геометрического семинара, т.5. – Москва, 1975. – С. 345-359.

73. **Рыжков, В.В.** Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами [Текст] / В.В. Рыжков // Итоги Науки. Геометрия. – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 22-30.

74. **Рыжков, В.В.** Об отображении евклидовых пространств, конформные отображения. [Текст] / В.В. Рыжков // Труды Томского университета. – Томск, 1965, т. 188. – С. 15-18.

75. **Силаева, Г.М.** Двойные линии отображения и их гиперсферическое изображение [Текст] / Г.М. Силаева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 19. – Калининград: КГУ, 1988. – С. 82-84.

76. **Схоутен, И.А.** Введение в новые методы дифференциальной геометрии [Текст] / И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк // Москва: ИЛ, 1948. Т.II. – 348 с.

77. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж. Уизем. // Москва: Мир, 1977. – 624 с.

78. **Фиников, С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников // М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.

79. **Чешкова, М.А.** О конформном отображении ортогональных поверхностей в E_{2n} [Текст] / М.А. Чешкова // Математические заметки, 70, №5 – Москва, 2001. – С. 798-800.

80. **Шуликовский, В.И.** Классическая дифференциальная геометрия [Текст] / В.И. Шуликовский // Москва: Физматгиз. 1963. – 540 с.

81. **Melzi, G.** Su alcune trasformazioni puntuali fra spazi ordinari estendenti le trasformazioni conformi [Текст] / G. Melzi // Rend. mat. e applic., 16, №1-2. – Cosenza, 1957. – Pp. 96-117.

82. **Melzi, G.**, Trasformazioni fra iperspazi euclidei reali estendenti le trasformazioni conformi [Текст] / G. Melzi // Rend. Ist. Lombardo, Accad. sci. mat., fis., chim. e geol. – Cosenza, 1961, A95. – №2.

83. **Mikeš, J.** Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces [Текст] / J. Mikeš // *J. Math. Sci. – New York*, **78**:3. 1996. – Pp. 311-333.

84. **Mikeš, J.** Geodesic Ricci mappings of two-symmetric Riemann spaces [Текст] / J. Mikeš // *Math. Notes*, **28**, 1981. – Pp. 622–624.

85. **Papieva, T.M.** The double lines of a partial mapping of *n* - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines [Текст] / G. Matieva, T.M. Papieva // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. Almaty, June 30 – July 4, 2009. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 93-96.

86. **Papieva, T.M.** The double lines of a partial mapping of *n* - dimension Euclidean space generated by given set of smooth lines [Текст] / G. Matieva, T.M. Papieva // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – P. 67.