КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И. АРАБАЕВА

На правах рукописи
УДК 517.97; (575.2) (04); 62-50

КАДИРИМБЕТОВА АЙША КАЗАХБАЕВНА

НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Керимбеков Акылбек

Бишкек – 2016

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. На практике встречаются множество задач прикладного характера, математическая формализация которых приводят к интегро-дифференциальным уравнениям параболического типа. Множество примеров таких задач, связанные с управлением тепловых и диффузионных процессов, а также переноса тепловых нейтронов приведены в работах [14-17, 24, 30-32]. В природе реальные процессы обычно протекают нелинейно. Поэтому многие задачи прикладного характера, в частности задачи оптимизации, по своей сущности являются нелинейными.

Основы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами были заложены в 60-е годы прошлого столетия в работах А.Г. Бутковского, А.И. Егорова, Т.К. Сиразетдинова и др.. В настоящее время теория получила широкое развитие. Однако задачи нелинейной оптимизации, из-за сложности их исследования, мало изучены.

Исследование разрешимости нелинейных задач оптимизации и разработка конструктивных методов их решения является одной из актуальных задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

В диссертации основное внимание уделено исследованию задачи оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями при граничном управлении. При этом функция граничного источника нелинейно зависит от управляющих параметров.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках научного проекта № КР-05 (номер гос.регистрации № 0006988) «Математическое обеспечение процессов управления энерго-массопереносами, происходящими в линиях передач, и продукционными почво-растительными системами» МОиН КР.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование задач нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда внешнее воздействие сосредоточено на границе и установление достаточных условий существования и единственности решения задачи оптимизации. Решены следующие задачи:

- построить слабо обобщенное решение краевой задачи в случае, когда управляемый тепловой процесс описывается фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением;
- построить обобщенное решение сопряженной краевой задачи;
- получить нелинейное интегральное уравнение оптимального управления и исследовать его разрешимость;
- построить решение задачи нелинейной оптимизации при граничном управлении и исследовать сходимость его приближений по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Научная новизна работы. Впервые, на примере граничного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями, разработан алгоритм построения решения нелинейной задачи оптимизации и его приближений.

Полученные результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, в частности,

- установлено, что коэффициенты Фурье слабо обобщенного решения основной и сопряженной краевых задач определяются как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода;

- установлено, что оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения и должно удовлетворять дополнительному условию в виде неравенства относительно функции источника;

- найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями, при граничном управлении;

- разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана их сходимость по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Теоретическая и практическая ценность. Разработанный алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при нелинейном граничном управлении может быть использован на практике. Полученные теоретические выводы представляют интерес в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, ибо они могут быть использованы для развития методов исследования и при разработке конструктивных методов решения нелинейных задач оптимизации.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- определение коэффициентов Фурье слабо обобщенного решения основной и сопряженной краевых задач как решения линейных неоднородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода;

- построение оптимального управления как решение нелинейного интегрального уравнения, удовлетворяющим дополнительному условию в виде неравенства относительно функции источника;

- определение достаточных условий однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями, при граничном управлении;

- определение алгоритма построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказательство их сходимости по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Личный вклад соискателя. По результатам исследований опубликовано 10 статей, 2 тезиса. В опубликованных работах в соавторстве, постановка задачи принадлежит научному руководителю, а основные результаты: построение слабо обобщенных решений, установление условий оптимальности, получение достаточных условий однозначной разрешимости нелинейных интегральных уравнений, построение алгоритмов для нахождения приближенных и точных решений соответствующих нелинейных задач оптимального управления, их численная реализация на модельном примере, установление сходимости приближений по резольвенте слабо обобщенных решений краевых задач для волнового уравнения, установление сходимости приближенных решений оптимизационных задач были получены соискателем.

Апробации результатов диссертации. Результаты исследований докладывались на международных конференциях, симпозиумах и межвузовских, вузовских конференциях:

– 2-я международная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Кыргызстан, Булан-Соготту, 5-7 сентября 2013;
– 3-я республиканская научная конференция, посвященная памяти профессора Р.Усубакунова. Кыргызстан, Бишкек, 17 апреля 2014;
– Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Shymkent, Kazakstan, September 11-13, 2014;
– международная научно-практическая конференция «Информационные технологии: Инновации в науке и образовании». Казахстан, Актобе, 19-21 февраля, 2015.
– республиканская научно-практическая конференция "Наука и современность - 2015", посвященной реализации Послания Президента Республики Казахстан народу Казахстана "Нурлы жол - путь в будущее". Казахстан, Тараз, 13 марта 2015.

Результаты исследований регулярно были обсуждены на научном семинаре (научный руководитель проф. Керимбеков А.К.) кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 10 научных статьях и в 2 тезисах, в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики – 4, в реферируемых зарубежных журналах – 5, в материалах конференций – 1, из них в единоличном авторстве – 4.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, восьми разделов, заключения, списка использованной литературы, содержащего 99 наименований и приложения. Общий объем работы включает 106 страниц машинописного текста.

При изложении материала были использованы следующие обозначения:

1. $(0, 1)$ – интервал оси Ox;
2. $(0, T)$ – интервал оси Ot;
3. $Q=(0,1)\times(0,T)$ – область плоскости Oxt;
4. $V_t(t,x), V_x(t,x)$ – частная производная первого порядка функции $V(t,x)$ по временной переменной t и по координатной переменной x;
5. $V_{xx}(t,x)$ – частная производная второго порядка функции $V(t,x)$ по координатной переменной x;
6. $H(D)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве D;
7. $\|\bullet\|_H$ – норма элемента гильбертова пространства H;
8. $\langle \cdot , \quad \cdot \rangle$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве.
9. $C^{1.2}(Q)$ - пространство функций, имеющих непрерывную производную первого порядка по первому аргументу и непрерывную производную второго порядка по второму аргументу.

Содержание исследований. Материалы исследований опубликованы в работах [30–34, 41–45] и изложены в следующей последовательности.

В первой главе исследована задача нелинейной оптимизации с граничным управлением в случае, когда управляемый тепловой процесс описывается фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением и качество управления оценивается квадратичным функционалом. Подробно изложена процедура построения слабо обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса, где использовано интегральное тождество эквивалентное краевой задаче. На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [30] получены условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства относительно функции граничного теплового потока. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации с граничным управлением и разработан алгоритм построения приближенных решений.

В пункте 1.1, на основе интегрального тождества, эквивалентного краевой задаче, подробно изложена процедура построения слабо обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса $v(t,x)$, удовлетворяющего в области $Q=\{0<x<1,\, 0<t<T\}$ интегро-дифференциальному уравнению

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + g(t,x)\ , \tag{1.1.1}$$

а на границе области Q начальному

$$v(0,x)=\psi(x),\quad 0<x<1 \tag{1.1.2}$$

и граничным условиям

$$v_x(t,0)=0,\qquad v_x(t,1)+\alpha v(t,1)= f[t,u(t)],\quad 0<t\le T, \tag{1.1.3}$$

где величина T и функция $K(t,\tau)$, определенная в области $D=\{0\le t\le T,\, 0\le\tau\le T\}$, считаются известными, причем имеет место равенство

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt = K_0 < \infty, \tag{1.1.4}$$

$$g(t,x)\in H(Q),\quad \psi(x)\in H(0,1),\quad f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T),\quad f_u\left[t,u(t)\right]\neq 0 \quad (1.1.5)$$

- функции, являющиеся заданными, $u(t)\in H(0,T)$ - функция управления, λ - параметр, постоянная $\alpha>0$.

Вследствие того, что для краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) при условиях (1.1.5) классического решения нет, будем использовать понятие «обобщенное решение краевой задачи» (1.1.1)-(1.1.3).

Определение 1. Функция $\nu(t,x)\in H(Q)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_0^1 (\nu\phi)_{t_1}^{t_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left[\nu(\phi_t-\phi_{xx})+\phi(t,x)\left(\lambda\int_0^T K\left(t,\tau\right)\nu\left(\tau,x\right)d\tau+g\left(t,x\right)\right)\right]dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[\phi\left(t,1\right)\left(-\alpha\nu\left(t,1\right)+f\left[t,u\left(t\right)\right]\right)-\phi_x(t,1)\nu(t,1)+\phi_x(t,0)\nu(t,0)\right]dt \qquad (1.1.6)$$

при любых t_1 и t_2, $0<t_1\le t\le t_2\le T$, и для любой функции $\phi\left(t,x\right)\in C^{1.2}(Q)$, а также в слабом смысле начальному и граничным условиям, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1\nu\left(t,x\right)\phi_0\left(x\right)dx=\int_0^1\psi\left(x\right)\phi_0\left(x\right)dx,$$

$$\lim_{x\to1}\int_0^T(V_x\left(t,x\right)-\alpha\nu\left(t,x\right)\phi_1\left(t\right)dt=\int_0^T f\left[t,u\left(t\right)\right]\phi_1\left(t\right)dt, \qquad (1.1.7)$$

при любых функциях $\phi_0\left(x\right)\in H(0,1)$ и $\phi_1\left(t\right)\in H\left(0,T\right)$., называется слабо обобщенным решением краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3).

Для построения решения краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) сначала рассмотрим краевую задачу

$$z''(x)+\lambda^2 z\left(x\right)=0,\quad z'\left(0\right)=0,\quad z'\left(1\right)+\alpha z\left(1\right)=0, \qquad (1.1.8)$$

у которой собственные значения λ определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и удовлетворяет условиям

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\quad \forall n=1,2,3,\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty \;\text{ и }\; \left(n-1\right)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}\left(2n-1\right), \qquad (1.1.9)$$

а соответствующее собственные функции

$$z_n\left(x\right)=\sqrt{\alpha\frac{\lambda_n^2+\lambda^2}{\lambda_n^2+\lambda^2+\lambda}}\cos\lambda_n x,\quad n=1,2,3,\ldots, \qquad (1.1.10)$$

образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$.

Решать краевую задачу (1.1.1)-(1.1.3) будем представляя решение в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x), \tag{1.1.11}$$

где

$$v_n(t)=<v(t,x),z_n(x)>=\int_0^1 v(t,x)z_n(x)dx, \tag{1.1.12}$$

является коэффициентами Фурье функции $v(t,x)$, символом $<\cdot,\cdot>$ служит обозначением скалярного произведения в пространстве $H(0,1)$. Показано, что коэффициенты Фурье определяются как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)v_n(s)ds+a_n(t), \tag{1.1.18}$$

где

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau, \tag{1.1.19}$$

$$a_n(t)=e^{\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{\lambda_n^2(t-\tau)}\Big(g_n(\tau)+z_n(1)f\left[\tau,u(\tau)\right]\Big)d\tau.$$

В пункте 1.2 рассматривается задача оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2(t,u(t))dt,\ \ \beta>0, \tag{1.2.1}$$

где $\xi(x)\in H(0,1)$, $q(t,u(t))\in H(0,T)$ - заданные функции, причем $q(t,u(t))$ является выпуклой по функциональной переменной $u(t)$, на множестве решений краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3), т.е. требуется найти управление $u^0(t)\in H(0,T)$ так, чтобы оно с соответствующим решением $v^0(t,x)$ краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) минимизировало бы функционал (1.2.1). Такие функции

$u^0(t)$ и $v^0(t,x)$ называются оптимальным управлением и оптимальным процессом соответственно.

В силу условия (1.1.5) каждому управлению $u(t)$ соответствует единственный управляемый процесс $v(t,x)$. Поэтому, управлению $u(t)+\Delta u(t)$, соответствует функция вида $v(t,x)+\Delta v(t,x)$, где приращение $\Delta v(t,x)$ соответствует приращению $\Delta u(t)$. Приращение функционала (1.2.1), используя методику принципа максимума, представим в следующем виде

$$\Delta J[u] = J\left[u+\Delta u\right] - J[u] = -\int_0^T \Delta\prod\left[t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)\right]dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx, \quad (1.2.2)$$

где

$$\Delta\prod(t,v,\omega,u) = \prod\left(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)+\Delta u(t)\right) - \prod\left(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)\right),$$

$$\prod(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)) = \omega(t,1) f\left[t, u(t)\right] - \beta q^2(t, u(t)), \quad (1.2.3)$$

а функция $\omega(t,x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\omega_t + \omega_{xx} + \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau = 0, \quad 0<x<1, \quad 0\le t<T,$$

$$\omega(T,x) + 2\left[v(T,x) - \xi(x)\right] = 0, \; 0<x<1,$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \quad \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \; 0\le t<T., \quad (1.2.4)$$

которые в совокупности называются сопряженной краевой задачей.

Поскольку область значений управляющей функции является открытым множеством, то из принципа максимума следует, что оптимальное управление должно удовлетворять следующим соотношениям

$$2\beta q(t,u(t)) q_u(t,u(t)) f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = \omega(t,1), \quad (1.2.5)$$

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{q(t,u(t))q_u(t,u(t))}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u > 0, \quad (1.2.6)$$

которые называются условиями оптимальности.

В пункте 1.3 построено решение сопряженной краевой задачи в виде ряда

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t) z_n(x). \quad (1.3.1)$$

Установлено, что коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$, определяются как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds-2e^{-\lambda_n^2(T-t)}[\nu_n(T)-\xi_n], \tag{1.3.2}$$

где ядро

$$B_n(s,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}K(s,\tau)d\tau \quad \text{и} \quad B_n(s,T)=0. \tag{1.3.3}$$

Решение сопряженной краевой задачи получено в виде

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(x),$$

где $R_n(s,t,\lambda)$ - резольвента ядра $B_n(s,t)$.

Легко проверяется, что построенная функция $\omega(t,x)$ принадлежит гильбертову пространству $H(Q)$.

В пункте 1.4 согласно условиям оптимальности (1.2.5) и (1.2.6) относительно оптимального управления с учетом равенства

$$\nu_n(T)-\xi_n=-h_n+\int_0^T G_n(\tau,\lambda)\,f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau,$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right)-$$
$$-\int_0^T g_n(\tau)\left(e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau,$$

$$G_n(t,\lambda)=z_n(1)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right],$$

получено нелинейное интегральное уравнение

$$\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))\,f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)\,f\left[s,u(s)\right]ds=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_n, \tag{1.4.1}$$

в котором

$$\tilde{G}_n(t,\lambda)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(1).$$

Отметим, что дальнейшее исследование разрешимости нелинейного интегрального уравнения, при известной функции $q(t,u(t))$, проводится при условии удовлетворения функции $f\left[t,u(t)\right]$ ограничению (1.2.6).

В этом случае остается построить решения лишь уравнения (1.4.1). Согласно методике, разработанной проф. А.Керимбековым, положим

$$\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=p(t). \qquad (1.4.2)$$

Лемма 1. Пусть для функций $f(t,u(t))$ и $q(t,u(t))$ выполнено условие

$$sup\left|\frac{q_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}\right|\le M_0,\quad \forall t\in[0,T].$$

Тогда функция $p(t)$, определяемая формулой (1.4.2) принадлежит гильбертову пространству $H(0,T)$.

В силу условия (1.2.6), управление $u(t)$ из равенства (1.4.2) можно определять однозначно, т.е. найдется такая функция φ, что

$$u(t)=\varphi(t,p(t),\beta). \qquad (1.4.3)$$

С учетом (1.4.2) и (1.4.3) уравнение (1.4.1) можно переписать в виде

$$p(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_n \qquad (1.4.4)$$

или в операторном виде

$$p(t)=G[p(t)]+h(t), \qquad (1.4.4’)$$

где

$$G[p(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\left[-\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right]ds\right]. \qquad (1.4.5)$$

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)h_n \qquad (1.4.6)$$

Исследована однозначная разрешимость операторного уравнения (1.4.5).

Лемма 2. Функция $h(t)$ принадлежит пространству $H(0,T)$.

Лемма 3. Всякий элемент пространства $H(0,T)$ отображается оператором $G[p(t)]$ снова в элемент пространства $H(0,T)$.

Лемма 4. Для того, чтобы оператор $G[p]$, переводящий гильбертово пространство $H(0,T)$ в себя, был сжимающим, достаточно выполнение следующих условий

$$\| f[t,u(t)] - f[t,\overline{u}(t)] \|_{H(0,T)} \le f_0 \, \| u(t) - \overline{u}(t) \|_{H(0,T)}, \tag{1.4.7}$$

$$\| \varphi[t,p(t),\beta] - \varphi[t,\overline{p}(t),\beta] \|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \, \| p(t) - \overline{p}(t) \|_{H(0,T)} . \tag{1.4.8}$$

$$\gamma = \left[2\left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right] f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \tag{1.4.9}$$

Теорема 1. При выполнении условий (1.1.5) и (1.4.7)-(1.4.9) уравнение (1.4.4’) однозначно разрешимо в пространстве $H(0,T)$.

Для построения решения операторного уравнения (1.4.4’) используем метод последовательных приближений. За нулевое приближение $p_0(t)$ выбираем произвольный элемент гильбертова пространства $H(0,T)$. Последующие приближения определяем по формулам

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \qquad n = 1,2,3,...,$$

Известно, что для n-го приближения решения справедлива оценка

$$\| \overline{p}(t) - p_n(t) \|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \| G[p_0(t)] - p_0(t) \|_{H(0,T)} .$$

Функция $\overline{p}(t)$, определяемая соотношением $\overline{p}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(t).$, является точным решением операторного уравнения (1.4.4’).

Найденную функцию $\overline{p}(t)$ подставим в (1.4.3) и найдем оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi\left[t, \overline{p}(t), \beta \right],$$

которое для интегрального уравнения (1.4.1) является решением.

В пункте 1.5 по оптимальному управлению $u^0(t)$ найден оптимальный процесс.

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^0(t)+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds\right)z_n(x),$$

где

$$a_n^0\left(t\right)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n\left(\tau\right)+z_n\left(1\right)f\left[\tau,u^0\left(\tau\right)\right]\right)d\tau. \qquad (1.5.1)$$

Тогда минимальным значением функционала (1.2.1) будет

$$J[u^0(t)]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx+\beta\int_0^T q^2(t,u^0(t))dt. \qquad (1.5.2)$$

Таким образом, рассматриваемая задача нелинейной оптимизации имеет полное решение в виде тройки $\left(u^0(t),v^0(t,x),J[u^0(t)]\right)$. Практически вместо точного решения задачи оптимизации находят его k -е приближение $\left(u_k(t),\ v_k(t,x),\ J[u_k(t)]\right)$ и показывают, что оно сходится при $k\to\infty$ к точному решению.

1. Приближения оптимального управления и их сходимость.

Значение функции оптимального управления на *k*-том шагу определяем по следующей формуле

$$u_k(t)=\varphi[t,p_k(t),\beta]. \qquad (1.5.3)$$

Лемма 5. Пусть функция $\varphi[t,\vartheta(t),\beta]$ удовлетворяет условию Липщица по функциональной переменной $\vartheta(t)$, т.е.

$$\left\|\varphi[t,\vartheta_1(t),\beta]-\varphi[t,\vartheta_2(t),\beta]\right\|_{H(0,T)}\le\varphi_0(\beta)\left\|\vartheta_1(t)-\vartheta_2(t)\right\|_{H(0,T)},\quad \varphi_0(\beta)>0. \qquad (1.5.4)$$

Тогда k-е приближение для управляющей функции сходится по норме гильбертова пространства $H(0,T)$ к оптимальной управляющей функции $u^0(t)$.

2. Приближения оптимального процесса и их сходимость.

При построении приближений оптимального процесса $v^0(t,x)$ рассмотрим следующие приближения:

2.1. m-е приближение по резольвенте для оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^0(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds\right)z_n(x),$$

где

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)$$

m-ое приближение для резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$;

2.2. m, k-е приближение для оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(k)}(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x),$$

где

$$a_n^{(k)}(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)\,f\left[\tau,u_k(\tau)\right]\right)d\tau.$$

2.3. m, k, r-ое приближение для оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left(a_n^{(k)}(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x).$$

Лемма 6. m-е приближение при $m\to\infty$ сходится по норме пространства *H(Q)* к функции оптимального процесса $v^0(t,x)$.

Лемма 7. Пусть функция $f[t,u(t)]$ удовлетворяет условию Липщица по функциональной переменной $u(t)$, т.е.

$$\|f[t,u_1(t)]-f[t,u_2(t)]\|_{H(0,T)}\leq f_0\|u_1(t)-u_2(t)\|_{H(0,T)}. \tag{1.5.5}$$

Тогда m,k-е приближение при $k\to\infty$ сходится по норме гильбертова пространства $H(Q)$ к $v^m(t,x)$ для любого $m=1,2,3,....$

Лемма 8. *k,m,r* - е приближение при $r\to\infty$ сходится по норме гильбертова пространства $H(Q)$ к функции $v_k^m(t,x)$ для любого *k, m* = 1,2,3,… .

Теорема 2. *k,m,r* - е приближение при $k,m,r\to\infty$ сходится по норме гильбертова пространства $H(Q)$ к функции оптимального процесса $v^0(t,x)$.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы следует из лемм 1.6 – 1.8, а также из того, что

$$\left\|v^0(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)} \le \left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)} +$$

$$+\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)} + \left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)} \xrightarrow[k,r,m\to\infty]{} 0.$$

III. Приближения минимального значения функционала и их сходимость.

3.1. m-е приближение по резольвенте для минимального значения функционала определяем по следующей формуле

$$J_m[u^0(t)] = \int_0^1 \left[v^m(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T q^2\left(t,u^0(t)\right)dt;$$

3.2. m, k-е приближение для минимального значения функционала определяем по следующей формуле

$$J_m[u_k(t)] = \int_0^1 \left[v_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T q^2\left(t,u_k(t)\right)dt;$$

3.3. m, k, r - е приближение для минимального значения функционала определяем по следующей формуле

$$J_m^r[u_k(t)] = \int_0^1 \left[v_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T q^2\left(t,u_k(t)\right)dt.$$

Лемма 9. Приближение $J_m[u^0(t)]$ при $m\to\infty$ сходится к значению функционала $J[u^0(t)]$.

Лемма 10. Приближение $J_m[u_k(t)]$ при $k\to\infty$ сходится к значению функционала $J_m[u^0(t)]$ для любого m =1, 2, 3, ...

Лемма 11. Приближение $J_m^r[u_k(t)]$ при $r\to\infty$ сходится к значению функционала $J_m[u_k(t)]$ для любых k, m =1, 2, 3, …

Теорема 3. Приближение $J_m^r[u_k(t)]$ при $m, k, r\to\infty$ сходится к значению функционала $J^0[u(t)]$.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы следует из лемм 1.9 – 1.11, а также из того, что

$$\left|J[u^0(t)] - J_m^r[u_k(t)]\right| \le \left|J[u^0(t)] - J_m[u^0(t)]\right| + \left|J_m[u^0(t)] - J_m[u_k(t)]\right| +$$

$$+\left|J_m[u_k(t)] - J_m^r[u_k(t)]\right| \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0.$$

Во второй главе исследована задача нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями, с граничным управлением при минимизации кусочно-линейного функционала. Рассматриваемая задача обладает ряд специфическими свойствами, например, оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения определенного знака в промежутке $[0,T]$. Это обстоятельство сильно влияет на существование решения задачи нелинейной оптимизации. В этом случае для существования решения требуется налагать дополнительные условия на исходные данные задачи. Разработан алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации и их приближений. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению по оптимальному управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

В пункте 2.1 рассматривается задача оптимизации, в которой ищется минимальное значение функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T |u(t)|dt, \beta > 0, \tag{2.1.1}$$

где $\xi(x) \in H(0,1)$ - заданная функция, на множестве решений краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3).

В соответствии с принципом максимума для распределенных систем оптимальное управление определяется из соотношений

$$2\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] sign\ u(t) = \omega(t,1), \tag{2.1.2}$$

$$\frac{f_{uu}\left[t,u(t)\right]sign\ u(t)}{f_u\left[t,u(t)\right]}<0, \tag{2.1.3}$$

где $\omega(t,x)$ - решение сопряженной краевой задачи.

В пункте 2.2**,** согласно условиям оптимальности, получено соотношение

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]sign\ u(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)\,f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_n, \tag{2.2.1}$$

которое является нелинейным интегральным уравнением для оптимального управления.

Известно, что решение интегрального уравнения Фредгольма не имеет свойства продолжаемости. Поэтому при исследовании однозначной разрешимости уравнения (2.2.1) рассматриваем следующие задачи:

Задача 1. Если $u(t)>0,\ t\in[0,T]$, то «оптимальное» управление определяется как решение положительного знака интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)\,f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)h_n\,, \tag{2.2.2}$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{1}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u>0,\ \ t\in[0,T]. \tag{2.2.3}$$

Задача 2. Если $u(t)<0,\ t\in[0,T]$, то «оптимальное» управление определяется как решение отрицательного знака интегрального уравнения

$$-\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)\,f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)h_n\,, \tag{2.2.4}$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{1}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u<0,\ \ t\in[0,T]. \tag{2.2.5}$$

Заметим, что условия (2.2.3) и (2.2.5) не могут быть выполнены одновременно. Таким образом, оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение либо задачи 1, либо задачи 2. Обозначим через – $u^+(t)$ решение задачи 1, а через $-u^{-}(t)$ решение задачи 2. Оптимальность управлений $u^{+}(t)$ и $u^{-}(t)$ определяется из условий:

$$u^0(t)=\begin{cases} u^{+}(t), & u(t)>0, \ J[u^{+}(t)]<J[u^{-}(t)]; \\ u^{-}(t), & u(t)<0, \ J[u^{-}(t)]<J[u^{+}(t)]. \end{cases}$$

Каждая из этих задач исследована согласно методике, изложенной в главе I.

Отметим, что условие $u^{+}(t)>0, \ t\in[0,T]$ может быть выполнено, если налагать на исходные параметры задачи дополнительные требования, например, их можно выбрать из условий

$$\begin{aligned} &\gamma=2\left[1+\frac{2\lambda_1^2}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1, \\ &u^{+}(t)=\varphi\left[t,\tilde{p}(t),\beta\right]>0. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Аналогично решается задача 2, в этом случае условие $u^{-}(t)<0, \ t\in[0,T]$ может быть выполнено, если исходные параметры задачи выбрать согласно следующим условиям

$$\begin{aligned} &\gamma=2\left[1+\frac{2\lambda_1^2}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1, \\ &u^{-}(t)=\varphi\left[t,\tilde{p}(t),\beta\right]<0. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Таким образом, задача оптимизации при минимизации кусочно–линейного функционала имеет специфические особенности.

Предположим, что решение задачи оптимизации найдено в виде тройки $\left(u^0(t), v^0(t,x), J\left[u^0(t)\right]\right)$. Здесь

$$u^0(t)=\varphi\left[t,\tilde{p}(t),\beta\right] \tag{2.2.8}$$

– оптимальное управление,

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right]z_n(x), \tag{2.2.9}$$

где

$$a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau) + z_n(1)\, f\left[\tau, u^0(\tau)\right]\right)d\tau,$$

– оптимальный процесс,

$$J\left[u^0(t)\right] = \int_0^1 \left[v^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T \left|u^0(t)\right| dt \qquad (2.2.10)$$

– минимальное значение функционала.

Приближения функции оптимального управления (2.2.8) определяем по следующей формуле

$$u_m(t) = \varphi\left[t, p_m(t), \beta\right],\ \ m = 1,2,3,..., \qquad (2.2.11)$$

где $p_m(t)$ определяется из соотношений $p_m(t) = G\left[p_{m-1}(t)\right],\ m = 1,2,3,...,\ G[\cdot]$ - известный оператор и справедлива следующая оценка

$$\left\|\tilde{p}(t) - p_m(t)\right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^m}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right] - p_0(t)\right\|_{H(0,T)},\quad \tilde{p}(t) = \lim_{m\to\infty} p_m(t).$$

В формулах (2.2.8) и (2.2.11) функция $\varphi(\cdot)$ – известная функция и по функциональной переменной $p(t)$ удовлетворяет условию Липщица

$$\left\|\varphi\left[t, p(t), \beta\right] - \varphi\left[t, \bar{p}(t), \beta\right]\right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta)\left\|p(t) - \bar{p}(t)\right\|_{H(0,T)},\ \ \varphi_0(\beta) > 0 \qquad (2.2.12)$$

Далее, сходимость приближений для функции оптимального управления следует из неравенства

$$\left\|u^0(t) - u_m(t)\right\|_{H(0,T)} = \left\|\varphi\left[t, \tilde{p}(t), \beta\right] - \varphi\left[t, p_m(t), \beta\right]\right\|_{H(0,T)} \le$$

$$\le \varphi_0(\beta)\left\|\tilde{p}(t) - p_m(t)\right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^m}{1-\gamma}\varphi_0(\beta)\left\|G\left[p_0(t)\right] - p_0(t)\right\|_{H(0,T)},\ \ \varphi_0(\beta) > 0,$$

где $0 < \gamma < 1,\ p_0(t)$ – известная функция пространства $H(0,T)$.

Относительно приближения для функции оптимального процесса (2.2.9) рассмотрим следующие приближения:

1. m – приближение для функции оптимального процесса по резольвенте определяем по следующей формуле

$$v^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right]z_n(x), \qquad (2.2.13)$$

где $R_n^m(t,s,\lambda)$ – m-е приближение для резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$;

2. $m,\ k$ – приближение для функции оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds+a_n^k(t)\right]z_n(x), \qquad (2.2.14)$$

где $a_n^k(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)f\left[\tau,u_k(\tau)\right]\right)d\tau$;

3. $m,\ k,\ r$ – приближение для функции оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds+a_n^k(t)\right]z_n(x). \qquad (2.2.15)$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие соотношения:

1. $\left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le C(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$, т.к.

$|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}<1$, $C(\lambda)>0$;

2. $\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le$

$$\le\sqrt{2T\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)}f_0\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

$\forall\ m=1,2,3,...$;

3. $\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le C_0\sum_{n=r+1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2\pi^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$,

$\forall\ m,\ k=1,2,3,...,\ C_0>0$,

как остаточный член сходящегося ряда.

Далее из соотношения

$$\left\|v^0(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le$$

$$\le\left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)+v^m(t,x)-v_k^m(t,x)+v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le$$

$$\le\left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$

$$+\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$$

следует сходимость приближения $v_k^{m,r}(t,x)$, которое может быть использовано на практике, к функции оптимального процесса $v^0(t,x)$.

Относительно минимального значения функционала рассмотрим следующие приближения:

1. m – приближение для минимального значения функционала, соответствующее процессу $v^m(t,x)$, определяем по следующей формуле

$$J_m\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[v^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u^0(t)\right|dt; \qquad (2.2.16)$$

2. $m,\ k$ – приближение для минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_k^m(t,x)$, определяем по следующей формуле

$$J_m\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[v_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u_k(t)\right|dt, \qquad (2.2.17)$$

3. m,k,r – приближение для минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_k^{m,r}(t,x)$, определяем по следующей формуле

$$J_m^r\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[v_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u_k(t)\right|dt. \qquad (2.2.18)$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие соотношения:

1. $\left|J\left[u^0(t)\right]-J_l\left[u^0(t)\right]\right|\le C_1\left\|v^0(T,x)-v_l(T,x)\right\|_{H(0,1)}\xrightarrow[l\to\infty]{}0;$

2. $\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|\le C_2\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$

$$+C_3\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[m,k\to\infty]{}0;$$

3. $\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le C_4\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – некоторые постоянные.

Далее, из следующих рассуждений

$$\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le$$
$$\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]+J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]+J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le$$
$$\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right|+\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|+$$
$$+\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0$$

следует сходимость приближения $J_m^r\left[u_k(t)\right]$, которое может быть использовано на практике, к минимальному значению функционала $J\left[u^0(t)\right]$.

В приложении приведены результаты численных расчетов, подтверждающие теоретические выводы.

0.1 Примеры задач приводящие к интегро-дифференциальным уравнениям

Выше было отмечено, что в работах [14-17, 24, 30-32] даны описания задач приводящие к интегро-дифференциальным уравнениям параболического типа. Здесь мы приводим некоторые из них. В работе [30 стр. 48-51, 56-61, 74-85] приведена математическая формализация следующих задач

1.Уравнение диффузии нейтронов. Пусть область Ω с границей S заполнена замедлителем (например водой), в котором произвольным способом размещены молекулы урана. Атомы урана в результате ядерных превращений выбрасывают нейтроны, которые при движении в замедлителе практически разделяются на две группы. Нейтроны первой группы, не успев потерять своей энергии, сталкиваются с другими ядрами и вызывают их деление. В результате таких столкновений зарождаются новые нейтроны. Вторая группа нейтронов при движении в замедлителе теряет значительную часть своей энергии и в конце концов их энергия становится сравнимой с кинетической энергией молекул замедлителя. В дальнейшем энергия таких нейтронов не уменьшается. Они либо поглощаются ядрами урана, либо продолжают перемещаться в замедлителе. Эти нейтроны называются тепловыми. Обозначим их плотность через N.

Тогда уравнение, описывающее диффузию таких нейтронов в предположении, что все тепловые нейтроны имеют одинаковую по величине (но не по направлению!) скорость, имеют вид

$$\frac{\partial N(t,M)}{\partial t} = \operatorname{div}\left(D \operatorname{grad} N\right) - \frac{1}{T_0} N +$$

$$+\frac{1}{T_0} \iiint_{\Omega} k(M)_1 W(M,M_1) N(t,M_1) d\Omega(M_1)$$

которое должно выполняться при всех $M \in \Omega$, где M_1 - некоторая точка области Ω. Это уравнение является интегро-дифференциальным уравнением параболического типа относительно неизвестной функции $N(t,M)$.

2. Уравнение односкоростного переноса частиц. В предыдущем пункте получено уравнение диффузии тепловых нейтронов в предположении, что потоки нейтронов подчиняются закону Фика, а их плотность не зависит от их скорости. Однако практика показывает, что это предположение не оправдывается, если плотность нейтронов значительно изменяется на протяжении длины свободного пробега частиц. Если рассматривать вопрос о математическом описании движения тепловых нейтронов в предположении, что все нейтроны имеют постоянную по величине (но по направлению) скорость υ, а плотность N нейтронов зависит от этой скорости, то есть $N(t,M,\upsilon)$, а также предполагать, что рассматриваемые нейтроны при столкновении с ядрами не изменяют свою энергию, а изменяют лишь направление скорости, то получаем интегро-дифференциальное уравнение линейной теории односкоростного переноса тепловых нейтронов *(транспортное уравнение Больцмана)*

$$\frac{\partial N(t,M,\upsilon)}{\partial t} + \left(\upsilon, \operatorname{grad} N\right) + \frac{\upsilon}{l} N =$$

$$= \frac{\upsilon}{4\pi l_s} \iint g\left(\upsilon^1, \upsilon\right)_1 N(t,M,\upsilon^1) d\upsilon^1 + Q.$$

0.2. Краткий обзор исследований, примыкающих к теме диссертации

Как было выше отмечено, задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных, из-за сложности их исследования, мало изучены. Имеется лишь несколько работ [69-71, 74, 75, 91-93], где исследованы задачи граничного оптимального управления тепловыми процессами в случае, когда функции управления нелинейно входят в уравнение краевой задачи.

В работах [69-71, 74, 91-93] исследованы задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов с нелинейными граничными управлениями в случаях, когда управляемый процесс описывается вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. В работе [75] исследована задача векторного граничного управления тепловым процессом, описываемым уравнением следующего вида

$$V_t = V_{xx} + f(t,x), \qquad (t,x) \in Q,$$

с дополнительными условиями

$$V(0,x) = \psi(x), \qquad x \in (0,1),$$

$$V_x(t,0) = p_1[t,\bar{u}(t)], \qquad 0 < t < T,$$

$$V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = p_2[t,\bar{u}(t)], \qquad 0 < t < T,$$

где $\bar{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$, $\bar{u}(t) \in H^2(0,T)$ – вектор - функция управления, $p_1[t,\bar{u}(t)], p_2[t,\bar{u}(t)] \in H\left(0,T\right)$ функции нелинейно зависящие от вектор - функции управления, $H^2 = H \times H$ - декартово произведение пространств H.

В работах [69-71, 74, 75, 91-93] получены условия оптимальности в виде системы двух соотношений в виде равенства и дифференциального неравенства. На основе этих условий получены нелинейное интегральное уравнение оптимального управления, и исследована его однозначная разрешимость. Установлены достаточные условия существования единственного решения задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения приближенного решения и доказана его сходимость.

Аналогичное исследование проведено в работе [11], где рассмотрена задача минимизации функционала

$$I\left[u_1(t),\dots,u_m(t)\right] = \int_0^1 \left[V(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t)dt, \qquad \beta > 0$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + \sum_{k=1}^{m} \delta\left[x - \mu_k\left(t\right)\right] f_k[t, u_k(t)], \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T$$

$$V(0,x) = \psi(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$V_x(t,0) = 0, \quad V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, \qquad 0 < t \le T.$$

В этой задаче управление осуществлялось с помощью подвижных точечных источников.

Имеются исследования [5-10], где рассмотрены задачи граничного управления колебательными процессами, описываемыми полулинейными гиперболическими системами, где функции управления являются гладкими.

В исследованиях [35-37] рассматриваются задачи граничных управлений колебаниями струны, описываемыми волновыми уравнениями. Исследования проводились методом распространяющихся волн.

В исследованиях [95-96] решались задачи граничного управления волновыми процессами, описываемыми краевой задачей с граничным условием 3 рода. Исследование проводилось для промежутков времени *T*, не превосходящих $T_{крит.}$, когда решение задачи единственно. В работе [97] для волновых процессов, описываемых краевой задачей

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,$$

$$u\left(x,0\right) = 0, \; u_t\left(x,0\right) = 0,$$

$$u\left(0,t\right) = f\left(t\right), \; u_x\left(l,t\right) + hu\left(l,t\right) = 0,$$

задача с граничным управлением была решена для произвольных промежутков времени. В этой работе было установлено, что для представления этого решения в явном виде приходится использовать полиномы, Лагерра. В этой статье была доказана единственность решения смешанной задачи для волнового уравнения с первым и третьим краевыми условиями.

ГЛАВА I. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

В этой главе исследована задача нелинейной оптимизации с граничным управлением в случае, когда управляемый тепловой процесс описывается фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением и качество управления оценивается квадратичным функционалом. Подробно изложена процедура построения слабо обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса, где использовано интегральное тождество эквивалентное краевой задаче. На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [30] получены условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства относительно функции граничного теплового потока. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации с граничным управлением и разработан алгоритм построения приближенных решений.

1.1 Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением

Пусть скалярная функция $v(t,x)$ описывает состояние теплового процесса и в области $Q=\{0<x<1,0<t<T\}$ удовлетворяет уравнению [24, 30]

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + g(t,x)\ , \tag{1.1.1}$$

а на границе области Q начальному

$$v(0,x)=\psi(x), \quad 0<x<1 \tag{1.1.2}$$

и граничным условиям

$$v_x(t,0)=0, \qquad v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=f[t,u(t)], \quad 0<t\le T, \tag{1.1.3}$$

где величина T и функция $K(t,\tau)$, определенная в области $D=\{0\le t\le T,\ 0\le\tau\le T\}$, считаются известными, причем имеет место равенство

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau dt=K_0<\infty, \tag{1.1.4}$$

$$g(t,x)\in H(Q), \quad \psi(x)\in H(0,1), \quad f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T), \quad f_u\left[t,u(t)\right]\ne 0 \tag{1.1.5}$$

- функции, являющиеся заданными, $u(t)\in H(0,T)$ - функция управления, λ - параметр, постоянная $\alpha>0$.

Вследствие того, что для краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) при условиях (1.1.5) классического решения нет, будем использовать понятие «обобщенное решение краевой задачи» (1.1.1)-(1.1.3).

Определение 1. Функция $v(t,x)\in H(Q)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_0^1(v\phi)_{t_1}^{t_2}\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left[v(\phi_t-\phi_{xx})+\phi(t,x)\left(\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau+g(t,x)\right)\right]dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\Big[\phi(t,1)\big(-\alpha v(t,1)+f\left[t,u(t)\right]\big)-\phi_x(t,1)v(t,1)+\phi_x(t,0)v(t,0)\Big]dt \tag{1.1.6}$$

при любых t_1 и t_2, $0<t_1\le t\le t_2\le T$, и для любой функции $\phi(t,x)\in C^{1.2}(Q)$, а также в слабом смысле начальному и граничным условиям, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 v(t,x)\phi_0(x)\,dx=\int_0^1\psi(x)\phi_0(x)\,dx,$$

$$\lim_{x\to 1}\int_0^T(V_x(t,x)-\alpha v(t,x)\phi_1(t)\,dt=\int_0^T f\left[t,u(t)\right]\phi_1(t)\,dt, \tag{1.1.7}$$

при любых функциях $\phi_0(x)\in H(0,1)$ и $\phi_1(t)\in H(0,T)$., называется слабо обобщенным решением краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3).

Для построения решения краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) сначала рассмотрим краевую задачу

$$z''(x)+\lambda^2 z(x)=0,\quad z'(0)=0,\quad z'(1)+\alpha z(1)=0, \tag{1.1.8}$$

у которой собственные значения λ определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и удовлетворяет условиям

$$\lambda_n \le \lambda_{n+1},\quad \forall n=1,2,3,\dots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty \ \text{ и }\ (n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1), \tag{1.1.9}$$

а соответствующее собственные функции

$$z_n(x)=\sqrt{\alpha\frac{\lambda_n^2+\lambda^2}{\lambda_n^2+\lambda^2+\lambda}}\cos\lambda_n x,\quad n=1,2,3,\dots, \tag{1.1.10}$$

образует полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$.

Решать краевую задачу (1.1.1)-(1.1.3) будем представляя решение в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x), \tag{1.1.11}$$

где

$$v_n(t)=<v(t,x),z_n(x)>=\int_0^1 v(t,x)z_n(x)dx, \tag{1.1.12}$$

являются коэффициентами Фурье функции $v(t,x)$, символ $<\cdot,\cdot>$ служит обозначением скалярного произведения в пространстве $H(0,1)$. Также будем использовать разложения

$$g(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)z_n(x),\ g_n(t)=<g(t,x),z_n(x)>=\int_0^1 g(t,x)z_n(x)dx,$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n z_n(x),\ \psi_n=<\psi(x),z_n(x)>=\int_0^1\psi(x)z_n(x)dx. \tag{1.1.13}$$

Для нахождения формального решения краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) будем использовать интегральное тождество (1.1.6). Т.к. функция $\phi(t,x)$ является произвольной в интегральном тождестве (1.1.6), то примем

$\phi(x) \equiv z_n(x)$. Несложными вычислениями, интегральное тождество (1.1.6) можно привести к виду

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \frac{\partial}{\partial t} < \nu(t,x), z_n(x) > + \lambda_n^2 < \nu(t,x),\, z_n(x) > - \lambda \int_0^T K(t,\tau) < (\tau,x), z_n(x) > d\tau -$$

$$- < g(t,x), z_n(x) > - z_n(1) f\left[t, u(t)\right] \} dt \equiv 0,$$

Выбирая здесь $t_2 = t$ и продифференцировав по t, приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} < \nu(t,x), z_n(x) > + \lambda_n^2 < \nu(t,x), z_n(x) >= \lambda \int_0^T K(t,\tau) < \nu(\tau,t), z_n(x) > d\tau +$$

$$+ < g(t,x), z_n(x) > + z_n(1) f\left[t, u(t)\right], \tag{1.1.14}$$

для которого будем искать решение при «начальном» условии

$$< \nu(t,x), z_n(x) >|_{t=t_1} =< \nu(t_1,x), z_n(x) > \tag{1.1.15}$$

для каждого фиксированного $n = 1, 2, 3, \ldots$ Правая часть уравнения может быть рассмотрена как свободный член, тогда решением задачи Коши (1.1.14)-(1.1.15) будет

$$< \nu(t,x), z_n(x) >= e^{-\lambda_n^2 t - t_1} < \nu(t_1,x), z_n(x) > +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(\lambda \int_0^T K(\tau,s) < \nu(s,x), z_n(x) > ds + < g(\tau,x), z_n(x) > + z_n(1) f\left[\tau, u(\tau)\right] \right) d\tau.$$

Отсюда, при устремлении $t_1 \to 0$, с учетом (1.1.7), (1.1.13), получаем относительно $\nu_n(t) =< \nu(t,x), z_n(x) >$ следующее соотношение

$$\nu_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(\lambda \int_0^T K(\tau,t) \nu_n(s) ds + g_n(\tau) + z_n(1) f\left[\tau, u(\tau)\right] \right) d\tau + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n \tag{1.1.16}$$

являющееся линейным интегральным уравнением.

Легко видеть, что имеет место «начальное» условие

$$\nu_n(0) = \psi_n \tag{1.1.17}$$

Уравнение (1.1.16) можно переписать в виде

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)v_n(s)ds+a_n(t), \tag{1.1.18}$$

где

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau, \tag{1.1.19}$$

$$a_n(t)=e^{\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{\lambda_n^2(t-\tau)}\Big(g_n(\tau)+z_n(1)f\left[\tau,u(\tau)\right]\Big)d\tau. \tag{1.1.20}$$

Решением интегрального уравнения (1.1.18) будет [76]

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t), \tag{1.1.21}$$

где резольвента ядра $K_n(t,s)\equiv K_{n,1}(t,s)$ определяется равенством

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s), \quad n=1,2,3,\ldots, \tag{1.1.22}$$

а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ - равенством [76]:

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta, \quad i=1,2,3,\ldots, \tag{1.1.23}$$

при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$. Для исследования сходимости ряда Неймана (1.1.22), с учетом (1.1.19) и (1.1.23), получены следующие неравенства

$$|K_{n,i}(t,s)|^2\le\frac{(K_0T)^{i-1}}{(2\lambda_n^2)^i}\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta, \quad i=1,2,3,\ldots. \tag{1.1.24}$$

Тогда ряд Неймана (1.1.22) мажорируется числовым рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)\le\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda\right|^{i-1}\left|K_{n,j}(t,s)\right|\le\left(\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2\lambda_n^2}}\sum_{i=1}^{\infty}\left(|\lambda|\frac{\sqrt{K_0T}}{\sqrt{2\lambda_n^2}}\right)^{i-1}$$

который сходится при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$ для значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda|\frac{\sqrt{K_0T}}{\sqrt{2\lambda_n^2}}<1 \quad \text{или} \quad |\lambda|<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K_0T}}\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

т.е. радиус сходимости ряда увеличивается с ростом n. Нетрудно видеть, что ряд Неймана, для любого $n=1,2,3,\ldots$ является абсолютно сходящимся лишь при значениях параметра λ, которые удовлетворяют неавенству

$$|\lambda|<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K_0T}}\lambda_1, \tag{1.1.25}$$

Тогда резольвента $R_n(t,s,\lambda)$, согласно известной теореме Вейерштрасса, будет являться непрерывной функцией. Для нее установлены следующие оценки

$$|R_n(t,s,\lambda)|\leq\left(\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2\lambda_n^2}}\sum_{i=1}^{\infty}\left(|\lambda|\frac{\sqrt{K_0T}}{\sqrt{2\lambda_n^2}}\right)^{i-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}}\left(\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta\right)^{1/2},$$

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\leq\frac{1}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\int_0^T\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta ds=$$

$$=\frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}. \tag{1.1.26}$$

Из вышеизложенного следует, что решение краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) определяется по формуле (1.1.11), где коэффициенты Фурье $v_n(t)$ находятся как единственное решение интегрального уравнения (1.1.18) по формуле (1.1.21). Легко видеть, что это решение удовлетворяет начальному условию (1.1.2).

Далее докажем, что это решение принадлежит гильбертову пространству $H(Q)$. Учитывая (1.1.19) и (1.1.20), непосредственными вычислениями получаем

$$\int_0^T\int_0^T v^2(t,x)dxdt\leq\int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x)\right)^2dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2(t)dt\leq$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s)\, ds + a_n(t) \right)^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^2 \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)\, ds \int_0^T a_n^2(s)\, ds + a_n^2(t) \right) dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^2 \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2} \cdot 3T \left\{ \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_n^2}\left(\left\| g(t,x) \right\|^2_{H(Q)} + 2\left\| f[t,u(t) \right\|^2_{H(0,T)} \right) \right\} + \right.$$

$$\left. +3\left\{ \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_n^2}\left(\left\| g(t,x) \right\|^2_{H(Q)} + 2 \right) \right\} \right) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2} \cdot 3T \left\{ \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_n^2}\left(\left\| g(t,x) \right\|^2_{H(Q)} + 2\left\| f[t,u(t) \right\|^2_{H(0,T)} \right) \right\} + \right.$$

$$\left. +2T \cdot 3\left\{ \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_n^2}\left(\left\| g(t,x) \right\|^2_{H(Q)} + 2\left\| f[t,u(t) \right\|^2_{H(0,T)} \right) \right\} \right] =$$

$$= 6T \left(\frac{2\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2} + 1 \right) \times$$

$$\times \left\{ \left\| \psi(x) \right\|^2_{H(0,1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)\left(\left\| g(t,x) \right\|^2_{H(Q)} + 2\left\| f[t,u(t) \right\|^2_{H(0,T)} \right) \right\},$$

откуда следует, что $v(t,x) \in H(Q)$.

1.2. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности

В ниже рассматриваемой задаче оптимизации на множестве решений краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) минимизируется функционал

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u(t)\right)dt,\quad \beta>0, \tag{2.1}$$

где $\xi(x)\in H(0,1),\quad q(t,u(t))\in H(0,T)$ - известные функции,. Здесь $q(t,u(t))$ - выпуклая функция относительно функциональной переменной $u(t)$. В этой задаче требуется найти управление $u^0(t)\in H(0,T)$ так, чтобы оно с соответствующим решением $v^0(t,x)$ краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) минимизировало бы функционал (1.2.1). Такие функции $u^0(t)$ и $v^0(t,x)$ называются оптимальным управлением и оптимальным процессом соответственно.

В силу условия (1.1.5) каждому управлению $u(t)$ соответствует единственный управляемый процесс $v(t,x)$. Поэтому, управлению $u(t)+\Delta u(t),$ соответствует функция вида $v(t,x)+\Delta v(t,x)$, где приращение $\Delta v(t,x)$ соответствует приращению $\Delta u(t)$. Приращение функционала (1.2.1), используя методику принципа максимума, представим в следующем виде

$$\Delta J[u]=J\left[u+\Delta u\right]-J[u]=-\int_0^T\Delta\prod\left[t,v(t,x),\omega(t,x),u(t)\right]dt+\int_0^1\Delta v^2(T,x)dx, \tag{1.2.2}$$

где

$$\Delta\prod(t,v,\omega,u)=\prod\left(t,v(t,x),\omega(t,x),u(t)+\Delta u(t)\right)-\prod\left(t,v(t,x),\omega(t,x),u(t)\right),$$

$$\prod(t,v(t,x),\omega(t,x),u(t))=\omega(t,1)f\left[t,u(t)\right]-\beta q^2(t,u(t)), \tag{1.2.3}$$

а функция $\omega(t,x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}\omega_t+\omega_{xx}+\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau=0,\quad 0<x<1,\quad 0\le t<T,\\ \omega(T,x)+2\left[v(T,x)-\xi(x)\right]=0,\ 0<x<1,\\ \omega_x(t,0)=0,\quad \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\ 0\le t<T.,\end{gathered} \tag{1.2.4}$$

которые в совокупности называются сопряженной краевой задачей.

Поскольку область значений управляющей функции является открытым множеством, то из принципа максимума следует, что оптимальное управление должно удовлетворять следующим соотношениям

$$2\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))\, f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = \omega(t,1), \tag{1.2.5}$$

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{q(t,u(t))q_u(t,u(t))}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u > 0, \tag{1.2.6}$$

которые называются условиями оптимальности.

1.3. Решение сопряженной краевой задачи

Будем решать краевую задачу (1.2.4) используем представление

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x)\,. \tag{1.3.1}$$

Установлено, что эта функция будет являться решением задачи (1.2.4), если коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$ определить из соотношений

$$\omega_n'(t) - \lambda_n^2\omega_n(t) = -\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega_n(\tau)d\tau,$$

$$\omega_n(\tau) + 2\left[\nu_n(T) - \xi_n\right] = 0,$$

Этим соотношениям эквивалентно линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\omega_n(t) = \lambda\int_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds - 2e^{-\lambda_n^2(T-t)}[\nu_n(T) - \xi_n], \tag{1.3.2}$$

в котором ядро

$$B_n(s,t) = \int_t^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}K(s,\tau)d\tau \quad \text{и} \quad B_n(s,T) = 0. \tag{1.3.3}$$

Согласно методам теории линейных интегральных уравнений Фредгольма, его решение получим в виде

$$\omega_n(t) = -2\left[\nu_n(T) - \xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right), \tag{1.3.4}$$

Здесь $R_n(s,t,\lambda)$ является резольвентой ядра $B_n(s,t)$ и определяется из следующих соотношений

$$R_n(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t),\quad B_{n,i+1}(s,t)=\int_0^T B_n(\eta,t)B_{n,i}(s,\eta)d\eta,\quad i=1,2,3,...,$$

Для нее справедлива оценка

$$|R_n(s,t,\lambda)|\leq\frac{1}{\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}}\left(\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta\right)^{1/2}.\qquad(1.3.5)$$

Легко проверяется, что построенная функция $\omega(t,x)$ принадлежит гильбертову пространству $H(Q)$.

1.4. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

Условия оптимальности (1.2.5), с учетом условия (1.2.6), позволяет находить оптимальное управление. С этой целью, решение сопряженной краевой задачи подставим в (1.2.5). Поскольку

$$\omega(t,1)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(1)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(1),$$

то, с учетом равенства

$$\nu_n(T)-\xi_n=-h_n+\int_0^T G_n(\tau,\lambda)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau,$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right)-$$

$$-\int_0^T g_n(\tau)\left(e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau,$$

$$G_n(t,\lambda)=z_n(1)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right],$$

имеем

$$\omega(t,1)=-2\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\left[-h_n+\int_0^T G_n(\tau,\lambda)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right],$$

где

$$G_n(t,\lambda)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(1).$$

Тогда, согласно условиям оптимальности (1.2.5)-(1.2.6), относительно оптимального управления имеем следующее нелинейное интегральное уравнение

$$\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))\,f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)\,f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_n,\quad(1.4.1)$$

Из вышеизложенного следует, что в классе функций внешних воздействий $\{\,f\left[t,u(t)\right]\}$, удовлетворяющих второму условию оптимальности (1.2.6), решая нелинейное интегральное уравнение (1.4.1) можно определить оптимальное управление.

Заметим, что условие (1.2.6) является существенным ограничением для функции внешнего воздействия $f\left[t,u(t)\right]$. Далее, разрешимость задачи (1.4.1), (1.2.6), при известной функции $q(t,u(t))$, исследуется при условии удовлетворения функции $f\left[t,u(t)\right]$ ограничению (1.2.6).

Исследование разрешимости нелинейного интегрального уравнения. Для построения решения уравнения (1.4.1), по методу проф. А.Керимбекова, примем

$$\beta q(t,u(t))q_u(t,u(t))\,f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=p(t).\qquad(1.4.2)$$

Лемма 1.1. Пусть для функций $f(t,u(t))$ и $q(t,u(t))$ выполнено условие

$$sup\left|\frac{q_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}\right|\le M_0,\quad\forall t\in[0,T].$$

Тогда функция $p(t)$, определяемая формулой (1.4.2) принадлежит гильбертову пространству $H(0,T)$.

Доказательство. С учетом условия леммы, имеем

$$\int_0^T p^2(t)dt \le \beta^2 \int_0^T \left|\frac{q_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}\right|^2 q^2(t,u(t))dt \le \beta^2 M_0{}^2 \int_0^T q^2(t,u(t))u^2(t)dt < \infty,$$

откуда следует утверждение леммы.

В силу условия (1.2.6), управление $u(t)$ из равенства (1.4.2) можно определять однозначно, т.е. найдется такая функция φ, что

$$u(t) = \varphi(t, p(t), \beta). \qquad (1.4.3)$$

С учетом (1.4.2) и (1.4.3) уравнение (1.4.1) можно переписать в виде

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s, \varphi(s, p(s), \beta)\right] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n\ . \qquad (1.4.4)$$

Это уравнение, введя оператор

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \left[-\int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s, \varphi(s, p(s), \beta)\right] ds \right]. \qquad (1.4.5)$$

перепишем в виде

$$p(t) = G[p(t)] + h(t), \qquad (1.4.4')$$

где

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n \qquad (1.4.6)$$

Далее исследуем операторное уравнение (1.4.4’).

Лемма 1.2. Функция $h(t)$ принадлежит пространству $H(0,T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T h^2(t)dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n \right)^2 dt \le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t,\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt \le$$

$$\le 3 \left\{ \|\xi(x)\|_H^2 + \|\psi(x)\|_H^2 \left[2 + \frac{\lambda K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \|g(t,x)\|_H^2 \left[1 + \frac{\lambda K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} \right] \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right\} < \infty.$$

Лемма 1.3. Всякий элемент пространства $H(0,T)$ отображается оператором $G[p(t)]$ снова в элемент пространства $H(0,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T G^2[p(t)]dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \left[-\int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right]ds \right] \right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t,\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T G_n^2(s,\lambda)ds \int_0^T f^2\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right]ds \right] dt \le$$

$$\le \left[2\left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\right]^2 \cdot \| f[t,\varphi(t,p(t),\beta)] \|_H^2 < \infty$$

$$G[p]$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 1.4. Для того, чтобы оператор $G[p]$, переводящий гильбертово пространство $H(0,T)$ в себя, был сжимающим, достаточно выполнение следующих условий

$$\| f[t,u(t)] - f[t,\bar{u}(t)] \|_{H(0,T)} \le f_0 \| u(t) - \bar{u}(t) \|_{H(0,T)}, \qquad (1.4.7)$$

$$\| \varphi[t,p(t),\beta] - \varphi[t,\bar{p}(t),\beta] \|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \| p(t) - \bar{p}(t) \|_{H(0,T)}. \qquad (1.4.8)$$

$$\gamma = \left[2\left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\right] f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \qquad (1.4.9)$$

Доказательство. Из неравенства

$$\int_0^T \left| [G[p] - G[\bar{p}] \right|^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda)\Big(f[s,\varphi(s,p(s),\beta)] - f[s,\varphi(s,\bar{p}(s),\beta)]\Big)ds \right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t,\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(t,\lambda)ds \int_0^T \Big(f[s,\varphi(s,p(s),\beta)] - f[s,\varphi(s,\bar{p}(s),\beta)]\Big)^2 dsdt \le$$

$$\le\left[2\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right]^2\cdot$$

$$\cdot\| f[t,\varphi(t,p(t),\beta)]-f[t,\varphi(t,\overline{p}(t),\beta)]\|^2_{H(0,T)}<\infty,$$

следует оценка

$$\| G(p)-G(\overline{p})\|_{H(0,T)}\le$$

$$\le\left[2\left(1+\frac{a_0^2K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right]f_0\varphi_0(\beta)\| p(t)-\overline{p}(t)\|_{H(0,T)}\,.$$

Теорема 1.1. При выполнении условий (1.1.5) и (1.4.7)-(1.4.9) уравнение (1.4.4*'*) однозначно разрешимо в пространстве $H(0,T)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия лемм 1.1-1.3. По лемме 1.4 оператор $G(p)$, переводящий полное метрическое пространство $H(0,T)$ в себя, является сжимающим. Поэтому, в силу принципа сжимающих отображений в пространстве $H(0,T)$, для оператора $G(p)$ существует единственная неподвижная точка, которая является решением операторного уравнения (1.4.4*'*).

Для построения решения операторного уравнения (1.4.4’) используем метод последовательных приближений. За нулевое приближение $p_0(t)$ выбираем произвольный элемент гильбертова пространства $H(0,T)$. Последующие приближения определяем по формулам

$$p_n(t)=G[p_{n-1}(t)],\qquad n=1,2,3,...,$$

Известно, что для n-го приближения решения справедлива оценка

$$\|\overline{p}(t)-p_n(t)\|_{H(0,T)}\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\| G[p_0(t)]-p_0(t)\|_{H(0,T)}\,.$$

Функция $\overline{p}(t)$, определяемая соотношением $\overline{p}(t)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(t).$, является точным решением операторного уравнения (1.4.4*'*).

Найденную функцию $\overline{p}(t)$ подставим в (1.4.3) и найдем оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi\left[t, \overline{p}(t), \beta\right],$$

которое для интегрального уравнения (1.4.1) является решением.

1.5. Решение задачи граничного оптимального управления и сходимость его приближений

Зная оптимальное управление $u^0(t)$, оптимальный процесс определяем по следующей формуле

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^0(t) + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds\right)z_n(x),$$

где

$$a_n^0\left(t\right) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n\left(\tau\right) + z_n\left(1\right)f\left[\tau, u^0\left(\tau\right)\right]\right)d\tau. \qquad (1.5.1)$$

Тогда минимальным значением функционала (1.2.1) будет

$$J[u^0(t)] = \int_0^1\left[v^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T q^2(t,u^0(t))dt. \qquad (1.5.2)$$

Таким образом, рассматриваемая задача нелинейной оптимизации имеет полное решение в виде тройки $\left(u^0(t), v^0(t,x), J[u^0(t)]\right)$. Практически вместо точного решения задачи оптимизации находят его k -е приближение $\left(u_k(t),\ v_k(t,x),\ J[u_k(t)]\right)$ и показывают, что оно сходится при $k\to\infty$ к точному решению.

1.5.1. Приближения оптимального управления и их сходимость.

Значение функции оптимального управления на k-том шагу определяем по следующей формуле

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta]. \qquad (1.5.3)$$

Лемма 1.5. Пусть функция $\varphi[t,\vartheta(t),\beta]$ удовлетворяет условию Липщица по функциональной переменной $\vartheta(t)$, т.е.

$$\left\|\varphi[t,\vartheta_1(t),\beta]-\varphi[t,\vartheta_2(t),\beta]\right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta)\left\|\vartheta_1(t)-\vartheta_2(t)\right\|_{H(0,T)}, \quad \varphi_0(\beta)>0. \tag{1.5.4}$$

Тогда k-е приближение для управляющей функции сходится по норме гильбертова пространства $H(0,T)$ к оптимальной управляющей функции $u^0(t)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\begin{gathered}\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)} = \left\|\varphi[t,p^0(t),\beta]-\varphi[t,p_k(t),\beta]\right\|_{H(0,T)} \le \\ \le \varphi_0(\beta)\left\|p^0(t)-p_k(t)\right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[p_0(t)]-p_0(t)\right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.\end{gathered} \tag{1.5.5}$$

1.5.2. Приближения оптимального процесса и их сходимость.

При построении приближений оптимального процесса $v^0(t,x)$ рассмотрим следующие приближения:

m-е приближение по резольвенте оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^0(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds\right)z_n(x),$$

где

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)$$

m-е приближение для резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$;

m, k-е приближение для оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(k)}(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x),$$

где

$$a_n^{(k)}(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)f\left[\tau,u_k(\tau)\right]\right)d\tau.$$

m, k, r - е приближение для оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v_k^{m,r}(t,x) = \sum_{n=1}^{r}\left(a_n^{(k)}(t) + \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) a_n^{(k)}(s)ds \right) z_n(x).$$

Лемма 1.6. *m*-е приближение при $m \to \infty$ сходится по норме пространства *H(Q)* к функции оптимального процесса $v^0(t,x)$.

Доказательство следует из следующих рассуждений

$$\left\| v^0(t,x) - v^m(t,x) \right\|_{H(Q)}^2 = \int_0^T\int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \int_0^T (R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda)) a_n^0(s)ds) z_n(x))^2 dxdt =$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \int_0^T (R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda)) a_n^0(s)ds \right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 \int_0^T \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s) \right)^2 ds \int_0^T \left(a_n^0(s) \right)^2 dsdt \le$$

$$\le C(\lambda)\left(|\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_1^2}} \right)^{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

где $C(\lambda)$ - ограниченная положительная постоянная. Это соотношение устанавливается непосредственно вычислением и имеет место, т.к.

$$|\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_1^2}} < 1.$$

Лемма 1.7. Пусть функция $f[t,u(t)]$ удовлетворяет условию Липщица по функциональной переменной $u(t)$, т.е.

$$\| f[t,u_1(t)] - f[t,u_2(t)] \|_{H(0,T)} \le f_0 \| u_1(t) - u_2(t) \|_{H(0,T)}. \qquad (1.5.6)$$

Тогда m, k-е приближение при $k \to \infty$ сходится по норме гильбертова пространства $H(Q)$ к $v^m(t,x)$ для любого $m = 1,2,3,...$.

Доказательство. Непосредственными вычислениями имеем соотношение

$$\left\| v^m(t,x) - v_k^m(t,x) \right\|_{H(Q)}^2 =$$

$$= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n^0(t) - a_n^k(t) \right) + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) \left(a_n^0(s) - a_n^k(s) \right) ds \right]^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[a_n^0(t) - a_n^k(t) \right]^2 + \lambda^2 \int_0^T \left(R_n^m(t,s,\lambda) \right)^2 ds \int_0^T \left(a_n^0(s) - a_n^k(s) \right)^2 ds \right\} dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} z_n(1) \Big(f\left[\tau, u^0(\tau)\right] - f\left[\tau, u_k(\tau)\right] \Big) d\tau \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)\, ds \int_0^T \left(\int_0^s e^{-\lambda_n (s-\tau)} z_n(1) \Big(f\left[\tau, u^0(\tau)\right] - f\left[\tau, u_k(\tau)\right] \Big) \right)^2 d\tau ds \right\} dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 (T-\tau)} d\tau \cdot \int_0^T \Big(f\left(\tau, u^0(\tau)\right) - f\left(\tau, u_k(\tau)\right) \Big)^2 d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \cdot \int_0^T 2\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 (T-\tau)} d\tau \int_0^T \Big(f\left(\tau, u^0(\tau)\right) - f\left(\tau, u_k(\tau)\right) \Big)^2 d\tau ds \right\} dt \le$$

$$\le 2T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot \left\| f\left(\tau, u^0(\tau)\right) - f\left(\tau, u_k(\tau)\right) \right\|_{H(0,T)}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \frac{1}{\lambda_n^2} \left\| f\left(\tau, u^0(\tau)\right) - f\left(\tau, u_k(\tau)\right) \right\|_{H(0,T)}^2 \right\} \le$$

$$\le 2T \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \left\| f\left(\tau, u^0(\tau)\right) - f\left(\tau, u_k(\tau)\right) \right\|_{H(0,T)}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \le$$

$$\le 2T \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0^2 \left\| u^0(\tau) - u_k(\tau) \right\|_{H(0,T)}^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

при любом фиксированном $m = 1, 2, 3, \ldots$, из которого следует утверждение леммы.

Лемма 1.8. k,m,r - е приближение при $r \to \infty$ сходится по норме гильбертова пространства $H(Q)$ к функции $v_k^m(t,x)$ для любого k, m = 1,2,3,… .

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем

$$\left\| v_k^m(t,x) - v_k^{m,r}(t,x) \right\|_H^2 = \int_0^T \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[a_n^k(t) + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) a_n^k(s) ds \right] z_n(x) - \right.$$

$$-\sum_{n=1}^{r}\left[a_n^k(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds\right]z_n(x)\Bigg)^2 dt \le$$

$$=\int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty}\left[a_n^k(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds\right]^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty}\left[\left(a_n^k(t)\right)^2+\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\int_0^T\left(a_n^k(s)\right)^2 ds\right]dt \le$$

$$\le 6\int_0^T 3\sum_{n=r+1}^{\infty}\Bigg\{e^{-2\lambda_n^2 t}\psi_n^2+2\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}d\tau\int_0^T g_n^2(\tau)d\tau+$$

$$+2\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}d\tau\cdot\int_0^T f^2\left(\tau,u_k(\tau)\right)d\tau\Bigg\}dt \le$$

$$\le 6\sum_{n=r+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\lambda_n^2}\left\|\psi(x)\right\|^2_{H(0,1)}+T\cdot\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T g_n^2(\tau)d\tau+\frac{1}{\lambda_n^2}\left\|f\left(t,u_k(t)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\right)\right\}=$$

$$=6\left\{\frac{1}{2}\left\|\psi(x)\right\|^2_{H(0,1)}+T\left\|g(t,x)\right\|^2_{H(Q)}+T\left\|f\left(t,u_k(t)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\right\}\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\le$$

$$\le C_0\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$$

где $C_0=\dfrac{6}{\pi^2}\left\{\dfrac{1}{2}\left\|\psi(x)\right\|^2_{H(0,1)}+T\left\|g(t,x)\right\|^2_{H(Q)}+T\left\|f\left(t,u_k(t)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\right\}$,

как остаточный член сходящегося ряда, откуда следует справедливость утверждения леммы.

Теорема 1.2. *k,m,r* - е приближение при $k,m,r\to\infty$ сходится по норме гильбертова пространства $H(Q)$ к функции оптимального процесса $v^0(t,x)$.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы следует из лемм 1.6 – 1.8, а также из того, что

$$\left\|v^0(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$

$$+\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[k,r,m\to\infty]{}0.$$

1.5.3. Приближения минимального значения функционала и их сходимость.

Соответственно с приближениями $v^m(t,x)$, $v_k^m(t,x)$, $v_k^{m,r}(t,x)$ для функции оптимального процесса $v^0(t,x)$ рассмотрим для функционала $J[u^0(t)]$ следующие виды приближенного нахождения минимального его значения:

m - е приближение по резольвенте для минимального значения функционала определяем по следующей формуле

$$J_m[u^0(t)] = \int_0^1 \left[v^m(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u^0(t)\right) dt;$$

m, k - е приближение для минимального значения функционала определяем по следующей формуле

$$J_m[u_k(t)] = \int_0^1 \left[v_k^m(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u_k(t)\right) dt;$$

m, k, r - е приближение для минимального значения функционала определяем по следующей формуле

$$J_m^r[u_k(t)] = \int_0^1 \left[v_k^{m,r}(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u_k(t)\right) dt.$$

Лемма 1.9. Приближение $J_m[u^0(t)]$ сходится при $m \to \infty$ к значению функционала $J[u^0(t)]$.

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем

$$\left|J[u^0(t)] - J_m[u^0(t)]\right| = \int_0^1 \{[v^0(T,x) - \xi(x)]^2 - [v^m(T,x) - \xi(x)]^2\} dx \le$$

$$\le \left\|v^0(T,x) + v^m(T,x) - 2\xi(x)\right\|_{H(0,1)} \left\|v^0(T,x) - v^m(T,x)\right\|_{H(0,1)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы.

Леммы 1.10. Приближение $J_m[u_k(t)]$ сходится при $k \to \infty$ к значению функционала $J_m[u^0(t)]$ для любого $m = 1,2,3,\ldots$.

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем

$$\left|J_m[u^0(t)]-J_m[u_k(t)]\right|=$$

$$=\int_0^1\{[\nu^m(T,x)-\xi(x)]^2-[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)]^2+\beta\int_0^T\left((u^0(t))^2-u_k^2(t)\right)dt\}dx\leq$$

$$\leq\left\|\nu^m(T,x)+\nu_k^m(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\left\|\nu^m(T,x)-\nu_k^m(T,x)\right\|_{H(0,1)}+$$

$$+\beta\left\|u^0(t)+u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 1.11. Приближение $J_m^r[u_k(t)]$ сходится при $r\to\infty$ к значению функционала $J_m[u_k(t)]$ для любых k,m = 1,2,3,…

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем

$$\left|J_m[u_k(t)]-J_m^r[u_k(t)]\right|m=\int_0^1\{[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)]^2-[\nu_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)]^2\}dx\leq$$

$$\leq\left\|\nu_k^m(T,x)+\nu_k^{m,r}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\left\|\nu_k^m(T,x)-\nu_k^{m,r}(T,x)\right\|_{H(0,1)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы.

Теорема 1.3. Приближение $J_m^r[u_k(t)]$ при $m,k,r\to\infty$ сходится к значению функционала $J^0[u(t)]$.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы следует из лемм 1.9 – 1.11, а также из того, что

$$\left|J[u^0(t)]-J_m^r[u_k(t)]\right|\leq\left|J[u^0(t)]-J_m[u^0(t)]\right|+\left|J_m[u^0(t)]-J_m[u_k(t)]\right|+$$

$$+\left|J_m[u_k(t)]-J_m^r[u_k(t)]\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0.$$

Выводы по первой главе

Исследованы управляемые тепловые процессы, описываемые фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа. В задаче оптимизации граничное управление нелинейно входит в краевое условие третьего рода и минимизируется квадратичный функционал на множестве решений краевой задачи. Изложен алгоритм построения слабо обобщенных решений основной и сопряженной краевых задач, разработанный на основе интегральных тождеств, эквивалентных краевым задачам. Получены условия оптимальности в виде равенства и в виде дифференциального неравенства, не содержащего решения сопряженной краевой задачи. Относительно оптимального граничного управления получено нелинейное интегральное уравнение, и найдены достаточные условия его однозначной разрешимости. Получены полное решение задачи нелинейной оптимизации и доказана сходимость его приближений.

ГЛАВА II. О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Во второй главе исследована задача нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями, с граничным управлением при минимизации кусочно-линейного функционала. Рассматриваемая задача обладает ряд специфическими свойствами, например, оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения определенного знака в промежутке $[0, T]$. Это обстоятельство сильно влияет на существование решения задачи нелинейной оптимизации. В этом случае для существования решения требуется налагать дополнительные условия на исходные данные задачи. Разработан алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации и их приближений. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению по оптимальному управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

2.1 Постановка задачи нелинейной оптимизации и условия оптимальности. На практике встречаются задачи минимизации кусочно-линейного функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u(t)| dt, \beta > 0, \tag{2.1.1}$$

где $\xi(x) \in H(0,1)$ - заданная функция, а функция $v(t,x)$ - решение краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3), т.е. нужно найти такое управление $u^0(t) \in H(0,T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $v^0(t,x)$ краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) доставляет наименьшее возможное значение функционалу (2.1.1).

При этом $u^0(t)$ называется оптимальным управлением, а $v^0(t,x)$ - оптимальным процессом.

В силу условия (1.1.5) управляемый процесс $v(t,x)$ однозначно определяется заданием управляющей функции $u(t)$. Поэтому приращению $\Delta u(t)$ и функции управления $u(t)+\Delta u(t)$, соответствуют соответственно приращение $\Delta v(t,x)$ и функция вида $v(t,x)+\Delta v(t,x)$. Используя методику вывода принципа максимума для приращения функционала (2.1.1) получим следующее соотношение

$$\Delta J[u] = J\left[u+\Delta u\right] - J[u] = -\int_0^T \Delta\Pi\left[t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)\right]dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx, \quad (2.1.2)$$

где

$$\Delta\Pi(t,v,\omega,u) = \Pi\left(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)+\Delta u(t)\right) - \Pi\left(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)\right),$$

$$\Pi(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)) = \omega(t,1) f\left[t, u(t)\right] - 2\beta\left|u(t)\right|, \quad (2.1.3)$$

причем функция $\omega(t,x)$ определяется из соотношений

$$\omega_t + \omega_{xx} + \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau = 0, \quad 0<x<1, \quad 0\le t<T,$$

$$\omega(T,x) + 2\left[v(T,x) - \xi(x)\right] = 0, \ 0<x<1,$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \quad \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \ 0\le t<T. \quad (2.1.4)$$

Нетрудно видеть, что на оптимальном управлении выполняются следующие соотношения

$$2\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] sign\ u(t) = \omega(t,1), \quad (2.1.5)$$

$$\frac{f_{uu}\left[t,u(t)\right] sign\ u(t)}{f_u\left[t,u(t)\right]} < 0, \quad (2.1.6)$$

называемые условиями оптимальности.

Нетрудно поверить, что функция вида

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t) z_n(x) \quad (2.1.7)$$

будет решением сопряженной краевой задачи (2.1.4), если коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$, находить как решения следующей задачи

$$\omega_n'(t)-\lambda_n^2\omega_n(t)=-\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega_n(\tau)d\tau,$$

$$\omega_n(\tau)+2\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]=0,$$

.

Эта задача может быть преобразована к интегральному неоднородному уравнению Фредгольма II рода

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds-2e^{-\lambda_n^2(T-t)}[\nu_n(T)-\xi_n], \tag{2.1.8}$$

где

$$B_n(s,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}K(s,\tau)d\tau \quad \text{и} \quad B_n(s,T)=0. \tag{2.1.9}$$

Функция вида

$$\omega_n(t)=-2\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right), \tag{2.1.10}$$

где $R_n(s,t,\lambda)$ - резольвента ядра $B_n(s,t)$, определяется соотношениями

$$R_n(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t),\quad B_{n,i+1}(s,t)=\int_0^T B_n(\eta,t)B_{n,i}(s,\eta)d\eta,\quad i=1,2,3,...,$$

причем

$$|R_n(s,t,\lambda)|\le\frac{1}{\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}}\left(\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta\right)^{1/2}, \tag{2.1.11}$$

является решением нелинейного интегрального уравнения (2.1.8).

Легко показать, что построенная функция $\omega(t,x)$ принадлежит пространству $H(Q)$.

2.2. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления и его особенность

При выполнении условия (2.1.6), оптимальное управление будем находить согласно условию (2.1.5). Это условие, с учетом следующих равенств

$$\omega(t,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(1) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu_n(T) - \xi_n \right] \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T R_n(s,t,\lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right) z_n(1),$$

$$\nu_n(T) - \xi_n = -h_n + \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau,$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) -$$

$$-\int_0^T g_n(\tau) \left(e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} + \lambda \int_\tau^T R_n(T,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau,$$

$$G_n(t,\lambda) = z_n(1) \left[e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T,\tau,\lambda) e^{-\lambda_n^2(\tau-t)} d\tau \right],$$

а также равенства

$$\omega(t,1) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n(t,\lambda) \left[-h_n + \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau \right],$$

где

$$\overline{G}_n(t,\lambda) = \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T R_n(s,t,\lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right) z_n(1).,$$

приводит к следующему нелинейному интегральному уравнению

$$\beta f_u^{-1}\left[t, u(t)\right] sign\ u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s, u(s)\right] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n . \qquad (2.2.1)$$

Данное нелинейное интегральное уравнение требует дополнительных исследований.

Уравнение (2.2.1) – интегральное уравнение типа Фредгольма, которое не имеет свойства продолжаемости решения на $[0,T]$. Поэтому при исследовании однозначной разрешимости уравнения (2.2.1) рассматриваем следующие задачи:

Задача 1. Если $u(t) > 0,\ t \in [0,T]$, то «оптимальное» управление определяется как решение положительного знака интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}[t,u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) f[s,u(s)] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n\,, \tag{2.2.2}$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$f_u[t,u(t)] \left(\frac{1}{f_u[t,u(t)]} \right)_u > 0,\ t \in [0,T]. \tag{2.2.3}$$

Задача 2. Если $u(t) < 0,\ t \in [0,T]$, то «оптимальное» управление определяется как решение отрицательного знака интегрального уравнения

$$-\beta f_u^{-1}[t,u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) f[s,u(s)] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda) h_n\,, \tag{2.2.4}$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$f_u[t,u(t)] \left(\frac{1}{f_u[t,u(t)]} \right)_u < 0,\ t \in [0,T]. \tag{2.2.5}$$

Заметим, что условия (2.2.3) и (2.2.5) не могут быть выполнены одновременно. Таким образом, оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение либо задачи 1, либо задачи 2. Обозначим через – $u^+(t)$ решение задачи 1, а через – $u^-(t)$ решение задачи 2. Оптимальность управлений $u^+(t)$ и $u^-(t)$ определяется из условий:

$$u^0(t) = \begin{cases} u^+(t), & u(t) > 0,\ J[u^+(t)] < J[u^-(t)]; \\ u^-(t), & u(t) < 0,\ J[u^-(t)] < J[u^+(t)]. \end{cases}$$

Задача 1. Рассмотрим интегральное уравнение (2.2.2) с дополнительным условием (2.2.3). Относительно дополнительного условия (2.2.3) будем предполагать, что функция $f[t,u(t)]$ принадлежит классу функций удовлетворяющих условию (2.2.3). Тогда решением задачи 1 может быть любая функция положительного знака на отрезке $[0,T]$, удовлетворяющая интегральному уравнению (2.2.2).

Сначала исследуем вопросы существования единственного решения уравнения (2.2.2). С этой целью положим

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=p(t). \tag{2.2.6}$$

Согласно условию (2.2.3), из (2.2.6) функция $u(t)$ определяется однозначно, т.е. существует функция $\varphi(\cdot)$, такая что

$$u(t)=\varphi\left[t,p(t),\beta\right]. \tag{2.2.7}$$

В силу (2.2.6) и (2.2.7) уравнение (2.2.2) перепишем в виде операторного уравнения

$$p(t)=G\left[p(t)\right], \tag{2.2.8}$$

где

$$G\left[p(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\left[h_n-\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,\varphi\left(s,p(s),\beta\right)\right]ds\right]. \tag{2.2.9}$$

Далее, непосредственными вычислениями доказаны следующие леммы.

Лемма 2.1. Если для любого $u(t)\in H(0,T)$ функция $f\left[t,u(t)\right]$ является элементом пространства $H(0,T)$, то $p(t)$, определяемая формулой (2.2.6), является элементом пространства функций суммируемых в степени σ, т.е. $L_\sigma(0,T),\ 1\le\sigma<\infty$.

Отметим, что мы будем пользоваться значением $\sigma=2$, т.е. $L_2(0,T)=H(0,T)$.

Лемма 2.2. Пространство $H(0,T)$ посредством оператора $G\left[p(t)\right]$ переводится в себя.

Лемма 2.3. Пусть функции $f\left[t,u(t)\right]$ и $\varphi\left[t,p(t),\beta\right]$ удовлетворяет следующим условиям Липщица

$$\left\|f\left[t,u(t)\right]-f\left[t,\bar{u}(t)\right]\right\|_{H(0,T)}\le f_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_{H(0,T)},\quad f_0>0; \tag{2.2.10}$$

$$\left\|\varphi\left[t,p(t),\beta\right]-\varphi\left[t,\bar{p}(t),\beta\right]\right\|_{H(0,T)}\le\varphi_0(\beta)\left\|p(t)-\bar{p}(t)\right\|_{H(0,T)},\quad \varphi_0(\beta)>0. \tag{2.2.11}$$

и пусть выполняется условие сжатия

$$\gamma = 2\left[1+\frac{2\lambda_1^2}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1,. \qquad (2.2.12)$$

Тогда $G[p]$ будет являться оператором сжатия.

Теорема 2.1. При выполнении условий (1.1.5), (2.2.3), (2.2.10)-(2.2.12), для операторного уравнения (2.2.8) в пространстве $H(0,T)$ существует не более одного решения.

Доказательство. $H(0,T)$ - полное метрическое пространство, а $G[p]$ оператор сжатия, переводящий пространство $H(0,T)$ в себя. Поэтому, согласно принципу сжатия операторное уравнение (2.2.8) в пространстве $H(0,T)$ имеет не более одного решения.

Используя метод последовательных приближений, по формуле

$$p_k(t)=G\left[p_{k-1}(t)\right],\quad k=1,2,3,\ldots,$$

где $p_0(t)$, принадлежащее $H(0,T)$, выбирается произвольным образом, находим *k*-е приближение точного решения $\tilde{p}(t)$ операторного уравнения (2.2.8), которое определяется как предел

$$\tilde{p}(t)=\lim_{k\to\infty}p_k(t),$$

и удовлетворяет оценке

$$\left\|\tilde{p}(t)-p_k(t)\right\|_{H(0,T)}\leq\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_{H(0,T)}. \qquad (2.2.13)$$

Далее, найденное $\tilde{p}(t)$ подставляя в (2.2.7), получим функцию

$$u^+(t)=\varphi\left[t,\tilde{p}(t),\beta\right],$$

которая при выполнении условия $u(t)>0,\ t\in[0,T]$, является решением задачи 1. Отметим, что выполнение условия $u(t)>0,\ t\in[0,T]$ может быть достигнута, если налагать на параметры задачи дополнительные требования.

Аналогично решается задача 2, в этом случае условие $u^{-}(t)<0,\ \ t\in[0,T]$ может быть выполнено, если исходные параметры задачи выбрать согласно следующим условиям

$$\gamma=2\left[1+\frac{2\lambda_1^2}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1, \tag{2.2.14}$$

$$u^{-}(t)=\varphi\left[t,\tilde{p}(t),\beta\right]<0.$$

Таким образом, задача оптимизации при минимизации кусочно–линейного функционала имеет специфические особенности.

2.3. Решение задачи граничного оптимального управления и сходимость его приближений

Предположим, что решение задачи оптимизации найдено в виде тройки $\left(u^0(t),\,\nu^0(t,x),\,J\left[u^0(t)\right]\right)$. Здесь

$$u^0(t)=\varphi\left[t,\tilde{p}(t),\beta\right] \tag{2.3.1}$$

– оптимальное управление,

$$\nu^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right]z_n(x), \tag{2.3.2}$$

где

$$a_n^0(t)=e^{-\lambda_n^2t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)f\left[\tau,u^0(\tau)\right]\right)d\tau,$$

– оптимальный процесс,

$$J\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[\nu^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u^0(t)\right|dt \tag{2.3.3}$$

– минимальное значение функционала.

Приближения функции оптимального управления (2.3.1) определяем по следующей формуле

$$u_m(t)=\varphi\left[t,p_m(t),\beta\right],\ \ m=1,2,3,\ldots, \tag{2.3.4}$$

где $p_m(t)$ определяется из соотношений $p_m(t)=G\left[p_{m-1}(t)\right]$, $m=1,2,3,\ldots$, $G[\cdot]$ - известный оператор и справедлива следующая оценка

$$\left\|\tilde{p}(t)-p_m(t)\right\|_{H(0,T)}\leq\frac{\gamma^m}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_{H(0,T)},\quad \tilde{p}(t)=\lim_{m\to\infty}p_m(t).$$

В формулах (2.3.1) и (2.3.4) функция $\varphi(\cdot)$ – известная функция и по функциональной переменной $p(t)$ удовлетворяет условию Липщица

$$\left\|\varphi\left[t,p(t),\beta\right]-\varphi\left[t,\bar{p}(t),\beta\right]\right\|_{H(0,T)}\leq\varphi_0(\beta)\left\|p(t)-\bar{p}(t)\right\|_{H(0,T)},\quad \varphi_0(\beta)>0. \quad (2.3.5)$$

Далее, сходимость приближений для функции оптимального управления следует из неравенства

$$\left\|u^0(t)-u_m(t)\right\|_{H(0,T)}=\left\|\varphi\left[t,\tilde{p}(t),\beta\right]-\varphi\left[t,p_m(t),\beta\right]\right\|_{H(0,T)}\leq$$

$$\leq\varphi_0(\beta)\left\|\tilde{p}(t)-p_m(t)\right\|_{H(0,T)}\leq\frac{\gamma^m}{1-\gamma}\varphi_0(\beta)\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_{H(0,T)},\quad \varphi_0(\beta)>0,$$

где $0<\gamma<1$, $p_0(t)$ – известная функция пространства $H(0,T)$.

Относительно приближения для функции оптимального процесса рассмотрим следующие приближения:

1. m – приближение для функции оптимального процесса по резольвенте определяем по следующей формуле

$$v^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right]z_n(x), \quad (2.3.6)$$

где $R_n^m(t,s,\lambda)$ – m-е приближение для резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$;

2. $m,\ k$ – приближение для функции оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds+a_n^k(t)\right]z_n(x), \quad (2.3.7)$$

где

$$a_n^k(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)f\left[\tau,u_k(\tau)\right]\right)d\tau;$$

3. $m,\ k,\ r$ – приближение для функции оптимального процесса определяем по следующей формуле

$$v_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)ds+a_n^k(t)\right]z_n(x). \qquad (2.3.8)$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие соотношения:

1. $\left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le C(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$, т.к.

$$|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}<1,\ C(\lambda)>0;$$

2. $\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le$

$$\le\sqrt{2T\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0}\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

$\forall\ m=1,2,3,...;$

3. $\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le C_0\displaystyle\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2\pi^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$

$\forall\ m,\ k=1,2,3,...,\ C_0>0,$

как остаточный член сходящегося ряда.

Далее, из соотношения

$$\left\|v^0(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le$$
$$\le\left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)+v^m(t,x)-v_k^m(t,x)+v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le$$
$$\le\left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$
$$+\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$$

следует сходимость приближения $v_k^{m,r}(t,x)$, которое может быть использовано на практике, к функции оптимального процесса $v^0(t,x)$.

Относительно минимального значения функционала рассмотрим следующие приближения:

1. m – приближение для минимального значения функционала, соответствующее процессу $v^m(t,x)$, определяем по следующей формуле

$$J_m\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[v^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u^0(t)\right|dt; \qquad (2.3.9)$$

2. m,k – приближение для минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_k^m(t,x)$, определяем по следующей формуле

$$J_m\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[v_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u_k(t)\right|dt, \qquad (2.3.10)$$

3. m,k,r – приближение для минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_k^{m,r}(t,x)$, определяем по следующей формуле

$$J_m^r\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[v_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u_k(t)\right|dt. \qquad (2.3.11)$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие соотношения:

1. $\left|J\left[u^0(t)\right]-J_l\left[u^0(t)\right]\right|\le C_1\left\|v^0(T,x)-v_l(T,x)\right\|_{H(0,1)}\xrightarrow[l\to\infty]{}0;$
2. $\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|\le C_2\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$

$$+C_3\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[m,k\to\infty]{}0;$$

3. $\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le C_4\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ – некоторые постоянные.

Далее, из следующих рассуждений

$$
\begin{aligned}
&\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le\\
&\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]+J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]+J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le\\
&\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right|+\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|+\\
&\qquad\qquad+\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0
\end{aligned}
$$

следует сходимость приближения $J_m^r\left[u_k(t)\right]$, которое может быть использовано на практике, к минимальному значению функционала $J\left[u^0(t)\right]$.

Выводы по второй главе

Исследованы управляемые тепловые процессы, описываемые фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа. В задаче оптимизации граничное управление нелинейно входит в краевое условие третьего рода и минимизируется кусочно-линейный функционал на множестве решений краевой задачи. Получены условия оптимальности в виде равенства и в виде дифференциального неравенства, не содержащего решения сопряженной краевой задачи. Относительно оптимального граничного управления получено нелинейное интегральное уравнение специфического вида, которое имеет решение лишь определенного знака (положительного или отрицательного на всем промежутке от 0 до *T*). Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации. Построены приближения решений задачи оптимизации, и доказана их сходимость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы управляемые тепловые процессы, описываемые фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа. В задаче оптимизации граничное управление нелинейно входит в краевое условие третьего рода и на множестве решений краевой задачи минимизируются квадратичный и кусочно-линейный функционалы. Изложен алгоритм построения слабо обобщенных решений основной и сопряженной краевых задач, разработанный на основе интегральных тождеств, эквивалентных краевым задачам. Получены условия оптимальности в виде равенства и в виде дифференциального неравенства, не содержащего решения сопряженной краевой задачи. Относительно оптимального граничного управления в случае минимизации квадратичного функционала получено нелинейное интегральное уравнение, а в случае минимизации кусочно-линейного функционала получено нелинейное интегральное уравнение специфического вида, которое имеет решение лишь определенного знака (положительного или отрицательного на всем промежутке от 0 до T). Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации. Получено полное решение задачи нелинейной оптимизации и доказана сходимость его приближений.

Полученные результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами и могут быть использованы при разработке конструктивных методов решения нелинейных задач оптимизации процессов, описываемых фредгольмово или вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями параболического или гиперболического типов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Авдонин С.А.** Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент [Текст]/ С.А. Авдонин, С.А. Иванов. – Киев: УМК ВО, 1989. – 244 с.
2. **Алексеев Б.В.** Физическая газодинамика реагирующих сред [Текст]/ Б.В. Алексеев, А.М. Гришин. – М.: Высшая школа, 1985. – 464 с.
3. **Арман Ж.Л.** Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций [Текст]/ Ж.Л. Арман. – М.: Мир, 1977. – 142 с.
4. **Алиферов В.В.** О приближенном решении задачи с точечными и граничными управлениями [Текст]/ В.В. Алиферов, Ы. Каимкулов // Математические методы оптимизации систем с распределенными параметрами. – Фрунзе: Илим, 1975. –С.32-48.
5. **Аргучинцев А.В.** К поиску оптимальных граничных управлений в двумерных полулинейных гиперболических уравнениях [Текст]/ А.В. Аргучинцев // Модели и методы исследования операций. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – С. 50.
6. **Аргучинцев А.В.** Оптимизация гиперболических систем с интегральными ограничениями на граничные управления [Текст]/ А.В. Аргучинцев // Изв. вузов. Математика. – 2004, №1. – С. 10-17.
7. **Аргучинцев А.В.** Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения [Текст]/ А.В. Аргучинцев // Изв. вузов. Математика. – 2002, №12. – С. 10-17.
8. **Аргучинцев А.В.** Оптимизация полулинейных гиперболических систем с гладкими граничными управлениями [Текст]/ А.В. Аргучинцев, О.А. Крутикова // Изв. вузов. Математика. – 2001, №2. – С. 3-12.

9. **Аргучинцев А.В.** Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем первого порядка [Текст]/ А.В. Аргучинцев // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004, №5. – С. 42-48.
10. **Аргучинцев А.В.** Оптимизация гиперболических систем с управляемыми начально-краевыми условиями в виде дифференциальных связей [Текст]/ А.В. Аргучинцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004, №2. – С. 287-296.
11. **Асанова Ж.К.** Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление процессом теплопередачи [Текст]: автореф.дис..., канд.физ-мат.наук: 01.01.02 / Ж.К. Асанова. – Ош, 2012. – 18с.
12. **Бабат Г.И.** Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение – 2-е изд. [Текст]/ Г.И. Бабат. – М.-Л.: Энергия, 1965. – 552 с.
13. **Баетов А.К.** Приближенные решения задач нелинейной оптимизации колебательных процессов [Текст]: автореф.дис..., канд.физ-мат.наук: 01.01.02 / А.К. Баетов. – Бишкек, 2014. – 26с.
14. **Будак Б.М.** Кратные интегралы и ряды [Текст]/ Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1967. – 607 с.
15. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами [Текст]/ А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
16. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами [Текст]/ А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
17. **Бутковский А.Г.** Управление системами с распределенными параметрами [Текст]: обзор/ А.Г. Бутковский // Автоматика и телемеханика. – 1979, №11. –С. 16-65.
18. **Бутковский А.Г.** Характеристики систем с распределенными параметрами [Текст]/ А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

19. **Бутковский А.Г.** Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами [Текст]/ А.Г. Бутковский, Л.М. Пустыльников. – М.: Наука, 1980. –384 с.
20. **Васильева А. Б.** Интегральные уравнения [Текст]/ А.Б Васильева, Н.А. Тихонов. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 156 с.
21. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач [Текст]/ Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
22. **Верлань А.Ф.** Математическое моделирование непрерывных динамических систем [Текст]/ А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с.
23. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики [Текст]/ В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. –512 с.
24. **Владимиров В.С.** Математические задачи односкоростной теории переноса частиц [Текст]/ В.С. Владимиров. // Труды МИАН. – 1961, Т.61. – С.3-158.
25. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст]/ В. Вольтера. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
26. **Volterra V**. Theory Of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations [Текст]/ V. Volterra. – New York: Published by Dover Publications, 1959. – 304 p.
27. **Volterra V.** Sulle equazioni della elettrodinamica [Текст]/ V. Volterra. // Rend. Accad. dei Lincei. – 1909, №18 (5). – P. 203-211.
28. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц [Текст]/ Ф.Р. Гантмахер. – М.: Госуд. изд-во техн.-теоретич. лит., 1957. – 491 с.
29. **Егоров А.И.** О приближенном решении одной задачи оптимального управления [Текст]/ А.И. Егоров, Р. Рафатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972, Т.12, №4. – С. 943-956.
30. **Егоров А.И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами [Текст]/ А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

31. **Егоров А.И.** Оптимальное управление линейными системами [Текст]/ А.И. Егоров. – Киев: Выща школа, Головное изд-во, 1988. – 278 с.

32. **Егоров А.И.** Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии [Текст]/ А.И. Егоров Р. Рафатов. – Фрунзе: Илим, 1990. – 336 с.

33. **Егоров А.И.** Основы теории управления [Текст]/ А.И. Егоров. – М.: Физматлит., 2004. – 504 с.

34. **Evans G.C.** Sull equazione integro-differenziale di tipo parabolico [Текст]/ G.C. Evans // Rend. Accad. dei Lincei. – 1912, №21(5), – P. 25-31.

35. **Ильин В.А.** Независимость оптимальных граничных управлений колебаниями струны от выбора точки согласования начальных и финальных условий [Текст]/ В.А. Ильин // Доклады РАН. – 2008, Т.420, №1. – С. 18-23.

36. **Ильин В.А.** Теоремы о единственности обобщенных решений четырех смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями [Текст]/ В.А. Ильин // Доклады РАН. – 2008, Т. 420, №2. – С. 162-165.

37. **Ильин В.А.** Оптимизация граничного управления упругой силой на двух концах струны [Текст]/ В.А. Ильин // Доклады АН. – 2005, Т. 402, №2. –С. 163-169.

38. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ [Текст]/ Л.В.Канторович, Г.П. Акилов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

39. **Кадиримбетова А.К**. Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А.Керимбеков, Р.Ж.Наметкулова // Механика и моделирование процессов технологии.– 2012, №2. – С. 79-86.

40. **Кадиримбетова А.К**. О разрешимости задачи нелинейного граничного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-

дифференциальным уравнением [Текст]/ А.Керимбеков // Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец.вып.– 2013, №1. – С. 168-172.

41. **Кадиримбетова А.К.** Решение одной задачи теории нелинейных интегральных уравнений. [Текст]/ А.Керимбеков // Вестник ОшГУ. Серия естеств. наук. Спец.вып.– 2013, №1. – С. 173-176.

42. **Кадиримбетова А.К.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями. [Текст]/ Керимбеков А.К., Наметкулова Р.Ж. // Тезисы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», –2013. – С. 50.

43. **Kadirimbetova A.K.** On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations. [Текст]/ A. Kerimbekov // Abstract book. Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics, 11-13 September, Shymkent (Kazakhstan). – Shymkent, 2014. – P.119

44. **Кадиримбетова А.К**. Приближенное решение задачи нелинейного граничного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А.К.Кадиримбетова // Механика и технологии.– 2015, №1. – С. 34-42.

45. **Кадиримбетова А.К.** Интегральное уравнение оптимального управления в задаче оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями. [Текст]/ А.Керимбеков // Вестник АРГУ им. К. Жубанова.– 2015, №1. – С. 173-178.

46. **Кадиримбетова А.К**. Условия разрешимости интегрального уравнения в задаче управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А.К.Кадиримбетова // Вестник КРСУ им. Б.Н. Ельцина. – Бишкек, 2015. Т.15, №5. –С.74-76.

47. **Кадиримбетова А.К**. Приближенное решение задачи управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-

дифференциальными уравнениями [Текст]/ А.К.Кадиримбетова // Вестник КРСУ им. Б.Н. Ельцина. – Бишкек, 2015. Т.15, №5. –С.71-73.

48. **Кадиримбетова А.К.** Об одной задаче теории нелинейных интегральных уравнений [Текст]/ А.К.Кадиримбетова // Материалы республиканской научно-практической конференции магистрантов, докторантов и молодых ученых на тему: «Наука и современность - 2015», посвященный реализации Послания Президента РК народу Казахстана «Нұрлы жол-путь в будущее», 13 марта 2015.- Тараз, 2015. Т.2. –С.108-111.

49. **Кадиримбетова А.К.** Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Известия ИГУ, –2016, Т.16, сер. «Математика» – С. 50-61.

50. **Кадиримбетова А.К.** Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмовым интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Известия ИГУ, –2016, Т.17, сер. «Математика» – С.

51. **Kadirimbetova A.** On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls [Текст] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, R. Nametkulova, A. Kadirimbetova // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal - 2016, Vol. 10, No. 1, P. 215-223.

52. **Керимбеков А.** Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами [Текст]: дис..., д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.Керимбеков –Бишкек, 2003. –224 с.

53. **Керимбеков А.** О разрешимости задачи «слежения» при нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков // Материалы Кыргызской секции IX Международного симпозиума «Фундаментальные и прикладные проблемы науки». РАН, Москва, 11-13 сентября, – 2014, Т.

7. – С. 90-99.

54. **Керимбеков А.** О разрешимости задачи нелинейного оптимального управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков // Доклады НАН КР, – 2014, №1. – С. 22-27.

55. **Керимбеков А.** Обобщенное решение краевой задачи управляемого колебательного процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, Э.Ф. Абдылдаева // Журнал «Вестник КРСУ», –2014, Т.14, №12. – С. 61-66.

56. **Kerimbekov A.** The solution of the boundary control problem for the process of oscillation described by the Fredholm integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014. – P. 275.

57. **Kerimbekov A.** On the solvability of the problem of the distributed optimal control of oscillation processes described by the Fredholm integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 116.

58. **Kerimbekov A.** On the problem of minimization of the piecewise linear functional in distributed optimal control of oscillation processes [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014. – P. 218-224.

59. **Керимбеков А.** О разрешимости нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов при граничном управлении [Текст]/ А. Керимбеков, Г. Джээнбаева, И. Шаршенова // Вестник КГНУ, серия 3, Естественно-технические науки, –2001, Вып. 7. – С. 30-34.

60. **Керимбеков А.** О разрешимости задачи нелинейного граничного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова // Журнал «Вестник ОшГУ», –2013, №1. – С. 173-177.

61. **Керимбеков А.** Решение одной задачи теории нелинейных интегральных уравнений [Текст]/ А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова // Журнал «Вестник ОшГУ», –2013, №1. – С. 168-173.

62. **Керимбеков А.** Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова, Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Механика и моделирование процессов», –2013, №2. – С. 80-86.

63. **Kerimbekov A.** On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, A. Kadirimbetova // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 119.

64. **Керимбеков А.** Решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева // Журнал «Вестник КРСУ», –2013, Т.13, №7. – С. 14-19.

65. **Керимбеков А.** Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева, Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник ОшГУ», –2013, №1. –С. 163-168.

66. **Керимбеков А.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева, Э. Сейдакмат кызы // Тезисы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», –2013. – С. 49.

67. **Kerimbekov A.** On the solvability of the problem of the optimal control of thermal processes described by the Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, B. Kulbaeva // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 118.

68. **Керимбеков А.** Решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого интегро-дифференциальным уравнением Фредгольма [Текст]/ А.К. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2014, Т.14, №1. – С. 166-172.

69. **Kerimbekov A.** On the solvability of the problem of the optimal control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, R. Nametkulova // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 117.

70. **Керимбеков А.** Условия оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Материалы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», –2013, №1. – С. 61-66.

71. **Керимбеков А.** Решение задачи граничного векторного управления тепловыми процессам, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник КРСУ», –2014, Т.14, №12. – С. 67-73.

72. **Керимбеков А.** О разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Вестник Актюбинского регионального государственного университета имени К.Жубанова, – 2014, №4(38). – С. 13-21.

73. **Kerimbekov A. Boundary control of thermal processes described by Volterra integro-differential equations** [Текст]/ A. Kerimbekov, E. **Seidakmat kyzy** // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014. – P. 277.

74. **Kerimbekov A.** On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. **Seidakmat kyzy** // Abstract book of

second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September, 2014. – P. 115.

75. **Kerimbekov A.** Approximate solution of the boundary control problem of thermal processes described by Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. **Seidakmat kyzy** // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014. – P. 213-218.

76. **Красниченко Л.С.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при граничном управлении [Текст]: автореф.дис..., канд.физ-мат.наук: 01.01.02 / Л.С. Красниченко. – Бишкек, 2012. – 18с.

77. **Краснов М.В.** Интегральные уравнения [Текст]/ М.В. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 303 с.

78. **Крылов Н.В.** Управляемые процессы диффузионного типа [Текст] / Н.В. Крылов. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

79. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики [Текст]/ О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

80. **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст]/ Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

81. **Люстерник Л.А.** Элементы функционального анализа [Текст]/ Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

82. **Марчук Г.И.** Численные методы расчета ядерных реакторов [Текст]/ Марчук Г.И. – М.: Атомиздат, 1958. – 324 с.

83. **Маслов В.П.** Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. Эволюция диссипативных структур [Текст]/ В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

84. **Наметкулова Р.Ж.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ Р.Ж. Наметкулова // Журнал «Вестник КРСУ», –2013, Т.13, №7. – С. 23-27.

85. **Плотников В.И.** Энергетические неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций [Текст]/ В.И. Плотников // Изв. АН СССР серия мат. – 1968, т. 32, №4. – С. 743– 755.

86. **Понтрягин Л.С.** Математическая теория оптимальных процессов [Текст]/ Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1983. – 392 с.

87. **Потапов М.М.** Приближенное решение задач граничного управления и наблюдения для уравнения поперечных колебаний стержня [Текст]/ М.М. Потапов // Журнал вычислительной математики и математической физики. –2005, № 6. – С. 1015-1032.

88. **Пузырев В.А.** Оптимальное управление системами с распределенными параметрами [Текст]: обзор/ В.А. Пузырев // Зарубежная радиоэлектроника. – 1975, №7. – С. 38-57.

89. **Рафатов Р.Р.** Решение интегро-дифференциальной краевой задачи Риккати в проблеме оптимизации процесса переноса частиц [Текст] / Р.Р. Рафатов // Проблемы автоматики и управления. –1999. – С. 75– 84.

90. **Садовничий В.А.** Теория операторов. – 2-е изд. [Текст]/ В.А. Садовничий. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 368 с.

91. **Сейдакмат кызы Э.** Решение задачи граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Материалы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», –2013, №1. – С. 76-81.

92. **Сейдакмат кызы Э.** Вывод системы нелинейных интегральных уравнений в задаче граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Вестник КГУ им. И. Арабаева, –2014, №3. – С. 292-297.

93. **Сейдакмат кызы Э.** Приближенное решение задачи граничного векторного управления тепловыми процессам, описываемыми

вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник КРСУ», –2014, Т.14, №12. –С. 80-86.

94. **Сиразетдинов Т.К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами [Текст]/ Т.К. Сиразетдинов. – М.: Наука, 1977. – 497 с.

95. **Тихомиров В. В.** Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении I [Текст]/ В.В. Тихомиров. Дифференциальные уравнения. –2002, Т. 38, № 3. – С. 393-403.

96. **Тихомиров В. В.** Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении II [Текст]/ В.В. Тихомиров. Дифференциальные уравнения. –2002, Т. 38, № 4. – С. 529-537.

97. **Тихомиров В. В.** О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце [Текст]/ Е. И. Моисеев, В. В. Тихомиров // Нелинейная динамика и управление. 2005. Вып. 5. С. 42-52.

98. **Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики [Текст]/ А.Н Тихонов, Самарский А.А. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

99. **Урывская Т.Ю.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов [Текст]: автореф.дис..., канд.физ-мат.наук: 01.01.02 / Т.Ю. Урывская. – Бишкек, 2010. – 18с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример

В этом примере исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при граничном управлении. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации, и разработан алгоритм построения её решения со сколь угодной точностью.

Постановка нелинейно-квадратичной задачи оптимизации с граничным управлением

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[\nu(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t,u(t)\right) dt, \quad \beta > 0,$$

на множестве решений краевой задачи

$$\nu_t = \nu_{xx} + \lambda \int_0^T K\left(t,\tau\right) \nu\left(\tau,x\right) d\tau + g\left(t,x\right),$$

$$\nu\left(0,x\right) = \psi\left(x\right), \quad 0 < x < 1$$

$$\nu_x\left(t,0\right) = 0, \qquad \nu_x\left(t,1\right) + \alpha\nu\left(t,1\right) = f[t,u\left(t\right)], \quad 0 < t \le T,$$

$u(t) \in H(0,T)$ – функция управления; H – гильбертово пространство.

Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса находим по формуле

$$\nu_n\left(t\right) = \lambda \int_0^T R_n\left(t,s,\lambda\right) a_n\left(s\right) ds + a_n\left(t\right),$$

где

$$a_n\left(t\right) = e^{\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(g_n\left(\tau\right) + z_n\left(1\right) f\left[\tau,u\left(\tau\right)\right] \right) d\tau,$$

$R_n(t,s,\lambda)$ – резольвента ядра $K_n(t,s)=\int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau$ удовлетворяет неравенству $\int\limits_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds \le \dfrac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}$.

Численное решение проделано при следующих данных

1. $T=2;$
2. $\xi(x)=1-x;$
3. $\beta=0.5;$
4. $q(t,u(t))=1+u^2(t),\ q_u(t,u(t))=2u(t),\ q(t,u(t))q_u(t,u(t))=2u(t)\left(1+u^2(t)\right),\ 1\le u(t)\le 3,$
   $q_0=\max\left|q_u(t,u(t))\right|\le 6;$
5. $g(t,x)=0.02.*(x+t);$
6. $\psi(x)=x;$
7. $\alpha=0.5;\alpha=1;\alpha=1.5;$
8. $f(t,u(t))=0.3\ln(1+u^2(t)),\ \mathrm{f}_u(t,u(t))=\dfrac{0.6u(t)}{1+u^2(t)},\ f_0=\max\left|\mathrm{f}_u(t,u(t))\right|\le 0.3;$
9. $\dfrac{q(t,u(t))q_u(t,u(\mathrm{t}))}{f_u(t,u(t))}=\dfrac{2u(t)\left(1+u^2(t)\right)^2}{2u(t)}=\left(1+u^2(t)\right)^2;$
10. $f_u(t,u(t))\left(\dfrac{q(t,u(t))q_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}\right)_u=\dfrac{2u(t)}{1+u^2(t)}4u(t)\left(1+u^2(t)\right)=8u^2(t)>0,\ \ 1\le u(t)\le 3;$
11. $\beta\dfrac{q(t,u(t))q_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}=p(t)\Rightarrow\beta\left(1+u^2(t)\right)^2=p(t),\ \ 1+u^2(t)=\pm\sqrt{\dfrac{p(t)}{\beta}};$

В силу следующих проверок

$$u^2 = -1 \pm \sqrt{\frac{p}{\beta}}, \quad u_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{\frac{p}{\beta}}}$$

$$u_1 = \sqrt{-1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}}; \quad u_1\Big|_{p=4\beta} = \sqrt{-1+\sqrt{4}} = \sqrt{-1+2} = 1;$$

$$u_2 = -\sqrt{-1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}}; \quad u_1\Big|_{p=100\beta} = \sqrt{-1+10} = \sqrt{9} = 3;$$

$$u_3 = \sqrt{-1-\sqrt{\frac{p}{\beta}}}; \quad u(t) = \sqrt{-1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}} = \varphi\left[t, p(t), \beta\right]$$

$$u_4 = -\sqrt{-1-\sqrt{\frac{p}{\beta}}};$$

убеждаемся, что функция

$$u(t) = \sqrt{-1+\sqrt{\frac{p(t)}{\beta}}} = \varphi\left[t, p(t), \beta\right]$$

определяется однозначна и

$$\varphi_0(\beta) = \max\left|\frac{1}{2\sqrt{-1+\sqrt{\frac{p}{\beta}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{p}{\beta}}} \cdot \frac{1}{\beta}\right| \leq 0.075;$$

12. Вычислим численное значение λ_n удовлетворяющих равенству

$$\lambda_n tg\lambda_n = \alpha$$

Таблица 1.

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
Значение $\alpha = \frac{1}{2}$	0.653271	3.29231	6.36162	9.47749	12.606	15.7397	18.876	22.0139	25.1526	28.292
Значение λ_n^2	0.426763	10.8393	40.4702	89.8227	158.912	247.739	356.305	484.61	632.654	800.438

Таблица 2.

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
Значение $\alpha = 1$	0.860334	3.42562	6.4373	9.52933	12.6453	15.7713	18.9024	22.0365	25.1724	28.3096
Значение λ_n^2	0.740174	11.7349	41.4388	90.8082	159.903	248.733	357.301	485.607	633.652	801.436

Таблица 3.

λ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
Значение $\alpha = 3/2$	0.988241	3.54217	6.50966	9.58009	12.6841	15.8026	18.9286	22.059	25.192	28.3272
Значение λ_n^2	0.97662	12.5469	42.3757	91.7782	160.886	249.722	358.293	486.601	634.648	802.432

13. Численные значения коэффициентов Фурье функции $\psi(x) = x$

$$\psi_n = \int_0^1 x z_n(x) dx, \quad z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha\right)}} \cos \lambda_n x$$

Таблица 4.

ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
Значение $\alpha = 1/2$	0.36393	0.28322	0.27699	0.27566	0.27519	0.42288	0.27484	0.27477	0.27472	0.27468
Значение ψ_n^2	0.13245	0.080215	0.076721	0.07599	0.075727	0.075604	0.075537	0.075496	0.075469	0.075451

Таблица 5.

ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
Значение ($\alpha = 1$)	0.35076	0.28923	0.27917	0.27671	0.27579	0.27536	0.27512	0.27497	0.27487	0.27481
Значение ψ_n^2	0.12304	0.083655	0.077936	0.076571	0.076062	0.075821	0.075688	0.075608	0.075555	0.075519

Таблица 6.

ψ	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
Значение ($\alpha = 3/2$)	0.34045	0.29315	0.28108	0.2777	0.27638	0.27574	0.27539	0.27517	0.27503	0.27493
Значение ψ_n^2	0.1159	0.085938	0.079007	0.077118	0.076387	0.076034	0.075838	0.075719	0.075641	0.075587

14. Численные значения коэффициентов Фурье функции $g(t,x) = 0.02(x+t)$

$$g_n(t) = \int_0^1 0.02.*(x+t)z_n(x)dx, \quad z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha\right)}}\cos\lambda_n x$$

Таблица 7.

g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
Значение $\alpha = 1/2$	0.0072786+0.016365t	0.0056645+0.014182t	0.0055397+0.014012t	0.0055133+0.013976t	0.0055037+0.013963t	0.0054992+0.013957t	0.0054968+0.013953t	0.0054953+0.013951t	0.0054943+0.01395t	0.0054937+0.013949t
Значение g_n^2	4.6361e-5.2978e-	3.2086e-005+0.0001	3.0688e-005+0.0001	3.0396e-005+0.0001	3.0291e-005+0.0001	3.0241e-005+0.0001	3.0215e-005+0.0001	3.0198e-005+0.0001	3.0188e-005+0.0001	3.0181e-005+0.0001

	005+0.00023823t+0.000026781t^2	6066t+0.000020112t^2	5524t+0.000019633t^2	5411t+0.000019533t^2	5369t+0.000019496t^2	535t+0.00019479t^2	534t+0.0001947t^2	5333t+0.000019464t^2	5329t+0.000019461t^2	5327t+0.000019458t^2

Таблица 8.

g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
Значение $\alpha = 1$	0.0070153+0.01601t	0.0057846+0.014345t	0.0055834+0.014071t	0.0055343+0.014005t	0.0055159+0.013979t	0.0055071+0.013968t	0.0055023+0.013961t	0.0054994+0.013957t	0.0054975+0.013954t	0.0054962+0.013953t
Значение g_n^2	4.9214e-005+0.00022463t+0.000025633t^2	3.3462e-005+0.00016596t+0.000020578t^2	3.1175e-005+0.00015713t+0.0000198t^2	3.0628e-005+0.00015501t+0.000019613t^2	3.0425e-005+0.00015422t+0.000019542t^2	3.0328e-005+0.00015384t+0.000019509t^2	3.0275e-005+0.00015364t+0.000019491t^2	3.0243e-005+0.00015351t+0.00001948t^2	3.0222e-005+0.00015343t+0.000019472t^2	3.0208e-005+0.00015337t+0.000019468t^2

Таблица 9.

g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
Значение $\alpha = 3/2$	0.0068089+0.015732t	0.005863+0.014451t	0.0056216+0.014123t	0.005554+0.014031t	0.0055276+0.013995t	0.0055148+0.013978t	0.0055077+0.013968t	0.0055034+0.013962t	0.0055006+0.013959t	0.0054986+0.013956t
Значение g_n^2	4.6361e-005+0.0002	3.4375e-005+0.0001	3.1603e-005+0.0001	3.0847e-005+0.0001	3.0555e-005+0.0001	3.0414e-005+0.0001	3.0335e-005+0.0001	3.0288e-005+0.0001	3.0256e-005+0.0001	3.0235e-005+0.0001

	1423t+0.00024749t^2	6946t+0.00020884t^2	5879t+0.00019947t^2	5586t+0.00019688t^2	5472t+0.00019587t^2	5417t+0.00019539 t^2	5387t+0.00019512 t^2	5368t+0.00019495t^2	5356t+0.00019484t^2	5348t+0.00019477t^2

15. Численные значения коэффициентов Фурье функции $\xi(x) = 1 - x$

$$\xi_n = \int_0^1 (1-x) z_n(x) dx, \quad z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}{\left(\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha\right)}} \cos \lambda_n x$$

Таблица 10.

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
Значение $\alpha = \frac{1}{2}$	0.45431	0.42586	0.42361	0.42313	0.42296	0.42288	0.42283	0.42281	0.42279	0.42278
Значение ξ_n^2	0.2064	0.18135	0.17944	0.17904	0.17889	0.17883	0.17879	0.17877	0.17875	0.17874

Таблица 11.

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
Значение $\alpha = 1$	0.44974	0.42802	0.4244	0.42351	0.42318	0.42302	0.42293	0.42288	0.42285	0.42282
Значение ξ_n^2	0.20227	0.1832	0.18011	0.17936	0.17908	0.17895	0.17887	0.17883	0.1788	0.17878

Таблица 12.

ξ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
Значение $\alpha = \frac{3}{2}$	0.44615	0.42942	0.42509	0.42387	0.42339	0.42316	0.42303	0.42295	0.4229	0.42287

Значение ξ_n^2	0.19905	0.1844	0.1807	0.17966	0.17926	0.17906	0.17896	0.17889	0.17885	0.17882

Решение операторного уравнения $p(t) = G[p(t)] + h(t)$ находим методом последовательных приближений, т.е.

$$p_i(t) = G[p_{i-1}(t)] + h(t), \; i = 1, 2, 3, \ldots \; ,$$

где $p_0(t) = h(t)$. Известно, что приближенное решение $p_i(t)$ удовлетворяет оценке

$$\| p^0(t) - p_i(t) \|_{H(0,T)} \le= \frac{\gamma^i}{1-\gamma} \| G[h(t)] \|_{H(0,T)} .$$

	$\| p^0(t) - p_i(t) \|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^i}{1-\gamma} \| G[h(t)] \|_{H(0,T)}$		
i	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	2.4067	1.5000	1.2913
2	0.5038	0.2541	0.2043
3	0.1055	0.0430	0.0323
4	0.0221	0.0073	0.0051
5	0.0046	0.0012	8.0938e-04
6	9.6770e-04	2.0924e-04	1.2806e-04
7	2.0258e-04	3.5446e-05	2.0263e-05
8	4.2410e-05	6.0045e-06	3.2062e-06
9	8.8785e-06	1.0172e-06	5.0730e-07
10	1.8587e-06	1.7231e-07	8.0269e-08
11	3.8911e-07	2.9188e-08	1.2701e-08
12	8.1458e-08	4.9445e-09	2.0096e-09
13	1.7053e-08	8.3759e-10	3.1797e-10
14	3.5700e-09	1.4189e-10	5.0311e-11
15	7.4736e-10	2.4036e-11	7.9606e-12

16	1.5646e-10	4.0716e-12	1.2596e-12
17	3.2754e-11	6.8973e-13	1.9930e-13
18	6.8569e-12	1.1684e-13	3.1534e-14
19	1.4355e-12	1.9792e-14	4.9896e-15
20	3.0051e-13	3.3528e-15	7.8948e-16

Сходимость приближенного решения задачи нелинейной оптимизации

Полное решение задачи оптимизации найдено в виде тройки$\left(u^0(t), v^0(t,x), J[u^0(t)]\right)$. k-е приближение оптимального управления находим по формуле

$$u_k(t)=\varphi[t,p_k(t),\beta],\quad k=1,2,3,...,$$

Относительно приближений оптимального процесса будем различать следующие три вида приближений

1. m-е приближение по резольвенту

$$v^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^0(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds\right)z_n(x);$$

2. m, k-е приближение

$$v_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(k)}(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x);$$

3. m, k, r-ое приближение

$$v_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left(a_n^{(k)}(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x).$$

Согласно трем видам приближений оптимального процесса будем различать соответственно три вида приближений минимального значения функционала

1. m-е приближение по резольвенту

$$J_m[u^0(t)]=\int_0^1\left[v^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u^0(t)\right)dt;$$

2. *m*, *k*-е приближение

$$J_m[u_k(t)] = \int_0^1 \left[v_k^m(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u_k(t)\right) dt;$$

3. *m*,*k*,*r*-приближение

$$J_m^r[u_k(t)] = \int_0^1 \left[v_k^{m,r}(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u_k(t)\right) dt.$$

1. *Сходимость приближений оптимального управления.*

$$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} = \left\| \varphi[t, p^0(t), \beta] - \varphi[t, p_k(t), \beta] \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| p^0(t) - p_k(t) \right\|_{H(0,T)}.$$

	$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| p^0(t) - p_k(t) \right\|_{H(0,T)}$		
s	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	0.1805	0.1125	0.0968
2	0.0378	0.0191	0.0153
3	0.0079	0.0032	0.0024
4	0.0017	5.4688e-04	3.8365e-04
5	3.4669e-04	9.2641e-05	6.0703e-05
6	7.2578e-05	1.5693e-05	9.6049e-06
7	1.5194e-05	2.6584e-06	1.5197e-06
8	3.1808e-06	4.5034e-07	2.4046e-07
9	6.6588e-07	7.6287e-08	3.8048e-08
10	1.3940e-07	1.2923e-08	6.0202e-09
11	2.9183e-08	2.1891e-09	9.5255e-10
12	6.1094e-09	3.7084e-10	1.5072e-10
13	1.2790e-09	6.2819e-11	2.3848e-11
14	2.6775e-10	1.0642e-11	3.7733e-12
15	5.6052e-11	1.8027e-12	5.9704e-13
16	1.1734e-11	3.0537e-13	9.4468e-14

17	2.4565e-12	5.1729e-14	1.4947e-14
18	5.1427e-13	8.7629e-15	2.3651e-15
19	1.0766e-13	1.4844e-15	3.7422e-16
20	2.2538e-14	2.5146e-16	5.9211e-17

2. Сходимость по оптимальному процессу.

2.1. Сходимость m-го приближения оптимального процесса

$$\left\| v^0(t,x) - v^m(t,x) \right\|_{H(Q)} \le C(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

	$\left\| v^0(t,x) - v^m(t,x) \right\|_{H(Q)}$		
s	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	0.1051	0.5396	1.3955
2	7.1363e-04	0.0171	0.1129
3	4.8465e-06	5.4297e-04	0.0091
4	3.2914e-08	1.7223e-05	7.3967e-04
5	2.2353e-10	5.4633e-07	5.9860e-05
6	1.5181e-12	1.7330e-08	4.8444e-06
7	1.0310e-14	5.4970e-10	3.9205e-07
8	7.0017e-17	1.7437e-11	3.1728e-08
9	4.7551e-19	5.5310e-13	2.5677e-09
10	3.2294e-21	1.7545e-14	2.0780e-10
11	2.1932e-23	5.5652e-16	1.6817e-11
12	1.4895e-25	1.7653e-17	1.3610e-12
13	1.0115e-27	5.5996e-19	1.1014e-13
14	6.8697e-30	1.7762e-20	8.9136e-15
15	4.6654e-32	5.6342e-22	7.2136e-16
16	3.1685e-34	1.7872e-23	5.8379e-17
17	2.1518e-36	5.6690e-25	4.7245e-18

18	1.4614e-38	1.7982e-26	3.8235e-19
19	9.9246e-41	5.7040e-28	3.0943e-20
20	6.7402e-43	1.8093e-29	2.5042e-21

2.2. Сходимость m,k-го приближения.

$$\left\| v^m(t,x) - v_k^m(t,x) \right\|_{H(Q)} \le$$

$$\le \sqrt{2T\left(1+\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)}\, f_0 \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

$\forall\ m = 1,2,3,\ldots.$

	$\left\| v^m(t,x) - v_k^m(t,x) \right\|_{H(Q)}$		
	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	0.0546	0.0172	0.0119
2	0.0024	4.9220e-04	2.9725e-04
3	1.0480e-04	1.4124e-05	7.4418e-06
4	4.5930e-06	4.0531e-07	1.8631e-07
5	2.0129e-07	1.1631e-08	4.6644e-09
6	8.8219e-09	3.3376e-10	1.1678e-10
7	3.8663e-10	9.5776e-12	2.9236e-12
8	1.6944e-11	2.7484e-13	7.3193e-14
9	7.4260e-13	7.8868e-15	1.8324e-15
10	3.2545e-14	2.2632e-16	4.5876e-17
11	1.4263e-15	6.4945e-18	1.1485e-18
12	6.2510e-17	1.8637e-19	2.8754e-20
13	2.7395e-18	5.3480e-21	7.1989e-22
14	1.2006e-19	1.5347e-22	1.8023e-23
15	5.2619e-21	4.4038e-24	4.5121e-25

16	2.3061e-22	1.2637e-25	1.1296e-26
17	1.0107e-23	3.6264e-27	2.8281e-28
18	4.4293e-25	1.0406e-28	7.0804e-30
19	1.9412e-26	2.9862e-30	1.7726e-31
20	8.5073e-28	8.5692e-32	4.4379e-33

2.3. Сходимость m,k,r-го приближения.

$$\left\|v_k^m\left(t,x\right)-v_k^{m,r}\left(t,x\right)\right\|_{H(Q)}\le C_0\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-1\right)^2\pi^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,\forall\ m,k=1,2,3,...,\ C_0>0$$

	$\left\|v_k^m\left(t,x\right)-v_k^{m,r}\left(t,x\right)\right\|_{H(Q)}$		
	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	$\alpha=3/2$
1	2.5285	2.5285	2.5285
2	0.9482	0.9482	0.9482
3	0.5619	0.5619	0.5619
4	0.3951	0.3951	0.3951
5	0.3034	0.3034	0.3034
6	0.2458	0.2458	0.2458
7	0.2064	0.2064	0.2064
8	0.1778	0.1778	0.1778
9	0.1561	0.1561	0.1561
10	0.1391	0.1391	0.1391
11	0.1254	0.1254	0.1254
12	0.1141	0.1141	0.1141
13	0.1047	0.1047	0.1047
14	0.0968	0.0968	0.0968
15	0.0899	0.0899	0.0899
16	0.0840	0.0840	0.0840

17	0.0787	0.0787	0.0787
18	0.0741	0.0741	0.0741
19	0.0700	0.0700	0.0700
20	0.0664	0.0664	0.0664

2.4. Сходимость m,k,r-го приближения к оптимальному процессу. Эта сходимость доказывается по следующей схеме

$$\left\|v^0(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)} \le \left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)} +$$

$$+\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)} + \left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)} \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0.$$

	$\left\|v^0(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}$		
	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$
1	2.6882	3.0853	3.9359
2	0.9513	0.9658	1.0614
3	0.5620	0.5625	0.5710
4	0.3951	0.3951	0.3958
5	0.3034	0.3034	0.3035
6	0.2458	0.2458	0.2458
7	0.2064	0.2064	0.2064
8	0.1778	0.1778	0.1778
9	0.1561	0.1561	0.1561
10	0.1391	0.1391	0.1391
11	0.1254	0.1254	0.1254
12	0.1141	0.1141	0.1141
13	0.1047	0.1047	0.1047
14	0.0968	0.0968	0.0968
15	0.0899	0.0899	0.0899
16	0.0840	0.0840	0.0840
17	0.0787	0.0787	0.0787

18	0.0741	0.0741	0.0741
19	0.0700	0.0700	0.0700
20	0.0664	0.0664	0.0664

3. Сходимость приближений минимального значения функционала

3.1. Сходимость m-го приближения (по резольвенте).

$$\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right|\le C_1\left\|\nu^0(T,x)-\nu_m(T,x)\right\|_{H(0,1)}\xrightarrow[m\to\infty]{}0.$$

	$\left\|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right\|$		
s	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	$\alpha=3/2$
1	1.7217	8.0162	20.0888
2	0.0117	0.2543	1.6258
3	7.9409e-05	0.0081	0.1316
4	5.3929e-07	2.5585e-04	0.0106
5	3.6625e-09	8.1156e-06	8.6171e-04
6	2.4873e-11	2.5743e-07	6.9737e-05
7	1.6892e-13	8.1658e-09	5.6437e-06
8	1.1472e-15	2.5902e-10	4.5674e-07
9	7.7912e-18	8.2162e-12	3.6963e-08
10	5.2912e-20	2.6062e-13	2.9914e-09
11	3.5935e-22	8.2670e-15	2.4209e-10
12	2.4404e-24	2.6223e-16	1.9592e-11
13	1.6574e-26	8.3181e-18	1.5855e-12
14	1.1256e-28	2.6385e-19	1.2831e-13
15	7.6442e-31	8.3695e-21	1.0384e-14
16	5.1915e-33	2.6548e-22	8.4039e-16
17	3.5257e-35	8.4212e-24	6.8011e-17
18	2.3944e-37	2.6712e-25	5.5041e-18
19	1.6261e-39	8.4732e-27	4.4543e-19

20	1.1044e-41	2.6877e-28	3.6048e-20

3.2. *Сходимость m,k-го приближения.*

$$\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|\le C_2\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$

$$+C_3\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[\text{k}\to\infty]{}0,\ \forall m=1,2,3,\ldots.$$

	$\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|$		
s	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=1$	$\alpha=\frac{3}{2}$
1	11.7240	7.0049	5.9818
2	2.3064	1.1508	0.9237
3	0.4763	0.1939	0.1456
4	0.0994	0.0328	0.0230
5	0.0208	0.0056	0.0036
6	0.0044	9.4161e-04	5.7629e-04
7	9.1164e-04	1.5951e-04	9.1185e-05
8	1.9085e-04	2.7020e-05	1.4428e-05
9	3.9953e-05	4.5772e-06	2.2829e-06
10	8.3640e-06	7.7537e-07	3.6121e-07
11	1.7510e-06	1.3135e-07	5.7153e-08
12	3.6656e-07	2.2250e-08	9.0431e-09
13	7.6738e-08	3.7692e-09	1.4309e-09
14	1.6065e-08	6.3849e-10	2.2640e-10
15	3.3631e-09	1.0816e-10	3.5823e-11
16	7.0406e-10	1.8322e-11	5.6681e-12
17	1.4739e-10	3.1038e-12	8.9684e-13
18	3.0856e-11	5.2577e-13	1.4190e-13
19	6.4596e-12	8.9066e-14	2.2453e-14
20	1.3523e-12	1.5088e-14	3.5527e-15

3.3. *Сходимость m,k,r-го приближения.*

$$\left|J_m\left[u_m(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le C_4\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[r\to 0]{}0,\ \forall m,k=1,2,3,....$$

	$\left|J_s\left[u^s\right]-J_s^r\left[u^s\right]\right|$		
	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=1$	$\alpha=\frac{3}{2}$
1	41.4293	37.5608	36.3990
2	15.5360	14.0853	13.6496
3	9.2065	8.3468	8.0887
4	6.4733	5.8689	5.6873
5	4.9715	4.5073	4.3679
6	4.0278	3.6517	3.5388
7	3.3820	3.0662	2.9713
8	2.9130	2.6410	2.5593
9	2.5574	2.3186	2.2469
10	2.2786	2.0658	2.0019
11	2.0543	1.8625	1.8049
12	1.8701	1.6955	1.6430
13	1.7160	1.5558	1.5076
14	1.5853	1.4373	1.3928
15	1.4730	1.3355	1.2942
16	1.3756	1.2471	1.2086
17	1.2902	1.1697	1.1335
18	1.2147	1.1013	1.0673
19	1.1476	1.0405	1.0083
20	1.0875	0.9860	0.9555

3.4. Сходимость m,k,r-го приближения к минимальному значению функционала. Эта сходимость доказывается по следующей схеме

$$\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u^0(t)\right]\right|+$$

$$\left|J_m\left[u^0(t)\right]-J_m\left[u_k(t)\right]\right|+\left|J_m\left[u_k(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0.$$

	$\left\lvert J\left[u^0(t)\right]-J_m^r\left[u_k(t)\right]\right\rvert$		
	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=1$	$\alpha=\frac{3}{2}$
1	54.8750	52.5820	62.4696
2	17.8541	15.4904	16.1991
3	9.6829	8.5488	8.3658
4	6.5728	5.9020	5.7210
5	4.9923	4.5129	4.3724
6	4.0322	3.6527	3.5394
7	3.3829	3.0663	2.9714
8	2.9132	2.6410	2.5593
9	2.5574	2.3186	2.2469
10	2.2786	2.0658	2.0019
11	2.0543	1.8625	1.8049
12	1.8701	1.6955	1.6430
13	1.7160	1.5558	1.5076
14	1.5853	1.4373	1.3928
15	1.4730	1.3355	1.2942
16	1.3756	1.2471	1.2086
17	1.2902	1.1697	1.1335
18	1.2147	1.1013	1.0673
19	1.1476	1.0405	1.0083
20	1.0875	0.9860	0.9555

Листинг программы

```
function Research
Graph=figure('color',[0 0.2 0.2],...
             'units','normal',...
             'menu', 'none',...
             'name','Постановка нелинейно-квадратичной задачи оптимизации с
двумерным векторным управлением')

F =uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.1 0.9 0.2 0.05],...
                'string','x*tan(x)= alpha')
alfa_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.1 0.84 0.05 0.05],...
                'string','alfa=')
%Поле для ввода значения параметра альфа
alfa_edit =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.15 0.84 0.15 0.05],...
            'string','0.5')
%Позволяет нам выбрать функцию для интегрирования:
%Zadacha1 - Psi
%Zadacha2- g
%Zadacha1 - ksi
Methods_pop = uicontrol('units','normal',...
      'Style', 'popup',...
       'String', 'Zadacha1|Zadacha2|Zadacha3',...
       'Position', [0.15 0.78 0.15 0.05])
%------Таблица для получения 10 значений лямбда и мх квадратов-----------
l1_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.05 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda1')
lam =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'text',...
            'pos',[0 0.64 0.05 0.05],'string' ,'L')
lam2 =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'text',...
            'pos',[0 0.58 0.05 0.05],'string' ,'L^2')

l(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.05 0.64 0.08 0.05])
l2(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.05 0.58 0.08 0.05])
l2_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.14 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda2')
l(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.14 0.64 0.08 0.05])
 l2(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.14 0.58 0.08 0.05])
l3_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.23 0.7 0.08 0.05],...
```

```
                'string','lambda3')
l(3) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.23 0.64 0.08 0.05])
l2(3) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.23 0.58 0.08 0.05])
l4_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.32 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda4')
l(4) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.32 0.64 0.08 0.05])
l2(4) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.32 0.58 0.08 0.05])
l5_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.41 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda5')
l(5) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.41 0.64 0.08 0.05])
l2(5) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.41 0.58 0.08 0.05])
l6_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.5 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda6')
l(6) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.5 0.64 0.08 0.05])
l2(6) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.5 0.58 0.08 0.05])
l7_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.59 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda7')
l(7) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.59 0.64 0.08 0.05])
l2(7) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.59 0.58 0.08 0.05])
l8_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.68 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda8')
l(8) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.68 0.64 0.08 0.05])
l2(8) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.68 0.58 0.08 0.05])
l9_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.77 0.7 0.08 0.05],...
                'string','lambda9')
l(9) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
```

```
            'pos',[0.77 0.64 0.08 0.05])
l2(9) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.77 0.58 0.08 0.05])
l10_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.86 0.7 0.09 0.05],...
                'string','lambda10')
l(10) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.86 0.64 0.09 0.05])
l2(10) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.86 0.58 0.09 0.05])
%--------------------------------------------------------------------------
%------------Таблица значений функций при найденных лямбда---------------
fi1_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.05 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F1')
fii_text =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'text',...
            'pos',[0 0.42 0.05 0.05],'string' ,'F')
fii2_text =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'text',...
            'pos',[0 0.36 0.05 0.05],'string' ,'F^2')

fi(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.05 0.42 0.08 0.05])
fi2(1) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.05 0.36 0.08 0.05])
fi2_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.14 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F2')
fi(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.14 0.42 0.08 0.05])
 fi2(2) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.14 0.36 0.08 0.05])
fi3_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.23 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F3')
fi(3) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.23 0.42 0.08 0.05])
fi2(3) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.23 0.36 0.08 0.05])
fi4_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.32 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F4')
fi(4) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.32 0.42 0.08 0.05])
fi2(4) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.32 0.36 0.08 0.05])
```

```
fi5_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.41 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F5')
fi(5) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.41 0.42 0.08 0.05])
fi2(5) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.41 0.36 0.08 0.05])
fi6_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.5 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F6')
fi(6) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.5 0.42 0.08 0.05])
fi2(6) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.5 0.36 0.08 0.05])
fi7_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.59 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F7')
fi(7) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.59 0.42 0.08 0.05])
fi2(7) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.59 0.36 0.08 0.05])
fi8_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.68 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F8')
fi(8) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.68 0.42 0.08 0.05])
fi2(8) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.68 0.36 0.08 0.05])
fi9_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.77 0.48 0.08 0.05],...
                'string','F9')
fi(9) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.77 0.42 0.08 0.05])
fi2(9) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.77 0.36 0.08 0.05])
fi10_txt=uicontrol('units','normal',...
                'style', 'text',...
                'pos',[0.86 0.48 0.09 0.05],...
                'string','F10')
fi(10) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.86 0.42 0.09 0.05])
fi2(10) =uicontrol('units','normal',...
            'style', 'edit',...
            'pos',[0.86 0.36 0.09 0.05])
%-------------------------------------------------------------------------
%кнопка для расчета данных
Run=uicontrol('units','normal',...
```

```
              'style', 'push',...
              'pos',[0.1 0.05 0.15 0.07],...
              'string','Count',...
              'call',{@RunCall});
%кнопка выхода
Exit=uicontrol('units','normal',...
               'style', 'push',...
               'pos',[0.5 0.05 0.15 0.07],...
               'string','Exit',...
    'call','close(gcf)')
%функция обработывающаяся при нажатии на кнопку Run
    function RunCall(source, eventdata)
        %получаем значение лямбда из поля alfa_edit и переводим со
        %строчного в числовой формат
        alfa = str2num(get(alfa_edit,'string'));
        x = 0:0.1:1;
        %определяем какая функция для вычисления выбрана
        index = get(Methods_pop,'value');
         if(index == 0)
            msgbox('Please choose Function');
            return;
         end
        for(k = 1:10)
            x0 = 0 + pi*(k-1);
            if(k==1)
                x0 = pi/4;
            end
            str = ['x.*tan(x)','-',num2str(alfa)];
            %находим к-ю лямбду
            lambda(k)=fzero(str,x0);
            %квадрат лямбды
            lambda2(k) = lambda(k)*lambda(k);
            %заполняем таблицу для значений лямбды
           set(l(k),'string',lambda(k));
           set(l2(k),'string',lambda2(k));
           %Если выбрана первая функция, то вычисляем интеграл для к-го
           %лямбда 0 <= x <= 1
           if(index == 1)
              z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
              y = (1-x).*cos(z(k)*x);
              t(k) = trapz(x,y);
             t2(k) = t(k)^2;
             %заполняем таблицу
            set(fi(k),'string', num2str(t(k)));
            set(fi2(k),'string', num2str(t2(k)));
           else
                if(index == 2)
                    z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
                    y = x.*cos(z(k)*x);
                    t(k) = trapz(x,y);
                    t2(k) = t(k)^2;
                    set(fi(k),'string', num2str(t(k)));
                    set(fi2(k),'string', num2str(t2(k)));
                else
                    z(k) = sqrt((2*(lambda2(k) +
alfa*alfa))/(lambda2(k)+alfa*alfa+alfa));
                    y = (1+x).*cos(z(k)*x);
                    t(k) = trapz(x,y);
                    t2(k) = t(k)^2;
                    set(fi(k),'string', num2str(t(k)));
                    set(fi2(k),'string', num2str(t2(k)));
```

```
                end
            end

        end
    end
end


function ResearchProgramm
win1 = figure('color',[0.15 1 1],...
    'units','normal',...
    'menu','none',...
    'numbertitle','off',...
    'name','Approximate','Position', [0.1 0.1 0.8 0.8]);

clc;
%% tables
a = zeros(20,1);
colnames1 = { '||p^0(t)-p_n(t)||'};
 t1 = uitable(win1,'Data',a, 'ColumnName', colnames1, ...
  'Position', [650 190 150 400]);

colnames2 = { '||u^0(t)-u_n(t)||'};
t2 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [850 190 150 400]);

%% x, T
txt_x  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.94 0.05 0.05],...
    'String','x');

edt_x  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.94 0.15 0.05],...
    'String','0:0.01:1');

txt_T  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.94 0.05 0.05],...
    'String','T');

edt_T  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.28 0.94 0.1 0.05],...
    'String','2');

%% Xi
txt_xi  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.88 0.05 0.05],...
    'String','Xi(x)');

edt_xi  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.88 0.15 0.05],...
    'String','1-x');

txt_xi_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.88 0.05 0.05],...
    'String','||Xi(x)||^2');

edt_xi_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.28 0.88 0.1 0.05]);
 %% K(t,tau)
  txt_K  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.82 0.05 0.05],...
    'String','K(t,tau)');

edt_K  = uicontrol('units','normal',...
```

```
    'style','edit','pos',[0.07 0.82 0.15 0.05],...
    'String','t.^2 + tau');

txt_K_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.82 0.05 0.05],...
    'String','||K(t,tau)||^2 =K_0');

edt_K_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.28 0.82 0.1 0.05]);
%% g(t,x)
txt_g = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.76 0.05 0.05],...
    'String','g(t,x)');
edt_g = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.76 0.15 0.05],...
    'String','0.02.*(x+t)');
txt_g_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.76 0.05 0.05],...
    'String','||g(t,x)||^2 ');

edt_g_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.28 0.76 0.1 0.05]);

%%  psi(x)
txt_psi = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.7 0.05 0.05],...
    'String','psi(x)');
edt_psi = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.07 0.7 0.15 0.05],...
    'String','x');
txt_psi_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.23 0.7 0.05 0.05],...
    'String','||psi(x)||^2 ');

edt_psi_n  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.28 0.7 0.1 0.05]);
%% u
edt_u1 = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.39 0.94 0.05 0.05],...
    'String','1');
txt_u = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.44 0.94 0.07 0.05],...
    'String','<= u <=');
edt_u2 = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.51 0.94 0.05 0.05],...
    'String','3');

%% F(t,u(t))
txt_f = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.39 0.82 0.05 0.05],...
    'String','f(t,u(t))');
edt_f  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.44 0.82 0.12 0.05], 'string', '0.3*log(1+u.^2)');

%% q[t,u(t)]
txt_q = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.39 0.76 0.05 0.05],...
    'String','q(t,u(t))');
edt_q  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.44 0.76 0.12 0.05], 'string', '1+u.^2');

%% beta
txt_beta = uicontrol('units','normal',...
```

```
    'style','text','pos',[0.39 0.88 0.05 0.05],...
    'String','Beta');
edt_beta  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.44 0.88 0.1 0.05], 'string', '0.5');
%% phi
txt_phi = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.64 0.1 0.05],...
    'String','phi(t,p(t),beta)');
txt_fphi  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.115 0.64 0.2 0.05]);
%% alpha_0
txt_alpha = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.39 0.7 0.05 0.05],...
    'String','alpha_0');
edt_alpha  = uicontrol('units','normal',...
    'style','edit','pos',[0.44 0.7 0.05 0.05], 'string', '1');
%% gamma
txt_gamma  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.39 0.64 0.05 0.05],...
    'String','gamma');
edt_gamma  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.443 0.64 0.05 0.05]);

%% ||G[p_0(t)]-p_0(t)]||_H(0,T)
txt_Gp  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.01 0.58 0.15 0.05],...
    'String','||G[p_0(t)]-p_0(t)]||_H(0,T)');
edt_Gpn  = uicontrol('units','normal',...
    'style','text','pos',[0.165 0.58 0.1 0.05]);
%% Buttons
norm_= uicontrol('units','normal','String','Нахож. нормы',...
              'Position',[0.01 0.4 0.1 0.08],'call',{@Norm});
ch_Op = uicontrol('units','normal','String','Проверка на оптим.',...
              'Position',[0.12 0.4 0.1 0.08],'call',{@Check_for_Optimality});
find_phi = uicontrol('units','normal','String','Нахож. управления',...
              'Position',[0.23 0.4 0.1 0.08],'call',{@Find_Control});
find_gamma = uicontrol('units','normal','String','Нахож. гаммы',...
              'Position',[0.34 0.4 0.08 0.08],'call',{@Find_Gamma});
convergence_appsolution = uicontrol('units','normal','String','Сходимость прибл.
решений',...
              'Position',[0.586 0.25 0.15 0.05],'call',{@Convergence_Solution});
convergence_optimal_control = uicontrol('units','normal','String','Сходимость
прибл. опт. упр.',...
          'Position',[0.77 0.25 0.15 0.05],'call',{@Convergence_Control});
 convergence_optimal_processes = uicontrol('units','normal','String','Сходимость
прибл. опт. процесса',...
     'Position',[0.4 0.1 0.17 0.1],'call',{@Convergence_Process});
 %%'enable','off');
  %% variables
     x = 0:0.01:1;
     t = 0:0.01:1;
     T = 1;
     K_0 = 0;
     KT = 0;
     u = 0:0.1:1;
     D = u;
     g = 0;
     f0= 0;
     phi0 = 0;
     psi = 0;
     xi = 0;
     lambda_1=0.988241;
     gamma = 0;
```

```
     GN = 0;
     alpha_0 = 0;
     fn = 0;
     result = 0;
     result1 = 0;
     qn = 0;
     q0 = 0;
     beta = 0.5;
     %% functions
  function Xi_f(source, eventdata)
        x =  eval(get(edt_x,'string'));
        y =  eval(get(edt_xi,'string'));
        y =y.^2;
        xi = trapz(x,y);
       set(edt_xi_n, 'String', num2str(xi));

  end
 function psi_f(source, eventdata)
        x =  eval(get(edt_x,'string'));
        y =  eval(get(edt_psi,'string'));
        y =y.^2;
        psi = trapz(x,y);
       set(edt_psi_n, 'String', num2str(psi));
  end
    function K_f(source, eventdata)
        T = str2num(get(edt_T,'String'));
         t = 0:0.01:T;
         tau = 0:0.01:T;
         str = get(edt_K,'string');
        K = inline(['(',str,').^2']);
        K_0 = dblquad(K,0, T, 0, T);
        set(edt_K_n, 'String', K_0);
        KT = sqrt(K_0*T);
    end
function g_f(source, eventdata)
        str = get(edt_g,'string');
        i = inline(['(',str,').^2']);
        g = dblquad(i,0, 1, 0, T);
        set(edt_g_n, 'String', g);
        KT = sqrt(K_0*T);
    end
function Norm(source, eventdata)
         Xi_f(source,eventdata);
         K_f(source,eventdata);
         g_f(source,eventdata);
         psi_f(source,eventdata);
end
function Check_for_Optimality(source, eventdata)
     u_1 = str2num(get(edt_u1,'string'));
     u_2 = str2num(get(edt_u2,'string'));
     u = sym('u');
      f = eval(get(edt_f,'string'));
      q = eval(get(edt_q,'string'));
       f_u = diff(f);
       q_u = diff(q);
       D = q*q_u/f_u;
       D = simplify(D);
       D_u = diff(D);
       F = f_u*D_u;
       str = char(F);
       for u = u_1:0.01:u_2
           res = eval(F);
           f0 = max(f0,abs(eval(f_u)));
```

```
           fn = max(fn,abs(eval(f)));
           qn = max(qn,abs(eval(q)));
           q0 = max(q0, abs(eval(q_u)));
           if(res < 0)
               msgbox('Не выполняется');
               return;
           end
       end
       msgbox('Выполняется. All right!');
end
    function Find_Control(source, eventdata)
         u_1 = str2num(get(edt_u1,'string'));
         u_2 = str2num(get(edt_u2,'string'));
         beta = get(edt_beta,'string');
         u = u_1;
         D1 = D*beta;
         p1 = eval(char(D1));
         u = u_2;
         p2 = eval(char(D1));
         P = solve([beta,'*', char(D),'-p'],'u');
         c = 0;
         phi =P(1);
         for i =1:length(P)
             p = p1;
             pr1 = eval(P(i));
             p = p2;
             pr2 = eval(P(i));
             if pr1 >= u_1  & pr1 <= u_2
                 if pr2 >= u_1  & pr2 <= u_2
                 c =c+1;
                 phi =P(i);
                 end
             end
         end

         if( c==1)
             set(txt_fphi,'string',char(phi));
              p = sym('p');
              pu = diff(phi);
               p = p1;
               pr1 = eval(pu);
               p = p2;
               pr2 = eval(pu);
               phi0 = max(abs(pr1),abs(pr2));
         else
             msgbox('Не выполняется однозначность');
         end
    end
    function Find_Gamma(source,eventdata)
        alpha_0 = eval(get(edt_alpha,'string'));
        gamma = 2*(1/lambda_1^2 +1/6)*(1+2*lambda_1^2/alpha_0^2)*phi0*f0;
        set(edt_gamma, 'string', gamma);
    end
    function Convergence_Solution(source,eventdata)
         GN = 2*(1/lambda_1^2 +1/6)*(1+2*lambda_1^2/alpha_0^2)*fn*sqrt(T);
         set(edt_Gpn, 'string',GN);
         for i=1:20
             r = gamma^i/(1-gamma)*GN;
             result(i,1) = abs(r);
         end
         set(t1, 'Data', result);
    end
    function Convergence_Control(solution,eventdata)
```

```
         for i=1:20
             r = result(i,1)*phi0;
             result1(i,1) = r;
         end
         set(t2, 'Data', result1);
    end
    function Convergence_Process(solution,eventdata)
      ConvergenceProcess(alpha_0, lambda_1, psi, T,g,fn,result1,f0,xi,qn,beta,
q0);
    end
end

function Process = ConvergenceProcess(alpha_0, lambda_1, psi, T,g,f,u,f0,
xi,q,beta,q0)
win1 = figure('color',[0.15 1 1],...
    'units','normal',...
    'menu','none',...
    'numbertitle','off',...
    'name','Approximate_Solutions_of_Process','Position', [0.1 0.1 0.8 0.8]);

a = zeros(20,1);
colnames1 = { '||V^0(t,x)-V^m(t,x)||'};
 t1 = uitable(win1,'Data',a, 'ColumnName', colnames1, ...
  'Position', [100 190 150 400]);

colnames2 = { '||V^m(t,x)-V^m_k(t,x)||'};
t2 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [370 190 150 400]);

colnames3 = { '||V^m_k(t,x)-V^{m,r}_k(t,x)||'};
t3 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [640 190 150 400]);

colnames4 = { '||V^0(t,x)-V^{m,r}_k(t,x)||'};
t4 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [910 190 150 400]);

V_1 = uicontrol('units','normal','String','||V^0(t,x)-V^m(t,x)||^2_{H(Q)}',...
              'Position',[0.085 0.25 0.15 0.05],'call',{@V1});
V_2 = uicontrol('units','normal','String','||V^m(t,x)-V^m_k(t,x)||^2_{H(Q)}',...
              'Position',[0.33 0.25 0.15 0.05],'call',{@V2},'enable','off');
V_3 = uicontrol('units','normal','String','||V^m_k(t,x)-
V^{m,r}_k(t,x)||^2_{H(Q)}',...
              'Position',[0.57 0.25 0.17 0.05],'call',{@V3},'enable','off');
V_4 = uicontrol('units','normal','String','||V^0(t,x)-
V^{m,r}_k(t,x)||^2_{H(Q)}',...
              'Position',[0.815 0.25 0.17 0.05],'call',{@V4},'enable','off');
Functional = uicontrol('units','normal','String','Сходимость функционала',...
              'Position',[0.45 0.1 0.15 0.1],'call',{@Convergence_Functional},
'enable','off');

r1 = zeros(20:1);
r2 = zeros(20:1);
r = zeros(20:1);
c = 0;
 function V1(source,eventdata)
        c =   2*(1-1/log((sqrt(2)*lambda_1-
alpha_0)/(sqrt(2)*lambda_1)))^2*(1/lambda_1^2+1/6)*(psi+T*g+2*f^2*T);
         l = 0;
         set(V_2, 'enable', 'on');
for i =1:20
    l(i) = ((sqrt(2)*lambda_1-alpha_0)/(sqrt(2)*lambda_1))^(2*i);
end
```

```
r1 = c*l';
set(t1, 'Data', r1);
 end
 function V2(source,eventdata)
    r  = 2*T*(1+2*lambda_1^2/alpha_0^2)*(1/lambda_1^2+1/6)*f0^2*u.^2;
set(t2, 'Data', r);
set(V_3, 'enable', 'on');
 end
function V3(source,eventdata)
        c_0 = 6/pi^2*(1/2*psi +T*g+T*T*f^2);
        l = 0;
        for i =1:20
           l(i) = c_0*(i+1)/i^2;
       end
    r2 = l';
set(t3, 'Data', r2);
set(V_4, 'enable', 'on');
end
 function V4(source,eventdata)
    l  = r+r1+r2;
set(t4, 'Data', l);
set(Functional, 'enable', 'on');
 end
 function Convergence_Functional(source,eventdata)
     ConvergenceFunctional( alpha_0, lambda_1, psi,
T,g,f,u,xi,q,beta,q0,r1,r,r2)
 end
end

function Process = ConvergenceFunctional( alpha_0, lambda_1, psi,
T,g,f,u,xi,q,beta,q0,v1,v2,v3)
win1 = figure('color',[0.15 1 1],...
    'units','normal',...
    'menu','none',...
    'numbertitle','off',...
    'name','Approximate_Solutions_of_Process','Position', [0.1 0.1 0.8 0.8]);

a = zeros(20,1);
colnames1 = { '|I[u^0]-I_m[u^0]|'};
 t1 = uitable(win1,'Data',a, 'ColumnName', colnames1, ...
  'Position', [100 190 150 400]);

colnames2 = { '|I_m[u^0]-I_m[u_k]|'};
t2 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [370 190 150 400]);

colnames3 = { '|I_m[u_k]-I_m^r[u_k]|'};
t3 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [640 190 150 400]);

colnames4 = { '|I[u^0]-I_m^r[u_k]|'};
t4 = uitable(win1,'data',a, 'columnname', colnames2, ...
  'position', [910 190 150 400]);

I_1 = uicontrol('units','normal','String','|I[u^0]-I_m[u^0]|',...
              'Position',[0.085 0.25 0.15 0.05],'call',{@I1});
I_2 = uicontrol('units','normal','String','|I_m[u^0]-I_m[u_k]|',...
              'Position',[0.33 0.25 0.15 0.05],'call',{@I2},'enable','off');
I_3 = uicontrol('units','normal','String','|I_m[u_k]-I_m^r[u_k]|',...
              'Position',[0.57 0.25 0.17 0.05],'call',{@I3},'enable','off');
I_4 = uicontrol('units','normal','String','|I[u^0]-I_m^r[u_k]|',...
              'Position',[0.815 0.25 0.17 0.05],'call',{@I4},'enable','off');
r1 = zeros(20:1);
```

```
r2 = zeros(20:1);
r = zeros(20:1);
v = 0;
 function I1(source,eventdata)
       v = sqrt(3*(1+2*lambda_1^2/alpha_0^2)*(psi + T*g+2*T*T*f^2)*(1/lambda_1^2
+1/6));
        set(I_2, 'enable', 'on');
       r1 = 2*(v+sqrt(xi))*v1;
     set(t1, 'Data', r1);
 end
 function I2(source,eventdata)
     s = eval(char(beta));
    r  = 2*(v+sqrt(xi))*v2 + 2*s*q*q0*u;
   set(t2, 'Data', r);
   set(I_3, 'enable', 'on');
 end
function I3(source,eventdata)
    r2 = 2*(v+sqrt(xi))*v3;
set(t3, 'Data', r2);
set(I_4, 'enable', 'on');
end
 function I4(source,eventdata)
    l  = r+r1+r2;
set(t4, 'Data', l);
set(Functional, 'enable', 'on');
 end
end
```